

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

ΤΣΕΚΟΥΡΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ ΤΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ

**Τοπολογικός χαρακτηρισμός
των σύμμορφων αυτομορφισμών της σφαίρας**

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	3
1.1. Δράσεις τοπολογικών ομάδων	3
1.2. Συμπαγής - ανοιχτή τοπολογία και βασικές ιδιότητες	4
1.3. Ομοιομορφισμοί του κύκλου	6
Κεφάλαιο 2. ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΙ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ	9
2.1. Περιοδικοί ομοιομορφισμοί του S^1 και του \mathbb{R}	9
2.2. Περιοδικοί ομοιομορφισμοί του D^2 και της S^2	10
Κεφάλαιο 3. ΚΑΝΟΝΙΚΟΙ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ	15
3.1. Γενικές ιδιότητες	15
3.2. Κανονικοί ομοιομορφισμοί της S^2	20
3.3. Ομοιομορφισμοί με ολικά μη συνεκτικό ιδιάζων σύνολο	28
3.4. Σύμμορφοι αυτομορφισμοί της S^2	33
Βιβλιογραφία	37

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Δράσεις τοπολογικών ομάδων

Με τον όρο τοπολογική ομάδα μετασχηματισμών εννοούμε μια τριάδα (G, X, Θ) , όπου G είναι τοπολογική ομάδα, ο X είναι Hausdorff τοπολογικός χώρος και η

$\Theta : G \times X \rightarrow X$ είναι μια συνεχής απεικόνιση τέτοια ώστε:

(1) $\Theta(g, \Theta(h, x)) = \Theta(gh, x)$ για κάθε $g, h \in G$ και $x \in X$.

(2) $\Theta(e, x) = x$, για κάθε $x \in X$, όπου e είναι το ταυτοτικό στοιχείο της G .

Η απεικόνιση Θ λέγεται δράση της G επί του X . Ο χώρος X , μαζί με μια δράση Θ της G , καλείται G -χώρος. Για απλότητα συνήθως γράφουμε $\Theta(g, x) = gx$.

Ένα σύνολο $A \subset X$ καλείται G -αναλλοίωτο, αν $gA = A$, για κάθε $g \in G$.

Θεώρημα 1.1.1. *Αν $\Theta : G \times X \rightarrow X$ είναι μια δράση συμπαγούς ομάδας G επί του X , τότε η Θ είναι κλειστή απεικόνιση. (βλ. [2], Ch.I, Th.1.2)*

Πόρισμα 1.1.2. *Αν G είναι μια συμπαγής ομάδα και X ένας G -χώρος, το σύνολο $G(A) = \{gx : g \in G, x \in A\}$, είναι κλειστό στο X για κάθε κλειστό $A \subset X$ και το $G(A)$ είναι συμπαγές, αν το A είναι συμπαγές. (βλ. [2], Ch.I, Co.1.3)*

Εστω X ένας G -χώρος και $x \in X$. Το σύνολο

$$G_x = \{g \in G : gx = x\}$$

είναι κλειστή υποομάδα της G και λέγεται ομάδα ισοτροπίας του x . Ο υπόχωρος

$$G(x) = \{gx \in X : g \in G\}$$

λέγεται G -τροχιά του x .

Θεωρούμε την σχέση ισοδυναμίας \sim_G , κατά την οποία $x \sim_G y$ αν και μόνο αν υπάρχει $g \in G$, τέτοιο ώστε $x = gy$. Ο χώρος πηλίκο $X/\sim_G = X/G$ λέγεται χώρος των G -τροχιών του X .

Αν x είναι ένα σημείο ενός G -χώρου X , τότε ορίζεται η φυσική απεικόνιση

$$\Theta_x : G/G_x \rightarrow G(x)$$

με $\Theta_x(gG_x) = gx$. Εξ' ορισμού της τοπολογίας πηλίκο στο G/G_x και από την συνέχεια της $g \mapsto gx$, η Θ_x είναι συνεχής, ενώ είναι προφανώς 1-1 και επί.

Πόρισμα 1.1.3. *Αν G είναι μια συμπαγής ομάδα, τότε η $\Theta_x : G/G_x \rightarrow G(x)$ είναι ομοιομορφισμός. (βλ. [2], Ch.I, Pr.4.1)*

Στην εργασία αυτή θα χρειαστούμε ιδιότητες των δράσεων της συμπαγούς ομάδας $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Λήμμα 1.1.4. Έστω H μια κλειστή υποομάδα του \mathbb{R} . Τότε ισχύει ακριβώς ένα από τα επόμενα:

- (1) $H = \mathbb{R}$.
- (2) Υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε $H = \lambda\mathbb{Z}$.
- (3) $H = \{0\}$.

Απόδειξη. Έστω ότι $H \neq \{0\}$ και $\lambda = \inf\{t \in H : t > 0\}$. Τότε $\lambda \geq 0$ και $\lambda \in H$, αφού η H είναι κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R} . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Έστω ότι $\lambda > 0$. Τότε $(-\lambda, \lambda) \cap H = \{0\}$. Για κάθε $t \in H$ υπάρχουν $k \in \mathbb{Z}$ και $0 \leq |s| < \lambda$ ώστε $t = \lambda k + s$. Συνεπώς $s = t - \lambda k \in H \cap (-\lambda, \lambda) = \{0\}$ αφού $\lambda, t \in H$. Άρα $s = 0$ και $\lambda k = t$, προκύπτει δηλαδή $H = \lambda\mathbb{Z}$.

Έστω τώρα ότι $\lambda = 0$. Τότε υπάρχει μια μη-σταθερή ακολουθία $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο H με $t_n \rightarrow 0$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο \mathbb{Z} ώστε $|t - k_n t_n| < t_n$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και συνεπώς $k_n t_n \rightarrow t$. Ομως $k_n t_n \in H$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άρα $t \in \overline{H} = H$. Αυτό δείχνει ότι $\mathbb{R} = H$. \square

Πόρισμα 1.1.5. Αν G είναι μια κλειστή υποομάδα της S^1 τότε είτε η G είναι πεπερασμένη κυκλική είτε $G = S^1$ είτε $G = \{1\}$.

Απόδειξη. Αν $\rho : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ είναι η απεικόνιση επικάλυψης του S^1 , τότε σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα θα έχουμε ότι η $H = \rho^{-1}(G)$ θα ισούται είτε με $\{1\}$ είτε με $\lambda\mathbb{Z}$ για κάποιο $\lambda > 0$ είτε με \mathbb{R} . Αν $H = \{1\}$, τότε $G = \{1\}$. Αν $H = \mathbb{R}$, τότε $G = S^1$. Αν $H = \lambda\mathbb{Z}$, τότε η H είναι διακριτή και κυκλική. Άρα η G είναι κυκλική συμπαγής και διακριτή, άρα πεπερασμένη. \square

Λήμμα 1.1.6. Έστω X ένας G -χώρος Hausdorff όπου $G = S^1$. Αν το $x \in X$ δεν είναι σταθερό σημείο της δράσης, η G -τροχιά του x είναι απλή κλειστή καμπύλη, δηλαδή ομοιομορφική με S^1 .

Απόδειξη. Η ομάδα ιστροπίας G_x του x είναι κλειστή υποομάδα του κύκλου, άρα $G_x = S^1$ ή $G_x \cong \mathbb{Z}_n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ή $G_x = \{1\}$, σύμφωνα με το πόρισμα 1.1.5. Έστω $\Theta : G \times X \rightarrow X$ η δράση. Η απεικόνιση $\Theta_x : G/G_x \rightarrow G(x)$ με $\Theta_x(gG_x) = \Theta(g, x) = gx$ είναι ομοιομορφισμός, διότι η G είναι συμπαγής.

Άρα αν $G_x = S^1$, τότε $G(x) = \{x\}$, δηλαδή $gx = x$ για κάθε $g \in G$, γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με το ότι το x δεν είναι G -σταθερό σημείο. Επομένως $G_x \cong \mathbb{Z}_n$ ή $G_x = \{1\}$, οπότε $G/G_x \cong S^1/\mathbb{Z}_n$ ή $G/G_x \cong S^1$. Ομως $S^1/\mathbb{Z}_n \approx S^1$. Πράγματι, η απεικόνιση $\rho : S^1 \rightarrow S^1$ με $\rho(z) = z^n$ είναι συνεχής και επί. Θεωρούμε την σχέση ισοδυναμίας $R_\rho = \{(z, z') : z^n = (z')^n\}$. Ο S^1 είναι συμπαγής, άρα η ρ είναι κλειστή απεικόνιση. Επομένως η συνηθισμένη τοπολογία του S^1 , ταυτίζεται με την τοπολογία πηλίκο της ρ . Άρα $S^1/R_\rho \approx S^1$. Έτσι έχουμε $S^1/\mathbb{Z}_n = S^1/R_\rho \approx S^1$ και το συμπέρασμα αποδείχθηκε. \square

1.2. Συμπαγής - ανοιχτή τοπολογία και βασικές ιδιότητες

Έστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι και $C(X, Y)$ το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : X \rightarrow Y$. Για κάθε $A \subset X, B \subset Y$ θέτουμε

$$\langle A, B \rangle = \{f \in C(X, Y) : f(A) \subset B\}.$$

Η συμπαγής - ανοιχτή τοπολογία στο $C(X, Y)$ είναι η τοπολογία που έχει ως υποβάση όλα τα σύνολα $\langle A, B \rangle$, όπου $A \subset X$ συμπαγές και $Y \subset B$ ανοιχτό.

Είναι προφανές ότι αν $X \approx X'$ και $Y \approx Y'$ τότε $C(X, Y) \approx C(X', Y')$, με την ανοιχτή - συμπαγή τοπολογία.

Εστω $E : C(X, Y) \times X \rightarrow Y$ η απεικόνιση εκτίμησης, δηλαδή $E(f, x) = f(x)$.

Λήμμα 1.2.1. *Αν ο X είναι ένας τοπικά συμπαγής χώρος, τότε η απεικόνιση εκτίμησης $E : C(X, Y) \times X \rightarrow Y$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Εστω $f \in C(X, Y)$, $x \in X$ και W μια ανοιχτή περιοχή του $f(x) \in Y$. Χρησιμοποιώντας την συνέχεια της f και το γεγονός ότι ο X είναι τοπικά συμπαγής, μπορούμε να βρούμε περιοχή του x η οποία να έχει συμπαγή κλειστότητα A , έτσι ώστε $f(A) \subset W$. Υπάρχει λοιπόν μια ανοιχτή περιοχή $\langle A, W \rangle$ της f ώστε

$$E(\langle A, W \rangle \times \{x\}) \subset W.$$

Επιπλέον το $\text{int}A$ είναι ανοιχτή περιοχή του x και $E(\langle A, W \rangle \times \text{int}A) \subset W$. Άρα η E είναι συνεχής στο σημείο $(f, x) \in C(X, Y) \times X$. \square

Θεώρημα 1.2.2. *Αν ο X είναι συμπαγής χώρος και ο Y είναι μετριοποιήσιμος χώρος με μια μετρική d , τότε η συμπαγής - ανοιχτή τοπολογία στο $C(X, Y)$ είναι μετριοποιήσιμη με την μετρική*

$$\rho(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}.$$

Δηλαδή η συμπαγής - ανοιχτή τοπολογία σε αυτή την περίπτωση ταυτίζεται με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης.

Απόδειξη. Εστω $\varepsilon > 0$ και $f \in C(X, Y)$. Επειδή ο X είναι συμπαγής, υπάρχει πεπερασμένο ανοιχτό κάλυμμα $\{U_i : i = 1, \dots, n\}$ του X ώστε $\text{diam}f(\overline{U}_i) < \varepsilon/4$. Εστω

$$W_i = B_d(f(\overline{U}_i), \varepsilon/4), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Τότε $\text{diam}(W_i) < 3\varepsilon/4$ και συνεπώς

$$f \in \bigcap_{i=1}^n \langle \overline{U}_i, W_i \rangle \subset B_\rho(f, \varepsilon).$$

Με άλλα λόγια κάθε ρ - μπάλλα περιέχει ένα βασικό σύνολο της συμπαγούς - ανοιχτής τοπολογίας. Άρα τα ρ - ανοιχτά σύνολα, είναι ανοιχτά με την συμπαγή - ανοιχτή τοπολογία.

Αντίστροφα, αν $\langle A, V \rangle$ είναι ένα υποβασικό σύνολο της συμπαγούς - ανοιχτής τοπολογίας και $f \in \langle A, V \rangle$, τότε, επειδή το $f(A)$ είναι συμπαγές έχουμε

$$\varepsilon = d(f(A), Y \setminus V) > 0,$$

αφού $f(A) \subset V$. Κατά συνέπεια

$$f \in B_\rho(f, \varepsilon/2) \subset \langle A, V \rangle.$$

Άρα τα ανοιχτά σύνολα στην συμπαγή - ανοιχτή τοπολογία, είναι ρ - ανοιχτά. \square

Εστω τώρα X ένας συμπαγής μετριοποιήσιμος χώρος. Το σύνολο $H(X)$ όλων των ομοιομορφισμών του X επί του εαυτού του είναι προφανώς ομάδα με πράξη την σύνθεση. Από το θεώρημα 1.2.2 προκύπτει εύκολα ότι το $H(X)$ γίνεται τοπολογική ομάδα, αν εφοδιαστεί με την συμπαγή - ανοιχτή τοπολογία. Επιπλέον η απεικόνιση εκτίμησης $E : H(X) \times X \rightarrow X$ είναι μια δράση της $H(X)$ επί του X .

Εστω $F \subset C(X, Y)$ μια οικογένεια συνεχών συναρτήσεων από τον μετρικό χώρο (X, d) στον μετρικό χώρο (Y, ρ) . Η F λέγεται ισοσυνεχής αν για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $f \in F$ να ισχύει $f(B_d(x, \delta)) \subset B_\rho(f(x), \varepsilon)$.

Η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος βρίσκεται στο [5], Ch.XII, Th. 6.4.

Θεώρημα 1.2.3. (Ascoli). *Εστω (Z, ρ) ένας μετρικός χώρος και (Y, d) ένας μετρικός χώρος. Εστω ότι η οικογένεια $F \subset C(Y, Z)$ ικανοποιεί τα παρακάτω:*

(1) *Η F είναι ισοσυνεχής.*

(2) *Η κλειστότητα του συνόλου $\{f(y) : f \in F\}$ είναι συμπαγής για κάθε $y \in Y$.*

Τότε η κλειστότητα στο $C(Y, Z)$ της οικογένειας F είναι συμπαγής.

1.3. Ομοιομορφισμοί του κύκλου

Εστω $f : S^1 \rightarrow S^1$ ένας ομοιομορφισμός. Υπάρχει τότε ένας ομοιομορφισμός $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$f(e^{2\pi it}) = e^{2\pi iF(t)},$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Ένας τέτοιος ομοιομορφισμός F λέγεται ανύψωση του f . Προφανώς δύο ανυψώσεις του f διαφέρουν κατά ακέραιο.

Ο αρχικός ομοιομορφισμός f διατηρεί τον προσανατολισμό, αν και μόνο αν, ο F είναι αύξων. Αν ο f διατηρεί τον προσανατολισμό, ο F ικανοποιεί την συνθήκη $F(t+1) = F(t) + 1$ ή ισοδύναμα η συνάρτηση $F - id$ είναι περιοδική, περιόδου 1.

Θεώρημα 1.3.1. (Poincaré) *Υπάρχει μια σταθερά $\rho(F) \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (F^n - id) = \rho(F)$$

ομοιόμορφα στο \mathbb{R} . (βλ.[1], Prop. 3.3.2.)

Ο αριθμός $\rho(f) = e^{2\pi i\rho(F)} \in S^1$ δεν εξαρτάται από την ανύψωση F του f και λέγεται, αριθμός στροφής του Poincaré του f .

Πρόταση 1.3.2. *Ένας ομοιομορφισμός $f : S^1 \rightarrow S^1$ που διατηρεί τον προσανατολισμό, έχει περιοδικό σημείο αν και μόνο αν $\rho(f) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. (βλ.[1], 3.3.4.)*

Παρατήρηση 1.3.3. *Όπως δείχνει η απόδειξη της πρότασης 1.3.2 στο [1], αν $\rho(F) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, όπου οι $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε ο f^q έχει σταθερό σημείο.*

Το $\rho(f) \in S^1$ μπορούμε να το θεωρήσουμε ως μια συνάρτηση (με τιμές στον S^1), επί του χώρου όλων των ομοιομορφισμών του κύκλου που διατηρούν τον προσανατολισμό, με την συμπαγή - ανοιχτή τοπολογία.

Θεώρημα 1.3.4. *Η συνάρτηση $\rho(f)$ είναι συνεχής. (βλ.[4], Ch.3, Th.2.)*

Η δυναμική των ομοιομορφισμών του κύκλου που διατηρούν τον προσανατολισμό και έχουν άρρητο αριθμό στροφής, μπορεί να περιγραφεί αρκετά ικανοποιητικά. Αν $f : X \rightarrow X$ είναι ένας ομοιομορφισμός του μετρικού χώρου X και $x \in X$, το σύνολο

$$L^+(x, f) = \{y \in X : f^{n_k}(x) \rightarrow y, \text{ για κάποια } n_k \rightarrow +\infty\}$$

λέγεται θετικό οριακό σύνολο του x και είναι προφανώς κλειστό και f - αναλλοίωτο. Ομοια ορίζεται το αρνητικό οριακό σύνολο $L^-(x, f)$. Το σύνολο $L(x, f) = L^+(x, f) \cup L^-(x, f)$ λέγεται οριακό σύνολο του x . Για την απόδειξη των επόμενων προτάσεων παραπέμπουμε στο [1], Prop. 3.3.5, Th. 3.3.7.

Πρόταση 1.3.5. *Αν ο ομοιομορφισμός f του S^1 , διατηρεί τον προσανατολισμό και έχει άρρητο αριθμό στροφής Poincaré, τότε υπάρχει ένα συμπαγές f - αναλλοίωτο σύνολο $K \subset S^1$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $L^+(x, f) = L^-(x, f) = K$ για κάθε $x \in S^1$.

(ii) Ισχύει είτε $K = S^1$ είτε το K είναι Cantor σύνολο.

Θεώρημα 1.3.6. (Poincaré). *Αν ο ομοιομορφισμός f του S^1 , διατηρεί τον προσανατολισμό και έχει άρρητο αριθμό στροφής Poincaré, $\rho(f) = e^{2\pi ia}$, τότε υπάρχει μια συνεχής, επί απεικόνιση $h : S^1 \rightarrow S^1$, που διατηρεί τον προσανατολισμό και έχει την ιδιότητα $h \circ f = r_a \circ h$, όπου r_a είναι η στροφή κατά γωνία $2\pi a$. Αν ο f έχει τουλάχιστο μια πυκνή τροχιά στον S^1 , τότε η h είναι ομοιομορφισμός, δηλαδή ο f είναι τοπολογικά συζυγής με άρρητη στροφή.*

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΙ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ

2.1. Περιοδικοί ομοιομορφισμοί του S^1 και του \mathbb{R}

Στην παράγραφο αυτή θα χαρακτηρίσουμε, ως προς τοπολογική συζυγία τους περιοδικούς ομοιομορφισμούς του κύκλου, που διατηρούν τον προσανατολισμό. Στο \mathbb{R} ο μοναδικός τέτοιος ομοιομορφισμός είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Λήμμα 2.1.1. *Εστω $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ένας αύξων ομοιομορφισμός. Αν ο f είναι περιοδικός, τότε $f = id$.*

Απόδειξη. Αν ο f δεν είναι ο ταυτοτικός θα υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ με $f(x_0) \neq x_0$. Εστω ότι $x_0 < f(x_0)$, τότε $x_0 < f(x_0) < f^2(x_0) < \dots < f^n(x_0) < \dots$. Αν ο f είναι περιοδικός υπάρχει $n > 0$ ώστε $f^n(x_0) = x_0$, άτοπο. Άρα ο f είναι ο ταυτοτικός ομοιομορφισμός. \square

Πρόταση 2.1.2. *Αν ο ομοιομορφισμός $f : S^1 \rightarrow S^1$, διατηρεί τον προσανατολισμό και είναι περιοδικός, τότε είναι τοπολογικά συζυγής με ρητή στροφή.*

Απόδειξη. Αν ο f είναι περιοδικός με περίοδο $q > 1$, τότε $\rho(f) = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$ με $(p, q) = 1$. Θα δείξουμε ότι ο f είναι τοπολογικά συζυγής με την στροφή $R_{2\pi \frac{p}{q}}$ κατά γωνία $2\pi p/q$.

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση όπου $p = 1$. Υπάρχει μια ανύψωση \tilde{f} του f , ώστε $\tilde{f}^q(t) = t+1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε επαγωγικά τον ομοιομορφισμό $\tilde{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής: Θέτουμε

$$\tilde{h}\left(t + \frac{k}{q}\right) = \tilde{f}^k(qt\tilde{f}(0))$$

για $0 \leq t \leq 1/q, 0 \leq k < q$, και

$$\tilde{h}(s+l) = \tilde{h}(s) + l$$

για κάθε $0 \leq s \leq 1$ και $l \in \mathbb{Z}$. Προφανώς $0 \leq t + \frac{k}{q} \leq 1$, αφού $k \in \{0, 1, \dots, q-1\}$.

Ο \tilde{h} επάγει έναν ομοιομορφισμό $h : S^1 \rightarrow S^1$ για τον οποίο ισχύει $\pi \circ \tilde{h} = h \circ \pi$, όπου $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ είναι η απεικόνιση επικάλυψης. Επομένως ισχύει

$$\widetilde{h^{-1} \circ \tilde{f} \circ \tilde{h}} = h^{-1} \circ \widetilde{f \circ h}.$$

Τώρα για κάθε $s \in [0, 1]$ και για κάθε $k \in \{0, 1, \dots, q-1\}$, υπάρχει $t \in [0, 1/q]$ τέτοιο ώστε $s = t + \frac{k}{q}$. Τότε:

$$\tilde{h}(s) = \tilde{h}\left(t + \frac{k}{q}\right) = \tilde{f}^k(qt\tilde{f}(0))$$

άρα

$$(\tilde{f} \circ \tilde{h})(s) = \tilde{f}^{k+1}(qt\tilde{f}(0))$$

και κατά συνέπεια

$$(h^{-1} \circ \widetilde{f \circ h})(s) = t + \frac{k+1}{q}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} (h^{-1} \circ f \circ h)(\pi(s)) &= \pi((h^{-1} \circ \widetilde{f \circ h})(s)) = \\ \pi\left(t + \frac{k+1}{q}\right) &= \pi(t)\pi\left(\frac{k+1}{q}\right) = \pi(t)\left(\pi\left(\frac{1}{q}\right)\right)^{k+1}, \end{aligned}$$

άρα

$$(h^{-1} \circ f \circ h)(\pi(s)) = R_{1/p}(\pi(s)).$$

Συνεπώς,

$$(h^{-1} \circ f \circ h)(z) = R_{1/q}(z), \quad z \in S^1.$$

Δείξαμε λοιπόν το λήμμα στην περίπτωση $p = 1$. Αν $p \neq 1$, τότε αφού $(p, q) = 1$, υπάρχουν $j, m \in \mathbb{Z}$ ώστε $jp + mq = 1$ δηλαδή, $jp = 1 \pmod{q}$. Ομως,

$$\rho(\tilde{f}^j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{f}^{jn} - id}{n} = j \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{jn} (\tilde{f}^{jn} - id) = j\rho(\tilde{f}).$$

Άρα ο f^j είναι περιοδικός και

$$\rho(f^j) = e^{2\pi i/q}.$$

Επειδή $(f^j)^p = f$, θα έχουμε ότι ο f είναι τοπολογικά συζυγής με την στροφή κατά γωνία $2\pi p/q$. \square

2.2. Περιοδικοί ομοιομορφισμοί του D^2 και της S^2

Στην παράγραφο αυτή θα κατατάξουμε ως προς τοπολογική συζυγία τους περιοδικούς ομοιομορφισμούς της σφαίρας S^2 γενικεύοντας την πρόταση 2.1.2. Θα χρειαστούμε την ακόλουθη:

Πρόταση 2.2.1. Έστω D_1, \dots, D_n ένα πεπερασμένο σύνολο τοπολογικών κλειστών δίσκων του \mathbb{R}^2 και J° μια οποιαδήποτε συνεκτική συνιστώσα του $D_1^\circ \cap \dots \cap D_n^\circ$, όπου $D_i^\circ = \text{int}D_i$, $1 \leq i \leq n$. Τότε το ∂J είναι απλή κλειστή καμπύλη και η κλειστότητα J στο \mathbb{R}^2 του J° , είναι τοπολογικός κλειστός δίσκος.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n , τον αριθμό των δίσκων. Αν $n = 1$ τότε έχουμε το Θεώρημα Jordan-Schoenflies. Θεωρούμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για κάποιο $n > 1$ και έστω J° μια συνεκτική συνιστώσα του $\bigcap_{i=1}^{n+1} D_i^\circ$. Έστω K° η συνεκτική συνιστώσα του $\bigcap_{i=1}^n D_i^\circ$ η οποία περιέχει το J° . Από την επαγωγική υπόθεση το $K = \overline{K^\circ}$ είναι τοπολογικός κλειστός δίσκος. Αφού το J° είναι συνιστώσα του $K^\circ \cap D_{n+1}^\circ$, αρκεί να δείξουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για τους δύο δίσκους D_1, D_2 . Θέτουμε $C_i = \partial D_i$ για $i = 1, 2$ και έστω J η κλειστότητα μιας συνεκτικής συνιστώσας του $D_1^\circ \cap D_2^\circ$. Έχουμε ότι $\partial J \neq \emptyset$ και $\partial J \subset \partial(D_1^\circ \cap D_2^\circ) \subset C_1 \cup C_2$. Αν το ∂J περιέχεται ολόκληρο σε μια από τις δύο καμπύλες, έστω την C_1 , τότε $J = D_1$ και το πόρισμα αποδείχθηκε. Υποθέτουμε ότι $\partial J \not\subset C_1$ και $\partial J \not\subset C_2$.

Εστω $x \in \partial J$ και $x \notin C_2$. Τότε $x \in C_1 \cap D_2^\circ$ και μπορούμε να βρούμε τόξο γ στο C_1 τέτοιο ώστε

$$x \in \gamma, \quad \gamma \subset \partial J, \quad \gamma \setminus \partial\gamma \subset D_2^\circ, \quad \partial\gamma \subset C_2.$$

Τα άκρα του γ ορίζουν πάνω στην C_2 ένα τόξο δ ξένο με το J° και τέτοιο ώστε $\delta \cap J = \partial\delta$. Επειδή το $C_1 \setminus C_2$ είναι ανοιχτό στο C_1 , υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ από τόξα με $\gamma_i^\circ \cap \gamma_j^\circ = \emptyset$, $i \neq j$ και τις ιδιότητες του γ και $\text{diam}(\gamma_i) \rightarrow 0$ όταν $i \rightarrow \infty$. Πράτουμε ακριβώς τα ίδια για κάποιο $y \in \partial\gamma$ με $y \notin C_1$. Έτσι προκύπτει μια ακολουθία τόξων $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ με τις ιδιότητες του γ , όπως επίσης και μια ακολουθία τόξων $(\delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ με τις ιδιότητες του δ . Το σύνορο του J προκύπτει από το C_2 και από την ένωση των γ_i το οποίο είναι απλή κλειστή καμπύλη και κατά συνέπεια από το Θεώρημα Jordan - Schoenflies το J είναι τοπολογικός δίσκος. \square

Λήμμα 2.2.2. *Εστω $f : S \rightarrow S$ ένας περιοδικός ομοιομορφισμός περιόδου n μιας τοπολογικής 2 - πολλαπλότητας S και $x \in \text{Fix}(f)$. Τότε για κάθε περιοχή N του x , υπάρχει τοπολογικός κλειστός δίσκος Δ_x , τέτοιος ώστε $\Delta_x \subset N$ και το Δ_x είναι περιοχή του x με $f(\Delta_x) = \Delta_x$.*

Απόδειξη. Επειδή το x είναι σταθερό σημείο του f , μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα N και $f(N)$ περιέχονται στο πεδίο ορισμού ενός χάρτη (U, φ) της πολλαπλότητας. Θα συνεχίσουμε να συμβολίζουμε με x, N τα $\varphi(x), \varphi(N)$ αντίστοιχα. Εστω D_x ο κλειστός δίσκος του \mathbb{R}^2 με κέντρο x και ακτίνα $\eta > 0$, τέτοια ώστε $f^k(D_x) \subset N$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$. Εστω $C_x = \partial D_x$ και Δ_x η κλειστότητα της συνεκτικής συνιστώσας E_x του f - αναλλοίωτου συνόλου $D_x^\circ \cap f(D_x^\circ) \cap \dots \cap f^{n-1}(D_x^\circ)$ η οποία περιέχει το x . Από την προηγούμενη πρόταση 2.2.1, το Δ_x είναι τοπολογικός δίσκος.

Επειδή συνεκτικές συνιστώσες απεικονίζονται σε συνεκτικές συνιστώσες μέσω ομοιομορφισμού, θα έχουμε ότι $f(E_x) = E_x$ διότι $x \in f(E_x) \cap E_x$. Αρα $\overline{f(E_x)} = \overline{E_x} = f(\overline{E_x})$ συνεπώς $\Delta_x = f(\Delta_x)$. Προφανώς $x \in \Delta_x^\circ$ και $\Delta_x \subset N$. \square

Λήμμα 2.2.3. *Εστω $f : D^2 \rightarrow D^2$ ένας περιοδικός ομοιομορφισμός. Αν $f|_{\partial D^2} = \text{id}$, τότε $f = \text{id}$.*

Απόδειξη. Εστω d μια οποιαδήποτε διάμετρος του D^2 , με άκρα A, B και έστω Δ μία από τις δύο συνεκτικές συνιστώσες του $D^2 \setminus d$. Το σύνολο

$$E = \bigcap_{i=1}^n f^i(\Delta^\circ)$$

είναι f - αναλλοίωτο, όπου n είναι η περίοδος του f . Από την πρόταση 2.2.1, η κλειστότητα κάθε συνεκτικής συνιστώσας του E είναι τοπολογικός κλειστός δίσκος. Εστω \overline{AB} το τόξο του κύκλου με άκρα τα A, B στο σύνορο του Δ . Επειδή $f|_{\partial D^2} = \text{id}$, τότε $f^i(\overline{AB}) = \overline{AB}$ για κάθε $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Εστω $x \in \overline{AB}$, με $x \neq A, B$. Θέτουμε

$$\rho_x = \min\{d(f^i(d), x) : i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Το σύνολο $B(x, \rho_x) \cap D^2$ είναι συνεκτικό. Το ευθύγραμμο τμήμα J_x με άκρα το x και το $(1 - \rho_x)x$ είναι τέτοιο ώστε

$$\bigcup_{i=1}^n f^i(d) \cap J_x = \emptyset.$$

Η συνάρτηση $\gamma : \widehat{AB} \rightarrow D^2$ με $\gamma(x) = (1 - \rho_x)x$ και $\gamma(A) = A$, $\gamma(B) = B$, είναι συνεχής, 1-1 και

$$\gamma(\widehat{AB}) \cap \widehat{AB} = \{A, B\}.$$

Άρα το $\gamma(\widehat{AB}) \cup \widehat{AB}$ είναι απλή κλειστή καμπύλη που φράσσει δίσκο που περιέχεται στην συνεκτική συνιστώσα J° του E , με $\partial J \supset \widehat{AB}$, όπου J είναι η κλειστότητα στο D^2 του J° . Το ∂J είναι απλή κλειστή καμπύλη και το J τοπολογικός κλειστός δίσκος. Το $f(J^\circ)$ είναι συνεκτική συνιστώσα του E , άρα $f(J) = J$ αφού $\widehat{AB} \subset J$ και $f(\widehat{AB}) = \widehat{AB}$. Έχουμε τώρα

$$\partial J \subset \partial E = \partial\left(\bigcap_{i=1}^n f^i(\Delta)\right) \subset \bigcup_{i=1}^n \partial f^i(\Delta) = \bigcup_{i=1}^n f^i(\partial\Delta).$$

Ομως $\partial\Delta = d \cup \widehat{AB}$, επομένως για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ έχουμε

$$f^i(\partial\Delta) = f^i(d) \cup f^i(\widehat{AB}) = f^i(d) \cup \widehat{AB}.$$

Συνεπώς

$$\partial J \subset \bigcup_{i=1}^n (f^i(d) \cup \widehat{AB}) = \widehat{AB} \cup \bigcup_{i=1}^n f^i(d).$$

Υπάρχει ένα απλό τόξο δ με άκρα A, B ώστε $\partial J = \widehat{AB} \cup \delta$. Το δ δεν έχει άλλα κοινά σημεία με το \widehat{AB} , γιατί

$$\delta \subset \{A\} \cup \{B\} \cup \bigcup_{i=1}^n f^i(d) = \bigcup_{i=1}^n f^i(d),$$

Αφού $\widehat{AB} \cup f(\delta) = f(\partial J) = \partial J = \widehat{AB} \cup \delta$, έχουμε $f(\delta) = \delta$ επειδή $f(A) = A$ και $f(B) = B$. Από το λήμμα 2.1.1 έχουμε τώρα $f|_\delta = id$. Αν $x \in \delta$, υπάρχει $i \in \{1, \dots, n\}$ με $x \in f^i(d)$, δηλαδή $x = f^i(y)$ για κάποιο $y \in d$. Άρα $x = f^{-i}(x) = y \in d$, οπότε $\delta \subset d$.

Προφανώς $d = \delta$ αφού αυτά είναι απλά τόξα με κοινά άκρα και $\delta \subset d$, επομένως $f|_d = id$. Η διάμετρος d έχει επιλεγεί αυθαίρετα, οπότε προκύπτει αμέσως ότι $f = id$ στο D^2 . \square

Λήμμα 2.2.4. Έστω $f : D^2 \rightarrow D^2$ ένας περιοδικός ομοιομορφισμός περιόδου $n > 1$ με $f \neq id$. Αν ο f διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε υπάρχει $x_0 \in \text{int}D^2$ ώστε $\text{Fix}(f^i) = \text{Fix}(f) = \{x_0\}$ για κάθε $1 \leq i \leq n-1$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer, ο f έχει τουλάχιστο ένα σταθερό σημείο. Αν ο f είχε σταθερό σημείο στο $\partial D^2 = S^1$ θα έπρεπε να ισχύει $f|_{\partial D^2} = id$, διότι $f(S^1) = S^1$ και ο $f|_{S^1}$ είναι τοπολογικά συζυγής με στροφή. Από το λήμμα 2.2.3 θα έχουμε $f = id$ στο D^2 , άτοπο. Άρα $\text{Fix}(f|_{\partial D^2}) = \emptyset$ και όμοια $\text{Fix}(f^i|_{\partial D^2}) = \emptyset$.

Επομένως ο f έχει τουλάχιστο ένα σταθερό σημείο στο $D^2 \setminus \partial D^2$, το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι το κέντρο του δίσκου O . Αν $A = D^2 \setminus \{O\}$, τότε το A είναι f -αναλλοίωτο.

Υποθέτουμε ότι ο f^i έχει σταθερό σημείο στο $x_0 \in A$, για κάποιο $i \in \mathbb{N}$. Έστω $\pi : \tilde{A} \rightarrow A$ η απεικόνιση καθολικής επικάλυψης, $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ και F μία ανύψωση του f^i με $F(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$. Αφού $(f^i)^n = (f^n)^i = id$, προκύπτει $\pi \circ F^n = \pi$, άρα ο F^n

ανήκει στην ομάδα των αυτομορφισμών της π και επειδή ο F έχει σταθερό σημείο θα πρέπει να ισχύει $F^n = id$. Ιδιαίτερα ο $F|_{\partial\bar{A}}$ είναι περιοδικός ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό. Συνεπώς από το λήμμα 2.1.1 προκύπτει

$$F|_{\partial\bar{A}} = id.$$

Αφού $\pi \circ F = f^i \circ \pi$ έχουμε $f^i|_{\partial D^2} = id$. Από το λήμμα 2.2.3 προκύπτει ότι $f^i = id$, γεγονός που αποτελεί αντίφαση. \square

Θεώρημα 2.2.5. Έστω $f : D^2 \rightarrow D^2$ ένας περιοδικός ομοιομορφισμός, περιόδου $n > 1$. Αν ο f διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε είναι τοπολογικά συζυγής με στροφή κατά γωνία $2k\pi/n$ για κάποιο $1 \leq k \leq n-1$.

Απόδειξη. Από το λήμμα 2.2.4 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $Fix(f) = \{O\}$, το κέντρο του δίσκου. Αφού ο $f|_{\partial D^2}$ είναι περιοδικός ομοιομορφισμός περιόδου n , ο αριθμός στροφής του Poincaré του $f|_{\partial D^2}$, θα είναι $\rho(f|_{\partial D^2}) = \frac{k}{n}$ με $(k, n) = 1$. Θα αποδείξουμε πρώτα το Θεώρημα για την περίπτωση $k = 1$.

Στον D^2 θεωρούμε την σχέση ισοδυναμίας που ορίζει η δράση του f . Η ομάδα G των ομοιομορφισμών του D^2 που παράγεται από τον f είναι

$$G = \{f^i : i \in \{0, 1, \dots, n-1\}\} \cong \mathbb{Z}_n$$

και από το λήμμα 2.2.4, δρα ελεύθερα επί του $D^2 \setminus \{O\}$. Θεωρούμε επίσης τον χώρο D^2/G με την τοπολογία πηλίκο που επάγει η φυσική απεικόνιση $\pi : D^2 \rightarrow D^2/G$, οπότε η π είναι συνεχής και ανοιχτή. Επομένως ο D^2/G είναι συμπαγής και κατά τόξα συνεκτικός μετρικός χώρος με μετρική την

$$d(\pi(x), \pi(y)) = \inf_{0 \leq l, k \leq n-1} d(f^k(x), f^l(y)).$$

Αρα υπάρχει ένα απλό τόξο γ από το $\pi(O)$ σε οποιοδήποτε σημείο του $\pi(\partial D^2)$. Η G δρά γνήσια ασυνεχώς στο $D^2 \setminus \{O\}$, αφού είναι πεπερασμένη και δρα ελεύθερα. Επομένως η

$$\pi : D^2 \setminus \{O\} \rightarrow D^2 \setminus \{O\}/G$$

είναι απεικόνιση κανονικής επικάλυψης.

Συνεπώς, το $\pi^{-1}(\gamma)$ είναι ένωση από ξένα μεταξύ τους απλά τόξα $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$, με κοινή αρχή το O . Αυτά τα τόξα διαιρούν το D^2 σε ξένα μεταξύ τους τμήματα A_0, \dots, A_{n-1} . Για κάθε $i = 1, \dots, n-1$ τα γ_i, γ_0 είναι δύο ανυψώσεις του γ , δηλαδή $\gamma_i = f^i(\gamma_0)$.

Έστω h ένας ομοιομορφισμός μεταξύ του A_0 και του τμήματος R_0 του D^2 , που προκύπτει από την στροφή r κατά $2\pi/n$, μιας ακτίνας του D^2 . Ο h επιλέγεται έτσι ώστε

$$h|_{\gamma_1} = r \circ (h|_{\gamma_0}).$$

Επειδή $\gamma_i = f^i(\gamma_0)$ έχουμε ότι $f^{-i}(A_i) = A_0$. Τα A_0, \dots, A_{n-1} είναι ξένα μεταξύ τους οπότε ο h επεκτείνεται στο D^2 θέτοντας

$$h|_{A_i} = r^i \circ h \circ f^{-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Αν $x \in A_i$ τότε

$$(h^{-1} \circ r \circ h)(x) = h^{-1}(r^{i+1}(h(f^{-i}(x)))) = (f^{i+1} \circ f^{-i})(x) = f(x).$$

Αρα στο D^2 ισχύει $f = h^{-1} \circ r \circ h$. Δείξαμε το Θεώρημα στην περίπτωση $k = 1$.

Αν $k > 1$ από την σχέση $(k, n) = 1$, υπάρχουν $j, m \in \mathbb{Z}$ ώστε $jk + mn = 1$ ισοδύναμα $jk = 1 \pmod{n}$. Τότε για τον αριθμό στρώσης του Poincaré για τον $f|_{\partial D^2}$ θα έχουμε

$$\rho(f^j|_{\partial D^2}) = \frac{jk}{n} \pmod{1} = \frac{1}{n} \pmod{1}.$$

Άρα ο f^j είναι τοπολογικά συζυγής με την στρόφη κατά $2\pi/n$ και επειδή $(f^j)^k = f$, θα έχουμε ότι ο f είναι τοπολογικά συζυγής με την στρόφη κατά γωνία $2\pi k/n$. \square

Θεώρημα 2.2.6. *Εστω $f : S^2 \rightarrow S^2$ ένας περιοδικός ομοιομορφισμός, περιόδου $n > 1$, με $f \neq id$. Αν ο f διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε είναι τοπολογικά συζυγής με στρόφη κατά γωνία $2k\pi/n$ για κάποιο $1 \leq k \leq n-1$.*

Απόδειξη. Ο $f : S^2 \rightarrow S^2$ διατηρεί τον προσανατολισμό, επομένως $\deg(f) = 1$, άρα $f \simeq id$. Κατά συνέπεια ο αριθμός Lefschetz είναι

$$L(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dim H_k(S^2; \mathbb{Q}) = \chi(S^2) = 2 \neq 0.$$

Από το Θεώρημα σταθερού σημείου του Lefschetz προκύπτει ότι ο f έχει σταθερό σημείο, $x \in S^2$. Από το λήμμα 2.2.2, για κάθε περιοχή N του x , υπάρχει τοπολογικός κλειστός δίσκος Δ_x τέτοιος ώστε $\Delta_x \subset N$, $f(\Delta_x) = \Delta_x$ και $x \in \text{int}\Delta_x$.

Το $C = \partial\Delta_x$ είναι απλή κλειστή καμπύλη, η οποία χωρίζει την S^2 σε δύο f -αναλλοίωτους τοπολογικούς δίσκους D_1, D_2 . Επειδή $f \neq id$ και ο f διατηρεί τον προσανατολισμό, από την πρόταση 2.1.2 και το λήμμα 2.2.3 ο f δεν έχει σταθερό σημείο επί της C . Από το λήμμα 2.2.4 για τους D_1, D_2 , υπάρχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο του f σε καθένα από τους D_1, D_2 . Άρα ο f έχει ακριβώς δύο σταθερά σημεία, τα οποία θεωρούμε ότι είναι τα N, S αντίστοιχα. Όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 2.2.5 μπορούμε να κατασκευάσουμε n τόξα, ξένα μεταξύ τους που να ενώνουν τα σημεία N, S , σαν τα τόξα $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$ εκείνης της απόδειξης. Ομοια μπορούμε να κατασκευάσουμε μια συζυγία μεταξύ του f και της στρώσης κατά γωνία $2k\pi/n$, γύρω από τον άξονα των N, S . \square

ΚΑΝΟΝΙΚΟΙ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ

3.1. Γενικές ιδιότητες

Εστω X ένας μετριοποιήσιμος χώρος, d μια συμβατή μετρική στον X και $f : X \rightarrow X$ ένας ομοιομορφισμός. Ένα σημείο $x \in X$ καλείται κανονικό αν η οικογένεια $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι d -ισοσυνεχής σ' αυτό, δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε αν $d(x, y) < \delta$ τότε $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Η κανονικότητα ενός σημείου, είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της μετρικής, όταν ο X είναι συμπαγής. Προς τούτο θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω:

Λήμμα 3.1.1. Έστω X ένας συμπαγής μετριοποιήσιμος χώρος και d, ρ δύο μετρικές στον X , συμβατές με την τοπολογία του. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε,

$$B_d(x, \delta) \subset B_\rho(x, \varepsilon)$$

για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη. Από την συμβατότητα των μετρικών d, ρ με την τοπολογία του X , προκύπτει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και $x \in X$ υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε $B_d(x, \delta_x) \subset B_\rho(x, \varepsilon/2)$. Επειδή ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $x_1, \dots, x_k \in X$ ώστε

$$X = \bigcup_{i=1}^k B_d(x_i, \frac{1}{2}\delta_{x_i}).$$

Εστω $\delta = \frac{1}{2} \min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_k}\}$. Αν $x \in X$ και $y \in B_d(x, \delta)$, τότε υπάρχει $i \in \{1, \dots, k\}$ ώστε

$$x \in B_d(x_i, \frac{1}{2}\delta_{x_i}) \subset B_\rho(x_i, \varepsilon/2).$$

Συνεπώς

$$d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{x_i} \leq \delta_{x_i}$$

δηλαδή

$$y \in B_d(x_i, \delta_{x_i}) \subset B_\rho(x_i, \varepsilon/2).$$

Άρα

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_i) + \rho(x_i, y) < \varepsilon$$

επομένως $y \in B_\rho(x, \varepsilon)$. □

Πόρισμα 3.1.2. Έστω X ένας συμπαγής μετριοποιήσιμος χώρος και f ένας ομοιομορφισμός του. Αν η οικογένεια $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι d -ισοσυνεχής στο $x \in X$, τότε είναι και ρ -ισοσυνεχής, όπου d, ρ δύο μετρικές συμβατές με την τοπολογία του X .

Απόδειξη. Από την συμβατότητα των d, ρ και την συμπαγεια του X , έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\varepsilon' > 0$ ώστε,

$$B_d(z, \varepsilon') \subset B_\rho(z, \varepsilon)$$

για κάθε $z \in X$, από το λήμμα 3.1.1.

Από την d -ισοσυνέχεια στο $x \in X$ προκύπτει ότι υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε αν $d(x, y) < \delta'$ τότε $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Από το λήμμα 3.1.1 υπάρχει $\delta > 0$, ανεξάρτητο από το x , ώστε $B_\rho(x, \delta) \subset B_d(x, \delta')$.

Αν τώρα $\rho(x, y) < \delta$, τότε $d(x, y) < \delta'$, επομένως $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon'$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, άρα $\rho(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. \square

Πρόταση 3.1.3. Έστω X ένας συμπαγής μετριοποιήσιμος χώρος και f ένας ομοιομορφισμός του χώρου X . Αν η οικογένεια $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι ισοσυνεχής σε κάθε σημείο του X , τότε είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχής.

Απόδειξη. Εστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε αν $y \in B(x, \delta_x)$ τότε $f^n(y) \in B(f^n(x), \varepsilon/2)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Από την συμπαγεια του X , υπάρχουν $x_1, \dots, x_k \in X$ τέτοια ώστε

$$X = \bigcup_{i=1}^k B_d(x_i, \frac{1}{2}\delta_{x_i}).$$

Εστω $\delta = \frac{1}{2} \min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_k}\}$. Αν $x \in X$ και $y \in B_d(x, \delta)$ τότε υπάρχει $i \in \{1, \dots, k\}$ ώστε

$$x \in B(x_i, \frac{1}{2}\delta_{x_i}).$$

Ομως

$$d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{x_i} \leq \delta_{x_i},$$

άρα

$$y \in B(x_i, \delta_{x_i})$$

Συνεπώς $x, y \in B(x_i, \delta_{x_i})$ και επομένως

$$d(f^n(x), f^n(x_i)) < \varepsilon/2$$

και

$$d(f^n(x_i), f^n(y)) < \varepsilon/2,$$

άρα $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. \square

Θεώρημα 3.1.4. Έστω X ένας συμπαγής, μετριοποιήσιμος χώρος και $f : X \rightarrow X$ ένας ομοιομορφισμός. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) Η οικογένεια $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι ισοσυνεχής.

(β) Η κλειστότητα G της οικογένειας $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ στην ομάδα ομοιομορφισμών $H(X)$ του X , με την συμπαγή - ανοιχτή τοπολογία, είναι συμπαγής αβελιανή υποομάδα.

(γ) Υπάρχει μια συμβατή μετρική ρ στο X , ως προς την οποία ο f είναι ρ -ισομετρία.

Απόδειξη. (α) \Rightarrow (γ). Εστω d μια συμβατή μετρική στον X . Για την μετρική

$$\rho(x, y) = \sup\{d(f^n(x), f^n(y)) : n \in \mathbb{Z}\}$$

και από την ισοσυνέχεια της οικογένειας $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$, έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $d(x, y) < \delta$, τότε $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon/2$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $B_d(x, \delta) \subset B_\rho(x, \varepsilon)$. Άρα τα ρ -ανοιχτά σύνολα είναι d -ανοιχτά.

Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $y \in B_\rho(x, \varepsilon)$, έχουμε ότι $d(x, y) < \varepsilon$, επομένως $y \in B_d(x, \varepsilon)$. Άρα $B_\rho(x, \varepsilon) \subset B_d(x, \varepsilon)$, επομένως τα d -ανοιχτά σύνολα είναι ρ -ανοιχτά, συνεπώς η μετρική ρ είναι συμβατή με την τοπολογία του X . Προφανώς τώρα

$$\rho(f(x), f(y)) = \sup\{d(f^{n+1}(x), f^{n+1}(y)) : n \in \mathbb{Z}\} = \rho(x, y)$$

(γ) \Rightarrow (β) Για κάθε $x \in X$ το σύνολο $cl_X\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι συμπαγές. Από το Θεώρημα του Ascoli η κλειστότητα

$$G = cl_{C(X, X)}\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

στον χώρο $C(X, X)$, είναι συμπαγής.

Εστω $I_\rho(X)$ η ομάδα των ρ -ισομετριών του X . Αν

$$g \in G = cl_{C(X, X)}\{f^n : n \in \mathbb{Z}\} \supset cl_{H(X)}\{f^n : n \in \mathbb{Z}\} \supset cl_{I_\rho(X)}\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

και $f^{n_k} \rightarrow g$ ομοιόμορφα στο X , με $n_k \rightarrow \pm\infty$, τότε για κάθε $x, y \in X$ έχουμε

$$\rho(g(x), g(y)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y)) = \rho(x, y).$$

Επειδή ο X είναι συμπαγής η g είναι επί και συνεπώς είναι ρ -ισομετρία. Αυτό δείχνει ότι

$$G = cl_{C(X, X)}\{f^n : n \in \mathbb{Z}\} = cl_{H(X)}\{f^n : n \in \mathbb{Z}\} = cl_{I_\rho(X)}\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Άρα η G είναι συμπαγής και προφανώς αβελιανή υποομάδα της $H(X)$.

(β) \Rightarrow (α) Η απεικόνιση εκτίμησης $E : G \times X \rightarrow X$ είναι συνεχής, διότι ο X είναι συμπαγής. Εστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Για κάθε $g \in G$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή V_g του g στο G και $\delta_g > 0$, έτσι ώστε

$$E(V_g \times B(x, \delta_g)) \subset B(g(x), \varepsilon/2).$$

Από την συμπαγεια της G , υπάρχουν $g_1, \dots, g_k \in G$ ώστε

$$G = \bigcup_{i=1}^k V_{g_i}.$$

Εστω $\delta = \min\{\delta_{g_1}, \dots, \delta_{g_k}\}$. Για κάθε $g \in G$ και για κάθε $y \in B(x, \delta)$ υπάρχει $i \in \{1, \dots, k\}$ με $g \in V_{g_i}$ και $y \in B(x, \delta_{g_i})$. Τότε

$$g(y) \in E(V_{g_i} \times B(x, \delta_{g_i})) \subset B(g_i(x), \varepsilon/2)$$

και

$$g(x) \in B(g_i(x), \varepsilon/2).$$

Άρα

$$d(g(x), g(y)) \leq d(g(x), g_i(x)) + d(g_i(x), g(y)) < \varepsilon$$

για κάθε $g \in G$. Ειδικότερα ισχύει $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. \square

Ορισμός 3.1.5. Εστω X ένας συμπαγής μετριοποιήσιμος χώρος. Ένας ομοιομορφισμός $f : X \rightarrow X$ λέγεται κανονικός αν η οικογένεια $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι ισοσυνεχής.

Αν η ομάδα G είναι διακριτή, τότε επειδή σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα είναι συμπαγής, πρέπει να είναι πεπερασμένη. Έτσι σ' αυτή την περίπτωση υπάρχει $n \neq 0$ ώστε $f^n = id$, δηλαδή ο f είναι περιοδικός.

Αν η G δεν είναι διακριτή, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ακέραιος $n \neq 0$ ώστε $0 < d(f^n, id) < \varepsilon$, όπου d είναι η μετρική στο $H(X)$, που ορίζει την συμπαγή - ανοιχτή τοπολογία. Έτσι λοιπόν σε κάθε περίπτωση για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ακέραιος $n \neq 0$, ώστε $d(f^n, id) < \varepsilon$.

Εστω X ένας συμπαγής μετριοποιήσιμος χώρος, $f : X \rightarrow X$ ένας ομοιομορφισμός και $x \in X$. Θέτουμε

$$O(x, f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\},$$

$$O^+(x, f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\},$$

$$O^-(x, f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}, n \leq 0\}.$$

Θυμίζουμε ότι το οριακό σύνολο του $x \in X$ είναι το

$$L(x, f) = L^+(x, f) \cup L^-(x, f).$$

Παρατηρούμε ότι αν το $A \subset X$ είναι ένα συμπαγές f - αναλλοίωτο σύνολο, τότε και ο $f|_A$ είναι κανονικός ομοιομορφισμός, αν ο f είναι.

Λήμμα 3.1.6. Έστω X ένας συμπαγής, μετριοποιήσιμος χώρος και $f : X \rightarrow X$ ένας ομοιομορφισμός.

(1) Έστω $x \in X$ ένα κανονικό σημείο και έστω ότι υπάρχουν ακολουθίες $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ στο X και $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ στο \mathbb{Z} , ώστε $x_i \rightarrow x$ και $f^{n_i}(x_i) \rightarrow z$. Τότε $f^{n_i}(x) \rightarrow z$.

(2) Αν τα σημεία x, y είναι κανονικά, τότε $f^{n_i}(x) \rightarrow y$ αν και μόνο αν $f^{-n_i}(y) \rightarrow x$.

(3) Ένα κανονικό σημείο ανήκει στο οριακό του σύνολο $L(x, f)$, ακριβώς τότε αν το $L(x, f)$ περιέχει ένα κανονικό σημείο.

(4) Αν ένα κανονικό σημείο $x \in X$ ανήκει στο οριακό του σύνολο $L(x, f)$, τότε

$$L^+(x, f) = L^-(x, f) = cl_X O(x, f).$$

Απόδειξη. Για κάθε $\varepsilon > 0$ θέτουμε

$$\phi(x, \varepsilon) = \sup\{\delta > 0 : d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{Z} \text{ και } y \in B_\delta(x, \varepsilon)\}.$$

(1) Έστω $\varepsilon > 0$ και $\delta = \phi(x, \varepsilon)$. Για αρκετά μεγάλο i έχουμε $d(x_i, x) < \delta$ και $d(f^{n_i}(x_i), z) < \varepsilon$. Από την ισοσυνέχεια έχουμε ότι $d(f^{n_i}(x_i), f^{n_i}(x)) < \varepsilon$, επομένως

$$d(f^{n_i}(x), z) < d(f^{n_i}(x), f^{n_i}(x_i)) + d(f^{n_i}(x_i), z) < \varepsilon + \delta < 2\varepsilon,$$

για αρκετά μεγάλο i . Άρα $f^{n_i}(x) \rightarrow z$.

(2) Έστω $\varepsilon > 0$ και $\delta = \phi(x, \varepsilon)$. Για αρκετά μεγάλο i έχουμε $d(f^{n_i}(x), y) < \delta$.

Επομένως από την ισοσυνέχεια, έχουμε ότι

$$d(f^n(f^{n_i}(x), f^n(y))) < \varepsilon,$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άρα για $n = -n_i$, προκύπτει ότι $d(x, f^{-n_i}(y)) < \varepsilon$ για μεγάλο i , δηλαδή $f^{-n_i}(y) \rightarrow x$. Ομοια δείχνουμε ότι αν $f^{-n_i}(y) \rightarrow x$, τότε $f^{n_i}(x) \rightarrow y$.

(3) Θα δείξουμε ότι $x \in L(x, f)$ τότε και μόνο τότε, αν υπάρχει ένα κανονικό σημείο $y \in L(x, f)$. Έστω $y \in L(x, f)$ ένα κανονικό σημείο και $\varepsilon > 0$, $\delta = \phi(y, \varepsilon)$. Υπάρχουν τότε $n > m > 0$ ώστε $d(y, f^n(x)) < \delta$ και $d(y, f^m(x)) < \delta$.

Ομως το y είναι κανονικό, άρα $d(f^k(y), f^{k+n}(x)) < \varepsilon$ και $d(f^k(y), f^{k+m}(x)) < \varepsilon$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Άρα $d(f^{-m}(y), f^{n-m}(x)) < \varepsilon$ και $d(f^{-m}(y), x) < \varepsilon$. Συνεπώς $d(x, f^{n-m}(x)) < 2\varepsilon$. Αυτό δείχνει ότι $x \in L(x, f)$.

Το αντίστροφο είναι προφανές.

(4) Εστω x ένα κανονικό σημείο ώστε $x \in L(x, f)$. Αν $x \in L^+(x, f)$ τότε εξ' ορισμού $x = \lim f^{n_i}(x)$, για κάποια $n_i \rightarrow \pm\infty$. Από το (2) προκύπτει ότι $x = \lim f^{-n_i}(x)$ συνεπώς $x \in L^-(x, f)$, άρα $L^+(x, f) \subset L^-(x, f)$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $L^-(x, f) \subset L^+(x, f)$, άρα $O(x, f) \subset L^+(x, f) = L^-(x, f) = L(x, f) \subset cl_X O(x, f)$. \square

Στην συνέχεια της παραγράφου αυτής θα κατατάξουμε τους κανονικούς ομοιομορφισμούς του S^1 που διατηρούν τον προσανατολισμό.

Λήμμα 3.1.7. Έστω $f : S^1 \rightarrow S^1$ ένας κανονικός ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό. Αν υπάρχει σταθερό σημείο υπό τον f , τότε $f = id$.

Απόδειξη. Εστω $x_0 \in Fix(f)$ και $\varepsilon > 0$. Λόγω κανονικότητας υπάρχει $\delta_0 > 0$ τέτοιο ώστε αν $d(x, x_0) < \delta_0$ τότε $d(f^n(x), x_0) < \varepsilon$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Για κάθε $\delta \leq \delta_0$ θεωρούμε το ανοιχτό και f -αναλλοίωτο σύνολο

$$U_\delta = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B(x_0, \delta)).$$

Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, τα ανοιχτά σύνολα $f^n(B(x_0, \delta))$ είναι συνεκτικά και επειδή

$$x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B(x_0, \delta)),$$

το U_δ είναι ανοιχτό διάστημα (δηλαδή τόξο). Εστω ότι το U_δ έχει άκρα a_δ και b_δ .

Προφανώς $f(\partial U_\delta) = \partial f(U_\delta) = \partial U_\delta = \{a_\delta, b_\delta\}$ άρα $f(a_\delta) = a_\delta$, $f(b_\delta) = b_\delta$, διότι ο f διατηρεί τον προσανατολισμό. Αφού $a_\delta \in \partial U_\delta$, υπάρχουν $c_k \in B(x_0, \delta)$ και $n_k \in \mathbb{Z}$, ώστε $a_\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(c_k)$. Λόγω της συμπίεσης του $cl(B(x_0, \delta))$, η ακολουθία $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ίδια συγκλίνει σε κάποιο $c \in cl(B(x_0, \delta))$.

Από το λήμμα 3.1.6 έχουμε ότι $f^{n_k}(c) \rightarrow a_\delta$, συνεπώς πάλι από το λήμμα 3.1.6 έχουμε και $f^{-n_k}(a_\delta) \rightarrow c$. Επειδή $f(a_\delta) = a_\delta$ θα έχουμε $a_\delta = c$, άρα $a_\delta \in \partial B(x_0, \delta)$. Ομοια αποδεικνύεται ότι $b_\delta \in \partial B(x_0, \delta)$. Έτσι $f(B(x_0, \delta)) = B(x_0, \delta)$ με σταθερά άκρα για κάθε $\delta \leq \delta_0$. Αυτό δείχνει ότι για κάθε $x_0 \in Fix(f)$, υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $B(x_0, \delta_0) \subset Fix(f)$, άρα το $Fix(f)$ είναι ανοιχτό και κλειστό, μη κενό υποσύνολο του συνεκτικού S^1 . Συνεπώς $Fix(f) = S^1$, δηλαδή $f = id$. \square

Θεώρημα 3.1.8. Έστω $f : S^1 \rightarrow S^1$ ένας κανονικός ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό. Τότε ο f είναι τοπολογικά συζυγής με στροφή.

Απόδειξη. Αν $\rho(f) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, τότε, σύμφωνα με την παρατήρηση 1.3.3, υπάρχουν $m_0 \in \mathbb{Z}$, $x_0 \in S^1$ τέτοια ώστε $f^{m_0}(x_0) = x_0$. Άρα $Fix(f^{m_0}) \neq \emptyset$ και επομένως από το λήμμα 3.1.7, $f^{m_0} = id$. Από την πρόταση 2.1.2 ο f είναι τοπολογικά συζυγής με ρητή στροφή.

Εστω τώρα ότι $\rho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Αφού ο f είναι κανονικός, τότε από την πρόταση 1.3.5 και το λήμμα 3.1.6 προκύπτει ότι $L^+(x, f) = L^-(x, f) = S^1$, για κάθε $x \in S^1$ δηλαδή ο f έχει πυκνές τροχιές στον S^1 . Άρα από το θεώρημα 1.3.6 ο f είναι τοπολογικά συζυγής με άρρητη στροφή. \square

3.2. Κανονικοί ομοιομορφισμοί της S^2

Στην παράγραφο αυτή θα κατατάξουμε τους κανονικούς ομοιομορφισμούς της σφαίρας S^2 που διατηρούν τον προσανατολισμό. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε ότι κάθε τέτοιος ομοιομορφισμός της S^2 είναι τοπολογικά συζυγής με στροφή. Το πρώτο βήμα στην απόδειξη του Θεωρήματος, είναι να δείξουμε ότι γύρω από ένα σταθερό σημείο ενός κανονικού ομοιομορφισμού f της σφαίρας, υπάρχουν απλές κλειστές καμπύλες f - αναλλοίωτες.

Ορισμός 3.2.1. Εστω K ένας τοπολογικός χώρος. Ένα σημείο $a \in K$ λέγεται σημείο αποκοπής, αν το $K \setminus \{a\}$ είναι μη συνεκτικό.

Ορισμός 3.2.2. Ένας χώρος X λέγεται τοπικά συνεκτικός, αν έχει μια βάση η οποία αποτελείται από ανοιχτά συνεκτικά σύνολα.

Λήμμα 3.2.3. Εστω X ένας τοπολογικός χώρος με την ιδιότητα: Για κάθε $x \in X$ και κάθε ανοιχτή περιοχή U του x , υπάρχει ένα συνεκτικό σύνολο K ώστε $x \in \text{int}K \subset K \subset U$. Τότε ο X είναι τοπικά συνεκτικός.

Απόδειξη. Εστω $G \subset X$ ένα ανοιχτό σύνολο και C μια συνεκτική συνιστώσα του G . Αν $x \in C$, υπάρχει V ανοιχτό με $x \in V \subset G$, αφού $x \in G$. Από την υπόθεση υπάρχει συνεκτικό $K \subset X$ με $x \in \text{int}K \subset K \subset V \subset G$. Κατά συνέπεια $K \subset C$. Αυτό δείχνει ότι το C είναι ανοιχτό, άρα κάθε συνεκτική συνιστώσα ανοιχτού συνόλου είναι ανοιχτό σύνολο. Επειδή η οικογένεια όλων των συνιστωσών από όλα τα ανοιχτά σύνολα στο X αποτελούν βάση του, προκύπτει ότι ο X είναι τοπικά συνεκτικός. \square

Πρόταση 3.2.4. Έστω X ένας συμπαγής, μετριοποιήσιμος χώρος και d μια συμβατή μετρική στον X . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Ο X είναι τοπικά συνεκτικός.
- (2) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και συμπαγή συνεκτικά σύνολα K_1, \dots, K_n με

$$X = K_1 \cup \dots \cup K_n$$

και $\text{diam}(K_i) < \varepsilon, 1 \leq i \leq n$.

Απόδειξη. Εστω ότι ο X είναι τοπικά συνεκτικός και $\varepsilon > 0$. Τότε οι συνεκτικές συνιστώσες των $B(x, \varepsilon/2)$ με $x \in X$, είναι ανοιχτά συνεκτικά σύνολα και καλύπτουν τον X . Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν κατά συνέπεια ανοιχτά, συνεκτικά σύνολα V_1, \dots, V_n με

$$X = V_1 \cup \dots \cup V_n$$

και $\text{diam}(V_i) < \varepsilon, 1 \leq i \leq n$. Αρκεί τώρα να πάρουμε $K_i = \overline{V_i}, 1 \leq i \leq n$.

Αντίστροφα, έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Τότε από την υπόθεση υπάρχουν συμπαγή συνεκτικά σύνολα K_1, \dots, K_n με

$$X = K_1 \cup \dots \cup K_n$$

και $\text{diam}(K_i) < \varepsilon, 1 \leq i \leq n$. Αν $x \in \bigcap_{i=1}^n K_i$ θέτουμε $\delta_x = 1$, αλλιώς θέτουμε

$$\delta_x = d(x, \bigcup_{x \notin K_i} K_i) > 0.$$

Προφανώς

$$B(x, \delta_x) \subset \bigcup_{x \in K_i} K_i.$$

Το $K = \bigcup_{x \in K_i} K_i$, είναι συνεκτικό και $x \in \text{int}K \subset K \subset B(x, \varepsilon)$.

Από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι ο X είναι τοπικά συνεκτικός. \square

Το παρακάτω είναι κλασικό αποτέλεσμα της τοπολογίας της S^2 . (βλ. [8], Th. 2.6.)

Θεώρημα 3.2.5. *Εστω K ένα μη εκφυλισμένο, τοπικά συνεκτικό, συμπαγές και συνεκτικό υποσύνολο της σφαίρας το οποίο δεν περιέχει σημεία αποκοπής. Τότε το σύνορο κάθε συνεκτικής συνιστώσας του $S^2 \setminus K$ είναι απλή κλειστή καμπύλη.*

Λήμμα 3.2.6. *Εστω $f : S^2 \rightarrow S^2$ ένας κανονικός ομοιομορφισμός και $D \subset S^2$ ένας κλειστός δίσκος. Τότε το συμπαγές σύνολο*

$$K = \text{cl}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(D)\right)$$

είναι τοπικά συνεκτικό.

Απόδειξη. Εστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε μια τριγωνοποίηση του D , από πεπερασμένου πλήθους κλειστά 2 - τρίγωνα e_1, \dots, e_r , ώστε $\text{diam}(e_i) < \varphi(\varepsilon)$, $i = 1, \dots, r$, όπου $\varphi(\varepsilon) = \sup\{\delta > 0 : d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon \text{ όταν } d(x, y) < \delta\}$. Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$f^n(D) = \bigcup_{i=1}^r e_i^n,$$

όπου έχουμε θέσει $e_i^n = f^n(e_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Εστω $\rho > 0$, τέτοιο ώστε κάθε 2 - τρίγωνο e_i να περιέχει στο εσωτερικό του έναν δίσκο $B(x_i, \rho)$. Έτσι, λόγω της ομοιόμορφης ισοσυνέχειας

$$f^{-n}(B(f^n(x_i), \varphi(\rho))) \subset B(x_i, \rho)$$

και επομένως

$$B(f^n(x_i), \varphi(\rho)) \subset f^n(B(x_i, \rho)) \subset f^n(e_i) = e_i^n$$

για κάθε i και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Η οικογένεια $\{e_i^n : i = 1, \dots, r, n \in \mathbb{Z}\}$ περιέχει μόνο πεπερασμένα, μη τεμνόμενα ανά ζεύγη 2 - τρίγωνα. Πράγματι, λόγω ομοιόμορφης ισοσυνέχειας το $\varphi(\rho)$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων και σταθερό. Επίσης το εμβαδό του D λόγω συμπάγειας είναι πεπερασμένο. Συνεπώς κάθε 2 - τρίγωνο e_i^n θα έχει εμβαδό μεγαλύτερο από $\pi\varphi(\rho)^2$, άρα αν υπήρχαν άπειρα μη τεμνόμενα ανά ζεύγη 2-τρίγωνα, το D θα είχε άπειρο εμβαδό.

Εστω $\{e_{i_1}^{n_1}, \dots, e_{i_p}^{n_p}\}$, η μέγιστη συλλογή από ανά ζεύγη μη τεμνόμενα 2-τρίγωνα. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και για κάθε $i \in \{1, \dots, r\}$, υπάρχει $j \in \{1, \dots, r\}$ τέτοιο ώστε

$$e_{i_j}^{n_j} \cap e_i^n \neq \emptyset.$$

Για κάθε $k \in \{1, \dots, \rho\}$, θέτουμε

$$M_k = \text{cl}\left(\bigcup \{e_i^n : e_i^n \cap e_{i_k}^{n_k} \neq \emptyset\}\right).$$

Το M_k είναι συμπαγές και συνεκτικό σύνολο με $diam(M_k) < 3\varepsilon$, αφού $diam(e_i^n) < \varepsilon$ για $i = 1, \dots, r$, $n \in \mathbb{Z}$. Προφανώς

$$d\left(\bigcup_{k=1}^{\rho} (\cup\{e_i^n : e_i^n \cap e_{ik}^{n_k} \neq \emptyset\})\right) = d\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(D)\right) = K.$$

Αυτό δείχνει ότι το K είναι τοπικά συνεκτικό. \square

Πρόταση 3.2.7. Έστω f ένας κανονικός ομοιομορφισμός της σφαίρας και x ένα σταθερό σημείο του f . Τότε υπάρχουν τοπολογικοί κλειστοί δίσκοι, αναλλοίωτοι από τον f και οι οποίοι αποτελούν βάση περιοχών του x .

Απόδειξη. Εστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $\delta = \varphi(\varepsilon)$ και $\eta = \varphi(\delta/2)$. Εστω D° ο ανοιχτός δίσκος κέντρου $x \in \text{Fix}(f)$ και ακτίνας η . Θεωρούμε το σύνολο

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(D^\circ).$$

Προφανώς το U είναι ανοιχτό συνεκτικό και f -αναλλοίωτο.

Από την ομοιόμορφη ισοσυνέχεια, Προκύπτει ότι $f^n(D^\circ) \subset B(x, \delta/2)$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επομένως $U \subset B(x, \delta/2)$. Τότε αν $D = \overline{D^\circ}$, ισχύει

$$U \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(D) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\overline{D^\circ}) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \overline{f^n(D^\circ)} \subset \overline{U},$$

άρα

$$d\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(D)\right) = \overline{U}.$$

Από το λήμμα 3.2.6 το \overline{U} είναι λοιπόν τοπικά συνεκτικό.

Το \overline{U} δεν έχει σημεία αποκοπής διότι το σύνολο $\overline{U} \setminus \{a\}$, είναι συνεκτικό για κάθε $a \in \overline{U}$. Επομένως από το Θεώρημα 3.2.5 προκύπτει ότι το σύνορο κάθε συνεκτικής συνιστώσας του $S^2 \setminus \overline{U}$, είναι απλή κλειστή καμπύλη.

Λόγω της ομοιόμορφης ισοσυνέχειας και του γεγονότος ότι $x \in \text{Fix}(f)$, έχουμε ότι

$$f^{-1}(B(x, \delta)) \subset B(x, \varepsilon),$$

οπότε

$$S^2 \setminus B(x, \varepsilon) \subset S^2 \setminus f^{-1}(B(x, \delta)) = f^{-1}(S^2 \setminus B(x, \delta)),$$

άρα $f(S^2 \setminus B(x, \varepsilon)) \subset S^2 \setminus B(x, \delta) \subset S^2 \setminus \overline{U}$.

Εστω C η συνεκτική συνιστώσα του $S^2 \setminus \overline{U}$ που περιέχει το $S^2 \setminus B(x, \delta)$ άρα και το $f(S^2 \setminus B(x, \varepsilon))$. Επειδή ο ομοιομορφισμός $f|_{S^2 \setminus \overline{U}}$ απεικονίζει συνεκτικές συνιστώσες του $S^2 \setminus \overline{U}$, σε συνεκτικές συνιστώσες του $S^2 \setminus \overline{U}$, το σύνολο $f(C)$ είναι συνεκτική συνιστώσα του $S^2 \setminus \overline{U}$. Ομως $f(S^2 \setminus B(x, \varepsilon)) \subset f(C)$ και επειδή $f(S^2 \setminus B(x, \varepsilon)) \subset S^2 \setminus B(x, \delta) \subset C$ έχουμε $f(C) = C$, δηλαδή η συνεκτική συνιστώσα C του $S^2 \setminus \overline{U}$ που περιέχει το $S^2 \setminus B(x, \delta)$ είναι f -αναλλοίωτη.

Το $\partial C = \gamma$ είναι απλή κλειστή καμπύλη f -αναλλοίωτη, που αποτελεί σύνορο ενός τοπολογικού ανοιχτού δίσκου Δ° με

$$x \in \Delta^\circ = S^2 \setminus C, \quad \partial \Delta^\circ = \partial C = \gamma, \quad f(\Delta^\circ) = \Delta^\circ$$

και προφανώς $\Delta^\circ \subset B(x, \delta)$. \square

Εστω $f : S^2 \rightarrow S^2$ ένας ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό. Τότε $\deg(f) = 1$, άρα $f \simeq id$. Κατά συνέπεια

$$L(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dim H_k(S^2; \mathbb{Q}) = \chi(S^2) = 2 \neq 0.$$

Από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Lefschetz προκύπτει ότι ο f έχει σταθερό σημείο, έστω το $x \in S^2$. Αν επιπλέον ο f είναι κανονικός τότε όπως έχουμε δει, υπάρχει κλειστός δίσκος Δ , f - αναλλοίωτος, τέτοιος ώστε $x \in \Delta^\circ$. Επομένως το $D = S^2 \setminus \Delta^\circ$ που είναι ομοιομορφικό με κλειστό δίσκο είναι f - αναλλοίωτο. Τώρα από το Θεώρημα του Brouwer υπάρχει σταθερό σημείο $x_0 \in D$ με $x_0 \neq x$, συνεπώς ο f έχει τουλάχιστο δύο σταθερά σημεία.

Αν γ είναι μια f - αναλλοίωτη απλή κλειστή καμπύλη, θα συμβολίζουμε τον αριθμό στροφής του Poincaré του περιορισμού του f στην γ , με $\rho(\gamma, f)$.

Λήμμα 3.2.8. Έστω f ένας κανονικός ομοιομορφισμός της σφαίρας που διατηρεί τον προσανατολισμό και γ μια f - αναλλοίωτη απλή κλειστή καμπύλη. Αν $\rho(\gamma, f) = 0$, τότε $f = id$.

Απόδειξη. Από την υπόθεση ο f έχει σταθερό σημείο επί της γ . Επειδή η γ είναι f - αναλλοίωτη, ο $f|_\gamma$ είναι κανονικός ομοιομορφισμός. Από το λήμμα 3.1.7 έχουμε ότι $f|_\gamma = id$, συνεπώς $\gamma \subset Fix(f)$.

Εστω Γ η συνεκτική συνιστώσα του $Fix(f)$ που περιέχει την γ . Η Γ είναι κλειστό σύνολο. Αρκεί να δείξουμε ότι η Γ είναι ανοιχτό υποσύνολο της S^2 .

Εστω $x \in \Gamma$ και $\varepsilon > 0$ με $diam(\gamma) > 2\varepsilon$ και $\delta = \varphi(\varepsilon)$. Από την Πρόταση 3.2.7 για κάθε ανοιχτή περιοχή $B(x, r)$ με $r < \delta$, υπάρχει f - αναλλοίωτος τοπολογικός κλειστός δίσκος Δ_r , με $x \in \Delta_r^\circ$, $\Delta_r \subset B(x, \delta)$. Εστω $\gamma_r = \partial\Delta_r$.

Αφού $diam(\gamma) > 2\varepsilon$ τότε $\gamma \not\subset B(x, \varepsilon)$ και άρα $\Gamma \not\subset B(x, \varepsilon)$, επομένως $\Gamma \not\subset \Delta_r$. Λόγω συνεκτικότητας του Γ , έχουμε ότι $\Gamma \cap \gamma_r \neq \emptyset$. Επομένως, από το λήμμα 3.1.7 προκύπτει $f|_{\gamma_r} = id$, άρα $\gamma_r \subset \Gamma$.

Όπως δείχνει η απόδειξη της πρότασης 3.2.7 η γ_r είναι το σύνορο της συνεκτικής συνιστώσας του $S^2 \setminus \bar{U}_r$ που περιέχει το $S^2 \setminus B(x, \delta)$, όπου

$$U_r = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B(x, r)).$$

Άρα

$$\gamma_r \subset \partial(S^2 \setminus \bar{U}_r) = \partial\bar{U}_r \subset \partial U_r \subset \partial\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B(x, r))\right) \subset d\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(C_r)\right)$$

όπου $C_r = \partial B(x, r)$.

Εστω $y \in \gamma_r$. Τότε $y = \lim f^{n_k}(x_k)$, όπου $x_k \in C_r$ και $n_k \in \mathbb{Z}$. Λόγω συμπάγειας του C_r η ακολουθία $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\lim x_k = x_0$ για κάποιο $x_0 \in C_r$. Επομένως από το λήμμα 3.1.6 έχουμε $y = \lim f^{n_k}(x_0)$ και $x_0 = \lim f^{-n_k}(y) = y$.

Αυτό δείχνει ότι $\gamma_r \subset C_r$ επομένως $\gamma_r = C_r$, αφού αυτές είναι απλές κλειστές καμπύλες. Επειδή το $0 < r < \delta$ είναι οποιοδήποτε, συμπεραίνουμε ότι $B(x, \delta) \subset \Gamma$.

Άρα το Γ είναι ανοιχτό, όπως επίσης και κλειστό, μη κενό υποσύνολο του S^2 . Συνεπώς, λόγω της συνεκτικότητας της S^2 , θα πρέπει $\Gamma = S^2$, άρα $f = id_{S^2}$. \square

Εστω f ένας κανονικός ομοιομορφισμός της σφαίρας που διατηρεί τον προσανατολισμό. Αν γ είναι μια f - αναλλοίωτη απλή κλειστή καμπύλη και

$$G = cl_{H(S^2)} \{f^n : n \in \mathbb{Z}\},$$

τότε μια f - αναλλοίωτη απλή κλειστή καμπύλη γ είναι g - αναλλοίωτη για κάθε $g \in G$. Επίσης κάθε $g \in G$ είναι κανονικός ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό.

Λήμμα 3.2.9. *Η απεικόνιση $\rho_\gamma : G \rightarrow S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ με $\rho_\gamma(g) = \rho(\gamma, g)$ είναι ένας συνεχής μονομορφισμός.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα 1.3.4 η ρ_γ είναι συνεχής. Επίσης ισχύει ότι

$$\rho_\gamma(f^n) = \rho(\gamma, f^n) = n\rho(\gamma, f) = n\rho_\gamma(f)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς η ρ_γ είναι ομομορφισμός ομάδων.

Εστω $g \in \ker \rho_\gamma$. Τότε $\rho_\gamma(g) = \rho(\gamma, g) = 0$. Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα 3.2.8 έχουμε $g = id_{S^2}$, δηλαδή η ρ_γ είναι μονομορφισμός ομάδων. \square

Σύμφωνα με το πόρισμα 1.1.5 και το προηγούμενο λήμμα 3.2.9, η G είναι ισόμορφη είτε με πεπερασμένη κυκλική ομάδα είτε με τον S^1 . Στην πρώτη περίπτωση ο f είναι περιοδικός και όπως αποδείξαμε στο Κεφάλαιο II τοπολογικά συζυγής με ρητή στροφή.

Πρόταση 3.2.10. *Αν $G \cong S^1$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα.*

- (1) Το $Fix(f)$ αποτελείται ακριβώς από δύο σημεία $N, S \in S^2$.
- (2) Η G δρα ελεύθερα επί του $S^2 \setminus \{N, S\}$ μέσω της απεικόνισης εκτίμησης.
- (3) Κάθε τροχιά της δράσης της G στο $S^2 \setminus \{N, S\}$ είναι μια απλή κλειστή καμπύλη, μη ομοτοπική με σταθερά στο $S^2 \setminus \{N, S\}$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι ένας κανονικός ομοιομορφισμός $f : S^2 \rightarrow S^2$ που διατηρεί τον προσανατολισμό, έχει δύο τουλάχιστον σταθερά σημεία N, S . Επίσης από την πρόταση 3.2.7 υπάρχει f - αναλλοίωτη απλή κλειστή καμπύλη γ , η οποία διαχωρίζει τα σημεία N, S .

Από το λήμμα 3.2.9 για κάθε $g \in G$ με $g \neq id$, ισχύει ότι $\rho(\gamma, g) \neq 0$ και το g δεν έχει σταθερό σημείο επί της γ . Εστω ότι υπάρχει και ένα άλλο G - σταθερό σημείο x_0 και έστω y ένα σημείο της γ . Θεωρούμε ένα τόξο

$$\gamma_{x_0} : [0, 1] \rightarrow S^2 \setminus \{N, S\}$$

με $\gamma_{x_0}(0) = x_0$ και $\gamma_{x_0}(1) = y$.

Η απεικόνιση

$$\theta = E \circ (id \times \gamma_{x_0}) : G \times [0, 1] \rightarrow S^2 \setminus \{N, S\},$$

όπου E είναι η απεικόνιση εκτίμησης, είναι συνεχής και

$$\theta(g, 0) = E(g, \gamma_{x_0}(0)) = g(x_0) = x_0,$$

$$\theta(g, 1) = E(g, \gamma_{x_0}(1)) = g(y).$$

Ομως από το λήμμα 1.1.6 έχουμε $\gamma = G(y)$. Κατα συνέπεια η θ είναι ομοτοπία στο $S^2 \setminus \{N, S\}$ μεταξύ της γ και της σταθερής καμπύλης στο x_0 . Το γεγονός αυτό έρχεται σε αντίθεση με το ότι η γ δεν είναι ομοτοπική με σταθερά στο $S^2 \setminus \{N, S\}$.

Από το λήμμα 1.1.6 κάθε G - τροχιά ενός σημείου, εκτός από των N, S , είναι απλή κλειστή καμπύλη στο $S^2 \setminus \{N, S\}$.

Εστω ότι ένα στοιχείο $g_0 \in G$ έχει ένα σταθερό σημείο x_0 στο $S^2 \setminus \{N, S\}$ και $G(x_0)$ η G - τροχιά του. Επειδή $G(x_0) \approx S^1$ και $g_0(G(x_0)) = G(x_0)$, άμεσα από το λήμμα 3.2.8 προκύπτει ότι $g_0 = id$. Επομένως για κάθε $x \in S^2 \setminus \{N, S\}$, ισχύει $G_x = \{id\}$, άρα η G δρα ελεύθερα επί του $S^2 \setminus \{N, S\}$. \square

Στην συνέχεια υποθέτουμε πάντα ότι $G \cong S^1$. Είδαμε ότι κάθε G - τροχιά ενός σημείου του $S^2 \setminus \{N, S\}$ είναι απλή κλειστή καμπύλη στο $S^2 \setminus \{N, S\}$ και ότι η G δρα ελεύθερα στο $S^2 \setminus \{N, S\}$, με δράση την απεικόνιση εκτίμησης $E : G \times S^2 \rightarrow S^2$.

Λήμμα 3.2.11. Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν x, y είναι δύο διαφορετικά σημεία μιας G - τροχιάς γ και αν $d(x, y) < \delta$, τότε ένα από τα δύο τόξα στην γ που έχουν άκρα x, y , έχει διάμετρο μικρότερη από ε .

Απόδειξη. Αφού το N (αντίστοιχα το S) είναι G - σταθερό σημείο, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια G - τροχιά $\gamma_N \subset B(N, \varepsilon/2)$ (αντίστοιχα $\gamma_S \subset B(S, \varepsilon/2)$). Εστω A ο G - αναλλοίωτος δακτύλιος με σύνορο τις γ_N, γ_S . Το λήμμα χρειάζεται απόδειξη μόνο για τις G - τροχιές στο A . Για κάθε $x \in A$ η $G(x)$ είναι απλή κλειστή καμπύλη. Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει τόξο πάνω στην $G(x)$ με διάμετρο μικρότερη από $\varepsilon/2$, δηλαδή υπάρχει $\mu > 0$ τέτοιο ώστε αν $I_\mu = [-\mu, \mu] \subset G$ τότε $d(x, g(x)) < \varepsilon/2$, για κάθε $g \in I_\mu$, όπου το 0 αντιστοιχεί στην id .

Επειδή η G δρα ελεύθερα υπάρχει τότε $\delta > 0$, ώστε $d(x, g(x)) \geq \delta$ για κάθε $g \in G \setminus I_\mu$, γιατί αλλιώς υπάρχουν $g_n \in S^1 \setminus I_\mu$ τέτοια ώστε $d(x, g_n(x)) < \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Επομένως το $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει ένα οριακό σημείο $g \in G$ και $g(x) = x$ άτοπο.

Αν τα διαφορετικά σημεία x, y ανήκουν σε μια G - τροχιά με $d(x, y) < \delta$, τότε σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε $y = g(x)$, για κάποιο $g \in I_\mu$. Άρα για κάθε $x \in A$, το τόξο $\gamma_x : [0, \mu] \rightarrow A$ με $\gamma_x(g) = g(x)$ έχει διάμετρο μικρότερη από ε . \square

Εστω γ, γ' δύο απλές κλειστές καμπύλες οι οποίες διαχωρίζουν τα σημεία N, S . Θα σημειώνουμε $\gamma \leq \gamma'$ (αντίστοιχα $\gamma < \gamma'$) ακριβώς τότε αν η γ περιέχεται στον τοπολογικό κλειστό (αντίστοιχα ανοιχτό) δίσκο με σύνορο την γ' , ο οποίος περιέχει το S . Αυτή η σχέση εισάγει μια ολική διάταξη στο σύνολο όλων των G - τροχιών (με την σύμβαση $S \leq \gamma$ και $\gamma \leq N$ για κάθε G - τροχιά γ).

Μια πεπερασμένη ακολουθία σημείων $\{x_0, \dots, x_n\}$ τέτοια ώστε $d(x_k, x_{k+1}) < \mu$ και $G(x_k) < G(x_{k+1})$ καλείται μονότονη μ - αλυσίδα από το x_0 στο x_n .

Λήμμα 3.2.12. Εστω f ένας κανονικός ομοιομορφισμός της S^2 που διατηρεί τον προσανατολισμό και $G = cl_{H(S^2)}\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Αν d είναι μια οποιαδήποτε μετρική συμβατή με την τοπολογία της S^2 , τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, ώστε αν $d(x, y) < \delta$ τότε $d_H(G(x), G(y)) < \varepsilon$, όπου d_H είναι η μετρική Hausdorff στο σύνολο των μη - κενών, συμπαγών υποσυνόλων της S^2 .

Απόδειξη. Λόγω της ισοσυνέχειας της οικογένειας $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$, έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $d(x, y) < \delta$ τότε $d(g(x), g(y)) < \varepsilon$ για κάθε $g \in G$. Ομως

$$d(g(x), G(y)) < d(g(x), g(y)) < \varepsilon$$

για κάθε $g \in G$. Επομένως

$$\sup_{g \in G} d(g(x), G(y)) < \varepsilon.$$

Εντελώς συμμετρικά προκύπτει ότι

$$\sup_{g \in G} d(g(y), G(x)) < \varepsilon.$$

Άρα

$$d_H(G(x), G(y)) = \max\{\sup_{g \in G} d(g(x), G(y)), \sup_{g \in G} d(g(y), G(x))\} < \varepsilon.$$

□

Λήμμα 3.2.13. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε αν x, y είναι διαφορετικά σημεία με $d(x, y) < \delta$ και $G(x) < G(y)$, αυτά μπορούν να συνδεθούν με μια μονότονη μ -αλυσίδα διαμέτρου μικρότερης από ε , για κάθε $\mu > 0$.

Απόδειξη. Εστω $0 < \delta < \varepsilon$ όπως στο λήμμα 3.2.11 και $0 < \mu < \delta$. Εστω x, y δύο σημεία που βρίσκονται σε διαφορετικές G -τροχιές με $d(x, y) < \delta/2$. Σύμφωνα με το λήμμα 3.2.12, υπάρχει $\mu' > 0$, τέτοιο ώστε αν $d(x, y) < \mu'/3$ τότε

$$d_H(G(x), G(y)) < \mu/3.$$

Λόγω συνεκτικότητας της S^2 , υπάρχει $\mu'/3$ -αλυσίδα $\{x = \bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n = y\}$ με $0 < d(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}) < \mu'/3$, συνεπώς

$$d_H(G(\bar{x}_i), G(\bar{x}_{i+1})) < \mu/3, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Αφού κάθε G -τροχιά διαχωρίζει τα σημεία N, S , τα σημεία \bar{x}_i , για $i = 0, \dots, n$, ύστερα από κατάλληλη αναδιάταξη, μπορούν να επιλεγούν έτσι ώστε

$$G(x) < G(\bar{x}_1) < \dots < G(y).$$

Εστω \overline{xy} το γεωδαισιακό τόξο που συνδέει τα x, y , με μήκος μικρότερο από $\delta/2$. Λόγω συνεκτικότητας, το \overline{xy} για κάθε $k \in \{1, \dots, n\}$, τέμνει την απλή κλειστή καμπύλη $\gamma_k = G(\bar{x}_k)$ και επιλέγουμε ένα σημείο $x_k \in \gamma_k \cap \overline{xy}$. Αν τώρα για κάθε $k \in \{1, \dots, n\}$ ισχύει $d(x_k, x_{k+1}) < \mu$, τότε η ακολουθία $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι μ -μονότονη με διάμετρο μικρότερη από $\delta/2$.

Εστω ότι για κάποιο $r \in \{0, \dots, n-1\}$ ισχύει $d(x_r, x_{r+1}) \geq \mu$. Έχουμε ότι

$$d(x_r, \gamma_{r+1}) \leq d_H(\gamma_r, \gamma_{r+1}) < \mu/3.$$

Από την συμπαγεια του γ_{r+1} , υπάρχει $x'_{r+1} \in \gamma_{r+1}$ ώστε $d(x_r, x'_{r+1}) < \mu/3$. Άρα

$$d(x_{r+1}, x'_{r+1}) \leq d(x_{r+1}, x_r) + d(x_r, x'_{r+1}) < \delta/2 + \mu/3 < \delta.$$

Σύμφωνα με το λήμμα 3.2.10, ένα από τα τόξα στην γ_{r+1} με σύνορο τα σημεία x_{r+1}, x'_{r+1} έχει διάμετρο μικρότερη από ε . Διαιρούμε αυτό το τόξο σε $s \in \mathbb{N}$ μικρότερα τόξα, διαμέτρου το καθένα μικρότερης από $\mu/3$ και συμβολίζουμε τα σύνορα αυτών με

$$x'_{r+1} = z_{r+1}^0, z_{r+1}^1, \dots, z_{r+1}^s = x_{r+1}.$$

Επιλέγουμε s στο πλήθος G -τροχιές γ^i , $i = 0, \dots, s$ τέτοιες ώστε

$$\gamma_r = G(x_r) = \gamma^0 < \gamma^1 < \dots < \gamma^s = G(x_{r+1}) = \gamma_{r+1}$$

Τότε

$$d_H(\gamma^k, G(x_{r+1})) < \mu/3, \quad k \in \{1, \dots, s-1\},$$

διότι

$$d_H(G(x_r), G(x_{r+1})) < \mu/3.$$

Ακόμη ισχύει

$$d(z_{r+1}^k, \gamma^k) < d_H(\gamma^k, G(x_{r+1})) < \mu/3, \quad k \in \{1, \dots, s-1\}.$$

Από την συμπαγεία της γ^k , υπάρχει σημείο x_{r+1}^k επί της γ^k , ώστε

$$d(x_{r+1}^k, z_{r+1}^k) < \mu/3.$$

Άρα η ακολουθία

$$x_{r+1}^0 = x_r, x_{r+1}^1, \dots, z_{r+1}^s = x_{r+1}$$

είναι μια μονότονη μ - ακολουθία διότι,

$$d(x_{r+1}^k, x_{r+1}^{k+1}) \leq d(x_{r+1}^k, z_{r+1}^k) + d(z_{r+1}^k, x_{r+1}^{k+1}) < \mu/3 + 2\mu/3 = \mu$$

Ενώνοντας την παραπάνω μ - αλυσίδα με την υπόλοιπη, παίρνουμε τελικά μια μονότονη μ - αλυσίδα από το x στο y διαμέτρου $4\epsilon + \delta/2$. \square

Λήμμα 3.2.14. Για κάθε δύο διαφορετικά σημεία $x, y \in G(x) \cap G(y) = \emptyset$, υπάρχει ένα απλό τόξο που τα συνδέει και τέμνει κάθε G - τροχιά, το πολύ σε ένα σημείο.

Απόδειξη. Από το λήμμα 3.2.13 επιλέγουμε ακολουθία $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ θετικών μη μηδενικών όρων τέτοια ώστε, κάθε δύο σημεία x, y με $d(x, y) < \delta_n$, να μπορούν να ενωθούν για κάθε $\mu > 0$, με μονότονη μ - αλυσίδα διαμέτρου μικρότερης από $1/2^n$.

Θα κατασκευάσουμε επαγωγικά μια ακολουθία $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, της οποίας ο n - όρος είναι μια μονότονη δ_n - αλυσίδα, διαμέτρου μικρότερης από $1/2^n$.

Αρχίζουμε κατασκευάζοντας την μονότονη δ_0 - αλυσίδα X_0 από το x στο y σύμφωνα με το λήμμα 3.2.13. Αν έχει κατασκευαστεί η μονότονη δ_n - αλυσίδα $\{x_0^n, x_1^n, \dots, x_m^n\}$, τότε κάθε συνεχόμενο ζεύγος $\{x_k^n, x_{k+1}^n\}$ της X_n , μπορεί να συνδεθεί με μονότονη δ_{n+1} - αλυσίδα διαμέτρου μικρότερης από $1/2^{n+1}$. Έτσι με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε τελικά την μονότονη δ_{n+1} - αλυσίδα X_{n+1} από το x στο y , που μάλιστα περιέχει την X_n .

Θεωρούμε το σύνολο

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n.$$

Από το θεώρημα 2-27 του [6], προκύπτει ότι η κλειστότητα \overline{X} του X στην S^2 είναι απλό κλειστό τόξο από το x στο y . Θα δείξουμε ότι το \overline{X} , τέμνει το πολύ σε ένα σημείο κάθε G - τροχιά.

Πράγματι αν $x, y \in \overline{X}$ και $x \neq y$, τότε λόγω της μονοτονίας υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $z \in X_n$ ώστε $G(x) < G(z) < G(y)$ ή $G(y) < G(z) < G(x)$. Κατά συνέπεια, $G(x) \cap G(y) = \emptyset$. \square

Θεώρημα 3.2.15. Ένας κανονικός ομοιομορφισμός $f : S^2 \rightarrow S^2$ που διατηρεί τον προσανατολισμό είναι τοπολογικά συζυγής με στροφή.

Απόδειξη. Επιλέγουμε ένα απλό τόξο όπως στο λήμμα 3.2.14 από το N στο S και έστω

$$x(r), \quad r \in [0, \infty]$$

μια παραμετρικοποίηση του απλού τόξου με $x(\infty) = N$, $x(0) = S$.

Η ευκλείδεια στροφή κατά γωνία a , γύρω από τον z - άξονα είναι η απεικόνιση

$$R : S^2 \rightarrow S^2, \quad R(z) = ze^{ia}, \quad R(\infty) = \infty.$$

Θεωρούμε έναν συνεχή ισομορφισμό $\phi : S^1 \rightarrow G$ και την συνεχή απεικόνιση $h : S^2 \rightarrow S^2$ με $h(re^{i\theta}) = E(\phi(e^{i\theta}), x(r))$, όπου E είναι η απεικόνιση εκτίμησης. Έχουμε τώρα $h \circ R_a(re^{i\theta}) = h(re^{i(\theta+a)}) = E(\phi(e^{i(\theta+a)}), x(r)) = E(\phi(e^{ia}) \circ \phi(e^{i\theta}), x(r))$ (αφού η ϕ είναι ομομορφισμός ομάδων). Το τελευταίο μέλος της ισότητας είναι ίσο με $E(\phi(e^{ia}), E(\phi(e^{i\theta}), x(r)))$ το οποίο είναι ίσο με $E(\phi(e^{ia}), h(re^{i\theta}))$. Με άλλα λόγια $E_{\phi(e^{ia})} \circ h = h \circ R_a$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Τέλος η h είναι προφανώς επί και 1-1, αφού το τόξο που επιλέξαμε από το N στο S τέμνει κάθε G -τροχιά σε ένα ακριβώς σημείο και η ϕ είναι ισομορφισμός. Άρα η h είναι τοπολογική συζυγία μεταξύ της G και της ομάδας των Ευκλειδείων στροφών γύρω από τον z -άξονα. \square

3.3. Ομοιομορφισμοί με ολικά μη συνεκτικό ιδιάζων σύνολο

Εστω X ένας συμπαγής μετριοποιήσιμος χώρος και $f : X \rightarrow X$ ένας ομοιομορφισμός. Συμβολίζουμε με $\Sigma(f)$ την κλειστότητα του συνόλου των μη-κανονικών σημείων του f .

Πρόταση 3.3.1. *Το σύνολο $R = \{x \in X \setminus \Sigma(f) : x \in L(x, f)\}$ είναι ανοιχτό και κλειστό στο $X \setminus \Sigma(f)$.*

Απόδειξη. Εστω $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο R , ώστε $x_k \rightarrow x \in X \setminus \Sigma(f)$. Από την υπόθεση, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n_k > k$ ώστε $d(f^{n_k}(x_k), x_k) < \frac{1}{k}$. Κατά συνέπεια $f^{n_k}(x_k) \rightarrow x$ με $n_k \rightarrow +\infty$, άρα από το λήμμα 3.1.6, $x \in L(x, f)$. Επομένως το R είναι κλειστό στο $X \setminus \Sigma(f)$.

Αν $x \in R$ τότε $f^{n_k}(x) \rightarrow x$, όπου $n_k \rightarrow \pm\infty$. Το $X \setminus \Sigma(f)$ είναι ανοιχτό, συνεπώς υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\overline{B(x, \varepsilon)} \subset X \setminus \Sigma(f)$. Από την ισοσυνέχεια στο x υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $d(x, y) < \delta$ τότε $d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y)) < \varepsilon/2$. Ομως υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $k \geq k_0$ να ισχύει $d(f^{n_k}(x), x) < \varepsilon/2$. Άρα για κάθε $k \geq k_0$ και $y \in B(x, \delta)$ ισχύει $d(f^{n_k}(y), x) < \varepsilon$, δηλαδή $f^{n_k}(y) \in B(x, \varepsilon)$. Συνεπώς

$$\emptyset \neq L(y, f) \cap \overline{B(x, \varepsilon)} \subset L(y, f) \cap (X \setminus \Sigma(f)),$$

οπότε από το λήμμα 3.1.6 έχουμε $y \in L(y, f)$ για κάθε $y \in B(x, \delta)$. Αυτό δείχνει ότι το R είναι ανοιχτό στο $X \setminus \Sigma(f)$. \square

Λήμμα 3.3.2. *Εστω $x \in X \setminus \Sigma(f)$. Αν $x \in L(x, f)$, τότε για κάθε περιοχή U του x , υπάρχει ένας ακέραιος $N \geq 0$ τέτοιος ώστε*

$$O(x, f) \subset \bigcup_{i=0}^N f^i(U).$$

Απόδειξη. Εστω $x \in X \setminus \Sigma(f)$ με $x \in L(x, f)$. Από το λήμμα 3.1.6 έχουμε $cl(O(x, f)) = L^+(x, f) = L^-(x, f)$. Το $X \setminus \Sigma(f)$ είναι ανοιχτό. Εστω U μια συμπαγής περιοχή U του x , τέτοια ώστε $x \in U \subset X \setminus \Sigma(f)$.

Εστω $V \subset U$ μια ανοιχτή περιοχή του x . Για κάθε $y \in L(x, f) \cap U$ ισχύει $f^{n_k}(x) \rightarrow y$, που $n_k \rightarrow -\infty$. Επειδή τα x, y είναι κανονικά, θα έχουμε $f^{-n_k}(y) \rightarrow x$, απ' το λήμμα 3.1.6. Υπάρχει τότε $n(y) > 0$, ώστε $f^{n(y)}(y) \in V$. Λόγω της συνέχειας του $f^{n(y)}$, υπάρχει ανοιχτή περιοχή V_y του y τέτοια ώστε

$$f^{n(y)}(V_y) \subset V \subset U.$$

Η οικογένεια $\{V_y : y \in L(x, f) \cap U\}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του συμπαγούς συνόλου $L(x, f) \cap U$. Συνεπώς υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{V_1, \dots, V_r\}$ του $L(x, f) \cap U$, δηλαδή $L(x, f) \cap U \subset V_1 \cup \dots \cup V_r$.

Σε κάθε V_i , $i = 1, \dots, r$ αντιστοιχεί ένας θετικός ακέραιος n_i , τέτοιος ώστε $f^{n_i}(V_i) \subset V$. Αν $N = \max\{n_i : i \in \{1, \dots, r\}\}$, τότε για κάθε $z \in L(x, f) \cap U$, υπάρχει $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ τέτοιο ώστε $f^n(z) \in V$.

Επειδή μπορούμε να κατασκευάσουμε μια αύξουσα ακολουθία $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ακεραίων με $m_i \rightarrow +\infty$, τέτοια ώστε $m_{i+1} - m_i \leq N$ και $f^{m_i}(x) \in V \subset U$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$O(x, f) \subset L^+(x, f) = cl(O^+(x, f)) \subset \bigcup_{i=0}^N f^i(U).$$

□

Πόρισμα 3.3.3. *Εστω $x \in X \setminus \Sigma(f)$. Τότε $L(x, f) \cap \Sigma(f) \neq \emptyset$, αν και μόνο αν, $L(x, f) \subset \Sigma(f)$.*

Απόδειξη. Εστω $x \in X \setminus \Sigma(f)$ με $L(x, f) \not\subset \Sigma(f)$. Τότε από το λήμμα 3.1.6 έχουμε $x \in L(x, f)$. Από το λήμμα 3.3.2, για κάθε συμπαγή περιοχή $U \subset X \setminus \Sigma(f)$ του x , υπάρχει $N \geq 0$ τέτοιο ώστε

$$O(x, f) \subset \bigcup_{i=0}^N f^i(U) \subset X \setminus \Sigma(f).$$

Συνεπώς $L(x, f) \subset cl(O(x, f)) \subset X \setminus \Sigma(f)$, άρα $L(x, f) \cap \Sigma(f) = \emptyset$. □

Εστω $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία μη κενών υποσυνόλων, ενός συμπαγούς μετρηκοποιήσιμου χώρου X . Ορίζουμε ως $\liminf(A_n)$, το σύνολο των σημείων $x \in X$, έτσι ώστε κάθε περιοχή του $x \in X$ να έχει μη κενή τομή για όλα τα A_n , εκτός από πεπερασμένο πλήθος. Δηλαδή $x \in \liminf(A_n)$, αν και μόνο αν, υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $x_n \in A_n$, η οποία να συγκλίνει στο x .

Ως $\limsup(A_n)$, ορίζουμε το σύνολο των σημείων του X , για τα οποία κάθε περιοχή ενός τέτοιου σημείου, να έχει μη κενή τομή με τα A_n , για άπειρα $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή $x \in \limsup(A_n)$, αν και μόνο αν, υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $x_n \in A_n$, η οποία να έχει υποακολουθία που να συγκλίνει στο x .

Λήμμα 3.3.4. *Εστω X ένας συμπαγής μετρηκοποιήσιμος χώρος και $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία μη κενών συμπαγών, συνεκτικών υποσυνόλων του X , ώστε $\liminf A_n \neq \emptyset$. Τότε το $\limsup(A_n)$ είναι συμπαγές, συνεκτικό, μη κενό σύνολο.*

Απόδειξη. Προφανώς το $\limsup(A_n)$ είναι μη κενό και κλειστό υποσύνολο του X , άρα συμπαγές. Εστω ότι δεν είναι συνεκτικό. Τότε $\limsup(A_n) = A \cup B$, όπου τα A, B είναι μη κενά συμπαγή και $A \cap B = \emptyset$. Εστω $x \in A$ και $y \in B$. Επιλέγουμε μια ανοιχτή περιοχή U του A και μια ανοιχτή περιοχή V του B ώστε $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$. Αφού $\liminf(A_n) \neq \emptyset$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x \in \liminf(A_n)$. Υπάρχουν τώρα $x_n \in A_n$ ώστε $x_n \rightarrow x$. Επίσης υπάρχουν $n_k \rightarrow +\infty$ και $y_{n_k} \in A_{n_k}$ ώστε $y_{n_k} \rightarrow y$. Συνεπώς υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_{n_k} \in U$ και $y_{n_k} \in V$ για κάθε $k \geq k_0$. Συμπεραίνουμε τώρα ότι $A_{n_k} \cap \partial U \neq \emptyset$, αφού το A_{n_k} είναι συνεκτικό για κάθε $k \geq k_0$. Εστω $z_{n_k} \in A_{n_k} \cap \partial U$. Λόγω της συμπαγείας, η ακολουθία $(z_{n_k})_{k \geq k_0}$ έχει τουλάχιστον

ένα οριακό σημείο $z \in \partial U$. Προφανώς τότε $z \in \limsup(A_n)$ και $z \notin A \cup B$, που είναι αντίφαση. \square

Για την απόδειξη του παρακάτω λήμματος παραπέμπουμε στο [7], Th.4, Ch.12.

Λήμμα 3.3.5. *Εστω C ένα ολικά μη συνεκτικό συμπαγές υποσύνολο μετρικού χώρου και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχουν ξένα μεταξύ τους κλειστά σύνολα με $\text{diam}(G_i) < \varepsilon$, για κάθε $i = 1, \dots, n$, ώστε $C = G_1 \cup \dots \cup G_n$.*

Πόρισμα 3.3.6. *Αν C είναι ένα ολικά μη συνεκτικό συμπαγές, γνήσιο υποσύνολο ενός συμπαγούς μετριοποιήσιμου μετρικού χώρου X , τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή U του C , $U \neq X$, η οποία είναι ένωση από ξένα μεταξύ τους ανοιχτά σύνολα, το καθένα διαμέτρου μικρότερης από ε .*

Απόδειξη. Εστω $C = G_1 \cup \dots \cup G_n$ με $\text{diam}(G_i) < \varepsilon/3$ και τα G_i , $i = 1, \dots, n$, είναι συμπαγή και ξένα μεταξύ τους. Τότε

$$G_1 \cap \left(\bigcup_{i=2}^n G_i \right) = \emptyset.$$

Επειδή το G_1 είναι συμπαγές υπάρχει $0 < \delta < \varepsilon/3$ ώστε

$$0 < \delta < \inf_{x \in G_1} d(x, \bigcup_{i=2}^n G_i)$$

και υπάρχουν $x_1, \dots, x_m \in G_1$ ώστε αν

$$U_1 = \bigcup_{i=1}^m B(x_i, \delta),$$

τότε $G_1 \subset \overline{U_1}$. Προφανώς $\text{diam}U_1 < \delta + \varepsilon/3 + \delta < \varepsilon$ και

$$\overline{U_1} \cap \left(\bigcup_{i=2}^n G_i \right) = \emptyset.$$

Ομοια, παίρνοντας το $\overline{U_1}$ στην θέση του G_1 βρίσκουμε ένα ανοιχτό σύνολο U_2 με $G_2 \subset U_2$, $\text{diam}U_2 < \varepsilon$ και τέτοιο ώστε το $\overline{U_2}$ να είναι ξένο προς τα $\overline{U_1}, G_3, \dots, G_n$. Επαγωγικά λοιπόν φτάνουμε στο αποτέλεσμα. \square

Θεώρημα 3.3.7. *Εστω X ένας συμπαγής, τοπικά συνεκτικός, μετριοποιήσιμος χώρος και $f : X \rightarrow X$ ένας ομοιομορφισμός, τέτοιος ώστε το $\Sigma(f)$ να είναι ολικά μη συνεκτικό. Τότε:*

- (1) Για κάθε $s \in \Sigma(f)$, το οποίο δεν είναι κανονικό σημείο, υπάρχει $x \in X \setminus \Sigma(f)$ τέτοιο ώστε το s να ανήκει στο οριακό σύνολο $L(x, f)$ του x .
- (2) Για κάθε $x_0 \in X \setminus \Sigma(f)$ και για κάθε ακολουθία $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ του \mathbb{Z} , τέτοια ώστε $\lim f^{n_k}(x_0) = s \in \Sigma(f)$, η ακολουθία συναρτήσεων $(f^{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$, συγκλίνει ομοιόμορφα στο s , σε μια περιοχή U του x_0 και το σύνολο

$$E_s = \{x \in X \setminus \Sigma(f) : \lim f^{n_k}(x) = s\}$$

είναι ανοιχτό και κλειστό στο $X \setminus \Sigma(f)$.

Απόδειξη. (1) Εστω $s \in \Sigma(f)$ ένα σημείο το οποίο δεν είναι κανονικό. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ και ακολουθίες $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ του X , με $z_p \rightarrow s$ και $(n_p)_{p \in \mathbb{N}}$ του \mathbb{Z} , τέτοιες ώστε $d(f^{n_p}(z_p), f^{n_p}(s)) \geq \varepsilon$, για κάθε $p \in \mathbb{N}$.

Το $\Sigma(f)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του X . Διαφορετικά αν $X = \Sigma(f)$, τότε το $\Sigma(f)$ είναι τοπικά συνεκτικό, ολικά μη συνεκτικό συμπαγές σύνολο. Συνεπώς από το λήμμα 3.3.5, υπάρχουν ξένα μεταξύ τους συμπαγή σύνολα K_1, \dots, K_r τέτοια ώστε να ισχύει $\Sigma(f) = K_1 \cup \dots \cup K_r$. Κάθε K_i είναι ταυτόχρονα και ανοιχτό στο $\Sigma(f)$. Άρα οι συνεκτικές συνιστώσες του K_i είναι ανοιχτά και κλειστά υποσύνολα του $\Sigma(f)$, αφού ο $\Sigma(f)$ είναι τοπικά συνεκτικός. Λόγω της συμπάγειας του $\Sigma(f)$, υπάρχουν κατά συνέπεια ξένα μεταξύ τους συμπαγή και συνεκτικά σύνολα K'_1, \dots, K'_l , τέτοια ώστε να ισχύει $\Sigma(f) = K'_1 \cup \dots \cup K'_l$. Αφού ο $\Sigma(f)$ είναι ολικά μη συνεκτικός κάθε K'_i είναι μονοσύνολο. Συνεπώς το $X = \Sigma(f)$ θα είναι πεπερασμένο, άρα $X = \Sigma(f) = \emptyset$.

Έτσι το $\Sigma(f)$ είναι συμπαγές, ολικά μη συνεκτικό, γνήσιο υποσύνολο του X . Από το πόρισμα 3.3.6 υπάρχει περιοχή U του $\Sigma(f)$ με $U \neq X$, η οποία είναι ένωση από ξένα μεταξύ τους ανοιχτά σύνολα, διαμέτρου μικρότερης από ε . Αν

$$K = cl\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(X \setminus U)\right)$$

τότε $X \setminus U \subset K$, άρα $X \setminus K \subset U$. Αφού ο X είναι τοπικά συνεκτικός, οι συνεκτικές συνιστώσες του $X \setminus K$ είναι ανοιχτά σύνολα, με διάμετρο μικρότερη από ε . Εστω ότι $s \notin K$. Τότε το s ανήκει σε συνεκτική συνιστώσα C του $X \setminus K$ και το C είναι ανοιχτό. Άρα υπάρχει περιοχή V του s , τέτοια ώστε $s \in V \subset C \subset X \setminus K$.

Επειδή $z_p \rightarrow s$, για μεγάλο p , τα σημεία z_p και s θα βρίσκονται στο V , επομένως για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ τα $f^n(z_p), f^n(s)$ θα βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $X \setminus K$, άρα θα ισχύει $d(f^n(z_p), f^n(s)) < \varepsilon$. Αυτό αντιφάσκει με την υπόθεση, άρα $s \in K \subset X \setminus U$. Συνεπώς υπάρχουν ακολουθίες $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ του $X \setminus U$ και $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ του \mathbb{Z} , τέτοιες ώστε $f^{n_i}(x_i) \rightarrow s$.

Το $X \setminus U$ είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς X , άρα είναι συμπαγές. Η ακολουθία τότε $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, την οποία θεωρούμε ως την ίδια. Έτσι $x_i \rightarrow x \in X \setminus U$. Από το λήμμα 3.1.6 έχουμε $f^{n_i}(x) \rightarrow s$ άρα $s \in L(x, f)$.

(2) Εστω $x_0 \in X \setminus \Sigma(f)$ και $f^{n_k}(x_0) \rightarrow s \in \Sigma(f)$. Εστω ότι $x_0 \in L^+(x_0, f)$. Τότε $L^+(x_0, f) \not\subset \Sigma(f)$, αφού $x_0 \notin \Sigma(f)$. Κατά συνέπεια από το πόρισμα 3.3.4 έχουμε $L(x_0, f) \cap \Sigma(f) = \emptyset$, που αποτελεί αντίφαση, επομένως $x_0 \notin L^+(x_0, f)$. Ομοια δείχνουμε ότι $x_0 \notin L^-(x_0, f)$, άρα $x_0 \notin R = \{X \setminus \Sigma(f) : x \in L(x, f)\}$.

Από την πρόταση 3.3.1, το R είναι ανοιχτό και κλειστό στο $X \setminus \Sigma(f)$, άρα το $X \setminus R$ είναι ανοιχτό στο $X \setminus \Sigma(f)$. Επομένως υπάρχει V ανοιχτή περιοχή του $x_0 \in X \setminus R$ ώστε

$$V \subset X \setminus R \subset X \setminus \Sigma(f) \subset X.$$

Επειδή ο X είναι τοπικά συνεκτικός, υπάρχει συμπαγής και συνεκτική περιοχή U του x_0 , τέτοια ώστε

$$x_0 \in \text{int}U \subset U \subset V$$

δηλαδή $x \notin L(x, f)$, για κάθε $x \in U$. Για την ακολουθία των συμπαγών, συνεκτικών συνόλων $(f^{n_k}(U))_{k \in \mathbb{N}}$ έχουμε ότι $s \in \liminf(f^{n_k}(U))$. Συνεπώς από το λήμμα 3.3.4 το $\limsup(f^{n_k}(U))$ είναι συμπαγές και συνεκτικό σύνολο.

Αν το $\limsup(f^{n_k}(U))$ περιέχει κάποιο σημείο $y \in X \setminus \Sigma(f)$, θα υπάρχει ακολουθία $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ στο \mathbb{Z} και ακολουθία $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ του U , έτσι ώστε $f^{m_k}(x_k) \rightarrow y$. Λόγω της συμπάγειας του U , μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $x_k \rightarrow x \in U$. Από το λήμμα 3.1.6

έχουμε $f^{n_k}(x) \rightarrow y$, άρα $y \in L(x, f)$. Δηλαδή το $L(x, f)$ περιέχει κανονικό σημείο, άρα από το λήμμα 3.1.6 θα πρέπει $x \in L(x, f)$, αντίφαση με το ότι $x \in U$.

Άρα $\limsup f^{n_k}(U) \subset \Sigma(f)$ και λόγω της ολικής μη συνεκτικότητας του $\Sigma(f)$ προκύπτει ότι $\limsup f^{n_k}(U) = \{s\}$. Αυτό δείχνει ότι $U \subset E_s$, άρα το E_s είναι ανοιχτό στο $X \setminus \Sigma(f)$ και $f^{n_k}(x) \rightarrow s$ ομοιόμορφα για κάθε $x \in U$.

Έστω τώρα $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ακολουθία του E_s , με $x_i \rightarrow x$. Τότε για κάθε $i \in \mathbb{N}$ έχουμε $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x_i) = s$ και συνεπώς υπάρχει υπακολουθία $(x_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$ της $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, ώστε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x_{i_k}) = s.$$

Από το λήμμα 3.1.6 συνεπάγεται ότι $f^{n_k}(x) \rightarrow s$, άρα $x \in E_s$, αφού $x \in X \setminus \Sigma(f)$. Αυτό δείχνει ότι το E_s είναι κλειστό στο $X \setminus \Sigma(f)$. \square

Πόρισμα 3.3.8. *Έστω f ένας ομοιομορφισμός μιας συμπαγούς και συνεκτικής τοπολογικής πολλαπλότητας M , διάστασης ≥ 2 . Αν το $\Sigma(f)$ είναι ολικά μη συνεκτικό, τότε έχει πληθάρημο ≤ 2 .*

Απόδειξη. Έστω ότι το $\Sigma(f)$ είναι μη κενό και $s \in \Sigma(f)$, ένα μη κανονικό σημείο. Από το θεώρημα 3.3.7 υπάρχει $x_0 \in M \setminus \Sigma(f)$, τέτοιο ώστε $s \in L(x_0, f)$. Ας υποθέσουμε ότι $s \in L^+(x_0, f)$. Τότε υπάρχει ακολουθία $n_k \rightarrow +\infty$, τέτοια ώστε $f^{n_k}(x_0) \rightarrow s$.

Από το θεώρημα 3.3.7 το σύνολο $E_s = \{x \in M \setminus \Sigma(f) : \lim f^{n_k}(x) = s\}$ είναι ανοιχτό και κλειστό στο $M \setminus \Sigma(f)$ και η σύγκλιση $f^{n_k}(x) \rightarrow s$, είναι ομοιόμορφη σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του E_s . Το $M \setminus \Sigma(f)$ είναι συνεκτικό σύνολο αφού η M είναι συνεκτική και έχει διάσταση ≥ 2 .

Ομως $E_s \subset M \setminus \Sigma(f)$, άρα $E_s = M \setminus \Sigma(f)$. Επίσης ισχύει $L(x, f) \cap \Sigma(f) \neq \emptyset$, διότι $s \in \Sigma(f)$ και $s \in L(x, f)$, συνεπώς από το πόρισμα 3.3.3 θα έχουμε τελικά $\{s\} \subset L(x, f) \subset \Sigma(f)$, για κάθε $x \in M \setminus \Sigma(f)$. Επειδή το σύνολο $M \setminus \Sigma(f)$ είναι συνεκτικό και κάθε $y \in M \setminus \Sigma(f)$ έχει κατά τόξα συνεκτική περιοχή, το $M \setminus \Sigma(f)$ είναι κατά τόξα συνεκτικό (βλ. [5], Th.5.5, σελ. 116.)

Έστω a ένα τόξο που συνδέει τα σημεία x και $f(x)$ στο $M \setminus \Sigma(f)$. Τότε το σύνολο

$$\limsup(f^n(a([0, 1]))) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geq n} f^k(a([0, 1]))}$$

είναι μη κενό, συμπαγές, συνεκτικό, και βρίσκεται ολόκληρο στο $\Sigma(f)$. Διαφορετικά αν δεν ισχύει αυτό, θα υπάρχουν ακολουθίες $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ του \mathbb{Z} και $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ του $[0, 1]$, ώστε $f^{n_k}(a(t_k)) \rightarrow y \notin \Sigma(f)$, όταν $k \rightarrow +\infty$.

Λόγω της συμπαγείας του $[0, 1]$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $t_k \rightarrow t_0$ για κάποιο $t_0 \in [0, 1]$ και ότι $a(t_k) \rightarrow a(t_0)$, επομένως από το λήμμα 3.1.6 θα έχουμε $f^{n_k}(a(t_0)) \rightarrow y$, άρα $y \in L(a(t_0), f)$ με $a(t_0) \in M \setminus \Sigma(f)$ οπότε $L(a(t_0), f) \not\subset \Sigma(f)$, άτοπο.

Αφού $s \in \limsup(f^n(a([0, 1]))) \subset \Sigma(f)$ και το $\Sigma(f)$ είναι ολικά μη συνεκτικό, τότε $\{s\} = \limsup(f^n(a([0, 1])))$ και $L^+(x, f) = \{s\}$ για κάθε $x \in M \setminus \Sigma(f)$. Αν το $\Sigma(f)$ περιέχει και άλλο μη κανονικό σημείο $s' \neq s$, τότε $L^-(x, f) = s'$, για κάθε $x \in M \setminus \Sigma(f)$.

Πράγματι, αν $s' \neq s$ με $s' \in \Sigma(f)$ τότε υπάρχει $x'_0 \in M \setminus \Sigma(f)$, τέτοιο ώστε $s' \in L(x'_0, f) = \{s\} \cup L^-(x'_0, f)$. Άρα $s' \in L^-(x'_0, f)$, αφού $L^+(x, f) = \{s\}$ για κάθε $x \in M \setminus \Sigma(f)$. Συνεπώς το $\Sigma(f)$ δεν μπορεί να περιέχει περισσότερα από δύο σημεία. \square

3.4. Σύμμορφοι αυτομορφισμοί της S^2

Υπενθυμίζουμε ότι κάθε σύμμορφος αυτομορφισμός της σφαίρας του Riemann μπορεί να εκφρασθεί σαν ένας ρητός γραμμικός μετασχηματισμός

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

όπου οι συντελεστές είναι μιγαδικοί αριθμοί και ικανοποιούν την συνθήκη $ad - bc \neq 0$. Κάθε μη ταυτοτικός αυτομορφισμός αυτού του τύπου έχει δύο διαφορετικά σταθερά σημεία ή ένα διπλό σταθερό σημείο στην σφαίρα του Riemann. Οι μη ταυτοτικοί αυτομορφισμοί της σφαίρας του Riemann χωρίζονται στις παρακάτω τρεις κατηγορίες:

- (α) Ένας αυτομορφισμός f λέγεται *ελλειπτικός*, αν έχει δύο διαφορετικά σταθερά σημεία και το μέτρο της παραγώγου είναι 1.
- (β) Ένας αυτομορφισμός f λέγεται *υπερβολικός*, αν έχει δύο διαφορετικά σταθερά σημεία και το μέτρο της παραγώγου είναι διαφορετικό από 1.
- (γ) Ο αυτομορφισμός f λέγεται *παραβολικός*, αν έχει ακριβώς ένα διπλό σταθερό σημείο.

Ως προς τοπολογική συζυγία υπάρχει ένας μόνο παραβολικός αυτομορφισμός, ο οποίος είναι η μεταφορά $T(z) = z + 1$. Επίσης ο μετασχηματισμός $V(z) = 2z$ είναι ο μοναδικός υπερβολικός αυτομορφισμός. Τέλος υπάρχει μια μονοπαραμετρική οικογένεια ελλειπτικών αυτομορφισμών $R_a(z) = e^{ia}z$, οι οποίοι δεν είναι τοπολογικά συζυγείς μεταξύ τους.

Θεώρημα 3.4.1. *Ένας ομοιομορφισμός $f : S^2 \rightarrow S^2$, που διατηρεί τον προσανατολισμό και ο οποίος έχει ακριβώς ένα μη κανονικό σημείο, είναι τοπολογικά συζυγής με την απεικόνιση $T : S^2 \rightarrow S^2$, με $T(z) = z + 1$, $z \in \mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι $\Sigma(f) = \{N\}$. Προφανώς το N είναι σταθερό σημείο του f . Από την απόδειξη του πορίσματος 3.3.8 έχουμε ότι $L^+(x, f) = L^-(x, f) = \{N\}$, για κάθε $x \in S^2$. Επίσης, από το ίδιο πόρισμα, η ακολουθία συναρτήσεων $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγγλίνει ομοιόμορφα στο N , σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $X = S^2 \setminus \{N\}$.

Αν υπήρχε σημείο $x_0 \in X$ και $n_0 \in \mathbb{Z}$ ώστε $f^{n_0}(x_0) = x_0$, τότε το x_0 θα ήταν n_0 -περιοδικό σημείο, γεγονός που αντιφάσκει με το ότι $f^n(x_0) \rightarrow N$. Συνεπώς η ομάδα $G = \langle f \rangle$, δρα ελεύθερα επί του X . Θα δείξουμε ότι η G δρα γνήσια ασυνεχώς επί του X .

Εστω $x \in X$. Υπάρχουν συμπαγείς περιοχές U του x και V του N ώστε $U \cap V = \emptyset$. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση της $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ στα συμπαγή υποσύνολα του X , για κάθε $\varepsilon > 0$ με $B(N, \varepsilon) \subset V$, υπάρχει $n_0 = n_0(U, \varepsilon)$ ώστε $f^n(U) \subset B(N, \varepsilon) \subset V$, για κάθε $|n| \geq n_0$. Επίσης υπάρχουν συμπαγείς περιοχές U_1, \dots, U_{n_0} του x , τέτοιες ώστε $f^i(U_i) \cap U_i = \emptyset$ για $1 \leq |i| \leq n_0$. Επομένως για κάθε $x \in X$, υπάρχει η περιοχή

$$U_x = \bigcap_{i=0}^{n_0} U_i^\circ \cap U^\circ$$

ώστε $f^n(U_x) \cap U_x = \emptyset$, για κάθε $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Επειδή το X είναι κατά τόξα συνεκτικό και επειδή η G δρα ελεύθερα και γνήσια ασυνεχώς επί του X , η φυσική προβολή

$$\pi : X \rightarrow X/G$$

είναι απεικόνιση επικάλυψης του X/G και ο X είναι κανονικός χώρος επικάλυψης. Το $X \approx \mathbb{R}^2$ είναι απλά συνεκτικό και η G είναι η ομάδα των αυτομορφισμών της π , που είναι η καθολική επικάλυψη του X , άρα

$$\mathbb{Z} \cong G \cong \pi_1(X/G, x_0).$$

Συνεπώς ο χώρος X/G είναι ομοιομορφικός με τον κύλινδρο $S^1 \times \mathbb{R}$. Εστω τώρα $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$.

Ο κύλινδρος έχει καθολικό χώρο επικάλυψης τον $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ με απεικόνιση επικάλυψης την $\rho = \exp \times id$. Επίσης ο X είναι καθολικός χώρος επικάλυψης του X/G , διότι ο X είναι απλά συνεκτικός. Από την μοναδικότητα του καθολικού χώρου επικάλυψης, υπάρχουν ομοιομορφισμοί h, H ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} (X, \tilde{x}_0) & \xrightarrow{H} & (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, (0, 0)) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \rho \\ (X/G, x_0) & \xrightarrow{h} & (S^1 \times \mathbb{R}, (1, 0)) \end{array}$$

Έχουμε τώρα $H(f(\tilde{x}_0)) = (1, 0)$, αφού ο f είναι ο γεννήτορας της G και ο γεννήτορας των αυτομορφισμών της ρ είναι η απεικόνιση $(x, y) \mapsto (x+1, y)$. Επομένως $H(f(\tilde{x}_0)) = H(\tilde{x}_0) + (1, 0)$. Αν $p_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, είναι η προβολή στην πρώτη συντεταγμένη, η τελευταία ισότητα γράφεται

$$p_1(H(f(\tilde{x}_0)) - H(\tilde{x}_0)) = 1.$$

Για κάθε $x \in X$ ισχύει $\pi(x) = \pi(f(x))$ άρα $h(\pi(x)) = h(\pi(f(x)))$ οπότε έχουμε, $H(f(x)) = H(x) + (k, 0)$, ισοδύναμα $p_1(H(f(x)) - H(x)) = k$, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$.

Επειδή η συνάρτηση $F : X \rightarrow \mathbb{Z}$ με $F(x) = p_1(H(f(x)) - H(x))$, είναι συνεχής επί του συνεκτικού X και επειδή $F(x_0) = 1$, θα πρέπει να ισχύει $F(x) = 1$ για κάθε $x \in X$. Άρα $H(f(x)) = H(x) + (1, 0)$ για κάθε $x \in X$ ή ισοδύναμα

$$H(f(x)) = T(H(x)),$$

όπου $T(z) = z + 1$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Επίσης αν θέσουμε $H(N) = \infty$, τότε προφανώς $H(f(N)) = H(N) = \infty = T(\infty) = T(H(N))$ και ο $H : S^2 \rightarrow S^2$ είναι ομοιομορφισμός.

Άρα $f = H^{-1} \circ T \circ H$, δηλαδή ο f είναι τοπολογικά συζυγής με την T . \square

Θεώρημα 3.4.2. *Ενας ομοιομορφισμός $f : S^2 \rightarrow S^2$, που διατηρεί τον προσανατολισμό και ο οποίος έχει ακριβώς δύο μη κανονικά σημεία, είναι τοπολογικά συζυγής με την απεικόνιση $V : S^2 \rightarrow S^2$ με $V(z) = 2z$, $z \in \mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Εστω N, S τα δύο μη κανονικά σημεία. Τότε $\Sigma(f) = \{N, S\}$ και από την απόδειξη του πορίσματος 3.3.8 θα έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = N$ και $\lim_{n \rightarrow -\infty} f^n(x) = S$, ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $X = S^2 \setminus \Sigma(f)$. Ακριβώς όπως στο θεώρημα 3.4.1, η ομάδα $\langle f \rangle$ δρα ελεύθερα και γνήσια ασυνεχώς επί του κυλίνδρου X .

Ο X είναι κατά τόξα συνεκτικός και το ζεύγος (X, π) , όπου $\pi : X \rightarrow X/\langle f \rangle$ είναι η φυσική προβολή, αποτελεί καθολικό χώρο επικάλυψης του X/f . Επειδή ο f διατηρεί τον προσανατολισμό, ο $X/\langle f \rangle$ είναι προσανατολισμένη τοπολογική επιφάνεια.

Εστω $\gamma \subset X$ μια απλή κλειστή καμπύλη, που διαχωρίζει τα σημεία N, S . Αφού $f^n(\gamma) \rightarrow N$, υπάρχει $n \geq 2$ ώστε $f^n(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$. Οι απλές κλειστές καμπύλες $f^n(\gamma), \gamma$ είναι δύο τεμνόμενες και μη ομοτοπικές με σταθερά, συνεπώς αποτελούν σύνορο ενός κλειστού δακτυλίου A του κυλίνδρου X .

Το σύνολο

$$B = \text{int}A \cap f^{-n}(S^2 \setminus A)$$

είναι ανοιχτό και κλειστό στο A . Επειδή ο f διατηρεί τον προσανατολισμό, υπάρχουν σημεία του $\text{int}A$ που η εικόνα τους μέσω του f^n , βρίσκεται στο $S^2 \setminus A$. Άρα το σύνολο B είναι μη κενό, συνεπώς λόγω της συνεκτικότητας του $\text{int}A$ θα πρέπει να ισχύει $\text{int}A = B$. Αυτό σημαίνει ότι

$$X / \langle f^n \rangle \approx T^2.$$

Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $p : X / \langle f^n \rangle \rightarrow X / \langle f \rangle$ με $p([x]_{f^n}) = [x]_f$, είναι απεικόνιση επικάλυψης του $X / \langle f \rangle$.

Η $g : X / \langle f^n \rangle \rightarrow X / \langle f^n \rangle$ με $g([x]_{f^n}) = [f(x)]_{f^n}$ είναι ομοιομορφισμός. Αν υπάρχει g - σταθερό σημείο $[x]_{f^n}$, τότε

$$[f(x)]_{f^n} = [x]_{f^n},$$

άρα $f^{kn}(x) = f(x)$, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$, άρα $f^{kn-1}(x) = x$. Αποπο.

Επομένως η g δεν έχει σταθερό σημείο και επειδή $g^n = \text{id}$, η ομάδα $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}_n$ δρα γνήσια ασυνεχώς επί του $X / \langle f^n \rangle$. Συνεπώς ο $X / \langle f^n \rangle$ είναι κανονικός χώρος επικάλυψης του $X / \langle f^n \rangle / \langle g \rangle$ με απεικόνιση κάλυψης την φυσική προβολή

$$\pi : X / \langle f^n \rangle \rightarrow X / \langle f^n \rangle / \langle g \rangle.$$

Η απεικόνιση $P : X / \langle f^n \rangle / \langle g \rangle \rightarrow X / f$ με $P \circ \pi = p$, ορίζεται καλά, είναι συνεχής και επί. Εστω $P([x]_{f^n})_g = P([y]_{f^n})_g$. Τότε $y = f^k(x)$, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$. Υπάρχουν $q \in \mathbb{Z}$ και $r \in [0, n)$ ώστε $k = qn + r$, επομένως $y = f^{qn+r}(x) = f^{nq}(f^r(x))$ άρα

$$[y]_{f^n} = [f^r(x)]_{f^n} = g^r([x]_{f^n})$$

επομένως

$$[[x]_{f^n}]_g = [[y]_{f^n}]_g.$$

Άρα η P είναι ένα προς ένα και συνεπώς ομοιομορφισμός λόγω της συμπίεσης. Επομένως η p είναι απεικόνιση επικάλυψης. Από την πρόταση του [3], Ch.4, Th. 13.5, έχουμε ότι

$$0 = \chi(X / \langle f^n \rangle) = n\chi(X / \langle f \rangle).$$

Άρα $\chi(X / \langle f \rangle) = 0$, δηλαδή ο $X / \langle f \rangle$ είναι ομοιόμορφος με τον τόρο T^2 ή την φιάλη του Klein. Όμως ο $X / \langle f \rangle$ είναι προσανατολίσιμη τοπολογική επιφάνεια, συνεπώς είναι ομοιόμορφος με τον τόρο T^2 .

Επειδή η μοναδική, ως προς ισομορφισμό, απεικόνιση επικάλυψης του T^2 με ομάδα αυτομορφισμών \mathbb{Z} είναι η $\text{id} \times \exp : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow T^2$ υπάρχουν ομοιομορφισμοί h, H που καθιστούν το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} (X, \tilde{x}_0) & \xrightarrow{H} & (S^1 \times \mathbb{R}, (1, 0)) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \text{id} \times \exp \\ (X / \langle f \rangle, x_0) & \xrightarrow{h} & (S^1 \times S^1, (1, 1)) \end{array}$$

Αν $p_1 : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ και $p_2 : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, είναι οι προβολές στην πρώτη και δεύτερη συντεταγμένη αντίστοιχα, τότε

$$H(f(\tilde{x}_0)) = (p_1(H(\tilde{x}_0)), p_2(H(\tilde{x}_0)) + 1),$$

άρα

$$p_2(H(f(\tilde{x}_0)) - H(\tilde{x}_0)) = 1.$$

Αν $x \in X$ τότε $p_2(H(f(x)) - H(x)) = k$, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$.

Επειδή η συνάρτηση $F : X \rightarrow \mathbb{Z}$ με $F(x) = p_2(H(f(x)) - H(x))$, είναι συνεχής επί του συνεκτικού X και επειδή $F(x_0) = 1$, θα πρέπει να ισχύει $F(x) = 1$ για κάθε $x \in X$. Άρα

$$H(f(x)) = T(H(x)),$$

όπου $T : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ είναι η απεικόνιση $T(z, t) = (z, t + 1)$. Άρα για κάθε $x \in X$ έχουμε $f = H^{-1} \circ T \circ H$.

Εστω τώρα $R : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ ο ομοιομορφισμός με $R(re^{i\theta}) = (e^{i\theta}, \log r / \log 2)$. Τότε για κάθε $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, έχουμε

$$R(V(z)) = R(2z) = (e^{i\theta}, 1 + \frac{\log r}{\log 2}) = T(R(z)).$$

Άρα $T = R \circ V \circ R^{-1}$ και κατά συνέπεια

$$f = (H^{-1} \circ R) \circ V \circ (R^{-1} \circ H).$$

Θέτοντας $(H^{-1} \circ R)(0) = S$ και $(H^{-1} \circ R)(\infty) = N$, επεκτείνουμε συνεχώς, οπότε η τελευταία συζυγία ισχύει σ' ολόκληρη την σφαίρα S^2 . \square

Από τα θεωρήματα 3.2.15, 3.4.1 και 3.4.2 έχουμε τώρα τον ακόλουθο τοπολογικό χαρακτηρισμό των σύμμορφων αυτομορφισμών της σφαίρας.

Θεώρημα 3.4.3. *Εστω $f : S^2 \rightarrow S^2$, ένας ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό. Αν το $\Sigma(f)$ είναι ολικά μη συνεκτικό, τότε ο f είναι τοπολογικά συζυγής με έναν σύμμορφο αυτομορφισμό της S^2 .* \square

Βιβλιογραφία

- [1] K. Athanassopoulos, *Notes of the Ergodic Theory of Dynamical Systems from a geometric point of view*, unpublished notes.
- [2] G. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, 1972.
- [3] G. Bredon, *Geometry and Topology*, Springer - Verlag, 1993.
- [4] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin and Ya. G. Sinai, *Ergodic Theory*, Springer - Verlag, 1982.
- [5] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.
- [6] J. G. Hocking and C. S. Young, *Topology*, Addison - Wesley Publishing Company, 1961.
- [7] E. Moise, *Geometric Topology in Dimension 2 and 3*, Springer - Verlag, 1977.
- [8] Pommerenke, *Boundary Behavior of Conformal Maps*, Springer - Verlag, 1992.