ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Β. Ι. ΔΑΦΕΡΜΟΣ

Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΤΗΣ LOGO

Πανεπιστήμιο Κρήτης
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
Ρέθυμνο 1996

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η τριμελής επιτροπή που είχε την επιστημονική ευθύνη για την εργασία αυτή αποτελείτο απο τους παρακάτω καθηγητές:
α) Μακράκης, Β., επίκουρος καθηγητής, Παιδαγωγικού Τμήματος Δ.Ε. (επιβλέπων).
β) Βάμβουκας,Μ., καθηγητής, Παιδαγωγικού Τμήματος Δ.Ε. (μέλος).
γ) Τζανάκης, Κ., επίκουρος καθηγητής, Παιδαγωγικού Τμήματος Δ.Ε. (μέλος).
Ευχαριστώ τον κ. Μακράκη για την πολύπλευρη, συνεχή όλα αυτά τα χρόνια, επιστημονική του βοήθεια και συμπαράσταση σε μιά πληθώρα θεμάτων.
Ευχαριστώ τον κ. Βάμβουκα για τις έγκυρες μεθοδολογικές του παρατηρήσεις και υποδείξεις.
Ευχαριστώ τον κ. Τζανάκη για την εξαιρετικά λεπτή παρέμβασή του στο μαθηματικό επίπεδο. Οι ιδέες του για τη διδακτική των μαθηματικών και για την μαθηματική παιδεία γενικότερα, επηρέασαν τη σκέψη μου.
Θέλω επίσης να ευχαριστήσω τον κ. Π. Γ. Μιχαηλίδη, αναπληρωτή καθηγητή του Π.Τ.Δ.Ε , για την επιστημονική του βοήθεια στην πρώτη φάση της ανάπτυξης αυτής της εργασίας.
Ευχαριστώ ακόμη το κ. Γ. Μοτάκη, Ε.Δ.Τ.Π του Π.Κ. για την πάντα πρόθυμη τεχνική του βοήθεια στην εκτύπωση αυτής της εργασίας.
Ευχαριστώ τέλος, θερμά, τους φοιτητές του Π.Κ., Μαρή Νεκτάριο και Πλατανάκη Χάρη για τη σημαντική τους βοήθεια στη συλλογή των ερωτηματολογίων και στην εισαγωγή των στοιχείων στον υπολογιστή.

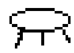
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

0.1 Σύντομη ιστορική αναδρομή.

Ενα από τα σημαντικότερα πνευματικά κατορθώματα του ανθρώπινου γένους είναι η εκλεπτυσμένη, επιτηδευμένη (sophisticated) θεώρηση των σχέσεων ΜΕΡΟΥΣ-ΟΛΟΥ (Kieren, 1976). Τα κλάσματα (και οι ρητοί αριθμοί που αυτά αναπαριστούν), υπήρξαν σε όλες σχεδόν τις περιόδους της ανθρώπινης ιστορίας. Για περίπου 4.000 χρόνια βλέπουμε την παρουσία των ρητών στους ανθρώπινους πολιτισμούς και ακόμη τις ιδιότητες της "αριθμητικής" τους. Ας δούμε σύντομα δυό παραδείγματα:

1) Στην αρχαία Βαβυλώνα (2000 π.Χ.) γραπτά μνημεία δείχνουν την ύπαρξη του εξηκονταδικού (sexagesimal) συστήματος αρίθμησης που είναι πρόδρομος του δικού μας δεκαδικού και κλασματικού συστήματος. Το Βαβυλωνιακό σύστημα δεν ήταν ένα κανονικό, θεσιακής αξίας, αριθμητικό σύστημα. Από αυτά που γνωρίζουμε, οι ρητοί αριθμοί εκφράστηκαν σαν ένα μίγμα δεκαδικής και εξηκονταδικής αναπαράστασης. Οπως έδειξε ο Wilder (1968) αυτό που σήμερα θεωρείται σαν το ακέραιο μέρος ενός δεκαδικού κλάσματος εκφράστηκε με βάση το 10, ενώ το "κλασματικό" μέρος (δηλαδή το μικρότερο του 1) έχει παρασταθεί σε εξηκονταδική μορφή.

2) Οπως έδειξε ο Mainville (1969), μελετώντας τον πάπυρο του Ahmes, στην αρχαία Αίγυπτο, οι ρητοί αριθμοί εκφράστηκαν με τη μορφή κλασματικών μονάδων. Για παράδειγμα, το κλάσμα 16/63, θα μπορούσε να παρασταθεί σαν 1/7 [+] 1/9. Τα κλάσματα 1/4 και 1/11 εκφράστηκαν με τα σύμβολα  και  αντίστοιχα.

Επίσης όλοι οι ρητοί, εκτός του 2/3 που αναπαρίστατο με το , εγράφοντο σαν αθροίσματα κλασματικών μονάδων. Αλλά, σε ακόμη υψηλότερα επίπεδα συνθετότητας, (δεν θάταν υπερβολή να μιλήσουμε για τρομακτικά θαυμαστή συνθετότητα της ανθρώπινης σκέψης), διαγράφονται οι απεικονίσεις των εφαρμογών των ρητών αριθμών στις πυραμίδες της Αιγύπτου (Tompkins, 1971).

0.2 Η αποσαφήνιση της ορολογίας

Στην ελληνική, αλλά και στη διεθνή βιβλιογραφία οι έννοιες, οι διάφορες μορφές, οι πράξεις, οι διαδικασίες και οι σχέσεις που αφορούν τα κλάσματα συχνά περιγράφονται με το γενικότερο όρο του ρητού αριθμού (rational number). Ο λογισμός, η φιλολογία δηλ. που αναπτύσσεται γύρω απο τον όρο αυτό φέρει το όνομα *αναλογική λογική* (proportional reasoning). Οφείλουμε να ξεκαθαρίσουμε απο την αρχή οτι τα κλάσματα με το γενικό αυτό όρο, του ρητού δηλ. αριθμού ενδιαφέρουν την παρούσα έρευνα. Αυτό γίνεται γιατί όπως θα δούμε παρακάτω η έννοια του κλάσματος δεν είναι μονοσήμαντη, υπάρχουν με άλλα λόγια πολλές και σημαντικές γωνίες θέασης της μαθηματικής αυτής έννοιας που αποδίδεται με τον όρο αυτό, οι οποίες επιβάλλεται να εξεταστούν ώστε να γίνει με ακρίβεια και πληρότητα η πραγμάτευσή της. Στην επιδίωξη αυτών των στόχων παρίσταται συχνά η ανάγκη ο όρος κλάσμα να αντικατασταθεί απο το γενικότερο και σαφέστατα πληρέστερο απο μαθηματική άποψη όρο του ρητού αριθμού. Σε κάθε περίπτωση είναι ανάγκη να ξεκαθαρίσουμε το περιεχόμενο των παρακάτω όρων που χρησιμοποιούνται σε αυτή την έρευνα:

1) Φυσικοί αριθμοί (natural numbers), είναι όσοι χρησιμοποιούνται στην απαρίθμηση ή αλλιώς καταμέτρηση δηλ. ανήκουν στο σύνολο {1,2,3,....}.

2) Οι φυσικοί αριθμοί και το μηδέν ονομάζονται Whole Numbers δηλ. ανήκουν στο σύνολο $N_0 = \{0,1,2,3...\}$.

3) Ακέραιοι[1] αριθμοί είναι οι φυσικοί και το μηδέν καθώς επίσης και οι προσθετικά αντίθετοί τους. Αρα, ανήκουν στο σύνολο Z ={...-3,-2,-1,0,1,2,3...}.
4) Ρητοί αριθμοί είναι όσοι έχουν τη μορφή α/β όπου τα α,β ανήκουν στους ακεραίους και β _ 0.
5) Διαμέριση (partitioning), είναι η διαίρεση ενός συνόλου σε υποσύνολα του ίδιου μεγέθους (Kieren & Southwell, 1979).
6) Μοναδοποίηση (unitizing), είναι η εννοιολογική ενέργεια για την παροχή ενότητας σε μιά συλλογή στοιχείων (Steffe & Cobb, 1988).
7) Πολλαπλασιαστική δομή είναι ένα σύνολο προβλημάτων που εμπλέκουν αριθμητικές πράξεις και έννοιες πολλαπλασιαστικού τύπου. Αυτά τα σύνολα εμπλέκουν τις πράξεις του πολλαπλασιασμού, της διαίρεσης, και τις έννοιες του κλάσματος και της αναλογίας (Vergnaud, 1983).
Τώρα, μπορούμε να προσδιορίσουμε το βασικό όρο της έρευνάς μας, το κλάσμα.
Ο Tzu-Ta (1992), επισημαίνει, στη διδακτορική του διατριβή, ότι ο όρος κλάσμα έχει χρησιμοποιηθεί απο τους ερευνητές με δυό διαφορετικές σημασίες. Κάποιοι ερευνητές (Nichols & Swain,1971) χρησιμοποιούν αυτόν τον όρο για να παραστήσουν το σύνολο όλων των ρητών αριθμών. Αλλοι ερευνητές (Nichols & Behr, 1982, Troutman & Lichtenberg, 1982, Underhill, 1972), χρησιμοποιούν τον όρο κλάσμα να σημαίνει το σύνολο των μή αρνητικών ρητών. Αυτή τη δεύτερη σημασία για το κλάσμα αποδέχεται ο Tzu-Ta, με την αιτιολογία ότι οι αρνητικοί ρητοί δεν είναι μέρος του μαθηματικού curriculum του δημοτικού σχολείου. Επομένως αυτός δέχεται το κλάσμα να σημαίνει ένα υποσύνολο των ρητών αριθμών δηλ. να παριστά τους αριθμούς της μορφής α/β όπου α ανήκει στο σύνολο N_0 και το β ανήκει στο σύνολο N. Με αυτή ακριβώς τη σημασία χρησιμοποιείται και στην παρούσα έρευνα.

[1] Το διδακτικό εγχειρίδιο των μαθηματικών της Ε' δημοτικού, ΟΕΔΒ, 1993-1994, όπου αναφέρει τον όρο "ακέραιοι αριθμοί ", δεν εννοεί , προφανώς, τους ακεραίους, αλλά τους φυσικούς αριθμούς. Το σύνολο των ακεραίων περιλαμβάνει και αρνητικούς αριθμούς τους οποίους δεν έχουν διδαχθεί οι μαθητές του δημοτικού σχολείου. Επομένως, στα παρακάτω κεφάλαια, όταν αναφερόμαστε στο αριθμητικό σύστημα των ακεραίων στο πλαίσιο του δημοτικού σχολείου θα εννοούμε το υποσύνολο εκείνο του Z το οποίο περιλαμβάνει τους θετικούς ακέραιους και το μηδέν. Με άλλα λόγια, εννοούμε τους φυσικούς αριθμούς και το μηδέν οι οποίοι αποδίδονται στη διεθνή βιβλιογραφία με τον όρο Whole Numbers.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Τα κλάσματα είναι χωρίς αμφιβολία η πιό προβληματική περιοχή στη στοιχειώδη μαθηματική εκπαίδευση επισημαίνει ο Streefland (1991). Οστόσο η σπουδαιότητά τους αναδεικνύεται απο το γεγονός ότι αυτά αποτελούν τον κορμό κάθε αναλυτικού προγράμματος για τα μαθηματικά της στοιχειώδους εκπαιδεύσεως στα σχολεία της Ευρώπης και της Αμερικής. Ο Streefland, θεωρεί ότι το πρόβλημα των κλασμάτων, σε ό,τι αφορά την μεθοδολογική τους προσέγγιση, ακόμη και σήμερα, παραμένει **αναπάντητο**. Κατά τον ίδιο ακόμη και οι πιο πρόσφατες έρευνες πάνω στο ζήτημα έφεραν πενιχρά, αν όχι απαράδεκτα αποτελέσματα. Η μεθοδολογία των σχολικών εγχειριδίων, αλλά και των δασκάλων εξακολουθεί να στηρίζεται σ'ένα ξεπερασμένο σχήμα. Η παρατιθέμενη θεωρία της αριθμητικής με αφηγηματικό τρόπο (δίκην ιστορίας) οδηγεί σε αντίθετα από τα προσδοκώμενα αποτελέσματα. Είναι ακριβώς το γνωστό ιστορικό μονοπάτι αριθμητικής που οδήγησε σε μια πραγματικά μηχανιστική εκπαίδευση, επισημαίνει ο ίδιος. Ωστόσο ο ερευνητής που έχει ασχοληθεί πάρα πολύ με το πραγματικά μεγάλο πρόβλημα των κλασμάτων (περισσότερες απο 20 σχετικές αναφορές[2] φέρουν το όνομά του) αναφέρεται προφανώς σε μορφές παραδοσιακής διδασκαλίας οι οποίες καθόλου δεν σχετίζονται με υπολογιστικά περιβάλλοντα, συστήματα διδασκαλίας με τη βοήθεια υπολογιστή (CAI,CAL,CATL), Νοήμονα ή Εμπειρα Διδακτικά Συστήματα. Κατά συνέπεια, η παραδοσιακή διδασκαλία με τις διάφορες μορφές της χρεώνεται στο ακέραιο τα αδιέξοδα και την αναποτελεσματικότητα στο χώρο των κλασμάτων.

Μιά σύντομη σκιαγράφηση του προβλήματος των κλασμάτων αποτελούν τα παρακάτω:

1) Η εννοιολογική[3] (conceptual) και διαδικαστική[4] (procedural) κατανόηση των κλασμάτων έχει πολύ απασχολήσει τα τελευταία χρόνια την έρευνα (Vergnaud, 1983, Tzu-Ta, 1992, Harrison & Greer, 1993, Philippou & Christou,1993).

---

[2] Στη βιβλιογραφία της παρούσας εργασίας αναφέρουμε μόνο τα άρθρα και τις δημοσιεύσεις του Streefland που είναι γραμμένες στα αγγλικά. Ο αναγνώστης που θα ήθελε μιά συνολική εικόνα των εργασιών του ίδιου για τα κλάσματα θα μπορούσε να ανατρέξει στο βιβλίο που εξέδωσε το 1991 από τον εκδοτικό οίκο Kluwer Academic Publishers.

[3] Σύμφωνα με τους Hiebert και Lefevre (1986), **εννοιολογική γνώση** σημαίνει "γνώση που είναι πλούσια σε σχέσεις. Αυτό εκλαμβάνεται σαν συνεκτικό πλέγμα γνώσεων, ένα δίκτυο μέσα στο οποίο οι συνδεόμενες σχέσεις είναι τόσο χαρακτηριστικές όσο τα διακριτά κομμάτια των πληροφοριών. (σελ. 3-4). Οι Hiebert και Wearne (1986), θεωρούν ότι εννοιολογική γνώση σημαίνει το κτίσιμο σχέσεων ανάμεσα σε υπάρχοντα κομμάτια γνώσης. Η γνώση αυτή αναπτύσσεται μέσω της δημιουργίας σχέσεων ανάμεσα στην υπάρχουσα γνώση και στις νέες πληροφορίες που μόλις εισήχθησαν στο σύστημα.

Σημ. (δική μας): Οι Putnam, Lambert και Peterson, (1990), θεωρούν με βαση τον παραπάνω ορισμό ότι οι όροι understanding ή meaningful learning, ουσιαστικά αναφέρονται στη γνώση η οποία είναι υψηλά αλληλένδετη μέσω σχέσεων στα διάφορα επίπεδα αφαίρεσης.

[4] Σύμφωνα με τους ίδιους ερευνητές, (Hiebert και Lefevre, 1986), **διαδικαστική** (procedural) γνώση σημαίνει δύο πράγματα : "α) γνώση του τυπικού συμβολικού συστήματος των μαθηματικών και β) γνώση των κανόνων, των αλγορίθμων, ή διαδικασιών που χρησιμοποιούνται για να λύσουν μαθηματικές εργασίες. Οι Putnam, Lambert και Peterson, (1990), ερμηνεύουν το πρώτο ότι αφορά τη γνώση των συμβατικών τύπων με τους οποίους εκφράζονται οι μαθηματικές έννοιες που συμπεριλαμβάνουν για παράδειγμα και την ικανότητα να αναγνωρίσουν ότι η σχέση 5+6=11 είναι μιά αποδεκτή σχέση ενώ η 5+ = 6 δεν είναι. Το δεύτερο μέρος της διαδικαστικής γνώσης αποτελείται από οδηγίες για την περάτωση διάφορων εργασιών. Να σημειωθεί ότι αυτές οι διαδικασίες λειτουργούν πάνω σε τυποποιημένα (standard) γραμμένα σύμβολα όπως είναι η περίπτωση των αλγορίθμων της διαίρεσης και του πολλαπλασιασμού, ή πάνω σε συγκεκριμένα αντικείμενα τα οποία δεν έχουν σχέση με τυποποιημένα σύμβολα.

Ο Τζανάκης (1996), χρησιμοποιεί ένα νέο, περισσότερο δόκιμο κατά τη γνώμη μας, όρο αντί του όρου διαδικαστική γνώση. Κάνει λόγο για **εργαλιακή γνώση,** η οποία έχει το ίδιο περιεχόμενο με αυτό που περιγράψαμε προηγούμενα για τη διαδικαστική γνώση.

2) Η κατανόηση των εννοιών του ρητού αριθμού συνεπάγεται ανάπτυξη πολλαπλών αναπαραστάσεων που αφορούν το πώς αριθμοί και σχετιζόμενες ποσότητες μπορούν πολύμορφα να συντεθούν, να απο-συντεθούν και να ανασυντεθούν (Streefland, 1991, Behr et al. 1991).

3) Οι ρητοί αριθμοί μπορούν να διαδραματίσουν ένα σημαντικό ρόλο στο μακρύ και πολυδαίδαλο μονοπάτι της αριθμητικής προς την άλγεβρα. Το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα σημαίνει μετακίνηση από σχέσεις μεταξύ αριθμών και συγκεκριμένων ποσοτήτων σε σχέσεις μεταξύ μεταβλητών (Carraher, 1993).

4) Μολονότι οι βασικές έννοιες των κλασμάτων γενικά εισάγονται από νωρίς (δημοτικό σχολείο), υπάρχουν πειστικές μαρτυρίες ότι οι περισσότεροι μαθητές του γυμνασίου δεν διαμορφώνουν ορθές σημασίες για τα κλάσματα (Ohlsson, 1988), (Kieren, 1988), (Bezuk & Bieck, 1993).

5) Βασικοί λόγοι για την πλημελή μάθηση των μαθητών φαίνεται να είναι η υπέρμετρη ανάπτυξη της διαδικαστικής σε βάρος της εννοιολογικής γνώσης, (Hiebert και Lefevre, 1986), το φτωχό παραδοσιακό πλαίσιο διδασκαλίας, η έλλειψη σύνδεσης της μαθηματικής γνώσης με καταστάσεις πραγματικού κόσμου, (Streefland, 1991), η απουσία σύνδεσης των μαθηματικών με τις ανάγκες και τα ενδιαφέροντα[5] των μαθητών (Hoyles, & Noss,1987), η μή εκμετάλλευση της διαισθητικής γνώσης των μαθητών, (Mack,1993), η πολυδιάστατη φύση του κλάσματος και η επιστημονική ανεπάρκεια των δασκάλων.

6) Είναι σαφές ότι στη μάθηση των ρητών αριθμών παρεμβαίνει το γνωστικό "διάκενο" αριθμητικής- άλγεβρας καθώς απαιτούνται σημαντικές αλλαγές στο γνωστικό και μαθηματικό επίπεδο για να εξασφαλιστεί μιά συνέχεια ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς χώρους όπως είναι οι ακέραιοι και οι ρητοί. Οι συμβολικές αναπαραστάσεις και ερμηνείες των ρητών παράγουν σοβαρές δυσκολίες στα παιδιά (Hiebert & Behr, 1988).

7) Καθώς η ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στο σημαίνον και στο σημαινόμενο για τον ακέραιο αριθμό αντικαθίσταται από την ένα προς πολλές αντιστοιχία για το ρητό αριθμό, είναι ανάγκη να προβούμε τουλάχιστο σε 4 ερμηνείες του ρητού αριθμού (part-whole, ratio, quotient, operator) (Kieren, 1988).

---

[5] Οι Hoyles και Noss (1987), κάνουν λόγο για μαθήματα στις μαθηματικές αίθουσες, κενά περιεχομένου ("lessons not about anything"), ενώ ο Streefland (1991), μιλάει για την ανάγκη ύπαρξης ρεαλιστικών καταστάσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών οι οποίες θα φέρουν την κοινωνική πραγματικότητα μέσα στην τάξη, ώστε να αποκτήσουν τα μαθηματικά νόημα και πραγματικό περιεχόμενο για τους μαθητές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ
ΣΚΟΠΟΙ ΚΑΙ ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

2.1 ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Σκοπός της έρευνας είναι να εξετάσει το εάν και κατά πόσο μπορεί να οικοδομηθεί με τη βοήθεια της LOGO ένα μαθησιακό περιβάλλον το οποίο να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες που σχετίζονται με τα κλάσματα.

2.2 ΟΙ ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Για το κτίσιμο ενός αποτελεσματικού μικρόκοσμου για την ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών του ρητού και κλασματικού αριθμού είναι ανάγκη να εστιάσουμε την προσοχή μας στα εξής:

1) Να διαπιστωθεί το γνωστικό επίπεδο των μαθητών στα κλάσματα (εσφαλμένες αντιλήψεις, συστηματικά λάθη, γνωστικά και μαθηματικά εμπόδια), ώστε να συγκροτηθεί η μαθητική συνιστώσα του μικρόκοσμου.

2) Να διαπιστωθεί το γνωστικό υπόβαθρο των δασκάλων στα κλάσματα ώστε να αποτελέσει ένα από τα στοιχεία της παιδαγωγικής συνιστώσας του μικρόκοσμου.

3) Να γίνει διερεύνηση των στάσεων των μαθητών απέναντι στα συνεχή και διακριτά μέσα ώστε στο μικρόκοσμο που θα οικοδομήσουμε να υπάρχουν τα ανάλογα προγράμματα στην τεχνική του συνιστώσα.

4) Να διερευνήσουμε εκείνες τις αλλαγές, στο γνωστικό και μαθηματικό επίπεδο, που θα μας επιτρέψουν να έχουμε ένα ομαλό πέρασμα των μαθητών από το αριθμητικό σύστημα των ακεραίων -και το οποίο τους είναι γνωστό πριν να φτάσουν στη διδασκαλία των κλασμάτων- στο σύστημα των κλασματικών αριθμών (πλαισιακή συνιστώσα του μικρόκοσμου).

5) Να εξετάσουμε το εάν και κατα πόσο η άτυπη ή αλλιώς διαισθητική (informal or intuitive) γνώση των μαθητών στα κλάσματα μπορεί να αποτελέσει μιά βάση για την ανάπτυξη της κατανόησης των κλασματικών εννοιών και διαδικασιών στο πλαίσιο του μικρόκοσμου (παιδαγωγική συνιστώσα του μικρόκοσμου).

6) Να διερευνήσουμε πιθανά εννοιολογικά μοντέλα του ρητού αριθμού που διαθέτουν και σε ποιό βαθμό οι μαθητές, ώστε να συγκροτήσουμε ανάλογα την παιδική συνιστώσα του μικρόκοσμου.

7) Να ελέγξουμε συγκριτικά την ανάπτυξη εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης των μαθητών στα κλάσματα ώστε να δοθεί ο κατάλληλος προσανατολισμός στην τεχνική συνιστώσα του μικρόκοσμου. Για παράδειγμα, πιθανό εύρημα ότι η διαδικαστική γνώση έχει ανάγκη ενίσχυσης, θα σημάνει αύξηση προγραμμάτων αλγοριθμικών υπολογισμών και αυξημένη χρήση μπιχαβιοριστικών στρατηγικών.

8) Θα πρέπει ακόμη να εξετάσουμε αν υπάρχει ή όχι διαφορά στην ικανότητα των παιδιών να επιλύουν με την ίδια ευχέρεια προβλήματα και ασκήσεις που εμπλέκουν τις ίδιες πράξεις, ώστε να συγκροτήσουμε ανάλογα την πλαισιακή συνιστώσα του μικρόκοσμου.

9) Να εξετάσουμε ποιά γραφικά μοντέλα χρησιμοποιούν οι μαθητές για την αναπαράσταση δεδομένου κλασματικού αριθμού.

10) Τελικός στόχος είναι να οικοδομήσουμε ένα μικρόκοσμο (με παιδαγωγική, παιδική, τεχνική και πλαισιακή συνιστώσα) που να μπορεί να λειτουργήσει σαν εννοιολογικό περιβάλλον για την ανάπτυξη των κλασματικών εννοιών και διαδικασιών.

2.3 Η ΑΝΑΓΚΑΙΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Οι Behr, Harel, Post, Lesh, (1992), επισημαίνουν ότι υπάρχει μιά ευρύτατη συναίνεση μεταξύ των ερευνητών τα τελευταία χρόνια ότι οι έννοιες των ρητών αριθμών αποτελούν ένα σοβαρό **εμπόδιο** στην μαθηματική εξέλιξη των παιδιών. Η συναίνεση αυτή πιστοποιείται απο το γεγονός της ομοιότητας των σχολίων ενός αριθμού δημοσιεύσεων στην περιοχή της κατασκευής της γνώσης των ρητών αριθμών από τα παιδιά (Freudenthal, 1983), (Ohlsson, 1987), (Kieren, 1988), (Ohlsson, 1988), (Bigelow, Davis, & Hunting, 1989).

Πρόκειται λοιπόν για ένα ζήτημα με μεγάλη συνθετότητα και σπουδαιότητα. Σε ό,τι αφορά τη σπουδαιότητα αξίζει να δούμε τις απόψεις των Behr, Lesh, Post και Silver (1983). Οι παραπάνω ερευνητές παρατηρούν ότι η σπουδαιότητα των κλασμάτων αναδεικνύεται μέσα από τρεις προοπτικές:

α) Πρακτική: Η γνώση των κλασμάτων διευκολύνει την ανάπτυξη της ικανότητας των παιδιών να αντιμετωπίσουν επιτυχώς καταστάσεις πραγματικής ζωής.

β) Ψυχολογική: Τα κλάσματα (ρητοί) εξασφαλίζουν ένα πλούσιο πεδίο, μέσα στο οποίο τα παιδιά, μπορούν να αναπτύξουν και να επεκτείνουν νοητικές δομές απαραίτητες για να συνεχιστεί η διανοητική τους ανάπτυξη.

γ) Μαθηματική: Η κατανόηση των κλασμάτων εξασφαλίζει τα θεμέλια πάνω στα οποία θα κτιστούν αργότερα στοιχειώδεις αλγεβρικές πράξεις (Το Q είναι σώμα).

Απ'όλα τα παραπάνω συνάγεται το συμπέρασμα πως ένα τέτοιο σύνθετο και σημαντικό ζήτημα είναι άξιο ν'αντιμετωπιστεί σαν αντικείμενο ανάπτυξης λογισμικού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

3.1 Μιά ιστορία από το χώρο του μύθου.

"Τα κλάσματα κρατούν μέσα τους ένα μεγάλο μυστικό[6]", είπε κάποτε ο Goethe. Στη Μέση Ανατολή κυκλοφορεί στην παράδοση μιά παλιά ιστορία[7] που λέει περίπου τα εξής:

" Ενας γέρος Αραβας, Anwar το όνομά του, πρίν πεθάνει παρήγγειλε να κληρονομήσουν τα παιδιά του τις καμήλες του με τον εξής τρόπο: Να δοθεί το 1/2 στον πρωτότοκο γιό του, το 1/4 στον δευτερότοκο και το 1/5 στον υστερότοκο γιό του. Ο γέρος πέθανε αφήνοντας πίσω του 19 καμήλες και τα παιδιά του δεν μπορούσαν να συμφωνήσουν στη μοιρασιά. Ενας δερβίσης, που περνούσε εκείνη την ώρα, καβάλα πάνω στην καμήλα του, παρακολούθησε αυτή τη διαμάχη, κατεβαίνει από την καμήλα του και προσφέρει τη βοήθειά του με ενθουσιασμό: "Σας δανείζω την καμήλα μου!" Ετσι η μοιρασιά των 20, τώρα πλέον, καμηλών είναι άνετη. Ο δερβίσης ανεβαίνει πάλι στην καμήλα του και συνεχίζει το δρόμο του αφήνοντας και τους τρείς κληρονόμους ικανοποιημένους. Τοιουτοτρόπως, εκπληρώθηκε η τελευταία θέληση του Anwar."

Ο μύθος αναφέρεται σκόπιμα γιατί ενέχει ένα ενδιαφέρον, εννοιολογικό στοιχείο. Κατά την άποψή μας ο μύθος ξεδιπλώνει μπροστά μας την πιό αφηρημένη όψη του κλάσματος, την ερμηνεία του κλάσματος ως τελεστή (operator).

3.2 Οι πρώτες αναφορές για τα κλάσματα και για τη Logo.

Η σχετική βιβλιογραφία για τα κλάσματα, ξεκινά το (1908) με τούς McLellan και Dewey, συνεχίζεται με τον Polkinghorne (1935), τους Gunderson & Gunderson (1957) και φτάνει ως τις μέρες μας (Armstrong, B. E., Novillis Larson, C.,1995), (Saenz-Ludlow A., 1995), (Mack, Dec 1995). Για τη γλώσσα Logo έχουμε πρώτη έκδοση (χωρίς υποστήριξη γραφικών) το 1968 απο τον Seymour Papert στη Μασσαχουσέτη των ΗΠΑ, το βιβλίο-αναφορά "Mindstroms" του ίδιου το 1980, και σήμερα γίνεται λόγος για ένα νέο επιστημονικό κλάδο που φέρει το όνομα Logo-mathematics (Moreira and Noss, 1995).

Οι McLellan kai Dewey (1908), εστιάζουν στη σπουδαιότητα της διαμέρισης για την κατανόηση των κλασματικών αριθμών. Αξίζει να αναφέρουμε ένα μικρό χωρίο απο την εργασία τους:

"Η κατάλληλη εισαγωγή στις αριθμητικές πράξεις γίνεται με την παρουσίαση του υλικού με ένα τέτοιο τρόπο που να αξιώνει μιά διανοητική λειτουργία του ρυθμικού parting και wholing -δηλ. μιά ποσότητα ή ένα μέγεθος πρέπει να παρασταθεί κατά ένα τέτοιο τρόπο ώστε να συμπεριλάβει και διαχωρισμό (διανοητικό διαχωρισμό, δηλ. των τιμών, όχι απαραίτητα φυσική διαμέριση), σε μέρη και επανασύνθεση των μερών στο όλο. Η ανάλυση προσδίδει κυριότητα της μονάδας μέτρησης. Η σύνθεση ή επανασύνθεση προσδίδει την απόλυτη τιμή του μεγέθους. Η διαδικασία απο μόνη της αποφέρει το λόγο, τον καθαρό αριθμό." [σελ. 83 στο ιταλικό πρωτότυπο].

Οι McLellan and Dewey (1908), ισχυρίζονται επίσης ότι οι διανοητικές πράξεις της μέρισης (parting) και της ολοποίησης (wholing), είναι απαραίτητες για την ανάπτυξη των αριθμητικών πράξεων που βαθμιαία τροφοδοτούν την αναγνώριση της λειτουργίας της μονάδας. Για την ιδέα της μονάδας οι ίδιοι παρατηρούν ότι "η μονάδα ποτέ δεν

---

[6] Τί ακριβώς εννοούσε ο Geothe ίσως να μή μάθουμε. Ομως η διερεύνηση των 6, τουλάχιστον, προσωπικοτήτων που φαίνεται να έχει το κλάσμα και το εννοιολογικό πέρασμα από τη μιά προσωπικότητα στην άλλη είναι όντως μιά διαδικασία μυστηριακή και συνάμα μαγευτική.

[7] Υπάρχουν πάμπολλες εκδοχές αυτής της ιστορίας αναφέρει στο βιβλίο που εξέδωσε το 1991 ο Streefland (σελ 5). Ολες όμως αναδεικνύουν τη δυσκολία που έχουν οι άνθρωποι με αυτή τη μαθηματική έννοια.

είναι ένα πράγμα, αλλά πάντοτε αυτό που χρησιμοποιείται σαν μιά βάση για καταμέτρηση και άρα μέτρηση κάποιου όλου ή μιάς ποσότητας." [σελ. 80 στο ιταλικό πρωτότυπο].

Αξίζει να σταθούμε για λίγο στις θέσεις του Piaget (1960). Κατ' αυτόν τα κλάσματα προσλαμβάνουν ένα διπλό χαρακτήρα:

"... αυτά είναι μέρη ενός πρωταρχικού (original), όλου- μέσα σε ένα φωλιασμένο (nested) σύστημα- και επίσης είναι ολότητες με όλα τους τα δικαιώματα, και σαν τέτοιες μπορούν παραπέρα να υποδιαιρεθούν... Η αναλλοιωσιμότητα του όλου είναι μιά απαραίτητη συνθήκη λειτουργικής υποδιαίρεσης, και ασκεί ίση πίεση για ποιοτική και ποσοτική υποδιαίρεση..." (σελ. 310-311). Τα συμπεράσματα απο τις απόψεις του Piaget είναι βαρύνουσας σημασίας. Πρώτο συμπέρασμα είναι ότι όσο απαραίτητο είναι, να θεωρήσουμε το κλάσμα σαν μια μαθηματική οντότητα, άλλο τόσο είναι απαραίτητο να αντιληφθούμε ότι αυτή η μαθηματική οντότητα παραμένει αναλλοίωτη κάτω από διαφορετικούς μετασχηματισμούς που συμπεριλαμβάνουν γραφικές ή συμβολικές αναπαραστάσεις. Παραπέρα η αναλλοιωσιμότητα των κλασμάτων θεωρείται επίσης απαραίτητη για την εννοιολογική κατανόηση των πράξεων των κλασμάτων (Khoury and Zazkis, 1994).

Οι νεότερες θέσεις του Piaget (1967), είναι σαφώς πιό προωθημένες και κάνουν λόγο για τον τρόπο που θα αποκτηθεί μιά ποιοτική λογική για τις κλασματικές εννοιες και πράξεις. Ο Piaget παρατηρεί ότι η συμβολικές αριθμητικές πράξεις είναι αποτέλεσμα λεπτών διανοητικών ενεργειών που λαμβάνουν χώραν, όταν δουλεύουμε μέσα σε πειραματικά πλαίσια. Ετσι, η απόκτηση ποιοτικής λογικής όχι μόνο δεν μπορεί να αποδοθεί σε συμβολικά συστήματα και αριθμητικές διαδικασίες , αλλά σε ατομική κατασκευαστική (constructive) δραστηριότητα η οποία εκδηλώνεται πρώτα σε συγκεκριμένες προβληματικές καταστάσεις και στη συνέχεια σε συμβολικά συστήματα (Saenz-Ludlow, A., 1994).

3.3 Ερευνητικές εργασίες και αναφορές σχετικές με την παρούσα.

Παρά το γεγονός ότι η σχετική βιβλιογραφία που αφορά τα κλάσματα ξεπερνά τις 300 αναφορές, μόνο μία αναφέρεται σε μιά ολοκληρωμένη προσέγγιση των κλασμάτων με τη LOGO (Harel, 1991).

Η Harel, μαθήτρια του Papert, θερμός υποστηρικτής του κονστρακτιονισμού[8] όπως η ίδια παραδέχεται, ακολουθεί μιά σαφή κονστρακτιβιστική στρατηγική αφήνοντας τους μαθητές της έρευνας να οικοδομήσουν μόνοι τους τη μάθηση και τη γνώση τους. Μέσα σε ένα πλούσιο υπολογιστικό περιβάλλον αναγορεύει το μαθητή σχεδιαστή λογισμικού (software designer), τον οποίο στη συνέχεια καλεί να λειτουργήσει μέσα σε ένα πλαίσιο πλήρους καπιταλιστικής παραγωγής. Οι μαθητές αναλαμβάνουν να σχεδιάσουν λογισμικό το οποίο θα πωλήσουν στη συνέχεια σύμφωνα με το νόμο προσφοράς και ζήτησης. Οπωσδήποτε, η διαδικασία στην οποία εμπλέκονται οι μικροί μαθητές με αυτή τη μέθοδο, συνεπάγεται πρώϊμη ανάπτυξη σπουδαίων ικανοτήτων για τον υποψήφιο, αυριανό πολίτη. Η ανάπτυξη του συναισθήματος της άμιλλας, της υπευθυνότητας, της ανάγκης συνειδητοποίησης ότι ζούμε σε μιά ανταγωνιστική κοινωνία, της ανάγκης να επιζητούμε την ποιότητα, είναι φανερό ότι καταγράφονται στα θετικά χαρακτηριστικά της προσέγγισης της Harel.

Ομως η πρόταση της Harel εγείρει, όπως αναμένεται, πελώρια επιστημολογικά ερωτήματα. Για παράδειγμα, ποιό ρόλο επιφυλάσσει στο δάσκαλο; Είναι εύκολο να ισχυριστούμε ότι δεν υπάρχει ανάγκη παιδαγωγικής παρέμβασης στην ανάπτυξη των εννοιών των κλασμάτων; Είναι δυνατό δηλ, να υποθέσουμε ότι οι μαθητές θα

[8] Η έννοια αυτή (constructionism), αναλύεται στο 5ο κεφάλαιο της έρευνας. Εδώ να πούμε απλώς ότι κατα τη γνώμη μας, πρόκειται για μιά απόπειρα λειτουργίας του κοστρακτιβισμού μέσα στο πραγματικό κοινωνικο-οικονομικό πλαίσιο.

ανακαλύψουν μόνοι τους μιά πληθώρα ενδιάμεσων στόχων για την κατάκτηση των κλασματικών εννοιών και διαδικασιών;

Ποίοι είναι αυτοί οι στόχοι; Για παράδειγμα, ένας από αυτούς τους ενδιάμεσους στόχους είναι να ενισχύσουμε στο μυαλό των μαθητών την πολλαπλασιαστική στρατηγική αφού οι όροι του κλάσματος είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους πολλαπλασιαστικά . Παράλληλα να μειώσουμε ή να ξερριζώσουμε, όπως επεδίωκε η Hart (1984), από τη σκέψη τους την προσθετική στρατηγική. Αυτό όμως είναι δουλειά του ερευνητή και του δασκάλου οι οποίοι ωστόσο απουσιάζουν από το πλαίσιο που προτείνει η Harel. 'Η μήπως οι μαθητές μπορούν να παίξουν ένα τέτοιο ρόλο; Ισως η Harel να πιστεύει κάτι τέτοιο δεδομένου ότι αφήνει στη διατριβή της να διαφανεί κάτι τέτοιο. Επίσης ο Papert (1980), επιφυλάσσει στο μαθητή και το διατυπώνει καθαρά στα περισσότερα γραπτά του έναν ρόλο μικρού ερευνητή.

Για να μη μακρηγορούμε στην προσέγγιση της Harel δεν υπάρχει κανενός είδους παιδαγωγική παρέμβαση, καμμία μαθηματική ή γνωστική αφετηρία, κανένας προσχεδιασμός ή ανάλυση και όλα αφήνονται στην ευθύνη και την ικανότητα των μαθητών.

Είναι αδύνατο να αναφερθούμε διεξοδικά στην προσέγγιση της Harel. Το πολύ σημαντικό που θα πρέπει να κρατήσει κανείς από τη διδακτορική της διατριβή είναι τούτο: Η ανάγκη να εμπλακούν οι μαθητές στην προγραμματιστική διαδικασία. Αυτό θα σημάνει πριν απ'όλα μεγάλα γνωστικά ωφέλη για τους μαθητές στο επίπεδο του συμβολισμού. Διότι πρόγραμμα σημαίνει κώδικας και κώδικας σημαίνει κατανόηση των συμβόλων και ενός πλήθους διαδικασιών που εμπλέκουν μαθηματικές έννοιες.

Μιά δεύτερη αναφορά είναι αυτή του Ary (1987). Στο σχετικό άρθρο του ο συγγραφέας δίνει μόνο ένα περίγραμμα της εργασίας του για το πώς μπορούν οι μαθητές να πετύχουν πρόσβαση σε αφηρημένες έννοιες, όπως είναι τα κλάσματα, κατασκευάζοντας μοντέλα με ένα εύκολο και παραστατικό τρόπο. Η LOGO, όπως ισχυρίζεται ο Ary, προσφέρει ένα ιδανικό περιβάλλον για την κατασκευή αυτών των μοντέλων, καθώς είναι εύκολη η γραφική αναπαράσταση των κλασματικών εννοιών και πράξεων που ενισχύεται αποφασιστικά με την προσθήκη χρώματος. Τα προαπαιτούμενα σ' αυτή την περίπτωση δηλ. των κατασκευαστικών μοντέλων που προαναφέρθησαν είναι ελάχιστα:

α)Γνώση βασικών LOGO εντολών (FD, BK, RT, LT, PU, PD, DRAW, HOME και REPEAT).

β) Ικανότητα να γράφουν και να σώζουν procedures οι μαθητές.

Ο Ary προτείνει ένα ξεκίνημα με την κατασκευή ενός μεγάλου ορθογώνιου κεντραρισμένου στην οθόνη και στην συνέχεια τη δημιουργία διαδικασιών (procedures) για να διαιρεθεί αυτό σε δεύτερα, τέταρτα, όγδοα και δέκατα έκτα. Ακολούθως κάνει λόγο για γραφική παράσταση των ισοδύναμων κλασμάτων χωρίς να αναφέρει την σχετική διαδικασία. Υποδεικνύει επίσης ένα τρόπο για τη γραφική αναπαράσταση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, την μεν πρώτη συνδυάζοντας με την κίνηση προς τα μπρος τη δε δεύτερη με την κίνηση τα πίσω. Τέλος, ο Ary ορίζει τον πολλαπλασιασμό με ένα τρόπο που προϋποθέτει την γνώση του θεωρητικού μοντέλου part-whole. Σ'αυτή την διαδικασία επίσης προστίθεται η γνώση της έννοιας της μεταβλητής.

Ωστόσο ο Ary δεν αποκαλύπτει πουθενά στο άρθρο του τα κίνητρα της δουλειάς του, την ύπαρξη σκοπών και στόχων ή τέλος την αναγκαιότητα μιας τέτοιας προσέγγισης των κλασμάτων. Ακόμη δεν είναι καθόλου σαφής η διάρθρωση της όλης διαδικασίας ώστε να μας πείθει ότι αυτή είναι εφαρμόσιμη σε μια σχολική τάξη.

Μια τρίτη αναφορά, είναι εκείνη του Stanley Ball (1988) λιγότερο σχετική με το θέμα καθώς δεν αναφέρεται στο περιβάλλον της LOGO, αλλά γενικά σε μια προσέγγιση των κλασμάτων με τον Η/Υ. Ωστόσο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι γίνεται έντονη εστίαση στο πέρασμα από το συγκεκριμένο (φυσικά μέσα, strips, κτλ.) στο αφηρημένο (έννοιες κλασμάτων).

Μια τέταρτη αναφορά, είναι εκείνη του Nason (1991), Nason (1993), ο οποίος κάνει μια απόπειρα προσέγγισης των κλασμάτων μέσα από τη δυναμική των Νοήμονων Διαδακτικών Συστημάτων (Intelligence tutoring systems). Εδώ δεν απουσιάζει το παιδαγωγικό υπόβαθρο της έρευνας ,όμως, όπως και στην πρώτη περίπτωση (T.S. Ary) δεν είναι ορατές οι μεθοδολογικές αφετηρίες. Ο Nason ονομάζει το πρόγραμμα του PRODIGY (παδί- θαύμα) και συγκλίνει την όλη δυναμική του προγράμματός του σε δύο στόχους: Πρώτον διάγνωση και Δεύτερον θεραπεία των λαθών που παρατηρούνται στο χώρο κοινών κλασμάτων. Ισχυρίζεται δε ότι το PRODIGY βοηθάει αποφασιστικά, όχι μόνο τους μαθητές, αλλά κυρίως τους καινούριους δασκάλους (novice teachers) που στερούνται της απαραίτητης πείρας για τη δουλειά τους και την οποία ενισχύει αποφασιστικά όπως ισχυρίζεται το "έμπειρο" πρόγραμμά του.

Η πέμπτη αναφορά, είναι σαφώς η σημαντικότερη παρά το γεγονός ότι θίγει μια μόνο διάσταση απο τις 6 του κλασματικού αριθμού (Ratio). Εξετάζει το κλάσμα μόνο απο την άποψη του λόγου πληθικοτήτων και αυτό μέσα απο ένα καθαρά παιδαγωγικού χαρακτήρα υπολογιστικό περιβάλλον (The Ratio and Proportion Microworld). Πρόκειται για την εργασία των C. Hoyles,R. Noss & R. Sutherland κατα τα έτη 1986-1989 στα πλαίσια του MICROWORLDS project στην Αγγλία (Department of Mathematics, Statistics and Computing,Institute of Education, University of London.) Ο μικρόκοσμος της έρευνας οικοδομείται με τη γλώσσα προγραμματισμού Logo. Η διδασκαλία που σχεδίασαν, πρότειναν και εκτέλεσαν οι Hoyles, Noss & Sutherland δεν στηρίζεται εξ ολοκλήρου στον **μικρόκοσμο**. Από την άλλη, δεν υποβαθμίζει καθόλου το ρόλο του δασκάλου ο οποίος παρεμβαίνει **κατάλληλα** καθόλη τη διάρκεια της διαδικασίας μάθησης, τόσο στο επίπεδο του μικρόκοσμου όσο και στο επίπεδο της παραδοσιακης διδασκαλίας. Με άλλα λόγια, ο τρόπος που υιοθετείται σ' αυτή την προσέγγιση από επιστημονική και παιδαγωγική άποψη είναι πολύ μακριά απο τη φιλοσοφία των νοήμονων διδακτικών συστημάτων (Intelligent tutoring systems). Πιό συγκεκριμένα, δάσκαλος όχι μόνο υπάρχει στο προτεινόμενο πλαίσιο και είναι αναντικατάστατος στο ρόλο του, αλλά επιπλέον χρησιμοποιεί αποδοτικότερα τα μέσα και τις μεθόδους (μαθηματική ανάπτυξη, φύλλα εργασίας με χαρτί και μολύβι,κτλ) της παραδοσιακής διδασκαλίας. Κι αυτό γίνεται παράλληλα με τις δραστηριότητες του μικρόκοσμου. Ετσι η παραδοσιακή διδασκαλία ενισχύεται σημαντικά με την υποστήριξη του μικρόκοσμου ο οποίος λειτουργεί όχι μόνο σαν μέσο εξοικονόμησης χρόνου, αλλά κυρίως σαν μέσο αισθητοποίησης των αφηρημένων κλασματικών εννοιών, σαν επιστημονικό αποδεικτικό μέσο και -το σημαντικότερο- σαν ελκυστικό μεθοδολογικό εργαλείο για την κατάκτηση της γνώσης. Τα προγράμματα (procedures) του μικρόκοσμου κτίζονται με συνεργασία μαθητών και δασκάλου πάνω σε προκαθορισμένους στόχους και τα αποτελέσματα των τροποποιήσεων και των εξόδων τους συμβάλλουν στη μεγιστοποίηση της αποτελεσματικότητας της μάθησης.

3.4 ΕΣΦΑΛΜΕΝΕΣ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ, ΚΟΙΝΑ ΛΑΘΗ ΚΑΙ ΑΔΥΝΑΜΙΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ

Οι περισσότερες έρευνες πάνω στη διδασκαλία και στη μάθηση των κλασμάτων εστιάζουν περισσότερο στις έννοιες, στη διάταξη και στην ισοδυναμία παρά στις πράξεις των κλασμάτων (Sowder, Bezuk, Sowder,1993).

Είναι σαφές, ότι οι μαθητές δεν έχουν εννοιολογική (conceptual), αλλά μάλλον διαδικαστική (procedural) γνώση των κλασμάτων. Οι Peck και Jencks (1981), υποστηρίζουν ότι τα παιδιά θα μπορούσαν σε πολλές περιπτώσεις να ακολουθήσουν κανόνες για πράξεις πάνω στα κλάσματα, αλλά δεν θα μπορούσαν να καταλάβουν γιατί αυτοί οι κανόνες δουλεύουν. Ετσι, βλέπουν ότι θα πρέπει στο επίπεδο της διδασκαλίας

να γίνει μιά μετατόπιση (shift), από την μάθηση κανόνων για πράξεις στα κλάσματα στην κατανόηση των κλασματικών εννοιών.
Παρόμοια ο Silver (1981), παρατηρεί ότι οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιήθηκαν απο μια κοινότητα σπουδαστών κολλεγίου για σύγκριση και πρόσθεση κλασμάτων δεν συνδέθηκαν με τις αναπαραστάσεις που οι ίδιοι χρησιμοποίησαν στην ερμηνεία των κλασμάτων. Οι περισσότεροι σπουδαστές της μελέτης του ήσαν ανίκανοι να εξηγήσουν διαδικασίες που αυτοί χρησιμοποίησαν για κλασματικούς υπολογισμούς. Ο Silver τονίζει τις συνδέσεις (connections), ανάμεσα στα μοντέλα που οι σπουδαστές έμαθαν και στη διαδικασία σύγκρισης και πράξεων πάνω στα κλάσματα.
Κοινές εσφαλμένες κατανοήσεις σχετικά με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση είναι εκείνες του τύπου "ο πολλαπλασιασμός κάνει μεγαλύτερο" και "η διαίρεση κάνει μικρότερο". Αυτές οι αντιλήψεις παραπέρα σημαίνουν, ότι στις προσδοκίες των σπουδαστών είναι ότι το γινόμενο είναι μεγαλύτερο απο τους δύο παράγοντες σε ένα πολλαπλασιασμό και ότι το πηλίκο είναι μικρότερο απο το διαιρετέο όπως συμβαίνει με τις περισσότερες whole number διαιρέσεις (Greer,1988, Sowder, 1988). Για παράδειγμα, οι σπουδαστές συχνά θα θεωρήσουν ότι η απάντηση 6: 1/2 είναι το 3. Πολλοί σπουδαστές θεωρούν ότι το 12 δεν είναι μια λογική απάντηση, επειδή πιστεύουν ότι η διαίρεση κάνει μικρότερο και επομένως η απάντηση θα πρέπει να είναι μικρότερη του 6 που είναι ο διαιρετέος. Αυτό το λάθος να σημειωθεί ότι είναι κυρίαρχο και στη σκέψη επίσης των (preservice) δασκάλων στοιχειώδους εκπαιδεύσεως (Graeber & Tirosh, 1988).
Οι σπουδαστές βελτιώνουν την απόδοσή τους καθώς αυξάνει η ηλικία τους μάλλον συντακτικά, παρά εννοιολογικά στα δεκαδικά κλάσματα, διαπιστώνουν οι Hiebert και Wearne (1985). Οι Sowder, Bezuk, Sowder (1993), παρατήρησαν σε τάξεις μελλοντικών δασκάλων ότι οι αποφάσεις δεκαδικών υπολογισμών πιό πολύ εκαθοδηγούντο απο κανόνες που απομνημόνευαν οι σπουδαστές παρά που είχαν λογικά κατανοήσει. Για παράδειγμα όταν τους καλούσαν να τοποθετήσουν την υποδιαστολή σε ένα γινόμενο δυο δεκαδικών αριθμών στο οποίο επιπρόσθετα μηδενικά είχαν εισαχθεί, αυτοί συνήθως εφάρμοζαν τον κανόνα της απαρίθμησης των δεκαδικών μερών και έδιναν μιά ολοφάνερα παράλογη απάντηση.
Η εννοιολογική ανεπάρκεια των μαθητών περί τα κλάσματα τεκμηριώνεται και από την Novillis (1976). Αυτή βρήκε οτι πολλοί μαθητές συσχέτισαν σωστά το κλάσμα 1/5 με ένα σύνολο 5 αντικειμένων γραμμοσκιάζοντας ένα απο αυτά, αλλά οι περισσότεροι απο αυτούς δεν κατάφεραν να συσχετίσουν το ίδιο κλάσμα με ένα σύνολο 10 αντικειμένων ακόμη και όταν παρατέθηκαν κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι ολοφάνερο ότι για κάθε 5 αντικείμενα έπρεπε να γραμμοσκιάσουν ένα! Η Novillis-Larson σε μιά μετέπειτα μελέτη της (1980), βρήκε ότι οι μαθητές φαίνεται να συγχέουν το γραμμή αριθμών (number line) με το μέρος- όλου (part-whole) μοντέλο.
Αρκετές επίσης μαρτυρίες στηρίζουν την άποψη ότι για τους ρητούς αριθμούς, το κυρίαρχο μοντέλο στη σκέψη των μαθητών είναι το part-whole. Ο Silver (1981), βρήκε ότι η κατανόηση των κλασμάτων στους νεαρούς ενήλικες περιορίζεται σε ένα μοντέλο, εκείνο των μερών του κύκλου. Παρόμοια η Kerslake (1986), βρήκε το part-whole model είναι το μόνο με το οποίο όλοι οι 13-χρονοι και 14-χρονοι μαθητές ήσαν εξοικειωμένοι. Οι ίδιοι μαθητές δεν αποδέχονταν εύκολα την υποκατασκευή πηλίκο (quotient) των κλασμάτων. Δηλαδή δύσκολα θα μπορούσαν να δεκτούν ότι το 3/4 σημαίνει μιά διαίρεση του 3 δια του 4. Τέλος πολλοί απο αυτούς δεν μπορούσαν να δεχτούν ότι το κλάσμα είναι ένας αριθμός και συχνά έκαναν λόγο για "δύο αριθμούς που ο ένας είναι πάνω στον άλλον". Παρόμοιες θεωρήσεις είχαν και πολλοί δάσκαλοι.
Οι Sackur-Grisvard και Leonard (1985) αναγνώρισαν δύο κοινά λάθη των μαθητών στη σύγκριση των δεκαδικών αριθμών:

α) Σύγκριση των δεκαδικών μερών των αριθμών ως αυτοί να ήσαν ακέραιοι. Γιά παράδειγμα 12.4 <12.17 γιατί όπως οι μαθητές το δικαιολογούν το 4<17 !!
β) Ο δεκαδικός αριθμός με τα πιό πολλά δεκαδικά ψηφία είναι ο μικρότερος. Για παράδειγμα 12.94<12.7 γιατί όπως διατείνονται οι μαθητές το 12.94 έχει εκατοστά ενώ το 12.7 έχει δέκατα μόνο. Οι ίδιοι ερευνητές πιστεύουν ότι αυτοί οι κανόνες είναι σταθερές, ενδιάμεσες οργανώσεις της γνώσης πο αναπτύχθηκε καθώς τα παιδιά βρίσκονται στη διαδικασία μάθησης της έννοιας της διάταξης των δεκαδικών αριθμών. Ακόμη ότι αυτές οι δομές είναι εξακολουθητικές και χρησιμοποιούνται συχνά για τουλάχιστον 3 με 4 χρόνια. Τέλος οι παραπάνω ερευνητές ενθαρρύνουν τους δασκάλους να εξετάσουν τις ασκήσεις που χρησιμοποίησαν στη διδασκαλία και να διαδεβαιώσουν τους μαθητές ότι δεν μπορούν να συμπληρώσουν αυτές τις ασκήσεις επιτυχώς χρησιμοποιώντας αυτούς και μόνο τους κανόνες.
Η ποσοτική κατανόηση των ρητών αριθμών είναι ένα άλλο σπουδαίο ζήτημα στο οποίο θα πρέπει να εστιάσουμε καθώς σχετίζεται με την εκτίμηση της λογικότητας των αποτελεσμάτων στους υπολογισμούς που εμπλέκουν κλάσματα. Εχει αναφερθεί και προηγουμένως ότι πολλοί μαθητές αναφέρουν συχνά ότι 1/2+1/3=2/5 προσθέτοντας δηλαδή τους αριθμητές και τους παρονομαστές. Αλλά, οι Sowder, Bezuk, Sowder (1993), πιστεύουν ότι οι μαθητές οι οποίοι έστω κάτι καταλαβαίνουν, έχουν με άλλα λόγια μιά κάποια αίσθηση του μεγέθους (bigness) του κλάσματος θα αντιληφθούν ότι το 2/5 δεν είναι μιά λογική απάντηση: σε ένα πρόβλημα που εμπλέκει πρόσθεση στο 1/2 μιάς κάποιας ποσότητας, το αποτέλεσμα είναι λογικό να μην είναι πιό μικρό απο το 1/2 αφού είναι φανερό ότι τα 2/5 είναι ποσότητα μικρότερη απο το μισό.
Η Kerslake (1986), βρήκε ότι οι 13 χρονοι και 14 χρονοι άγγλοι μαθητές βασίζονται στην αποστήθιση μαθημένων τεχνικών όταν δουλεύουν με τα κλάσματα. Πιστεύει ότι το θεμελιώδες πρόβλημα είναι ότι "με εξαίρεση συγκεκριμένων απλών παραδειγμάτων τέτοια όπως το 1/2 και το 1/4, τα κλάσματα δεν αποτελούν κανονικό μέρος του περιβάλλοντος του παιδιού και οι πράξεις πάνω σ' αυτά ορίζονται αφηρημένα" (σελ. 87).
Οι μαθητές παρόμοιων ηλικιών στις Ηνωμένες Πολιτείες, επίσης περιορίζουν τη γνώση στα κλάσματα βασιζόμενοι στην απομνημόνευση κανόνων και τεχνασμάτων (tricks), (Hunting, 1980, Kieren, 1988, Nik Pa, 1987, Payne, 1976). Αλλά πως εξηγείται αυτή η αποστήθιση; Ο Hunting (1980), υποστηρίζει ότι αυτό συμβαίνει, επειδή υπάρχει έλλειψη σύνδεσης ανάμεσα σε αυτό που οι μαθητές διδάσκονται και στον διαισθητικό (intuitive) τρόπο που λειτουργούν και τα προσωπικά μέσα που μεταχειρίζονται. Γιά το πώς θα γίνει αυτή η σύνδεση δεν έχουμε αρκετές ενδείξεις. Οι Steffe and Wood (1990), κάνουν λόγο για μιά μείζονα αλλαγή στη διδασκαλία και στη μάθηση των κλασμάτων χωρίς να την προσδιορίζουν ακριβώς. Οι Steffe, Battista, Clements (1991), προσθέτουν απλώς ότι η μείζων κίνηση που χρειάζεται είναι να δούμε πως οι περισσότεροι από μας βλέπουμε τη φύση των κλασμάτων.
Μιά ευρεία προσέγγιση του ζητήματος με συγκεκριμένες προτάσεις επιχειρεί η Mack (1990,1993). Στην εργασία της αυτή, αναφέρεται στη συσχέτιση των συμβόλων και των διαδικασιών που αφορούν τα κλάσματα με τη διασθητική γνώση. Η πρόταση στην οποία καταλήγει η Mack αναδύεται μέσα από ένα μακροσκελή[9] διάλογο (σελ. 96-97) το οποίο διεξάγει με κάποιο μαθητή και είναι: Για να συνδέσουμε σύμβολα και

---

[9] Παρά το γεγονός ότι πρόκειται για έναν σημαντικό διάλογο που μας δείχνει με σαφή τρόπο πως να κινηθούμε για να συνδέσουμε συμβολική και διαισθητική γνώση, είναι αδύνατο να τον μεταφέρουμε στο κείμενό μας για προφανείς λόγους. Σχετικά με την διαισθητική γνώση των παιδιών όμως, η οποία είναι ένα φλέγον ζήτημα σήμερα για την έρευνα και η οποία ίσως αποτελέσει το βασικό διάδρομο για την υπέρβαση του μεγάλου προβλήματος των κλασμάτων ως προς τη διδασκαλία και τη μάθησή τους θα επανέλθουμε σε ειδική παράγραφο.

διαδικασίες που αφορούν τα κλάσματα με τη διαισθητική γνώση είναι ανάγκη στην αλληλεπίδρασή μας με το μαθητευόμενο να ακολουθήσουμε επίμονα και με συνεχή τρόπο τη στρατηγική του "μπροστά-πίσω". Πιό συγκεκριμένα, να κινηθούμε κατάλληλα, δηλ. ανάλογα με τις γνωστικές ανάγκες της περίστασης μέσα στην διαδικασία αλληλεπίδρασης με το μαθητευόμενο, ανάμεσα σε προβλήματα που παρουσιάζονται συμβολικά και σε παρόμοια με αυτά προβλήματα που παρουσιάζονται σε οικεία για το μαθητή πλαίσια.

3.5 ΓΝΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΔΥΝΑΜΙΕΣ ΤΩΝ ΔΑΣΚΑΛΩΝ

Στο προηγούμενη παράγραφο συχνά είδαμε τα ίδια τα λάθη των μαθητών να επαναλαμβάνονται πανομοιότυπα κι απο τους δασκάλους.Για να ολοκληρώσουμε την εικόνα στο πρόβλημα αδυναμιών των δασκάλων για τους ρητούς αριθμούς θα πρέπει να δούμε τις απόψεις ερευνητών που δούλεψαν με μελλοντικούς δασκάλους.
Οι Post, Harel, Behr, & Lesh (1988), Ball (1988), παρατήρησαν ότι ένα 30% των δασκάλων intermediate- επιπέδου, δεν είναι σε θέση να διδάξουν ένα σημαντικό κομμάτι της διδακτέας ύλης στα μαθηματικά. Για παράδειγμα, ένας μεγάλος αριθμός δασκάλων εμφανίστηκε να μην έχει κατανοήσει τις έννοιες των ρητών αριθμών που δίδασκε στο σχολείο και ακόμη να δείχνει ουσιαστική έλλειψη μαθηματικών και μεθοδολογικών ικανοτήτων. Πιό συγκεκριμένα, μόνο ένα 53% ήταν σε θέση να διατάξει σωστά (από το μικρότερο στο μεγαλύτερο), 6 μικρότερα της μονάδας κλάσματα (5/8, 3/10, 3/5, 1/4, 2/3, και 1/2). Επίσης, μόνο το 57% των δασκάλων θα μπορούσε να διατάξει σωστά 4 δεκαδικούς αριθμούς (0.3, 0.3157, 0.32 και 0.316). Ακόμη, μόνο δύο στους τρείς μπορούσαν να βρούν τον ελλείποντα παρονομαστή στη σχέση: $\frac{4}{6} = \frac{6}{x}$ Τέλος, μόνο δύο στους τρείς μπορούσαν να βρούν τον ελλείποντα αριθμητή στη σχέση $\frac{8}{15} = \frac{x}{5}$.

Οι Post, Harel, Behr, & Lesh (1991), έδειξαν ότι πολλοί (intermediate-Level) δάσκαλοι έχουν δυσκολία με εννοιολογικά και υπολογιστικά (computational) προβλήματα ρητών αριθμών. Οι δάσκαλοι αυτοί ήσαν ανίκανοι να εξηγήσουν τις ενέργειες λύσης που οι ίδιοι πραγματοποίησαν πέρα απο το καθαρά διαδικαστικό επίπεδο. Τα λάθη που αυτοί έκαναν δεν οφείλονται προφανώς σε "αβεβαιότητα, απροσεξία, ή σε μοναδικές εργασιακές (situational) συνθήκες [αλλά μάλλον] είναι το αποτέλεσμα προηγούμενων εμπειριών στις μαθηματικές τάξεις" (Radatz, 1980, p. 16). Οι δάσκαλοι των οποίων η μαθηματική προπαρασκευή δεν τους έδωσε τη ευκαιρία να διερευνήσουν και να στοχαστούν πάνω στις ιδέες των ρητών αριθμών που αυτοί μορφοποίησαν κατά τη διάρκεια της παιδικής τους ηλικίας μπορούν να επικριθούν ότι συνεχίζουν να μεταφέρουν εσφαλμένες αντιλήψεις και λαθεμένα πρότυπα μέσα στις δικές τους αίθουσες. Θα πρέπει ακόμη να επισημάνουμε ότι τα συστηματικά λάθη δεν είναι καθόλου εύκολο να εξαλειφθούν, ιδιαίτερα χωρίς βοήθεια (Resnick & Omanson, 1987). Την διαβρωτική και ανθεκτική φύση των εσφαλμένων αντιλήψεων τεκμηριώνει επαρκώς ο Confrey (1987).
Περισσότερα για τη έρευνα πάνω στη διδασκαλία των ρητών αριθμών αναφέρονται στην εργασία της Brown (1993).

Παρά την πολυσύνθετη (όπως είδαμε) φύση του κλάσματος και των σχετικών όρων που την συγκροτούν σαν ένα ξεχωριστό, σημαντικό χώρο (Ohlsson, 1988), δεν της έχει δοθεί η δέουσα προσοχή και συχνά διδάσκεται με ένα ασήμαντο τρόπο. Οι περισσότεροι δάσκαλοι προχωρούν στη διδασκαλία των διαδικαστικών κανόνων για τους ρητούς χωρίς προηγουμένως να ισχυροποιήσουν την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών πάνω στο ζήτημα.

Οι Fennema και Frank (1992), ισχυρίζονται ότι "αρχίζει να συσσωρεύεται η μαρτυρία που υποστηρίζει την άποψη ότι, όταν ένας δάσκαλος διαθέτει εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών, αυτό επηρεάζει τη διδασκαλία στην τάξη με ένα θετικό τρόπο" (σελ. 151). Είναι φανερό υποστηρίζουν οι Graeber, Tirosh & Glover, 1989), ότι εάν οι ίδιοι οι δάσκαλοι έχουν δυσκολίες δεν είναι πιθανό να διευκολύνουν την κατασκευή σημασιών για τα κλάσματα, ούτε βέβαια να αναγνωρίσουν σχετικά λάθη που διαπράττουν οι μαθητές.

Πολλές μαθηματικές σχολές στον κόσμο πιστεύουν οτι είναι ζητούμενο να υπάρξουν κύκλοι μαθημάτων πανεπιστημιακού επιπέδου στους δασκάλους στοιχειώδους εκπαιδεύσεως σαν ευκαιρίες ανασκόπισης εννοιών και ανανέωσης δεξιοτήτων.Αλλά, όταν τέτοιοι κύκλοι μαθημάτων κινούνται πέρα απο την ανασκόπιση του περιεχομένου για να επιτρέψουν στους μελλοντικούς δασκάλους να εξετάσουν τις δικές τους κατανοήσεις για το περιεχόμενο, να διερευνήσουν και ενδεχομένως να επαναορίσουν το περιεχόμενο με ενα τέτοιο τρόπο που θα τους επιτρέψει να το διδάξουν, αυτό ίσως είναι μιά πολύ μεγάλη πρόκληση για ένα τμήμα μαθηματικών. Το γεγονός ότι κάποιοι μελλοντικοί δάσκαλοι πιστεύουν ότι ήδη γνωρίζουν το περιεχόμενο επειδή αυτοί είναι ικανοί διαδικαστικά (proceduraly), ενώ άλλοι πιστεύουν ότι δεν είναι ικανοί να κατανοήσουν το περιεχόμενο, αυτό είναι κάτι που μεγιστοποιεί την πρόκληση. Αρκετοί δάσκαλοι κατέχουν αντιλήψεις για τη φύση των μαθηματικών, για τη δομή τους και αυτή η κατανόηση των μαθηματικών τους φέρνει σε αντίθεση με άλλους της κοινότητας των μαθηματικών.

Οι μελλοντικοί δάσκαλοι εισαγόμενοι στα πανεπιστήμια έχουν αποκτήσει εκτεταμένη διαδικαστική γνώση (procedural knowledge). Από τα ερευνητικά δεδομένα των Sowder, Bezuk, Sowder (1993), πιστοποιείται ότι οι εισαγώμενοι φοιτητές έχουν μάθει και σωστούς και εσφαλμένους κανόνες για την εύρεση ισοδύναμων κλασμάτων, για την εκτέλεση πράξεων στα κλάσματα και στους δεκαδικούς αριθμούς, για τη σύγκριση και διάταξη των ρητών αριθμών. Οπως έδειξε ο Silver (1981), τουλάχιστον για τα κλάσματα μεταξύ του μηδενός και του ένα, οι εισαγώμενοι φοιτητές έχουν εξοικειωθεί με το part-whole μοντέλο των ρητών αριθμών και το παρουσιάζουν ως το γραμμοσκιασμένο κομμάτι μιάς γεωμετρικής περιοχής κατα προτίμηση κύκλου. Οι πλέον ικανοί έχουν το χαρακτηριστικό που ο Hatano (1988), ονομάζει routine expertise. Αυτό σημαίνει οτι είναι ικανοί να εκτελούν διαδικασίες γρήγορα και με ακρίβεια. Μολονότι οι μελλοντικοί δάσκαλοι έχουν αυτό το χαρακτηριστικό που τους επαρκεί ίσως για την απο μέρα σε μέρα δουλειά τους με τους ρητούς αριθμούς, αυτό δεν τους επιτρέπει να πάνε τη διδασκαλία πιό πέρα απο τη διαδικαστική της διάσταση. Αντίθετα ένας δάσκαλος, υποστηρίζει ο Hatano, (οπ. παρ.) θα πρέπει να διακρίνεται απο ένα είδος προσαρμοστικής επιδεξιότητας (adaptive expertise), την οποία ορίζει σαν την κατανόηση του πώς και γιατί δεδομένες διαδικασίες δουλεύουν, πώς αυτές μπορούν να προσαρμοστούν σε νέες καταστάσεις, και πότε αυτές μπορούν να εγκαταλειφθούν προς χάριν μιας άλλης διαδικασίας.

Η ανάγκη λοιπόν εννοιολογικής, κατά πρώτο και κύριο λόγο, αλλά και διαδικαστικής γνώσης, κατά δεύτερο λόγο, είναι εμφανής για μιά αποτελεσματική διδασκαλία των ρητών αριθμών. Φαίνεται ότι οι δάσκαλοι του μέλλοντος δεν έχουν άλλη επιλογή. Η ανασφάλεια που αυτή τη στιγμή διακατέχει πολλούς από αυτούς οφείλεται, κυρίως, (όπως είδαμε), στην έλλειψη επιστημονικής ανεπάρκειας και εκφράζεται με σαφήνεια από ένα συνάδελφό τους: "Εγώ έπρεπε να διδάξω μαθηματικά στην τετάρτη τάξη και δεν ήξερα πώς να πολλαπλασιάσω κλάσματα" (Fredericou & Folerou, 1991, σελ. 66). Το ερώτημα που τίθεται είναι εάν και κατα πόσο μπορεί το computer να προσφέρει ένα πλαίσιο για την εννοιολογική κυρίως, αλλά και για τη διαδικαστική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών γενικά και ειδικά των πεπλεγμένης φύσης ρητών αριθμών.

3.6 Η ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΗ Ή ΑΤΥΠΗ ΓΝΩΣΗ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ

Τα τελευταία χρόνια οι ερευνητές στο χώρο της μαθηματικής παιδείας έχουν εστιάσει σε προβλήματα που σχετίζονται με την **κατανόηση των μαθηματικών απο τους μαθητές και στο πως αυτή η κατανόηση αναπτύσσεται** (Hiebert & LeFevre,1986, Romberg & Carpenter, 1986, Hiebert & Carpenter, 1992). Και παρά το γεγονός ότι πολλά δεν έχουν διαλευκανθεί στο ζήτημα αυτό, υπάρχει συναίνεση μεταξύ των ερευνητών, όπως παρατηρεί η Mack (1993), στο ότι **αυτή η κατανόηση εξαρτάται από τις σχέσεις που το άτομο σχηματίζει ανάμεσα στην νέα και στην υπάρχουσα γνώση** (Brownell & Sims, 1946, Greeno, 1978, Resnick & Ford, 1981, Nickerson, 1982, Riley, Greeno, & Heller, 1983, Hiebert & LeFevre, 1986, Carpenter, 1986). Το ερώτημα που άμεσα αναφύεται είναι με ποιό τρόπο γίνεται απο τους μαθητές η μορφωποίηση των σχέσεων ανάμεσα στην υπάρχουσα και στη νέα γνώση. Οι πρόσφατες θεωρίες πιστεύουν ότι μια μέθοδος να παρακολουθήσουμε το σχηματισμό των σχέσεων ανάμεσα στην υπάρχουσα και στη νέα γνώση είναι **να εστιάσουμε στον τρόπο που οι φοιτητές κατασκευάζουν τις σημασίες των μαθηματικών συμβόλων.** Παρά το γεγονός ότι οι θεωρίες αυτές δεν είναι ακόμη πλήρως ανεπτυγμένες και επίσης έχουν κάποιες διαφορές μεταξύ τους, οι περισσότερες θεωρητικές συζητήσεις συγκλίνουν στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές κατασκευάζουν τις σημασίες των μαθηματικών συμβόλων ταιριάζοντας τα τυπικά σύμβολα με άλλες αναπαραστάσεις που είναι όμως γι' αυτούς σημαντικές. Τέτοιου είδους αναπαραστάσεις είναι συγκεκριμένες καταστάσεις πραγματικής ζωής ή ενέργειες πάνω σε συγκεκριμένες αναπαραστάσεις (Kaput, 1987), (Hiebert, 1988), (Kieren, 1988), (Hiebert & Carpenter, 1992). Σημαντικό συμπέρασμα απο τα παραπάνω το οποίο και κρατούμε για την ανάλυση που επακολουθεί είναι το παρακάτω: Κατανόηση των μαθηματικών απο τους μαθητές σημαίνει κατανόηση των σχέσεων ανάμεσα στη νέα και στην υπάρχουσα γνώση και αυτή με τη σειρά της σημαίνει κατανόηση του τρόπου κατασκευής των σημασιών των μαθηματικών συμβόλων. Και μετά απο τη αυτή την αναγκαία εισαγωγή ας αναφερθούμε στο κύριο πρόβλημα.

Αρκετοί ερευνητές έχουν αρχίσει τα τελευταία χρόνια να ασχολούνται με το πρόβλημα της γνώσης που οι μαθητές φέρουν στην τυπική διδασκαλία και κατα πόσο αυτή η γνώση επηρεάζει και τη μάθηση των μαθητών και τη διδασκαλία των δασκάλων (Brown, Collins, & Duguid, 1989), (Carpenter & Fennema, 1988), (Greeno, 1986). Αυτή η γνώση αποδίδεται με διάφορα ονόματα: Η Leinhardt (1988), την αποδίδει με τον όρο *intuitive* γνώση, η Brown et al., (1989), *situated* γνώση, οι Ginsburg (1982), Saxe (1988), την αποδίδουν με τον όρο informal γνώση. Οποιοδήποτε όμως όνομα και αν χρησιμοποιείται αυτού του τύπου η γνώση μπορεί να χαρακτηριστεί σαν εφαρμοσμένη, γνώση περιστάσεων πραγματι-κής ζωής, που κατασκευάζεται ξεχωριστά απο κάθε ένα παιδί και που μπορεί να είναι σωστή ή εσφαλμένη. Επιπλέον αυτή η γνώση μπορεί να θεωρηθεί σαν απάντηση στα προβλήματα που τίθενται στο πλαίσιο των καταστάσεων πραγματικής ζωής με τις οποίες είναι εξοικειωμένο το παιδί. Ενα ερώτημα εδώ είναι: αυτή η γνώση είναι προϊόν τυπικής διδασκαλίας ή πλαισίου έξω απο αυτήν; Η απάντηση της Leinhardt (1988), είναι ότι αυτή η γνώση προέρχεται περισσότερο απο ατομικές, πραγματικής ζωής εμπειρίες παρά αποτελεί προϊόν τυπικής διδασκαλίας.

Ετσι η κατασκευή των σημασιών για τα μαθηματικά σύμβολα και τις διαδικασίες φαίνεται να γίνεται με το ταίριασμα (matching), των συμβολικών αναπαραστάσεων με την διαισθητική γνώση των παιδιών (Lawler, 1981, (Carpenter & Moser, 1983, Riley et al., 1983, Lambert, 1986, kieren, 1988, Leinhardt, 1988, Mack, 1990). Να σημειώσουμε εδώ ότι οι περισσότεροι απο τους ερευνητές αυτούς έχουν αναφερθεί κυρίως στους ακέραιους αριθμούς. Αλλά είτε μιλάμε για ακέραιους, είτε για ρητούς αριθμούς το κυρίαρχο ερευνητικό ερώτημα είναι: Η διαισθητική γνώση μπορεί να

αποτελέσει μια επαρκή βάση για την ανάπτυξη της κατανόησης αυτών των μαθηματικών χώρων;
Η Hart (1988), αλλά και οι Lesh, Post, & Behr (1988), έχουν υποστηρίξει ότι εάν οι αρχικές αντιλήψεις των μαθητών είναι περιορισμένες, αυτό ίσως τους εμποδίσει να κατασκευάσουν σχέσεις ανάμεσα στις διάφορες υποκατασκευές, κάτι το οποίο είναι κεφαλαιώδους σημασίας στην ανάπτυξη μιάς ευρείας κατανόησης της έννοιας του ρητού αριθμού. Τώρα να επιχειρήσουμε μια απάντηση στο κυρίαρχο ερώτημα που να αφορά τους ρητούς αριθμούς. Οι Van den Brink & Streefland (1979), Leinhardt (1988), Lamon (1989), Mack (1990), έδειξαν ότι οι μαθητές φτάνουν στη διδασκαλία των κλασμάτων έχοντας ένα πλούσιο απόθεμα διαισθητικής γνώσης που αφορά τίς έννοιες και τις διαδικασίες των ρητών αριθμών. Απο αυτούς τους ερευνητές οι Mack, Leinhardt , καθώς επίσης και ο Streefland (1993), είναι κατηγορηματικοί ως προς το εν λόγω ερώτημα. Πιστεύουν δηλ. ότι η διαισθητική γνώση των μαθητών είναι δυνατόν προσφέρει μια επαρκή βάση για την κατασκευή σημασιών για τα τυπικά σύμβολα και τις διαδικασίες των ρητών αριθμών. Οι Hart (1988), Lesh et al. (1988), Sowder (1988), δεν συμμερίζονται αυτές τις θέσεις και διατυπώνουν την άποψη ότι η διαισθητική γνώση των μαθητών ίσως και να περιορίσει την κατανόηση των ρητών αριθμών και αυτό είναι κάτι που εξαρτάται απο τη φύση αυτής της γνώσης. Ακόμη προσθέτουν ότι η υπόθεση των ρητών αριθμών με την πραγματικά σύνθετη μαθηματική τους υπόσταση (βλ. υποκατασκευές, Kieren 1988) δεν μπορεί να συγκριθεί με εκείνη των ακεραίων αριθμών. Η διαισθητική αντίληψη των μαθητών για τους ρητούς αριθμούς περισσότερο αντανακλά τη γνώση τους για τους ακέραιους αριθμούς, παρά τις κρίσιμες αρχές που διέπουν την κατανόηση των ρητών όπως τις περιγράφουν οι Behr, Harel, Post, Lesh (1993).
Ας αναφερθούμε όμως στα χαρακτηριστικά της διαισθητικής γνώσης των μαθητών ώστε να μας δοθεί η ευκαιρία να αναλύσουμε περισσότερο όσα απο τα παραπάνω δεν εξηγήσαμε επαρκώς.
Η Resnick (1986), παρεμβαίνει σημαντικά στην ανατομία της έννοιας και διακρίνει δύο χαρακτηριστικά στην διαισθητική γνώση:
α) Η διαισθητική γνώση είναι αυτο-μαρτυρούμενη ή αφ' εαυτής προφανής (self-evident), και καταφανής στο πρόσωπο που την έχει.
β) Η διαισθητική γνώση είναι εύκολα προσεγγίσιμη και έχει συνδεθεί στη μνήμη με μιά πληθώρα ιδιαίτερων καταστάσεων. Επομένως προσφέρει μιά βάση για μιά πολύ ευέλικτη εφαρμογή καλά γνωστών εννοιών, συμβολισμών και μετασχηματιστικών κανόνων. Ετσι ελευθερώνει τους ανθρώπους από την υπερβολική εξάρτηση των τυπικών αλγόριθμων και τους επιτρέπει να ανακαλύψουν διαδικασίες για να λύσουν προβλήματα που προηγούμενα δεν μπορούσαν να αντιμετωπίσουν και να προωθήσουν την τυπική διδασκαλία στην κατασκευή της μαθηματικής γνώσης.
Η Mack (1993), βρήκε ότι αν ήθελε κάποιος να εστιάσει την προσοχή του στα αρχικά στάδια της ανάπτυξης της διαισθητικής γνώσης των μαθητών για τους ρητούς θα μπορούσε να διακρίνει τα παρακάτω:
α)Οι διαισθητικές στρατηγικές των παιδιών θεωρούν τα προβλήματα των ρητών σαν προβλήματα διαμέρισης ακέραιων αριθμών.
β) Η διαισθητική αντίληψη των μαθητών για τους ρητούς επηρεάζει την ικανότητά τους να εννοιολογικοποιήσουν τη μονάδα.
γ) Η διαιθητική γνώση των μαθητών αρχικά είναι αποσυνδεδεμένη από τη γνώση των τυπικών συμβόλων και διαδικασιών που σχετίζονται με τους ρητούς αριθμούς.
Ας εξετάσουμε όμως πρώτα, το ζήτημα των αλληλεπιδράσεων διαισθητικής γνώσης και περιβάλλοντος. Οι Scribner (1984), Lave, Murtaugh, & de la Rocha (1984), Carraher, Carraher, & Schlimann (1987), Saxe (1988), έχουν υποστηρίξει ότι τα παιδιά και αλλά και οι ενήλικοι συχνά λύνουν μαθηματικά προβλήματα που εμπλέκουν καταστάσεις

πραγματικής ζωής χρησιμοποιώντας στρατηγικές που έχουν ανακαλύψει απο την αλληλεπίδραση τους με το περιβάλλον.
Οι διαισθητικές στρατηγικές των παιδιών και των ενηλίκων παρατηρούν οι Hiebert και Behr (1988), κάνουν σκληρή χρήση της κατάστασης ή του πλαισίου με τα συγκεκριμένα και ορατά του υποστηρίγματα και λίγο εξαρτώνται απο τις συμβολικές διαχειρήσεις (manipulations). Επιπλέον αυτές οι στρατηγικές είναι συχνά απο τη φύση τους δημιουργικές και καθιστούν ικανούς παιδιά και ενήλικες να λύνουν προβλήματα με ένα λογικό και σχετικά απαλλαγμένο λαθών τρόπο. Ας δούμε όμως ένα παράδειγμα: Οι Lave, Murtaugh, & de la Rocha (1984), βρήκαν ότι όταν ενας ενήλικας ρωτήθηκε να βρεί τα τρία τέταρτα των δύο τρίτων μιάς κούπας τυρί (cottage cheese), αυτός προχώρησε στις εξής κινήσεις: γέμισε μια διαβαθμισμένη κούπα των δύο τρίτων με τυρί, στην συνέχεια την άδειασε μέσα σε ένα πινάκιο (cutting board), την προσάρμοσε μέσα σε ένα κύκλο, σημάδεψε με δύο τεμνόμενες κάθετες το μέσο αυτού του κύκλου, απομάκρυνε το ένα τέταρτο και προσέφερε το υπόλοιπο.
Πέρα απο τα παραπάνω, παλιές και νέες μαρτυρίες τεκμηριώνουν την άποψη ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν επιτυχώς τις διαισθητικές τους στρατηγικές για να λύσουν μια πληθώρα προβλημάτων με ρητούς αριθμούς (Gunderson & Gunderson, 1957, Van den Brink & Streefland, 1979, Tourniaire, 1986, Hunting & Sharpley, 1988, Kieren, 1988, Leinhardt, 1988, Lamon, 1989, Mack, 1990).
Οι παραπάνω απόψεις δεν είναι χωρίς αντίλογο: Οι Karplus, Pulos, & Stage (1983), Hart (1988), Behr, Post, Harel, Lesh, (1993), υποστηρίζουν ότι οι διαισθητικές στρατηγικές των μαθητών ίσως παρεμβαίνουν ακούσια ή απρόσεκτα στην ανάπτυξη της κατανόησης των ρητών αριθμών στο βαθμό που αυτές περιορίζονται συγκριτικά με τη φύση της. Η τελευταία σειρά των προηγούμενων ερευνητών τονίζει ότι πολλοί τύποι προβλημάτων στους ρητούς αριθμούς είναι ιδιαίτερα σύνθετοι και απαιτούν ευέλικτες στρατηγικές για να λυθούν. Ετσι οι μαθητές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν πεπλεγμένες στρατηγικές που να εστιάζουν ευρύτατα στην επαναεννοιολογικοποίηση της φύσης της μονάδας ώστε να καταφέρουν να προχωρήσουν σε μιά πλήρη κατανόηση του ρητού αριθμού.
Οι Kerslake (1986), Leinhardt (1988), Mack (1990), θεωρούν ότι στη βάση των διαισθητικών στρατηγικών των μαθητών για τη λύση των προβλημάτων των ρητών βρίσκεται το μέρος-όλου (part-whole) μοντέλο. Το χαρακτηριστικό των διαισθητικών στρατηγικών που επισημαίνουμε είναι ότι οι μαθητές δεν βλέπουν τόσο τους ρητούς αριθμούς σαν απλές ποσότητες που προέρχονται απο τη διαμέριση μιάς μονάδας ή από τη σύγκριση μερών, αλλά τους βλέπουν σαν απλά **μέρη** που συνθέτουν το όλο. Για παράδειγμα, το κλάσμα 3/4 το βλέπουν σαν 3 κομμάτια απο τα 4 συνολικά που υπάρχουν. Αυτό έχει σαν συνέπεια υποστηρίζουν οι Vergnaud (1988), Kieren (1988), Leinhardt (1988),Lamon (1989), Mack (1990), να παρατηρούμε στις διαισθητικές στρατηγικές των μαθητών σπάσιμο των μονάδων σε μέρη και θεώρηση του κάθε μέρους σαν αυτό να αντιπροσωπεύει μια ανεξάρτητη μονάδα ή ένα ακέραιο αριθμό.
Ιδιαίτερη μνεία θα πρέπει να γίνει στις θέσεις του Kieren (1988), καθώς τεκμηριώνουν ότι οι διαισθητικές στρατηγικές των μαθητών συμπεριλαμβάνουν και περιπτώσεις επίλυσης προβλημάτων που εμπλέκουν την πηλίκο (quotient), ερμηνεία των ρητών αριθμών. Ακόμη, δείχνουν με σαφήνεια, την επίδραση του πλαισίου μέσα στο οποίο τα προβλήματα τίθενται. Τα πλαίσια που αναφέρεται ο Kieren δεν είναι ξένα προς τη σύγχρονη ελληνική πραγματικότητα, όπως για παράδειγμα, πίτσες, σοκολάτες και κέϊκ. Στούς μαθητές της έρευνας δόθηκε το πρόβλημα να μοιράσουν 8 πίτσες σε 5 άτομα. Οι μαθητές λειτούργησαν με τον παρακάτω τρόπο: Οι μαθητές έδωσαν 1 ολόκληρη πίτσα σε κάθε άτομο, αφήνοντας 3 πίτσες να περιμένουν. Στη συνέχεια έκοψαν στα δύο κάθε μιά απο τις τρείς και έδωσαν μισή σε κάθε ένα απο τα 5 άτομα, αφήνοντας και πάλι αδιάθετο ένα κομμάτι απο μισή πίτσα. Τέλος διαίρεσαν σε πέντε μέρη τη μισή πίτσα

που απέμεινε και είπαν ότι κάθε άτομο θα μπορούσε να λάβει ακόμη 1/5 [του 1/2] της πίτσας. Η διαμέριση της πίτσας με αυτό τον τρόπο, της λειτουργίας δηλ. πάνω στα απομένοντα κομμάτια έδειξε ότι οι μαθητές τα θεωρούσαν σαν ανεξάρτητες μονάδες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ
ΤΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΓΙΑ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

4.1 Η ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΗ ΦΥΣΗ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

Ενας βασικός λόγος για τη δυσκολία κατασκευής ενός ρητού αριθμού, είναι η συνθετότητά του (Kieren & Southwell, 1979). Είναι εξαιρετικά αναγκαίο για την ομαλή πραγμάτευση των θεμάτων που αναπτύσσονται σ' αυτή την εργασία να προβούμε στην αναλυτική παρουσίαση των διάφορων μορφών του ρητού αριθμού.

Μέσα από την ερευνητική διαδρομή , λόγω του πλούτου της έννοιας του ρητού αριθμού έχουν εφευρεθεί από τους συγγραφείς πολλοί όροι για την απόδοση των διάφορων μορφών του: "models" (Weckesser, 1970), "interpretations" (Kieren, 1976), "subconcept" (Novillis,1976), "subconstructs" (Behr et al., 1983), "meanings" (Ohlsson, 1988), "aspects" (Postel, 1981), και "personalities" (Behr et al. 1992).

O Novillis (1976), εστιάζει την έρευνά του στην συνθετότητα η οποία ενυπάρχει στην έννοια του κλάσματος και προτείνει μία ανάλυση με βάση το γνωστό ιεραρχικό μοντέλο του Gagn_ (1965).

Την έννοια της "ερμηνείας" (interpretation) εισήγαγε πρώτος ο Kieren (1976), ο οποίος διακρίνει στην εργασία του αυτή 7 ερμηνείες του ρητού αριθμού:

i) Οι ρητοί αριθμοί είναι κλάσματα τα οποία μπορούν να συγκριθούν, να προστεθούν, να αφαιρεθούν κτλ.

ii) Οι ρητοί αριθμοί είναι δεκαδικά κλάσματα τα οποία σχηματίζουν μιά φυσική επέκταση (μέσω του αριθμητικού μας συστήματος) των ακεραίων αριθμών.

iii) Οι ρητοί αριθμοί είναι κλάσεις ισοδυναμίας των κλασμάτων. Ετσι {1/2, 2/4, 3/6,...} και {2/3, 4/6, 6/9, ...} είναι ρητοί αριθμοί.

iv) Οι ρητοί αριθμοί είναι αριθμοί της μορφής p/q, όπου p και q είναι ακέραιοι και q_ 0. Σ' αυτή τη μορφή οι ρητοί αριθμοί είναι "ratio" αριθμοί.

v) Οι ρητοί αριθμοί είναι πολλαπλασιαστικοί τελεστές (stretchers, shrinkers κτλ.)

vi) Οι ρητοί αριθμοί είναι στοιχεία ενός μή πεπερασμένου διατεταγμένου πηλικόχωρου. Είναι αριθμοί του τύπου χ=p/q όπου χ ικανοποιεί την εξίσωση qx=p.

vii) Οι ρητοί αριθμοί είναι μέτρα ή σημεία πάνω σε μιά γραμμή αριθμών.

Σε μετέπειτα εργασία του ο Kieren (1980), χρησιμοποιεί τον όρο "υποκατασκευές" και προσθέτει ότι από τις 7 ερμηνείες των ρητών αριθμών αναδύονται μαθηματικές ιδέες για την οικοδόμηση σχετιζόμενων γνωστικών και διδακτικών δομών. Θεωρεί δε ότι οι υποκατασκευές του ρητού αριθμού είναι 5:

1) Ρητοί αριθμοί σαν σχέσεις μέρους-όλου (part- whole)
2) >> >> >> λόγου (ratio)
3) >> >> >> πηλίκου (quotient)
4) >> >> >> τελεστών (operators)
5) >> >> >> μέτρων (measures)

O Kieren πιστεύει ότι για να κατανοήσει κάποιος την έννοια του ρητού αριθμού είναι απαραίτητα δυο πράγματα:

α) κατανόηση όλων των παραπάνω υποκατασκευών που αφορούν ένα ρητό και β) Κατανόηση των σχέσεων μεταξύ αυτών των υποκατασκευών.

Οι Behr, Post, Lesh, & Silver, (1983), θεωρούν ότι ο ρητός αριθμός μπορεί να ερμηνευτεί με 6 τρόπους, σαν σύγκριση μέρος- όλου, σαν δεκαδικός, σαν λόγος, σαν πηλίκο, σαν τελεστής και σαν μέτρο συνεχών και διακριτών ποσοτήτων.

Κατά τους Kieren, Nelson, (1978), μια ερευνητική υπόθεση γύρω από τα κλάσματα θα μπορούσε να στηριχθεί στην εξής παραδοχή: "Ενα σημαντικό βήμα για την κατανόηση του ρητού αριθμού είναι μια ανάλυση του τρόπου με τον οποίο τα παιδιά, αλλά και οι ενήλικοι αλληλεπιδρούν, σκέφτονται και αναπτύσσουν τις διάφορες υποκατασκευές".

Οι Behr, Harel, Post, Lesh, (1992 και 1993), επανεξετάζουν τις υποκατασκευές του ρητού αριθμού και διατυπώνουν τη θέση ότι οι 5 υποκατασκευές του Kieren (1980), είναι ικανές να επεξηγήσουν την έννοια του ρητού αριθμού. Ωστόσο οι 4 συγγραφείς δίνουν μεγαλύτερη έμφαση στην ερμηνεία του ρητού ως τελεστή και της προσάπτουν δυό[10] νέες λειτουργίες. Η πρώτη περιλαμβάνει τη λειτουργία του ρητού ως διπλασιαστή ή μειωτή διαμέρισης (duplicator / partition- reducer). Η δεύτερη περιλαμβάνει τη λειτουργία του ρητού σαν επιμηκυντή ή συρρικνωτή (stretcher and shrinker).

Το μοντέλο των Behr, Post, Lesh, & Silver, (1983), στο οποίο αναφερθήκαμε προηγούμενα, προσεγγίζει με έναν ενδιαφέροντα τρόπο ο Ρουσόπουλος (1991). Διατυπώνει τη θέση ότι κάθε υποκατασκευή μπορεί να αποτελέσει ένα αυτόνομο μοντέλο διδασκαλίας των κλασμάτων στο Δημοτικό σχολείο. Η ταξινόμηση στην οποία προβαίνει βασίζεται σε σοβαρά επιστημολογικά και λογικομαθηματικά κριτήρια. Τα κριτήρια αυτά θα μπορούσαν να αποτελέσουν μιά εννοιολογική βάση στην οποία να στηρίξουμε μιά συνολική κριτική για το κάθε μοντέλο. Αναλυτικά είναι:

1) Ο βαθμός συνθετότητας του μοντέλου σαν κατασκευή, δηλ. το πόσο απλά μπορεί ένα μοντέλο να κατασκευασθεί.
2) Η σχέση που έχει το μοντέλο με τα συνεχή και διακριτά μέσα.
3) Η δομική ευκρίνεια του μοντέλου.
4) Η δυνατότητα του μοντέλου να δημιουργεί ευρετικό περιβάλλον.
5) Η σχέση που έχει το μοντέλο με την ισοδυναμία και τη σύγκριση.
6) Ο βαθμός ευελιξίας του μοντέλου στην εκτέλεση των 4 πράξεων.

Μέσα από τη γενικότερη συλλογιστική του Ρουσόπουλου γίνονται ξεκάθαρα τρία πράγματα:

i) Οτι κάθε μιά, συγκεκριμένη σκοπιά θέασης των κλασμάτων (μοντέλο) είναι αναγκαία, καθώς απαντά σε συγκεκριμένα ζητήματα, με συγκεκριμένο βαθμό απόδοσης και καταλληλότητας.
ii) Οτι κάθε μοντέλο διαφοροποιείται από τα υπόλοιπα σε συγκεκριμένα ζητήματα και μέσα από αυτή την αντιδιαστολή γίνεται κατορθωτό να κατανοηθούν πληρέστερα οι έννοιες των κλασμάτων.
iii) Οτι κανένα μοντέλο δεν είναι ικανό από μόνο του να αντιμετωπίσει επαρκώς την έννοια του κλάσματος στο σύνολό της.

Η αναλυτική παρουσίαση των 6 προσωπικοτήτων ή υποκατασκευών ή ερμηνειών του ρητού αριθμού είναι επιβεβλημένη για λόγους εξυπηρέτησης ουσιαστικών και διαδικαστικών στόχων της παρούσας εργασίας. Για να είναι σε θέση κάποιος ερευνητής να προσφέρει εμπειρίες στα παιδιά που θα υποβοηθήσουν μιά πλήρη και βαθειά κατανόηση του ρητού αριθμού θα πρέπει να εξετάσει την ικανότητά τους να αποκτήσουν γνώση του τι σημαίνει κάθε μιά απο τις υποκατασκευές ή ερμηνείες αυτές (Behr, Harel, Post, Lesh, 1993).

Στην παρούσα έρευνα υιοθετούμε το μοντέλο των 6 υποκατασκευών των Behr, Post, Lesh, & Silver, (1983), σαν μιά επαρκή εννοιολογική βάση για την ανάπτυξη της ιδέας του κλάσματος. Η συλλογιστική του Ρουσόπουλου (1991), για 6 αυτόνομα

[10] Για την ακρίβεια οι 4 συγγραφείς βλέπουν την operator ερμηνεία του ρητού να αναλύεται σε 5 νέες, υβριδικές ερμηνείες πλήν όμως δεν αναλύουν τις υπόλοιπες τρείς:
a) διπλασιαστή και μειωτή διαμέρισης (duplicator and partition- reducer)
b) επιμηκυντή και συρρικνωτή (stretcher and shrinker)
c) πολλαπλασιαστή και διαιρέτη (multiplier and divisor)
d) συρρικνωτή και διαιρέτη (stretcher and divisor)
e) πολλαπλασιαστή και συρρικνωτή (multiplier and shrinker).

κλασματικά μοντέλα οπωσδήποτε κινείται στην ίδια κατεύθυνση με αυτή των 4 ερευνητών. Είναι ανάγκη να ορίσουμε τις 6 υποκατασκευές του κλάσματος με χαλαρό τρόπο, γιατί όπως θα φανεί από την παρακάτω ανάπτυξή τους δεν είναι δυνατή μια αυστηρή μαθηματική διατύπωση.

α. Η ως μέρος- όλου (part-whole) ερμηνεία του κλάσματος.

Ορισμός. Η μέρος-όλου αντίληψη περιλαμβάνει τη θέαση του ρητού αριθμού ως ολότητας που συντίθεται απο ένα συγκεκριμένο αριθμό διακριτών μερών.

Αυτή η αντίληψη εξαρτάται ευθέως από την ικανότητα να διαμερίσουμε μιά συνεχή ποσότητα ή ένα σύνολο διακριτών αντικειμένων σε ισομεγέθη υπομέρη ή σύνολα. Είναι δε θεμελιώδης, όπως θα δούμε για όλες τις υπόλοιπες υποκατασκευές. Ας δώσουμε δυό παραδείγματα. Το πρώτο με συνεχή μέσα: Εχουμε ένα μήλο (το οποίο θεωρείται σαν ένα όλο), το κόβουμε σε 4 ίσα μέρη και παίρνουμε το 1. Τότε έχουμε αισθητοποίηση του κλάσματος 1/4. Να επισημάνουμε εδώ το δίπολο των ενεργειών οι οποίες ίσως έχουν σημαντικές γνωστικές συνέπειες όπως θα δούμε παρακάτω: "κόβουμε" και "παίρνουμε" ή αλλοιώς "χωρίζουμε" και "παίρνουμε". Το τελευταίο ισχύει για το δεύτερο παράδειγμά μας, με διακριτά, αυτή τη φορά, μέσα: Εχουμε 12 μήλα, τα οποία χωρίζουμε σε 3 ίσες ομάδες και παίρνουμε τη μία. Η αισθητοποίηση του κλάσματος τώρα μπορεί να γίνει με αναφορά στη "δίκαιη" μοιρασιά των 12 μήλων σε 4 παιδιά. Δίνουμε από ένα μήλο στο κάθε παιδί και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία τόσες φορές μέχρι να τελειώσουν τα 12 μήλα. Το 1/4 τώρα του 12 (το όλο) είναι τα μήλα που έχει το κάθε ένα παιδί από τα 4. Αν τα παιδιά γίνουν 3 τότε μιλάμε για 1/3. Αν τέλος γίνουν 6 τότε κάνουμε λόγο για το 1/6.

Τα παραπάνω φαίνεται να τεκμηριώνουν τη θέση του Kieren (1981), ότι η μέρος- όλου μπορεί να θεωρηθεί σαν μιά γλωσσικά γενεσιουργός υποκατασκευή.

Μιά ενδιαφέρουσα περιοχή εφαρμογής της μέρος- όλου υποκατασκευής είναι τα γεωμετρικά χωρία. Αυτά εμπλέκουν την κατανόηση της έννοιας του εμβαδού. Οι Owens (1980, Sambo, 1980), εξέτασαν ο καθένας ξεχωριστά τη σχέση ανάμεσα στην αντίληψη του παιδιού για το εμβαδό και στην ικανότητά του να μάθει κλασματικές έννοιες. Αμφότεροι βρήκαν να υπάρχει μιά θετική συσχέτιση ανάμεσα στις δύο μεταβλητές.

Οι Ellerbruch και Payne (1978), πιστεύουν ότι η έρευνα και πρακτική μέσα στην τάξη επιβάλλουν την εισαγωγή των εννοιών των κλασμάτων με τη χρήση ενός απλού μοντέλου όπως το μέρος- όλου, το οποίο θεωρούν περισσότερο φυσικό για τα μικρά παιδιά και πιό χρήσιμο για πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων. Οι ίδιοι τονίζουν την σπουδαιότητα της ανάπτυξης μιάς ισχυρής θεμελίωσης των κλασματικών εννοιών από τα παιδιά, πριν αυτά εισαχθούν στις πράξεις και στις σχέσεις ανάμεσα στους ρητούς αριθμούς.

Η μέρος- όλου αντίληψη των μαθητών για το ρητό αριθμό μπορεί να θεωρηθεί ότι **περιορίζει** την αρχικά ήδη περιορισμένη κατανόηση του ρητού αριθμού καθώς δεν επιτρέπει την εννοιολογικοποίηση της μονάδας με την πληθώρα τρόπων που περιγράφουν οι Behr, Harel, Post, Lesh (1993), και τους οποίους έχουμε ανάγκη για μιά ισχυρή κατανόηση του ρητού αριθμού σε πολλαπλά επίπεδα αφαίρεσης (Mack, 1993).

β. Η ως πηλίκο διαίρεσης (quotient) ερμηνεία του κλάσματος.

Ορισμός. Η αντίληψη του κλάσματος ως πηλίκου περιλαμβάνει τη θέαση του κλάσματος ως διαίρεσης α πραγμάτων σε β ίσα μέρη. Συμβολικά α:β με β_ 0.

Αμεσα γίνεται αντιληπτό ότι η επικοινωνία ανάμεσα σε συνεχή και διακριτά μέσα δεν παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία. Το σημαντικό σ' αυτή την υποκατασκευή είναι η ισότητα των μερών. Με άλλα λόγια η δεσπόζουσα δραστηριότητα είναι η "δίκαιη μοιρασιά". Ο Streefland (1984, 1987) σ' αυτήν ακριβώς την δραστηριότητα στηρίζει μιά ευρεία προσέγγιση των κλασμάτων, που την ονομάζει "ρεαλιστική προσέγγιση", στην οποία εκτενώς αναφερόμαστε σε άλλο κεφάλαιο. Αυτό που τώρα πρέπει να θίξουμε είναι το αν και κατά πόσο συνεισφέρει η υποκατασκευή σε δυό βασικές έννοιες των μαθηματικών, στη σύγκριση και στην ισοδυναμία. Ο Ρουσόπουλος (1991), επισημαίνει ότι και οι δύο αυτές έννοιες στο πλαίσιο αυτής της υποκατασκευής αποκτούν άμεσο και φυσικό νόημα. Για παράδειγμα αν συγκρίνουμε το κλάσμα 3/4 και το 6/8 η πολιτική της "δίκαιης μοιρασιάς" θα δώσει σαν αποτέλεσμα να πάρουν **τόση** πίτσα 4 φίλοι που θα μοιραστούν 3 πίτσες **όση** θα πάρουν 8 φίλοι αν μοιραστούν 6 πίτσες.

Στο επίπεδο των πράξεων εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι η υποκατασκευή σαν διδακτικό μοντέλο ίσως δεν έχει να προσφέρει πολλά. Για παράδειγμα, διαφορετική είναι η θεώρηση του 6/2 ως πηλίκου που παριστά τον αριθμό 3 και διαφορετική του 2/3 που παριστά τον περιοδικό αριθμό 0.66. Παρά ταύτα ο Kieren (1976), διατυπώνει την άποψη ότι οι ρητοί αριθμοί μπορούν να θεωρηθούν σα στοιχεία ενός πηλικόχωρου και κατά συνέπεια μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ορίσουν πράξεις ισοδυναμίας, πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού κτλ. από μιά καθαρά απαγωγική (deductive) σκοπιά. Είναι ορθό να πούμε ότι όλοι οι αλγόριθμοι μπορούν να παραχθούν από εξισώσεις με τη χρήση ιδιοτήτων του χώρου.

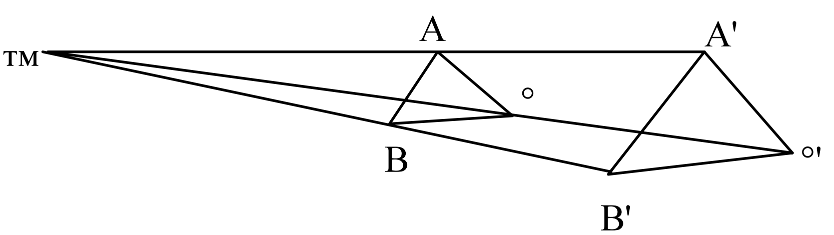
Οι Behr, Post, Lesh, & Silver (1983), πιστεύουν ότι αυτό το επίπεδο αντίληψης του ρητού αριθμού απαιτεί διανοητικές δομές που δεν διαθέτουν τα παιδιά του Δημοτικού και του Γυμνασίου επειδή σ' αυτό το επίπεδο γίνεται συσχέτιση των ρητών αριθμών με αφηρημένα αλγεβρικά συστήματα.

γ. Η ως τελεστής (operator) ερμηνεία του κλάσματος.

<u>Ορισμός.</u> Η αντίληψη του κλάσματος ως τελεστή περιλαμβάνει τη θέαση του κλάσματος ως συναρτήσεως η οποία εφαρμόζεται σε κάποιο αριθμό ή σε κάποιο αντικείμενο ή σε κάποιο σύνολο. Με άλλα λόγια είναι μια άλγεβρα της μορφής:

$a \longrightarrow f_a(x) = a.x$

Η operator υποκατασκευή θα μπορούσαμε να πούμε είναι στενά συνδεδεμένη με την ratio υποκατασκευή επειδή ο τελεστής α/β μπορεί να περιγραφεί σαν "ένα α προς β" ή "ανά α για β". Αντίθετα με όλες τις άλλες υποκατασκευές, αυτή η ερμηνεία αξιώνει το κλάσμα α/β να θεωρηθεί περισσότερο σα μιά οντότητα, παρά σαν ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (Marshall, 1993). Η υποκατασκευή αυτή αποτελεί μιά σαφή αλγεβρική ερμηνεία του ρητού αριθμού. Η βασική ιδέα του ρητού ως τελεστή είναι ότι ο φυσικός αριθμός που βρίσκεται στον αριθμητή προκαλεί, στη ποσότητα που εφαρμόζεται ο ρητός, μιά επέκταση ενώ ο παρονομαστής προκαλεί μιά συρρίκνωση αυτής. Τα παραπάνω σημαίνουν πιό αναλυτικά τα εξής: Ο ρητός αριθμός α/β μετασχηματίζει γεωμετρικά σχήματα α/β φορές. Για παράδειγμα όπως στο σχήμα:



™¯. Ο ÚËÙ¼˜ ˆ˜ ÌÂÙ·Û¯ËÌ·ÙÈÛÌ‹˜ ÁÂˆÌÂÙÚÈÎÒÓ Û¯ËÌ¿ÙˆÓ
Î=™A/™A'=2/3

Ο ρητός αριθμός α/β μπορεί επίσης να θεωρηθεί σα μιά συνάρτηση ο οποία μετασχηματίζει ένα σύνολο στοιχείων σε ένα άλλο σύνολο. Αν εφαρμόσουμε το α/β

πάνω σε ένα συνεχές μέσο, σε ένα αντικείμενο, όπως για παράδειγμα μιά γραμμή μήκους L τότε αυτή πολλαπλασιάζεται από τον παράγοντα α και υποπολλαπλασιάζεται από τον παράγοντα β. Αν εφαρμόσουμε το α/β στον παρονομαστή του μας δίνει τον αριθμητή του. Για παράδειγμα (2/5)X 5=2.
Το μοντέλο του κλάσματος ως τελεστή είναι, όπως φαίνεται άλλωστε, αρκετά αφηρημένο και επίσης η αισθητοποίηση του αρκετά δύσκολη υπόθεση Ρουσόπουλος (1991). Ενας μεγάλος αριθμός ερευνητών έχει ασχοληθεί με αυτήν την υποκατασκευή αναδεικνύοντας ταυτόχρονα τη μεγάλη σπουδαιότητά της (Kieren, Nelson, 1978, Noelting, 1978), Kieren, & Southwell, 1979, Ganson, & Kieren, 1980, Davis, Hunting, & Pearn, 1993, Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992 και 1993).
Οπως αναφέρθηκε παραπάνω υπάρχουν 5 υβριδικές ερμηνείες της υποκατασκευής που αναπτύσσουμε. Εδώ θα περιοριστούμε στην σύντομη περιγραφή μιάς[11] μόνο από αυτές. Φέρει το όνομα επιμηκυντής και συρρικνωτής (stretcher and shrinker). Οπως φαίνεται απο την ονομασία της η υποκατασκευή αυτή σημαίνει ότι εάν εφαρμόσουμε σε ένα αντικείμενο το κλάσμα α/β τότε αυτό είτε θα μεγαλώσει είτε θα μικράνει αναλογικά. Στην περίπτωση που ισχύει α > β θα έχουμε αύξηση ενώ στην αντίθετη περίπτωση (α < β) θα έχουμε μείωση του αντικειμένου ή του συνεχούς μέσου.

δ. Η ως λόγος πληθικοτήτων (ratio) ερμηνεία του κλάσματος.

Ορισμός. Η αντίληψη του κλάσματος ως λόγου περιλαμβάνει τη θέαση του κλάσματος ως αναλογίας δύο πληθυσμών η οποία εκφράζεται με το ανάγωγο κλάσμα α/β , όπου β _ 0.
Για παράδειγμα αν σε μιά μαθητική τάξη τα αγόρια είναι 8 και τα κορίτσια είναι 12 η αναλογία των δύο ομάδων μπορεί να εκφραστεί με το κλάσμα 2/3. Αν το μεγάλο μπουκάλι της coca- cola περιέχει 1.5 λίτρα και το μικρό 0.5 λίτρα η αναλογία των όγκων του μεγάλου προς το μικρό είναι 3 :1. Ετσι, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι ο λόγος είναι μιά σχέση που εμπεριέχει την έννοια του σχετικού μεγέθους. Επομένως, είναι πιό πιθανό τα παιδιά, αλλά και οι ενήλικες να θεωρούν το λόγο σαν ένα συγκριτικό δείκτη παρά σαν ένα αριθμό.
Μιά πολύ γνωστή, διεθνώς, έρευνα που διερευνά την ικανότητα παιδιών και ενηλίκων στην κατανόηση του λόγου ή πιό σωστά την ικανότητα σύγκρισης δύο λόγων έγινε από τον Noelting (1978). Τα παιδιά κλήθηκαν να εξετάσουν ποιό μίγμα χυμού πορτοκαλάδας και νερού περιείχε περισσότερο "πορτοκάλι". Στην μελέτη το κάθε μίγμα εκφράστηκε σαν ένα διατεταγμένο ζεύγος (α, β), του οποίου ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στον αριθμό των ποτηριών του χυμού πορτοκαλάδας και ο δεύτερος όρος τον αριθμό των ποτηριών του νερού. Για παράδειγμα τα παιδιά ρωτήθηκαν ποιό μίγμα απο τα (2,3) και (3,4) περιέχει περισσότερο "πορτοκάλι". Η λογική που αναπτύσσεται στις εργασίες με λόγους και αναλογίες ονομάζεται, όπως έχουμε ξανατονίσει αναλογική λογική (proportional reasoning). Ο Noelting (1980a και 1980b), διέκρινε δύο τύπους στρατηγικών που είναι δυνατόν να αναπτύξουν τα παιδιά στην προσπάθειά τους να λύσουν προβλήματα αναλογιών:
α) την ενδο- στρατηγική within strategy και
β) την δια- στρατηγική (between strategy).
Αξίζει να δούμε το παράδειγμα των ζευγών (2, 3) και (1, 2).

[11] Οι Behr, Harel, Post, & Lesh, (1992 και 1993), ανοίγουν ένα νέο κεφάλαιο, μιά ενδιαφέρουσα σημαντική του ρητού αριθμού χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά της ποσότητας. Οπως κι οι ίδιοι αναφέρουν οι υβριδικές μορφές της operator υποκατασκευής είναι ένα ζήτημα που έχει πολλά να προσφέρει στη μαθηματική κατανόηση της έννοιας του ρητού αριθμού και δεν παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία με διακριτά και συνεχή μέσα. Ωστόσο, απ' όσα γνωρίζουμε, ούτε οι ίδιοι δεν έχουν ολοκληρώσει αυτή την προσέγγιση μέχρι σήμερα.

Για την within strategy στο πρώτο ζεύγος για κάθε ποτήρι χυμού αντιστοιχούν 1.5 ποτήρια νερού, ενώ στο δεύτερο ζεύγος για κάθε ποτήρι χυμού αντιστοιχούν 2 ποτήρια νερού. Αρα το πρώτο μίγμα έχει περισσότερο χυμό. Για την between strategy εάν διπλασιάσουμε το χυμό στο δεύτερο ζεύγος τότε το νερό είναι περισσότερο κατα ένα ποτήρι.

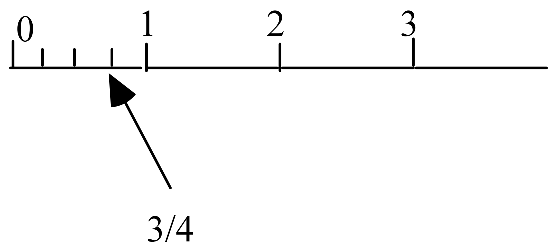
Από το παραπάνω παράδειγμα είναι σαφές ότι η πολλαπλασιαστική σχέση είναι υπαρκτή μέσα και ανάμεσα στα ζεύγη των αναλογιών. Το ερώτημα που τίθεται άμεσα είναι αν και κατα πόσο η απόδοση των παιδιών στις παραπάνω εργασίες αναλογικής λογικής επηρεάζεται από την γνώση της πολλαπλασιαστικής σχέσης. Η μελέτη του Noelting (1980a και 1980b), καταλήγει στο συμπέρασμα ότι υπάρχει σημαντική σχέση ανάμεσα σ' αυτά τα δύο και μάλιστα υποστηρίζει ότι η απόδοση των μαθητών στις εργασίες αναλογικής λογικής είναι ένας δείκτης για τις γνώσεις τους ως πρός την πολλαπλασιαστική σχέση. Ο φιλανδός Keranto (1984), υποστηρίζει ότι η γνώση του πολλαπλασιασμού ίσως να είναι μιά απαραίτητη, αλλά όχι επαρκής συνθήκη για επιτυχία πάνω σε εργασίες λόγων και σύγκρισης κλασμάτων. Ο Vergnaud (1983), προωθεί παραπέρα τη συλλογιστική του Noelting. Εκφράζει την άποψη ότι, αφού οι λόγοι και τα κλάσματα ανήκουν στον ίδιο χώρο, το χώρο των πολλαπλασιαστικών δομών, ό,τι παρατηρήθηκε στις εργασίες αναλογικής λογικής θα ισχύει πιθανά και στις καταστάσεις σύγκρισης κλασμάτων. Η γνώση της πολλαπλασιαστικής σχέσης φαίνεται να καθιστά ικανά τα παιδιά να αντιληφθούν το μέγεθος του κλάσματος με ένα πιό αφηρημένο και αποτελεσματικό τρόπο.

Από όλα τα παραπάνω συνάγεται το συμπέρασμα ότι τόσο οι λόγοι και οι αναλογίες που αποτελούν μιά συγκεκριμένη μαθηματική όψη του ρητού αριθμού όσο και η πολλαπλασιαστική σχέση είναι σοβαροί παράγοντες στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. Επομένως σε μιά ενδεχόμενη προσέγγιση των ρητών μέσω ενός υπολογιστικού μικρόκοσμου, οι λόγοι, οι αναλογίες και η πολλαπλασιαστική σχέση θα πρέπει να αποτελέσουν βασικά στοιχεία στη συγκρότηση της τεχνικής του συνιστώσας.

ε. Η ως σημείο ευθείας (number line ή measure) ερμηνεία του κλάσματος.

Ορισμός. Η ως μέτρο αντίληψη του κλάσματος περιλαμβάνει τη θέαση του κλάσματος ως σημείου ή ως διανύσματος πάνω σε μιά αριθμογραμμή.

Θεωρούμε μιά ευθεία σε κάποιο σημείο της οποίας θέτουμε αυθαίρετα το σημείο μηδέν. Ξεκινώντας από αυτό δηλ. χρησιμοποιώντας το σαν αφετηρία παίρνουμε ίσου μήκους ευθύγραμμα τμήματα πρός τα δεξιά. Κάθε ένα από αυτά αντιπροσωπεύει τη μονάδα μήκους. Η αισθητοποίηση του κλάσματος 3/4 γίνεται με επίκληση πάλι του θεμελειώδους μοντέλου μέρος- όλου: Χωρίζοντας την πρώτη μονάδα μήκους σε 4 ίσα μέρη και παίρνοντας τα 3 ξεκινώντας όμως από την αρχή (σημείο μηδέν) εντοπίζουμε το σημείο 3/4.



™¯. H measure or number line
ÂÚÌËÓÂ›· ÙÔ× ÎÏ¿ÛÌ·ÙÔ˜

Πρίν καλά- καλά ορίσουμε αυτή την υποκατασκευή παρατηρούμε τον εννοιολογικά σύνθετο χαρακτήρα της. Να δούμε αμέσως μιά σχετική έρευνα. Η Novillis- Larson

(1980), ενέπλεξαν τα παιδιά των τελευταίων τάξεων του δημοτικού σε εργασίες (tasks) που στόχευαν τον εντοπισμό κλασμάτων πάνω σε γραμμές αριθμών (number lines). Τα αποτελέσματα έδειξαν τα παιδιά ευκολότερα μπόρεσαν να εντοπίσουν κλάσματα πάνω σε γραμμές μήκους ένα και επίσης όταν ο αριθμός των υποδιαιρέσεων της μονάδας μήκους ήταν ακριβώς ίσος με τον παρονομαστή του κλάσματος. Αντίθετα στις περιπτώσεις που η γραμμή αριθμών είχε μήκος δύο μονάδες μήκους περισσότερο από το 25% θεώρησε σαν μονάδα μήκους όλη τη γραμμή αριθμών. Αυτό δείχνει μιά δυσκολία των μαθητών να ξεκαθαρίσουν εννοιολογικά τη μονάδα αναφοράς. Τέλος, τα ευρήματα της Novillis- Larson δείχνουν ότι τα παιδιά δεν μπορούν να συσχετίσουν ένα κλάσμα με το ισοδύναμό του προσδιορίζοντας ένα και το αυτό σημείο στη γραμμή αριθμών. Για παράδειγμα το 1/3 σαν σημείο δεν ταυτίοστηκε με τα 2/6 που προέκυψαν από μιά άλλη διαμέριση της ίδιας μονάδας μήκους (χωρισμός πρώτα σε τρίτα και κατόπιν σε έκτα).
Η σπουδαιότητα της measure υποκατασκευής αναδεικνύεται από το γεγονός ότι υπάρχει ένας ισχυρός δεσμός ανάμεσα στούς κλασματικούς αριθμούς, στη Γεωμετρία[12] και στο χώρο. Αυτός ο δεσμός παρατηρήθηκε από τους Piaget, Inhelder, & Szeminska, (1957). Αναμφίβολα οι ιδιότητες των ρητών αριθμών έχουν γεωμετρικό χαρακτήρα. Οπως έδειξε ο Blakers (1967), οι ιδιότητες των θετικών ρητών και του μηδενός είναι δυνατόν να ειδωθούν σαν ισομορφικές με τις ιδιότητες πράξεων και με άλλες ιδιότητες του συνόλου των γραμμικών μονάδων. Μια μετρική προσέγγιση προσφέρει εμπειρίες διάταξης καθώς και μιά άλλη θέαση του άπειρα μεγάλου (Kieren, 1993). Ο Kieren παρατηρεί ότι ο μετρικός χαρακτήρας του ρητού αριθμού συχνά παραμελείται σε πολλά μαθηματικά curricula. Με άλλα λόγια δεν εισάγεται η γραμμή αριθμών σαν μοντέλο διδασκαλίας των ρητών αριθμών. Οπως υπάρχουν και περιπτώσεις στις οποίες αυτό αποτελεί κεντρικό θέμα. Παράδειγμα το North American curriculum project, Developing Mathematical Processes (Romberg, Harvey, Moser, & Montgomery, 1974-1976).

στ. Η ως δεκαδικός αριθμός (decimal number) ερμηνεία του κλάσματος.

<u>Ορισμός.</u> Η αντίληψη του κλάσματος ως δεκαδικού αριθμού περιλαμβάνει τη θέαση του κλάσματος ως δεκαδικού αριθμού μή πεπερασμένων ή πεπερασμένων δεκαδικών ψηφίων.
Η ανάπτυξη αυτής της υποκατασκευής του κλάσματος ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Την αναφέρουμε χάριν πληρότητας.

4.2 Η ΔΥΣΚΟΛΙΑ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Τα κλάσματα είναι μια περιοχή των μαθηματικών που παρουσιάζει δυσκολίες τόσο στα παιδιά όσο και στους ενήλικες. Πρόκειται για μια διαπίστωση θεμελιωμένη ιστορικά, όπως δείχνουν έρευνες μεμονωμένων ερευνητών αλλά και μελέτες σε εθνική κλίμακα που πραγματοποιήθηκαν στις Ηνωμένες Πολιτείες και σε Ευρωπαϊκές χώρες. Ιδιαίτερα στη στοιχειώδη εκπαίδευση οι μαθητές σε διεθνή κλίμακα παρουσιάζουν δυσκολίες στην ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος και στους υπολογισμούς που εμπλέκουν κλασματικούς αριθμούς (Latino 1955, Hartung 1958,Rappaport 1962,Riese 1964, Swenson 1964, Anderson 1969, Carpenter, Coburn, Reys και Wilson, 1975; , Novillis 1976, Payne 1976, Hunting 1981, Hart 1981, Behr et al.,1983, Booth 1984,

---

[12] Αν δεχτούμε τη θέση του Piaget και των συνεργατών του για τούς δεσμούς της Γεωμετρίας με τους κλασματικούς αριθμούς θα ήταν τελείως φυσικό και λογικό να αναζητήσουμε τη σχέση ενός συγκεκριμένου τύπου Γεωμετρίας, όπως είναι η Γεωμετρία της Χελώνας (Turtle Geometry), με τους ρητούς και κλασματικούς αριθμούς. Η απόπειρα μιάς τέτοιας προσέγγισης καταγράφεται σαν βασικό ζητούμενο της παρούσας εργασίας.

Hart 1984, Behr et al. 1984, Post et al. 1985, Kerslake 1986, Nik Pa 1987, Kieren 1988, Streefland 1991).

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων από τις έρευνες που διεξήχθησαν σε εθνικό επίπεδο στις Ηνωμένες Πολιτείες με το γενικό τίτλο National Assessment of Educational Progress έδειξαν ότι παιδιά 9,13 και 17 χρονών είχαν χαμηλή απόδοση σε ό,τι αφορά υπολογισμούς με κλασματικούς αριθμούς και ελάχιστη εννοιολογική κατανόηση των αριθμών αυτών.

Οι Carpenter et al. (1980), βρήκαν ότι αρκετοί μαθητές για να προσθέσουν ετερώνυμα κλάσματα, πρόσθεσαν αριθμητές και παρονομαστές αντίστοιχα και επίσης δεν είχαν την ικανότητα να υπολογίσουν το αποτέλεσμα της πράξης 12/13 + 7/8 !

Ο Ohlsson (1988), παρατηρεί: "Η δυσκολία του κεφαλαίου ... είναι σημαντική απο τη φύση του: Πώς θα μπορούσαν τα κλάσματα να κατανοηθούν; Η πεπλεγμένη σημασιολογία των κλασμάτων είναι, εν μέρει, μιά συνέπεια του σύνθετου χαρακτήρα των κλασμάτων. Πώς συνδυάζεται η σημασία του 2 με τη σημασία του 3 για να δημιουργήσουν τη σημασία του 2/3 ; Η δυσκολία των κλασμάτων επίσης είναι ... εν μέρει μιά συνέπεια του συγκεχυμένου πίνακα πολλών σχετικών αλλά μόνο μερικά επικαλυπτόμενων ιδεών που περιβάλλουν τα κλάσματα".

Είναι σαφές από αρκετές μελέτες που έχουν γίνει από πολύ παλιά (De Morgan, 1943), Carpenter, Coburn, Reys και Wilson, 1975), Ginther, Ng και Begle, 1976), (Reys, 1980), ότι η απόδοση των μαθητών στα κλάσματα πάντοτε ήταν κατώτερη από ό,τι θεωρητικά αναμενόταν.

Γιατί όμως συμβαίνει αυτό; Ενώ πέρασαν τόσα χρόνια κι έγιναν τόσες μελέτες, προτάθηκαν νέοι τρόποι διδασκαλίας σε συνδυασμό με νέα μέσα που στις μέρες μας εμπλουτίζονται με τεχνολογικά υπερμέσα, εφαρμόστηκαν νέες τεχνικές στις αίθουσες διδασκαλίας το τελικό αποτέλεσμα είναι ότι τα λάθη που γίνονταν παλιά να επαναλαμβάνονται και σε μερικές περιπτώσεις πανομοιότυπα!

Για παράδειγμα, ένα σημαντικότατο ποσοστό παιδιών και εφήβων σε διεθνή κλίμακα εξακολουθεί να πιστεύει ότι το άθροισμα 1/2+1/3 είναι ίσο με 2/5!! (Behr, et al., 1983). Το συγκεκριμένο λάθος πρόσθεσης είναι πολύ επίμονο, αφού αρκετών ετών διδασκαλία σχεδιασμένη ειδικά για να διδάξει μιά σωστή μέθοδο πρόσθεσης κλασμάτων δέν κατάφερε να το απαλείψει σε ένα μεγάλο αριθμό μαθητών (Silver, 1983). Οι μαθητές της έρευνας των Behr, Post, Lesh, και Silver (1983), πρίν απαντήσουν για το αποτέλεσμα της παραπάνω πρόσθεσης, είχαν δεχθεί επί 6 χρόνια διδασκαλία για το πώς θα αναπύξουν μιά σωστή μέθοδο για την πρόσθεση των κλασμάτων! Ταυτόχρονα διαπιστώθηκε βελτίωση στην απόδοση των μαθητών σε περιπτώσεις διάταξης ή σύγκρισης κλασμάτων. Αλλά γιατί όμως αντιστέκονται, ιδιαίτερα, και σε τέτοιο βαθμό στη διδασκαλία τα λάθη της πρόσθεσης; Οι Carpenter, Coburn, Reys & Wilson (1978), πιστεύουν ότι η άποψη που απο πολλούς διατυπώνεται, πως πρόκειται για μιά γενίκευση της πρόσθεσης των ακέραιων αριθμών, που κάνουν τα νέα παιδιά, δεν είναι καθόλου επαρκής. Η ισχυρή αντίστασή του στην πολύχρονη διδασκαλία αποδεικνύει κατά την άποψη των ίδιων ότι αυτό το λάθος δέν μπορεί να ξεριζωθεί γιατί διαθέτει **εννοιολογική υποστήριξη** στη σκέψη των υποκειμένων που το κάνουν. Η Behr (όπ. παρ.) και οι συνεργάτες της δηλώνουν αδυναμία να δώσουν μιά σαφή εξήγηση σε αυτό το εύρημα. Ισως λένε, η εννοιολογική αυτή υποστήριξη να παρέχεται σ'αυτό το λάθος από τις στατικές εικόνες των κυκλικών χωρίων που χρησιμοποιούνται στην πρόσθεση των κλασμάτων, σε συνδιασμό με την κυριαρχία του μέρος-όλου μοντέλου στη σκέψη των παιδιών. Σημειώνουμε κι εδώ ότι η παραδοσιακή διδασκαλία, από μόνη της, παρά το μεθοδικό και μακρόχρονο σχεδιασμό της, δεν κατάφερε να απαλλείψει συγκεκριμένα λάθη των μαθητών στα κλάσματα.

Οι λόγοι για τη δυσκολία των παιδιών στα κλάσματα, δεν φαίνεται ακόμη και σήμερα να έχουν αποσαφηνιστεί και οι απόψεις των ερευνητών δεν ταυτίζονται. Η Liebeck

(1984), πιστεύει ότι γιά τρείς λόγους τα κλάσματα παρουσιάζουν τόση μεγάλη δυσκολία: α) Τα κλάσματα δεν μπορούν να εκληφθούν από τους μαθητές σαν ξεχωριστές, ανεξάρτητες οντότητες. Αυτά έχουν σημασία μόνο αν συσχετιστούν με το όλο στο οποίο αυτά απευθύνονται. Ομως ενώ δεν είναι εύκολο να φαντασθούμε ένα τέταρτο ενός αχλαδιού, δεν είναι το ίδιο εύκολο να φαντασθούμε ένα τέταρτο της ώρας. Κάθε φορά λοιπόν που αναγνωρίζουμε ένα κλάσμα πρέπει να το συνδυάσουμε ή καλύτερα να το εφαρμόσουμε σε κάποιο όλο. β) Ο συμβολισμός του κλάσματος είναι πραγματικά περίπλοκος. Το αριθμητικό στον πυθμένα του κλάσματος (παρονομαστής) έχει τελείως διαφορετική λειτουργία από το αριθμητικό στην κορυφή του κλάσματος (αριθμητής). Για παράδειγμα ο παρονομαστής του κλάσματος 2/3 μας λέει ότι το ΟΛΟ έχει διαιρεθεί σε 3 ίσα μέρη (μερίδια). Ο αριθμητής μας λέει ότι 2 από αυτά τα μερίδια είναι υπό εξέταση. Η λέξη παρονομαστής σημαίνει "το πράγμα το οποίο ονομάζει". Πράγματι, ο παρονομαστής του 2/3 δίδει στο κλάσμα το όνομά του. "Τρίτα". Η λέξη αριθμητής σημαίνει "το πράγμα το οποίο αριθμεί". Ο αριθμητής του 2/3 μας λέει τον αριθμό των τρίτων που θα εξετασθούν.
γ) Τέλος, ο συμβολισμός αριθμητή-παρονομαστή είναι δυνατό να ενέχει την έννοια του ίδιου κλάσματος με απείρως πολλούς τρόπους. Για παράδειγμα το 2/3 είναι το ίδιο με όλα τα παρακάτω 4/6, 10/15, 14/21 κλπ.
Οι ισχυρισμοί της Liebeck όσο κι αν είναι βάσιμοι σχετίζονται ωστόσο με μια όψη, με μια μόνο υποκατασκευή, ή υποέννοια, δηλ. με ένα μόνο μοντέλο προσέγγισης κλασμάτων: το μέρος- όλου μοντέλο.
Από μαθηματική άποψη αξίζει να σημειώσουμε ότι, αντίθετα με το σύνολο Ν, των φυσικών αριθμών (δηλ. αυτό που οι μαθητές εννοούν όταν μιλούν για ακέραιους αριθμούς), το οποίο συγκροτείται με αυτόνομα, αυθύπαρκτα στοιχεία, το σύνολο Q των ρητών **έχει νόημα** μόνο σαν σύνολο εφοδιασμένο με δομή. Αυτό κατά τη γνώμη μας είναι ίσως η σοβαρότερη πηγή δυσκολιών των μαθητών για τα κλάσματα.
Το θέμα ωστόσο του συμβολισμού που αναφέρθηκε χρήζει μεγαλύτερης προσοχής: Ο Kline (1974), μιλώντας γενικά για το ρόλο του συμβολισμού επισημαίνει ότι " ο συμβολισμός μπορεί μεταβιβάσει ιδέες αποτελεσματικά, μπορεί να αποκρύψει ιδέες, και ακόμη να αποκρύψει την απουσία των ιδεών. Οι Markovits και Sowder (1991), παρατηρούν ότι "η χρήση διαφορετικών συμβόλων για να παρασταθεί η ίδια ιδέα και η χρήση παρόμοιας-όψης συμβόλων για να παρασταθούν διαφορετικές ιδέες" (σελ. 5), μπορεί να αποβεί μεγάλο πρόβλημα για κάποιους μαθητές. Στην περίπτωση του κλάσματος οι θέσεις αυτές είναι πολύ ισχυρές και όπως θα δούμε στη πορεία αυτής της εργασίας το θέμα του συμβολισμού είναι πανταχού παρόν. Η εργασία των μαθητών στο συμβολικό επίπεδο είναι αναπόφευκτη, είναι αδύνατο να παρακάμψουμε την συμβολική έκφραση και κατά συνέπεια το πρόβλημα του συμβολισμού είναι μιά σοβαρή δυσκολία στη μάθηση των κλασμάτων. Ταυτόχρονα, η εργασία στο συμβολικό επίπεδο είναι αφηρημένη και δεν πρέπει ποτέ να διαφεύγουν της προσοχής μας τα λόγια του Vygotsky (1986) : "το παιδί και ο ενήλικος κοιτάζουν το ίδιο αντικείμενο από δυό θεμελιακά διαφορετικές γωνίες: του παιδιού το οπτικό πεδίο είναι συγκεκριμένο και πλαισιακό (situated), ενώ το οπτικό πεδίο του ενήλικα είναι εννοιολογικό. "

4.3 ΟΙ ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΣΕ ΣΥΝΕΧΗ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΠΕΔΙΑ

Ενα κεντρικό ερώτημα που απασχολεί τη διδασκαλία των ρητών αριθμών στο Δημοτικό σχολείο είναι το εάν είναι ορθότερο να διδαχθούν τα κλάσματα με τη χρήση συνεχών ή διακριτών μέσων. Οι Hiebert, & Tonnessen (1978), διερεύνησαν την υπόθεση εαν και κατα πόσο απαιτούνται διαφορετικοί τύποι γνωστικών δομών προκειμένου να χρησιμοποιηθούν διακριτά ή συνεχή μοντέλα στη διδασκαλία των κλασματικών αριθμών. Πιό συγκεκριμένα, εξέτασαν εάν η "μέρος- όλου" ερμηνεία, όπως αυτή δόθηκε από τους Piaget, Inhelder, & Szeminska, (1960), ήταν κατάλληλη και για διακριτές και για συνεχείς περιπτώσεις του μήκους και του εμβαδού. Η εργασία (task), που ανατέθηκε στα παιδιά ήταν να μοιράσουν εξ ίσου και πλήρως μιά ποσότητα σε ένα αριθμό ταριχευμένων ζώων. Οι Hiebert, & Tonnessen (οπ. παρ.) βρήκαν ότι η απόδοση των παιδιών στη διακριτή περίπτωση ήταν σημαντικά καλύτερη από εκείνη στη συνεχή περίπτωση. Οι Behr, Post, Lesh, R. & Silver, (1983), επιχειρούν μιά ερμηνεία του ευρήματος, λέγοντας ότι είναι πιθανό οι λύσεις στη συνεχή περίπτωση να απαιτούν ένα καλά αναπτυγμένο, προβλεπτικό (anticipatory), σχήμα ενώ στην περίπτωση των διακριτών μέσων αυτό που χρειάζεται είναι μιά απλή διαμέριση (partitioning). Ακόμη πιό συγκεκριμένα, οι διακριτές εργασίες μπορούν να επιλυθούν χωρίς θεώρηση του συνόλου σαν ένα όλο και χωρίς την προεξόφληση της τελικής λύσης.

Παραδοσιακά η περισσότερη διδασκαλία στα σχολεία βασίστηκε σε εμπειρίες με συνεχείς ποσότητες (Hunting, 1984). Ωστόσο τα παιδιά,επισημαίνει ο ίδιος, προτιμούν σαφώς να χρησιμοποιούν διακριτά αντικείμενα για να επιλύσουν προβλήματα κλασμάτων (Hunting, οπ. παρ.). Είναι πιθανό δε, η έννοια της συνεχούς ποσότητας ενώ δεν είναι επαρκής να επιτρέψει στα παιδιά να λύσουν προβλήματα σε διακριτά πλαίσια, να είναι προαπαιτούμενη γνώση για να καταστήσει ικανά τα παιδιά να ερμηνεύσουν και να λύσουν προβλήματα κλασμάτων με διακριτές ποσότητες.

Την προτίμησή τους προς τις διακριτές ποσότητες διατυπώνουν και οι Behr, Harel, Post, Lesh, (1992), βασιζόμενοι στην έρευνα των Bigelow, Davis, & Hunting, (1989), η οποία καταλήγει στην πρόταση ότι οι πρώτες έννοιες των παιδιών για τους ρητούς θα πρέπει να βασιστούν σε διακριτές ποσότητες.

Οι γνωστικές δομές λοιπόν, που εμπλέκονται στη λύση προβλημάτων με τους ρητούς στα δύο πλαίσια, διακριτό και συνεχές, φαίνεται να είναι διαφορετικές και οι απαιτήσεις στην περίπτωση του συνεχούς πιθανόν να είναι μεγαλύτερες. Αρα, δε φαίνεται ορθότερο να προτιμήσουμε σε μιά πρώτη διδακτική προσέγγιση τις συνεχείς ποσότητες, όταν υπάρχουν βάσιμες πιθανότητες να είναι προαπαιτούμενη η γνώση των συνεχών για τη λύση προβλημάτων με κλάσματα σε διακριτά πλαίσια χωρίς ταυτόχρονα να είναι επαρκής για το σκοπό αυτό.

4.4 Η ΑΠΟΦΥΓΗ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Τα παιδιά αποφεύγουν τα κλάσματα όταν έχουν τη δυνατότητα άλλης επιλογής προκειμένου για θέματα αριθμητικών εκφράσεων (number forms). Προτιμούν άλλους τύπους αριθμών, πέρα απο κλασματικές μορφές και φαίνεται να θέλουν να επιστρέψουν σε ένα σύστημα αποδεκτό σ' αυτά και το οποίο είχαν μάθει πριν να πληροφορηθούν την ύπαρξη των κλασμάτων (Kerslake, 1986). Ο αριθμός των περιπτώσεων που διαπιστώνεται αυτό είναι αξιοσημείωτος, αναφέρει η ίδια. Αλλά ας δούμε μερικά παραδείγματα που θεμελιώνουν τον παραπάνω ισχυρισμό. Ενα από αυτά το οποίο δόθηκε σε μαθητές 12, 13, 14 και 15 ετών στα πλαίσια του SESM project αναφέρεται στην εξής άσκηση:

"Ενα κομμάτι ταινίας μήκους 17 cm πρέπει να κοπεί σε 4 ίσα κομμάτια. Σημειώστε την απάντηση που πιστεύετε ότι είναι πιο ακριβής για το μήκος κάθε κομματιού:

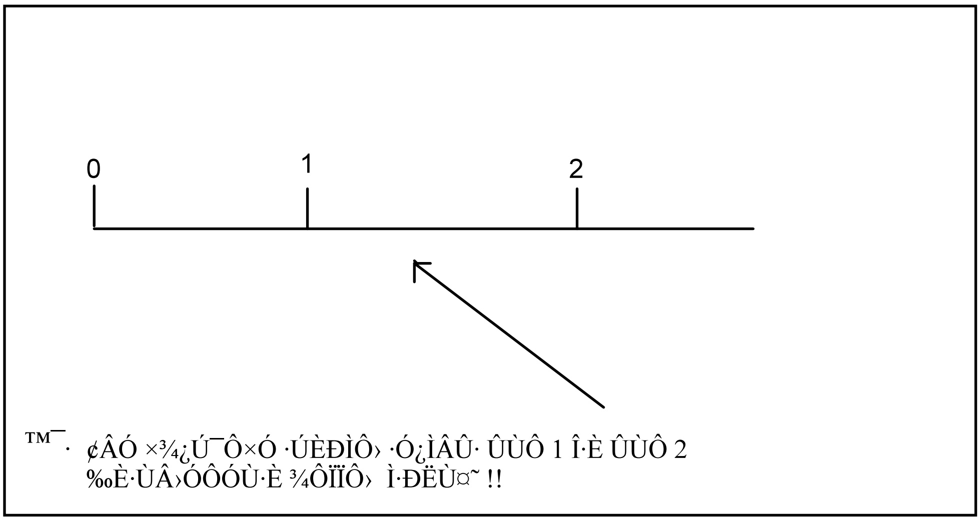
α) 4 cm και υπόλοιπο 1 κομμάτι.
β) 4 cm και υπόλοιπο 1 cm.
γ) 4 1/4 cm.
δ) 4/17 cm.

Οι επί τοις % απαντήσεις των μαθητών κατά ηλικία καταγράφονται στον πίνακα:

	(γ)	(β)	(α)	(δ)
12 χρόνων	43.0	37.4	8.5	9.3

13 "	54.4	29.8	6.8	6.5
14 "	61.4	26.6	4.2	5.8
15 "	61.4	27.4	3.7	6.0

Ενα δεύτερο, πειστικότερο παράδειγμα, οτι αποφεύγουν συστηματικά οι μαθητές τα κλάσματα, πάλι απο την ίδια έρευνα είναι το εξής:
Ερωτήθηκαν οι μαθητές για το αποτέλεσμα της πράξης 3: 4. Το αποτέλεσμα ήταν ένας μικρός αριθμός να απαντήσει σωστά (12 παιδιά), ένας αριθμός (8) να δώσει την απάντηση "1 και υπόλοιπο 1", ένας άλλος αριθμός (6) να δώσει την απάντηση "0" (μηδέν),και οι υπόλοιποι (9) να αφήσουν αναπάντητη την ερώτηση. Επίσης ένας μαθητής έδωσε την απάντηση "το 4 δεν πάει στο 3". Και αυτό ερμηνεύτηκε απο την Kerslake σαν στρατηγική αποφυγής των κλασμάτων απο το συγκεκριμένο μαθητή. Οσο για τους μή απαντήσαντες την ερώτηση αυτή για την ίδια ερευνήτρια αποτελεί στρατηγική αποφυγής των κλασμάτων καθότι, στη διάρκεια του όλου τέστ το να μην απαντούν γενικά οι μαθητές στις ερωτήσεις που ετίθεντο ήταν μιά ασυνήθιστη στάση.
Ενα τρίτο παράδειγμα είναι η περίπτωση της παρακάτω ερώτησης: "Βάλτε τους αριθμούς που λείπουν στα κενά κουτιά:
c) 2X α=7
d) 4X α=10
e) 2X α=1
f) 8X α=5
το αποτέλεσμα ήταν απο τους 59 ερωτηθέντες 28 στην (c) , 32 στην (d), 27 στην (e), και 42 στην (f) να απαντήσουν μέσα στο κενό κουτί ότι "κανένας αριθμός δεν υπάρχει που να επαληθεύει αυτή τη σχέση." Να σημειωθεί εδώ, ότι αυτή την απάντηση την έδωσε το σύνολο σχεδόν των παιδιών που απάντησαν εσφαλμένα. Απο αυτή την περίπτωση φαίνεται πολύ καθαρά ότι οι μαθητές δεν μπορούν να διανοηθούν τα κλάσματα σαν αριθμούς δηλ. σαν αυθύπαρκτες οντότητες και να δεχθούν την ύπαρξή τους ως αριθμών. Ακόμη να σημειωθεί ότι μετά από πειραματική διδασκαλία που σχεδιάστηκε με στόχο να καταδείξει ότι τα κλάσματα είναι αριθμοί η κατάσταση βελτιώθηκε, αλλά πάλι υπήρξε ένας σημαντικός αριθμός παιδιών απο τα μυαλά των οποίων δεν ξεκαρφώθηκε η ιδέα ότι τα κλάσματα δεν είναι αριθμοί και όπου αυτά μπορούσαν αρνούντο την ύπαρξή τους.
Ενα τέταρτο, παράδειγμα είναι η περίπτωση που οι μαθητές εκλήθησαν να τοποθετήσουν αριθμούς πάνω σε μια γραμμή αριθμών (number liine) ανάμεσα στους αριθμούς 1 και 2.



Η στάση ενός αρκετά μεγάλου αριθμού παιδιών ήταν και πάλι να αποφύγουν τα κλάσματα απαντώντας ότι δεν υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί.
Ενα τελευταίο παράδειγμα, είναι το ερώτημα προς τους μαθητές να υπογραμίσουν στο παρακάτω σύνολο τους υπάρχοντες σ' αυτό αριθμούς:

{4 κάποιος 3/4 5,7 δέκα πολλά 2 1/2 13/5 17 19/23 7/3}

Τα αποτέλεσμα ήταν σε σύνολο 59 ερωτηθέντων να υπογραμμίσουν το 3/4 ,το 13/5 και το 19/23 μόνο 22 μαθητές ,το 7/3 μόνο 21 μαθητές ενώ το μικτό 2 1/2 να το υπογραμμίσουν 34 μαθητές προφανώς ένεκα της παρουσίας του ακεραίου 2 σε αυτόν.
Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι ποιά εξήγηση υπάρχει για την αποφυγή των κλασμάτων. Ενας λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό λέει η Kerslake ίσως είναι το γεγονός ότι τα παιδιά έχουν πολύ ισχυρά συνδέσει στο μυαλό τους τη θεωρία των κλασμάτων με παραδείγματα γεωμερικών σχημάτων στα οποία τα κλάσματα αναπαρίστανται με **μέρη του** κύκλου ή με τετράγωνα δηλ. με το γνωστό μοντέλο μέρος-όλου. Ας παρακολουθήσουμε όμως αναλυτικότερα την πορεία των συλλογισμών της kerslake που εξηγούν την αποφυγή των κλασμάτων :
Τα παιδιά δέν βλέπουν τα κλάσματα ως αριθμούς. Αυτό κυρίως οφείλεται στη μεγάλη προσκόλησή τους στο μέρος-όλου μοντέλο που εστιάζει στη διαμέριση γεωμετρικών σχημάτων (ολοτήτων) οι οποίες προφανώς δεν έχουν άμεση σχέση με αριθμούς. Αφού λοιπόν τα κλάσματα δεν είναι αριθμοί και για να είμαστε πιό ακριβείς ακέραιοι αριθμοί σαν κι αυτούς που καλά ξέρουν τα παιδιά -αυτό ακριβώς αποδεικνύει σε άλλο μέρος της έρευνάς της η Kerslake ότι δηλ. για τους μαθητές που φτάνουν στη διδασκαλία των κλασμάτων ισχύει αριθμός=ακέραιος[13] αριθμός- είναι λογικό να τα αποφεύγουν. (Σημειώνουμε ωστόσο ότι η προσκόληση των παιδιών στο μοντέλο που έχει αναφερθεί (part-Whole) είναι προϊόν της διδασκαλίας που προηγήθηκε δηλ. της παραδοσιακής διδασκαλίας). Συνεπώς μιά νέα πειραματική-θεραπευτική διδασκαλία (teaching experiment) θα εξαλείψει ή τουλάχιστον θα βελτιώσει την κατάσταση. Η διδασκαλία αυτή πράγματι έγινε απο την μια ερευνητική ομάδα στο πλαίσιο του SESM project που προαναφέρθηκε και είχε σαν στόχο να προχωρήσει παραπέρα την σκέψη των παιδιών, ώστε να αντιληφθούν τα κλάσματα και ως αριθμούς, να πάψουν να αρνούνται την ύπαρξή τους και συνακόλουθα να μην υπάρχει λόγος να τα αποφεύγουν.Τα αποτελέσματα αυτής της διδασκαλίας φαίνονται απο τον παρακάτω πίνακα ο οποίος συνοψίζει και όλα τα παραδείγματα που προαναφέρθηκαν:

Ζήτημα	προ-τεστ	μετα-τεστ	delayed
			μετα-τεστ
Δεν υπογραμίστηκαν κλάσματα	24	15	6
Δεν σημειώθηκαν κλάσματα πάνω στην number line	18	5	5
Δεν υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στο 1 και το 2	10	3	7
Δεν απάντησαν	9	5	3
Δεν υπάρχει αριθμός για τον οποίο:			

[13] Οπως έχουμε επισημάνει και στην παρ. 0.2 όταν οι μαθητές του δημοτικού κάνουν λόγο για ακέραιους αριθμούς εννοούν τους φυσικούς αριθμούς.

4Χ α=10	28	23	21
2Χ α=1	32	33	26
8Χ α=5	27	6	12
2Χ α=7	42	22	27

Σημ. Το delayd μετα-τέστ είναι όπως μαρτυρεί και το όνομά του μιά χρονικά μεταγενέστερη απο το μετα-τέστ δοκιμή. Το δείγμα υπενθυμίζεται ότι ήταν 59 μαθητές. Η τρίτη στήλη δείχνει τα αποτελέσματα της "διορθωτικής" , ας την ονομάσουμε έτσι διδασκαλίας.

Ο παραπάνω πίνακας παρατέθηκε σκόπιμα για να δείξει αυτό που και η ίδια η ερευνήτρια παραδέχεται έμμεσα: Οτι δηλ. η εξήγηση που δίνει για την αποφυγή των κλασμάτων δεν είναι επαρκής απο μόνη της. Η πειραματική διδασκαλία σαφώς βελτίωσε την κατάσταση για ένα σημαντικό αριθμό μαθητών, ενώ για τους υπόλοιπους δεν τα κατάφερε. Στην υπόθεσή μας βασικό ρόλο παίζει το πέρασμα από τα διακριτά στα συνεχή μέσα. Αυτό ακριβώς προσπάθησε να πετύχει η πειραματική διδασκαλία ξεκινώντας απο το γνωστό στους μαθητές part whole μοντέλο για να φτάσει στην έννοια του αριθμού ως σημείου στο συνεχή χώρο (number line). Το εγχείρημα αυτό ίσως φαίνεται εύκολο. Στην πραγματικότητα όμως δεν είναι καθόλου. Διότι θέτει ευθέως ένα πολύ παλιό και μεγάλο, επιστημολογικό πρόβλημα που αφορά τη θεμελίωση των μαθηματικών και βρίσκεται στο ακόμα και σήμερα στο επίκεντρο της φιλοσοφίας, με την ευρύτερη έννοιά της και όχι μόνο της φιλοσοφίας των μαθηματικών (Fraenkel, Bar-Hillel, 1958). Αφορά το πέρασμα απο τα διακριτά στα συνεχή μέσα.

Ετσι, μια σύντομη πειραματική διδασκαλία προφανώς και δε θα μπορούε να γεφυρώσει το χάσμα ανάμεσα στους προαναφερθέντες ετερογενείς μαθηματικούς χώρους δηλ. της απαρίθμησης (counting) και μέτρησης (measurment).

Το τελικό συμπέρασμα απ'όλα τα παραπάνω είναι ότι το σύνολο των παραγόντων που συντείνουν στην αποφυγή των κλασμάτων δεν είναι εύκολο να προσδιοριστεί και σαφώς αποτελεί ένα ζητούμενο. Εμείς όμως θα θέλαμε να σημειώσουμε ότι η παρατήρηση, "τα παιδιά όταν φτάσουν στη διδασκαλία των κλασμάτων θέλουν να επιστρέψουν σε ένα σύστημα αριθμών που έμαθαν πρίν και αποδεκτό σε αυτά", χρήζει μεγαλύτερης προσοχής. Γιατί το σύστημα αυτό δεν είναι άλλο απο το σύστημα των ακεραίων αριθμών, ένα σύστημα το οποίο αρκετά καλά γνωρίζουν οι μαθητές, ελέγχουν, διαθέτουν και δουλεύουν με αυτό όλα τα προηγούμενα χρόνια των σπουδών τους. Αυτά προφανώς σημαίνουν ισχυρή προσκόλληση στο σύστημα αυτό και άρα καταγράφουν και μιά δυσκολία ενδεχόμενης υπέρβασής του.Το πέρασμα λοιπόν σε ένα άλλο σύστημα αριθμών όπως είναι το σύστημα των κλασματικών αριθμών με διαφορετικό περίπλοκο συμβολισμό και πιό σύνθετες διαδικασίες ασφαλώς και συνεπάγεται προσαρμοστικά προβλήματα απο μόνο του.

Ωστόσο, οι έννοιες των κλασμάτων δεν είναι απλά μιά επέκταση των εννοιών των ακεραίων αριθμών. Τα κλάσματα συνιστούν ένα νέο αριθμητικό σύστημα το οποίο βασίζεται στην **πολλαπλασιαστική** σχέση. Για παράδειγμα, τρία είναι τρία μισά του δύο και δύο είναι δύο τρίτα του τρία. Αλλά αυτό που ξέρουν οι μαθητές δέν είναι η πολλαπλασιαστική αλλά η προσθετική σχέση. Ξέρουν καλά, για παράδειγμα, ότι τρία είναι ένα παραπάνω απο δύο (Vergnaud, 1983). Αυτά κατά τη γνώμη μας συνιστούν συμπληρωματικούς λόγους αποφυγής των κλασμάτων πέρα απο τους οπωσδήποτε βάσιμους ισχυρισμούς της Kerslake. Τέλος, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι παρατηρήθηκαν σε μαθητές δημοτικού (8η τάξη) συμπεριφορές που έκαναν τους ερευνητές να μιλήσουν για **σύνδρομο** αποφυγής των κλασμάτων (Karplus, Pulos, and Stage, 1983).

Αυτό που πρέπει να κρατήσουμε απο την ενότητα αυτή είναι ότι οι πειραματικές-θεραπευτικές μέθοδοι που έγιναν στο πλαίσιο της παραδοσιακής διδασκαλίας και οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν στην αναφερόμενη έρευνα για να διευρύνουν τις γνώσεις των μαθητών στα κλάσματα και συγκεκριμένα να κατορθώσουν να αντιληφθούν τη διάσταση των κλασμάτων **ως αριθμών** δεν επέφεραν τα προσδοκώμενα αποτελέσματα.

4.5 Η ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΜΟΝΑΔΑΣ

Η εννοιολογικοποίηση της μονάδας είναι ένα θεμελιακό ζήτημα στην αντιμετώπιση των κλασμάτων, αλλά και γενικότερα αποτελεί προϋπόθεση για την κατανόηση ενός μεγάλου πλήθους μαθηματικών εννοιών. Οπως τονίζει η Lamon (1993), η ικανότητα να κατασκευάσουμε μια μονάδα αναφοράς ή μια μονάδα όλου και στη συνέχεια να επαναερμηνεύσουμε μια δεδομένη κατάσταση από την άποψη αυτής της μονάδας είναι κρίσιμης σημασίας στην ανάπτυξη εκλεπτυσμένων (sophisticated) μαθηματικών εννοιών. Επομένως, η μοναδοποίηση είναι ένα ζήτημα πάνω στο οποίο θα εστιάσουμε την προσοχή μας αναγκαστικά και προβάλλει σαφής ανάγκη, στο βαθμό που είναι εφικτό, να αναπτύξουμε λογισμικό που να βοηθάει την κατανόησή του.
Η εξελικτική διαδικασία (process), για το σχηματισμό σύνθετων μονάδων ξεκινά όπως υποστηρίζουν οι Steffe & Cobb (1988), την πρώϊμη παιδική ηλικία και προοδευτικά περιλαμβάνει τη διαμόρφωση σύνθετων μονάδων οι οποίες θα δημιουργήσουν πεπλεγμένες ποσοτικές δομές. Πιό συγκεκριμένα, η διαδικασία σχηματισμού σύνθετων μονάδων ξεκινά από δραστηριότητες στοιχειωδών ποσοτικοποιήσεων, όπως είναι η subitizing και επεκτείνεται κατόπιν σε δραστηριότητες απαρίθμησης (counting).
Οι Steffe, von Glasersfeld, Richards, Cobb (1983), ξεκίνησαν τις έρευνές τους πάνω στην ιδέα της απαρίθμησης (counting) και στους διάφορους τύπους μονάδων που τα παιδιά κατασκευάζουν. Στην συνέχεια κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η κατασκευή αυτών των μονάδων οδηγεί στην ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας των παιδιών αφού παίζει σημαντικό ρόλο στην κατανόηση αρκετών μαθηματικών εννοιών συμπεριλαμβανομένης και εκείνης του κλάσματος. Οι έρευνες βασίστηκαν στην πεποίθηση ότι η κατασκευή των απαριθμήσιμων μονάδων (countable units), είναι ένα προαπαιτουμενο για την απαρίθμηση. Πιό συγκεκριμένα οι παραπάνω ερευνητές υπέθεσαν ότι "στον πυρήνα κάθε ποσοτικοποίησης και κάθε αριθμητικής σκέψης έγκειται η κατασκευή διακριτών, επαναλήψιμων μονάδων και η σύζευξή τους." (σελ. 4). Στη συνέχεια αυτοί αναγνώρισαν μιά σειρά από τύπους μονάδων που οι μαθητές κατασκεύασαν και τεκμηρίωσαν σε επόμενες εργασίες τους ότι οι έννοιες της μονάδας παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη των εννοιών του κλάσματος, των λόγων, των αναλογιών και βοηθούν την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων (Cobb and Wheatley, 1988), (Steffe and Cobb, 1988). Ακόμη πιό πρόσφατη έρευνα (Lamon, 1993), έδειξε με σαφέστερο τρόπο τα προηγούμενα ευρήματα, ιδιαίτερα για τους ρητούς αριθμούς. Η Lamon (οπ. παρ), κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι σχετιζόμενες με τη μονάδα έννοιες (unit-related), πέραν του ότι είναι ένας σημαντικός παράγων στην κατανόηση του ρητού αριθμού, "είναι συντρέχουσες (recurrent), αναδρομικές (recursive), και αυξανόμενης συνθετότητας ανάμεσα στους μαθηματικούς χώρους. " (σελ. 133).
Παρατηρήθηκε ότι οι στρατηγικές που χρησιμοποίησαν μαθητές δευτέρας τάξης δημοτικού για να συντονίσουν διαφορετικές μονάδες σχετίστηκαν με την κατανόηση απλών κλασμάτων όπως το 1/2. Οι τύποι που διακρίθηκαν στη μελέτη ήταν 4:
α) σχήματα ένα- σαν-ένα
β) σχήματα ένα- σαν-πολλά
γ) σχήματα πολλά- σαν- ένα
δ) σχήματα πολλά- σαν -πολλά.

Το σημαντικό εύρημα είναι το εξής: Τα παιδιά που είχαν αναπτύξει ποσοτική κατανόηση του μισού είχαν επίσης αναπτύξει και τα σχήματα ένα-σαν-πολλά και πολλά -σαν -ένα. Ομως, μόνον όταν είχαν διαθέσιμο το σχήμα πολλά-σαν-πολλά, τότε ήταν καταφανής η αφηρημένη κατανόηση του μισού. Αυτά δείχνουν ύπαρξη σαφούς σχέσης συνάφειας ανάμεσα στην κατανόηση του μισού και σε έννοιες που σχετίζονται με μονάδες.

Σχετικά με τη θέαση του κλάσματος ως λόγου οι Lamon (1993), Lo and Watanable (1993), βρήκαν ότι η κατανόηση των λόγων και των αναλογιών απαιτεί από τα παιδιά να συγκροτήσουν "το λόγο σαν μιά μονάδα". Για παράδειγμα να δούμε το πρόβλημα:

"Μιά επιχείρηση έστειλε 9 αντιπρόσωπους πωλήσεων σε ένα ταξίδι οι οποίοι χώρεσαν άνετα σε 2 αυτοκίνητα. Σε ένα άλλο ταξίδι χρειάστηκε να στείλει 18 αντιπρόσωπους. Τί πρόβλεψη θα πρέπει να κάνει σε ενοικιαζόμενα αυτοκίνητα;"

Η κατάσταση προφανώς αντικατοπτρίζει το λόγο 9 άνθρωποι προς 2 αυτοκίνητα δηλ. 9: 2.

Το 9 είναι μιά σύνθετη μονάδα: 9 άτομα θεωρούνται σαν 1 εννια-μονάδα δηλ. σαν μονάδα μονάδων. Παρόμοια το δύο είναι μιά σύνθετη μονάδα. Δύο ξεχωριστά αυτοκίνητα γίνονται μιά απλή δι-μονάδα. Το 9: 2 είναι η νέα μονάδα που σχηματίστηκε από τη συσχέτιση του 9 με το 2. Εάν τώρα παραστεί ανάγκη δημιουργίας νέων συνθέσεων η μονάδα είναι έτοιμη με τις κλάσεις ισοδυναμίας της. Σχηματίζουμε τις μονάδες των μονάδων των μονάδων: 18 : 4 είναι 2 από την μονάδα 9:2.

Οι Case & Sandieson (1988), Kieren (1988), παρατήρησαν ότι δυο μείζονες αλλαγές χαρακτηρίζουν τις διάφορες ερμηνείες των ρητών αριθμών:

α) Οταν οι μαθητές αντιμετωπίζουν τους ρητούς απο την πλευρά της μέρος-όλου ερμηνείας, η μονάδα μετακινείται απο διακριτές ποσότητες που μπορούν να απαριθμηθούν, σε συνεχείς ποσότητες που μπορούν να μετρηθούν ή να διαμερισθούν και ακόμη να αναπαρασταθούν απο ένα απλό αριθμό της μορφής α/β με α#0 .

β) Οταν οι μαθητές αντιμετωπίζουν την πηλίκο (quotient), λόγο (ratio), τελεστή (operator), ερμηνείες του ρητού αριθμού, η μονάδα μετακινείται για να συμπεριλάβει σύγκριση μονάδων, με τον αριθμητή που αναπαριστά μια μονάδα και τον παρονομαστή που αναπαριστά μιά άλλη μονάδα. Ετσι οι μαθητές δημιουργούν ένα νέο είδος μονάδας το οποίο είναι έξω απο τη σύγκριση των δύο αρχικών (original), μονάδων (Schwarz, 1988).

Οι δύο αυτές μείζονες αλλαγές μας ξαναγυρίζουν στις απόψεις που προαναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, σύμφωνα με τις οποίες εάν θέλουμε οι μαθητές να αναπτύξουν μια πλήρη κατανόηση του ρητού αριθμού θα πρέπει οι αρχικές τους αντιλήψεις να διευρυνθούν και να γίνουν ευέλικτες για να αντιμετωπίσουν την ευμετάβλητη φύση της μονάδας.

Υπάρχουν μελέτες απο το πρόσφατο παρελθόν που υποστηρίζουν ότι η διαισθητική αντίληψη των μαθητών αρχικά δεν ανταποκρίνεται στην ευρύτητα και στην ευελιξία που περιγράφηκε παραπάνω. Λογική συνέπεια λοιπόν είναι, οι μαθητές να έχουν δυσκολίες στην αναγνώριση των κατάλληλων μονάδων (Hunting, 1983), (Leinhardt, 1988), (Lamon, 1989), (Mack, 1990). Οι μαθητές αυτοί συχνά μετατοπίζουν τη μονάδα έτσι ώστε να περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία που αναγνωρίζονται στο πρόβλημα ή στις εικόνες ή στα υλικά που αναπαριστούν το πρόβλημα. Αυτό περιορίζει την ικανότητα των μαθητών να πραγματευτούν κλάσματα μεγαλύτερα του ενός. Παραθέτουμε απο τις εργασίες της Mack (1987), και Mack (1993), τα παρακάτω δύο παραδείγματα που παριστάνουν ανάγλυφα τις παραπάνω δυσκολίες εννοιολογικοποίησης της μονάδας:

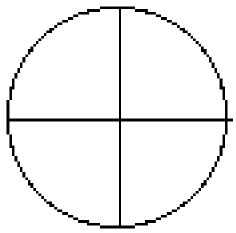
Παράδειγμα πρώτο (Mack, 1987):

Δάσκαλος: Πές μου ποιό από τα δυό κλάσματα είναι το μικρότερο το 5/8 ή το 5/4 ;

Μαθητής: Καλά, δεν είναι λίγο απίθανο είδος κλάσματος το 5/4 ;

Δάσκαλος: Γιατί ;

Μαθητής: Επειδή ... εάν εμείς είχαμε 5 κομμάτια πίτσα έξω από 4 ... αλλά πως θα μπορούσαμε να έχουμε 5 έξω από 4 ; Πως θα μπορούσατε εσείς να πάρετε 5/4 ;
Δασκαλος: Καλά πώς γίνεται να μην μπορείς να πάρεις 5/4 ;
Μαθητής: Επειδή , δείτε αυτό το σχήμα [σχεδιάζει το παρακάτω σχήμα]. Υπάρχουν 4 αλλά πώς θα μπορούσαμε εμείς να πάρουμε 5;



Το σχέδιο ενός μαθητή για το 5/4.
(Mack, 1987).

Αυτό το παράδειγμα στηρίζει την άποψη ότι η μέρος-όλου αντίληψη των μαθητών αρχικά ίσως περιορίζει την κατανόηση του ρητού αριθμού, επειδή δεν εννοιολογικοποιεί τη μονάδα με μιά πληθώρα τρόπων όπως τους περιέγραψε η Behr και οι συνεργάτες της. [έχουμε επανειλημμένα αναφερθεί σ'αυτό το ζήτημα]. Ας δούμε και το δεύτερο παράδειγμα για μια πληρέστερη εικόνα της εσφαλμένης εννοιολογικοποίησης.
Παράδειγμα δεύτερο (Mack, 1993) :
Δάσκαλος: Εχεις ένα ολόκληρο κέϊκ σοκολάτας και τρώς το 1/4 απο αυτό. Πόσο κέϊκ σου απόμεινε;
Μαθήτρια: [φτιάχνει πρώτα ένα κύκλο με 4 τέταρτα, στη συνέχεια απομακρύνει το ένα απο αυτά]. Ενα τρίτο ... επειδή έχουν απομείνει τρία κομμάτια ... τρία κομμάτια στο όλο πράγμα [αναφερόμενη στα 3/4 του κύκλου που απόμειναν] ... έτσι αυτά ονομάζονται τρίτα.
Δάσκαλος: Καλά, αλλά εάν εγώ ξαναγυρίσω πίσω εκεί [βάζει το 1/4 και ξανασχηματίζεται ολόκληρος ο κύκλος], τί έχω εγώ τώρα;
Μαθήτρια: τέσσερα κομμάτια ... τέσσερα τέταρτα.
Δάσκαλος: Τώρα εάν εγώ παίρνω απο αυτά πάλι ένα κομμάτι τι θα έχω τώρα ; [ξαναααφαιρεί 1/4 απο το κύκλο ο δάσκαλος]
Μαθήτρια: τρία κομμάτια ... τρία τρίτα.
Δάσκαλος: [επαναλαμβάνει τις παραπάνω ενέργειες και παίρνει συνεχώς τις ίδιες απαντήσεις απο τη μαθήτρια]. Καλά πώς γίνεται να έχω τρίτα όταν απλώς έχω τρία κομμάτια, και όταν έχω τέσσερα κομμάτια να έχω τέταρτα;
Μαθήτρια: Είναι ο αριθμός των κομματιών που έχω στο όλο πράγμα κάθε φορά.
Οι Leinhardt (1988), Mack (1990), υπερασπίζονται την άποψη ότι αν θέλουμε να κτίσουμε την εννοιολογικοποίηση της μονάδας πάνω στη διαισθητική γνώση των μαθητών θα πρέπει να αποδεχτούμε το γεγονός ότι η μέρος-όλου αντίληψη των μαθητών ξεκινά για να απλωθεί και να καταστήσει ικανούς τους μαθητές να πραγματευτούν επιτυχώς κρίσιμα χαρακτηριστικά της μονάδας σε μιά πληθώρα προβληματικών καταστάσεων. Ενα παράδειγμα πάλι απο την (Mack, 1993): Αυτή στο ξεκίνημα των μελετών της με μαθητές τρίτης, τετάρτης, και πέμπτης τάξης, βρήκε ότι οι μαθητές ήσαν ικανοί να αναγνωρίσουν σωστά το 4/4 όταν το κλάσμα αυτό παριστάνετο με χαρτοταινίες (strips), αλλά αυτοί αναγνώριζαν λαθεμένα το 5/4 σαν 5/5

ακόμη και όταν μιά οικεία σε αυτούς κατάσταση συσχετίζετο με συγκεκριμένη αναπαράσταση. Το παράδειγμα όπως αναμένεται δείχνει πώς μιά part-whole αντίληψη του ρητού αριθμού επεκτείνεται για να συμπεριλάβει κλάσματα μεγαλύτερα της μονάδας καθώς αυτή η αντίληψη κτίζεται πάνω στη διαισθητική γνώση.
Παράδειγμα τρίτο (Mack, 1987):
Δάσκαλος: [βγάζει μια χαρτοταινία (strip) που παριστάνει μιά μονάδα κλασματοποιημένη και δίνει στη μαθήτρια μικρότερες μπλέ χαρτοταινίες για αναγνώριση].
Μαθήτρια: Είναι έκτα... έξι απο αυτά κανουν μιά ολόκληρη μονάδα.
Δάσκαλος: [βάζει 1/6 ακόμη στο τέλος της ταινίας των έκτων]. Τώρα τι κλάσμα απο αυτό είναι μπλέ;
Μαθήτρια: Ενα ολόκληρο και ένα-έκτο ... 7/6.
Δάσκαλος: [της υπενθυμίζει την εργασία για την αναγνώριση των 4/4 και στη συνέχεια των 5/4]. Πως γίνεται και αυτό δεν είναι 7/7 αφού αυτά ήσαν 5/5 την πρώτη μέρα;
Μαθήτρια: Επειδή με το που θα προσθέσεις απλώς ένα δεν γίνονται πέμπτα... Εντάξει εάν αυτό είναι 4/4 και εσύ προσθέσεις ενα αυτά δεν θα αλλάξουν επειδή ήδη φτιάχτηκαν τέταρτα. Προστίθεται απλώς ένα παραπάνω.
Τελικό συμπέρασμα για το ερώτημα που διατυπώθηκε στην αρχή **για τη χρησιμότητα της διαισθητικής αντίληψης:** Είναι βάσιμοι οι ισχυρισμοί της Mack, ότι παρά τους αρχικούς περιορισμούς στην διαισθητική αντίληψη των μαθητών για τους ρητούς, αυτή η αντίληψη μπορεί να έχει νόημα έξω από ρεαλιστικά παραδείγματα, μέσα σε κατάλληλα πλαίσια, και οι εμπειρίες αυτές σαφώς προσφέρουν μιά βάση για την ανάπτυξη μιάς ευέλικτης ιδέας γιά τη μονάδα.

4.6 Η ΣΧΕΣΗ ΑΚΕΡΑΙΩΝ-ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΟ ΚΡΙΣΙΜΟ ΠΕΡΑΣΜΑ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΠΡΩΤΟΥΣ ΣΤΟΥΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥΣ

Οπως αναφέρθηκε και στήν προηγούμενη παράγραφο οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται τα κλάσματα σαν αριθμούς και όταν λένε αριθμούς εννοούν σαφώς τους ακέραιους αριθμούς, τους οποίους αρκετά καλά γνωρίζουν. Σε πολλές χώρες στην Ευρώπη και στην Αμερική ύστερα απο τους ακέραιους αριθμούς διδάσκονται τα κλάσματα και αυτά αποτελούν την πρώτη τους επαφή με τους ρητούς αριθμούς. Στην Ελλάδα και στη Γαλλία παρατηρείται, σε ό,τι αφορά τις πράξεις, το αντίθετο. Δηλ. η διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών προηγείται εκείνης των κλασμάτων. Οποια όμως περίπτωση και να πάρουμε τα παιδιά αδυνατούν να φανταστούν τα κλάσματα ως αριθμούς.

Τα παιδιά αναπτύσουν τη βασική τους αντίληψη για το μέγεθος των ακέραιων αριθμών μέσω των εμπειριών τους με την (απ)αρίθμηση (counting), όπως έδειξαν οι έρευνες της πρόσφατης δεκαετίας (Bergeron & Herscovics,1990), (Resnick, 1983). Η (απ)αρίθμηση ή αλλιώς (κατα)μέτρηση θεωρείται ένας γνωστικός μηχανισμός μέσω του οποίου κατασκευάζεται η έννοια του ακέραιου αριθμού. Διότι με την απαρίθμηση ένας ακέραιος αριθμός μπορεί ευθέως να σχετιστεί με μιά ποσότητα. Αντίληψη όμως της έννοιας του ακεραίου αριθμού (number sense), αποκτούν τα παιδιά και μέσω της διάταξής τους, όπως παρατηρεί ο Resnick (1983). Υπάρχουν τουλάχιστον δύο τρόποι για να διαταχθούν δυο δεδομένοι ακέραιοι αριθμοί: Ο πρώτος είναι να αντιπαρατάξουμε (matching) στοιχεία απο δύο σύνολα που αντιπροσωπεύουν τους δυό αυτούς αριθμούς. Ο δεύτερος είναι να προσδιορίσουμε το σχετικό τους μέγεθος απο τον καθορισμό της σχετικής τους θέσης στη σειρά απαρίθμησης, όπου ο μεγαλύτερος αριθμός φτάνει πιό πέρα στην ακολουθία των στοιχείων. Και οι δυο αυτοί τρόποι είναι κατανοητοί απο τα περισσότερα παιδιά στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού σχολείου αναφέρει ο Resnick.

Αλλά, ενώ υπάρχουν έρευνες για τον τρόπο απόκτησης του μεγέθους των ακεραίων αριθμών δεν συμβαίνει το ίδιο και με τις κλασματικές έννοιες. Για παράδειγμα, ακόμη και σήμερα δεν είναι γνωστό το πώς τα παιδιά κατανοούν το μέγεθος του κλάσματος (fraction size) σε σχέση με εκείνο του ακέραιου αριθμού. Για παράδειγμα, το κλάσμα 2/3 είναι πλησιέστερα στο 1 , στο 2, στο 3 ή στο 5; Οι ευρύτατες και πολύχρονες μελέτες των Wachsmuth, Behr, & Post (1983a,1983b), των Behr, Wachsmuth,Post & Lesh (1984), των Behr, Wachsmuth, & Post (1985), αλλά και του Vance (1986), κυρίως εστιάζουν στις γνώσεις των παιδιών για το μέγεθος του κλάσματος μόνο απο την άποψη της σύγκρισης κλάσματος με άλλο κλάσμα. Για παράδειγμα, ποιό κλάσμα είναι μεγαλύτερο το 2/3 ή το 3/4; Μιά απόπειρα προσέγγισης της σχέσης μεγεθών κλάσματος και ακεραίου αριθμού επιχειρεί ο Tzu-Ta (1992). Αυτός καταλήγει στο συμπέρασμα ότι οι εργασίες που δίδονται στα παιδιά και αφορούν συγκρίσεις κλάσματος -ακεραίου είναι δυσκολότερες απο εκείνες που αφορούν συγκρίσεις κλάσματος-κλάσματος. Στην κατακλείδα της έρευνας σημειώνεται ακόμη ότι δεν έγινε δυνατό να βρεθεί σε ποιό βαθμό τα αποτελέσματα που βρέθηκαν επηρεάστηκαν απο τους συγκεκριμένους τύπους των προβλημάτων που δόθηκαν στις εργασίες αυτές. Σε ό,τι αφορά τον τρόπο κατασκευής της σημασίας του μεγέθους του κλάσματος από τα παιδιά, η έρευνα δεν μπόρεσε να ιχνηλατήσει την πορεία των αλλαγών στη σκέψη των παιδιών. Ο Tzu-Ta το θέτει σαν θέμα για μελλοντική έρευνα. Ζητούμενο είναι δηλ. να υπάρξει μια σαφής ερμηνεία, ανάλογη με την περίπτωση των ακεραίων, για τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά κατασκευάζουν την έννοια του μεγέθους του κλάσματος.

Τα παραπάνω καθόλου δεν σημαίνουν ότι δεν μπορεί να υπάρξει ομαλό πέρασμα απο τους ακέραιους στους κλασματικούς αριθμούς. Με άλλα λόγια, δεν σημαίνουν ότι δεν υπάρχουν τρόποι για την άρση της ασυνέχειας στο συγκεκριμένο σημείο του μαθηματικού curriculum της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Τα παιδιά όταν φτάνουν στη διδασκαλία των κλασμάτων έρχονται αντιμέτωπα ουσιαστικά με ένα άλλο είδος μαθηματικών (αλγεβρικές δομές), που απαιτεί διαφορετικές γνωστικές προσπάθειες και μεγαλύτερες μαθηματικές προσαρμογές. Το ζήτημα αυτό άπτεται ενός ευρύτερου προβλήματος γνωστού στη μαθηματική παιδεία ως "το γνωστικό διάκενο", (cognitive gap) ανάμεσα στη αριθμητική και την αλγεβρα. Οι Herscovics και Linchevski (1994), ορίζουν το γνωστικό διάκενο σαν "την ανικανότητα των μαθητών να λειτουργήσουν με ή πάνω στο άγνωστο". Οι άγνωστοι όμως παράμετροι στην κατανόηση του ρητού αριθμού είναι πολλοί όπως θα δούμε στα επόμενα και δεν είναι μικρότερης σημασίας απο τις άγνωστες παραμέτρους των αλγεβρικών εξισώσεων. Για παράδειγμα όπως θα δούμε και παρακάτω για να μετρήσουμε το μέγεθος του κλάσματος είναι ανάγκη να το δούμε σαν μια μαθηματική οντότητα που είναι ανεξάρτητη <u>σταθερών</u> μονάδων μέτρησης (Post,Wachsmuth, Lesh & Behr,1985). Βλέπουμε δηλ. μια άμεση εισαγωγή της έννοιας της μεταβλητής καθότι οι μονάδες μέτρησης δεν είναι σταθερές και άρα μεταβάλλονται. Η εισαγωγή της μεταβλητής όμως σημαίνει πως ήδη έχουμε υπερβεί τα όρια της αριθμητικής και άρα συζητούμε με αλγεβρικούς όρους. Για παράδειγμα, η έννοια της αναλογίας οδηγεί σε κάτι τέτοιο (μέθοδος των τριών κτλ.). Είναι λοιπόν υπόθεση και της άλγεβρας οι κλασματικοί αριθμοί και ίσως περισσότερο εκείνης παρά της αριθμητικής.

4.7 ΟΙ ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Για να αποκτήσει μιά βάση η συζήτηση για το πέρασμα απο τους ακέραιους στους κλασματικούς είναι ανάγκη να γίνει μια αντιδιαστολή των μαθηματικών ιδιοτήτων των δύο συνόλων.

1) Ομοιότητες:

α) Κλειστότητα (closureness).Τόσο το σύνολο των ακεραίων αριθμών όσο και το σύνολο των κλασματικών είναι κλειστά ως προς την πράξη της πρόσθεσης και του

πολλαπλασιασμού. Δηλ. το άθροισμα και το γινόμενο δυο τυχαίων κλασμάτων είναι πάλι κλάσμα.
β) Αντιμεταθετικότητα (commutativity). Και για τα δύο σύνολα ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Δηλ. για κάθε δύο τυχαίους ακεραίους α, β και αντίστοιχα κλάσματα ισχύει :
α+β=β+α και α.β=β.α .
γ) Προσεταιριστικότητα (assosiativity). Και για τα δύο σύνολα ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Δηλ. για κάθε τρείς τυχαίους ακεραίους α,β,γ και αντίστοιχα κλάσματα ισχύει:
α+(β+γ)=(α+β)+γ και α. (β.γ)=(α.β).γ .
δ) Ταυτότητα (Identity). Και τα δύο σύνολα διαθέτουν ουδέτερο στοιχείο ως προς την πρόσθεση (α+0=α) και ως προς τον πολλαπλασιασμό (α.1=α). (βλ. Krause,1986, Devine & Kaufmann, 1974).
ε) Επιμεριστικότητα (distributivity). Και για τα δύο σύνολα ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού πάνω στην πρόσθεση. Δηλ. για κάθε τρείς τυχαίους ακεραίους α,β,γ και αντίστοιχα κλάσματα ισχύει:
α.(β+γ)=α.β+α.γ .

2) Διαφορές:

α) Αντιστροφή (inversion).Η πρώτη βασική (και ειδοποιός) διαφορά ανάμεσα στα δύο σύνολα είναι ότι για τα κλάσματα ισχύει η ιδιότητα της αντιστροφής δηλ. για κάθε τυχαίο κλάσμα κ με κ_0, (εκτός δηλ. του μηδενικού κλάσματος), υπάρχει ενα άλλο κλάσμα της μορφής 1/κ για το οποίο συμβαίνει κ. (1/κ)=1 . Αυτό δεν ισχύει για τους ακέραιους αριθμούς. Να σημειώσουμε εδώ ότι από την Θεωρία των Ομάδων (Group Theory), αφού ισχύουν οι ιδιότητες της κλειστότητας,της ταυτότητας, της προσεταιριστικότητας και της αντιστροφής ως προς τον πολλαπλασιασμό το σύνολο των κλασματικών αριθμών (έτσι όπως το ορίσαμε στην αρχή), αποτελεί ***ομάδα*** ως προς την πράξη αυτή. Εξ αιτίας της αντιστροφής το σύνολο των ακεραίων δεν αποτελεί ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό.
β) Πυκνότητα (density). Το σύνολο των ακεραίων είναι ***πυκνό*** δηλ. για δύο τυχαία κλάσματα είναι πάντοτε δυνατό να βρούμε ένα τρίτο που να βρίσκεται ως προς το μέγεθος ανάμεσά τους. Αυτό προφανώς δεν ισχύει για τους ακέραιους αριθμούς.
γ) Συμπεριφορά στο κλειστό διάστημα [α, β] (closed interval). Εξ αιτίας της προηγούμενης ιδιότητας μέσα σε ένα κλειστό διάστημα υπάρχει ένας μή-πεπερασμένος (infinite) αριθμός κλασμάτων. Αντίθετα, μέσα σε ένα τέτοιο διάστημα υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός ακεραίων αριθμών.
δ) Υπαρξη διαδόχου (successor) και προηγούμενου (predecessor). Πάλι λόγω της ιδιότητας της πυκνότητας κάθε κλάσμα δεν έχει ούτε προηγούμενο ούτε επόμενο κλάσμα. Αντίθετα για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό υπάρχει πάντα ένας προηγούμενος και ένας επόμενος ακέραιος. (Να θυμήσουμε πάλι ότι στην αρχή ορίσαμε σαν whole numbers τους μή αρνητικούς ακέραιους αριθμούς και εκείνους εννοούμε με τον απλό όρο ακέραιος σε όλη αυτή την ενότητα).
ε) Τιμή (value). Η τιμή ενός κλάσματος αυξάνει καθώς μεγαλώνει ο αριθμητής ενώ την ίδια στιγμή παραμένει σταθερός ο παρονομαστής. Η τιμή του κλάσματος μειώνεται αν λειτουργήσουμε αντίθετα, κρατήσουμε δηλ. σταθερό τον αριθμητή ενώ ταυτόχρονα αυξήσουμε τον παρονομαστή. Τα πράγματα είναι πολύ απλούστερα για ένα ακέραιο, όπου η τιμή του αυξάνει καθώς αυξάνει ο αριθμός των ψηφίων του.
Από την παραπάνω εκτενή ανάλυση των ομοιοτήτων και των διαφορών των δύο συνόλων γίνεται σαφές ότι το πέρασμα απο τους ακέραιους στους κλασματικούς απαιτεί θεμελιακές αλλαγές στο μαθηματικό επίπεδο. Ακόμη αποδεικνύεται ότι τα ανώτερα μαθηματικά κρύβονται πίσω από (υποτίθεται απλές) έννοιες της αριθμητικής

και εξ αιτίας αυτού τα συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα που εξετάζουμε, τα κλάσματα, παρουσιάζουν κάποιες αρκετά αφηρημένες όψεις.

4.8 ΟΙ ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Οι γνωστικές διαφοροποιήσεις, ως ένα βαθμό, είναι απόρροια των ιδιοτήτων των δύο συνόλων που προαναφέρθηκαν. Το ερώτημα τίθεται άμεσα: Πότε θα λέμε ότι ένας μαθητής κατέχει την έννοια του κλάσματος; Ποιά είναι τα γνωστικά περάσματα που χαρακτηρίζουν την πρόσκτηση αυτής της έννοιας; Αν δούμε το κλάσμα *σαν αριθμό* θα πρέπει πρώτα-πρώτα να αναζητήσουμε κάποιο ορισμό για το τί σημαίνει να αποκτήσουν τα παιδιά αντίληψη του αριθμού (number sense). Γιατί μιά καλή αντίληψη του αριθμού θα επιτρέψει σε αυτά να συνθέσουν και να αποσυνθέσουν εύκολα αριθμούς. Οι Thomson και Rathmell (1989) πιστεύουν πως μιά επαρκής αντίληψη για τον αριθμό σημαίνει καλή κατανόηση των παρακάτω:
α) σημασίες και σχέσεις του αριθμού με άλλους αριθμούς β) το σχετικό μέγεθος του αριθμού γ) οι σχετικές επιδράσεις των πράξεων πάνω στους αριθμούς και δ) τα αναφορικά των ποσοτήτων και των μετρήσεων που σαν αριθμοί χρησιμοποιούνται στην καθημερινή ζωή.
Σε ό,τι αφορά το (α) τα πράγματα για τους ακέραιους και τους δεκαδικούς είναι μάλλον απλά: η εμπειρία της (κατα)μέτρησης (counting), στην οποία έχουμε αναφερθεί και η αίσθηση της θεσιακής αξίας (place-value) είναι τρόποι κατάκτησης της σημασίας του αριθμού. Η θεσιακή αξία όπως εύστοχα δείχνει και το όνομά της κάνει διάκριση των ψηφίων σε ένα αριθμό. Για παράδειγμα στον αριθμό 38 το 3 έχει μεγαλύτερη αξία αν και μικρότερο απο το 8 διότι υπέχει θέση δεκάδων, ενώ το 8 υπέχει θέση μονάδων. Ακόμη εύκολα μπορούμε να βρούμε δυό ακέραιους ή δεκαδικούς αριθμούς που το άθροισμα είναι 5. Πόσο εύκολα όμως μπορούμε να βρούμε δυό κλάσματα που το άθροισμά τους είναι 1/5 ; Και ενώ για τους ακεραίους υπάρχει ένα περερασμένο πλήθος ζευγών αριθμών που δίνουν άθροισμα 5 αυτό δεν ισχύει για τους δεκαδικούς και τα κλάσματα. Λόγω της ιδιότητας της ισοδυναμίας υπάρχουν άπειρα ζεύγη κλασμάτων για τα οποία συμβαίνει αυτό.
Στην υπόθεση της κατανόησης του σχετικού μεγέθους των αριθμών (β), οι ίδιοι ερευνητές θεωρούν κλειδί το γεγονός ότι υπάρχουν και για τους ακεραίους και για τους δεκαδικούς και για τα κλάσματα "ωραίοι" (nice) αριθμοί, όπως το 0, το 1, και το 1/2 που μπορούν να χρησιμεύσουν σαν αναφορικά βοηθήματα για τον προδιορισμό του σχετικού μεγέθους ενός αριθμού. Για παράδειγμα, άν σε κάποιο υπολογιστή δούν τον αριθμό 0.457691 θα πρέπει να ξέρουν ότι ο αριθμός αυτός είναι κοντά στο 1/2.
Η τρίτη απο την προηγούμενες συνιστώσες (γ) αφορά τη θέαση του αριθμού ως λειτουργού (operator). Για την περίπτωση των κλασμάτων η προσέγγιση αυτή αποκτά ιδιαίτερη σπουδαιότητα αφού μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως κανονικό, αυτόνομο μοντέλο για τη διδασκαλία τους. Για το λόγο αυτό έχει αναλυθεί εκτενέστερα σε σχετική παράγραφο. Εδώ περιοριζόμαστε στην πρακτική του διάσταση. Αν πολλαπλασιάσω, για παράδειγμα, τον αριθμό 36 με έναν άλλο θετικό αριθμό, τότε ο 36 μπορεί να μεγαλώσει, αλλά μπορεί και να μικράνει. Αυτό θα γίνει ανάλογα με το αν ο πολλαπλασιαστής του 36 είναι μεγαλύτερος (π.χ ο 3/2) ή μικρότερος (π.χ 2/3) της μονάδας. Το αποτέλεσμα στην πρώτη περίπτωση ειναι 54 ενώ στη δεύτερη 24. Βλέπουμε δηλ. τη διαφορετική, διαμορφωτική επίδραση (λειτουργία) που έχει το 3/2 και το 2/3 πάνω στον ίδιο αριθμό 36.
Η τέταρτη συνιστώσα (δ), αφορά τρόπους σύνδεσης των αριθμητικών ποσοτήτων με καταστάσεις πραγματικής ζωής. Οι μαθητές θα πρέπει να μάθουν πως δεν είναι λογικό να έχει ένα παιδί 3 μέτρα ύψος, ούτε ότι μια τάξη να έχει 200 μαθητές. Αυτό που θέλουν δηλ. να τονίσουν οι Thomson και Rathmell (οπ. παρ.) είναι ότι οι μαθητές θα πρέπει κάνουν λογικές ποσοτικοποιήσεις και μετρήσεις αποδεκτές στο κοινωνικό

επίπεδο. Με άλλα λόγια, τα παιδιά πρέπει να διακρίνουν "ποιοί αριθμοί τυπικά θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για να ποσοτικοποιήσουν διάφορα αντικείμενα και ποιά είναι τα αποδεκτά όρια στις διάφορες πραγματικές καταστάσεις της καθημερινής ζωής".

Αλλά οι παραπάνω "πρακτικές" ιδέες δεν εξαντλούν το πολύ μεγάλο ζήτημα των κλασμάτων στη γνωστική του διάσταση. Για παράδειγμα, είναι εύλογο να διερωτηθούμε το εξής: Πόσο εύκολα γίνεται κατανοητό απο ένα παιδί ότι *μία και η αυτή ποσότητα* αναπαρίσταται απο άπειρους, ισοδύναμους τύπους (βλ. ιδιότητα ισοδυναμίας), ότι ένα κλάσμα δεν έχει ούτε προηγούμενο, ούτε επόμενο (βλ. ιδιότητα πυκνότητας). Για παράδειγμα, πώς μπορούμε να "πείσουμε" ένα παιδί και ίσως ένα ενήλικα να αποδεχθούν και να συνειδητοποιήσουν ότι το γνωστό και "αγαπημένο" τους κλάσμα, το 1/2, δεν έχει ούτε προηγούμενο ούτε επόμενο κλάσμα;

Θα κλείσουμε την παράγραφο με την επισήμανση ότι η συμβολική σύμβαση που αναπαρίσταται απο δύο ακέραιους αριθμούς και μιά γραμμή στη μέση είναι πράγματι πολύπλοκη και απαιτείται τροποποίηση των υπαρχόντων εννοιών των αριθμών που μέχρι τώρα ξέραμε (Hiebert & Behr,1988), (Post,Behr & Lesh, 1986). Το πέρασμα απο τους ακεραίους στους κλασματικούς απαιτεί μιά **επαναοργάνωση** των εννοιών των αριθμών στη σκέψη των παιδιών (Hiebert & Behr,1988, Behr & Post,1988).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ
ΤΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΓΙΑ ΤΟ ΜΙΚΡΟΚΟΣΜΟ ΤΗΣ LOGO
5.1 Η οριοθέτηση του εκπαιδευτικού λογισμικού.
Οπως είναι φανερό, τελικός στόχος αυτής της εργασίας είναι η ανάπτυξη εκπαιδευτικού λογισμικού για τη διδασκαλία των μαθηματικών και συγκεκριμένα του κεφαλαίου των κλασμάτων. Γι' αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε πως τα τελευταία χρόνια έχουν επιχειρηθεί, προταθεί και συζητηθεί διάφορες γενικές προσεγγίσεις για την ανάπτυξη εκπαιδευτικού λογισμικού (Mendes & Mendes, 1990), (Van der Mast, 1990), (Moonen, 1987), Mendes, T. et al., (1990), των οποίων τα πορίσματα συνοψίζει ο Μακράκης (1996):

1) Η ανάπτυξη καλής ποιότητας εκπαιδευτικού λογισμικού είναι μιά δουλειά δύσκολη, επίπονη και χρονοβόρα.

2) Αυτή η δουλειά απαιτεί τη συμβολή, συνεργασία και συνενόηση ενός πλήθους ειδημόνων, που συμπεριλαμβάνει εκπαιδευτικούς ερευνητές, σχεδιαστές αναλυτικών προγραμμάτων[14], δασκάλους, επιστήμονες των υπολογιστών και ειδικούς στο αντικείμενο που πρόκειται να αναπτυχθεί το λογισμικό.

3) Η διαδικασία ανάπτυξης εκπαιδευτικού λογισμικού οπωσδήποτε είναι μιά σύνθετη επαναληπτική (iterative) διαδικασία.

4) Υπάρχει ένα κρίσιμο σημείο στη διαδικασία ανάπτυξης του εκπαιδευτικού λογισμικού: Συχνά παρατηρείται έλλειψη επικοινωνίας ανάμεσα στους επιστήμονες της παιδαγωγικής και στους προγραμματιστές των ηλεκτρονικών υπολογιστών.

5) Οσο κι αν η σπουδαιότητα της παιδαγωγικής συνιστώσας διαλαλείται σ' όλους τους τόνους, αυτό που στην πραγματικότητα συμβαίνει, είναι ότι η τεχνική συνιστώσα της ανάπτυξης του εκπαιδευτικού λογισμικού υπερισχύει της παιδαγωγικής.

Στην εργασία αυτή επιλέξαμε για την ανάπτυξη των κλασματικών εννοιών ένα συγκεκριμένο τύπο εκπαιδευτικού λογισμικού ιδιαίτερα κατάλληλο για μαθηματικές ιδέες και "φιλόξενο" για τα κλάσματα και τους ρητούς αριθμούς. Είναι ο μικρόκοσμος που βασίζεται στη γλώσσα Logo, τον οποίο αναπτύσσουμε διεξοδικά στα επόμενα.

5.2 ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΜΙΚΡΟΚΟΣΜΩΝ: ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΡΟΛΟΣ
Υπάρχει ένας ολοένα αυξανόμενος αριθμός ορισμών για τον όρο μικρόκοσμος (microworld). Αυτοί οι ορισμοί ξεκινούν απο ένα εντελώς αυστηρό κανονιστικό σύνολο κριτηρίων ως προς τη δομή του μικρόκοσμου (Groen, 1984), και φτάνουν να συμπεριλαμβάνουν ένα οποιοδήποτε διερευνητικό περιβάλλον. Μέσα στην κοινότητα της Logo ο όρος έχει παλιότερα χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει "ένα καλά ορισμένο, αλλά περιορισμένο περιβάλλον μέσα στο οποίο συμβαίνουν ενδιαφέροντα πράγματα και στο οποίο υπάρχουν σπουδαίες ιδέες για να μαθευτούν" (Goldenberg 1982, σελ. 218). Ο Lawler (1982), τονίζει ότι ένας μικρόκοσμος δεν πρέπει να εστιάζει πάνω σε προβλήματα που θα φτιαχθούν, αλλά πάνω σε καλοφτιαγμένα (neat), φαινόμενα. Θεωρεί δε ως τέτοια τα φαινόμενα που έμφυτα κινούν το ενδιαφέρον κάποιου για να τα παρατηρήσει και να αλληλεπιδράσει με αυτά. Για τους Hoyles, Noss (1987), τα neat φαινόμενα δεν φτάνουν για να οικοδομήσουμε ένα μαθησιακά αποτελεσματικό μικρόκοσμο, αλλά το κυρίαρχο στοιχείο είναι το διδακτικό πλαίσιο μέσα στο οποίο λαμβάνει χώρα η μάθηση. Δεν θα μπορούσε δηλ. να επαρκέσει για την οικοδόμηση του

[14] Ο Φλουρής (1989), όντας ειδικός στα αναλυτικά προγράμματα, καταγράφει ένα παράδοξο στην υπόθεση αυτή: υποστηρίζει πως ενώ υπάρχει μεγάλο ενδιαφέρον για τη μάθηση με τη βοήθεια των υπολογιστών, οι τεχνολόγοι ή τεχνοκράτες των Η/Υ θέτουν σε εφαρμογή τις εξειδικευμένες γνώσεις τους για το σχεδιασμό του εκπαιδευτικού λογισμικού, χωρίς να κατέχουν τις απαραίτητες παιδαγωγικές γνώσεις -πιό συγκεκριμένα , την "αρχιτεκτονική" της διδασκαλίας και χωρίς να είναι ενήμεροι στον τομέα της παιδαγωγικής ψυχολογίας.

μικρόκοσμου απλά και μόνο η ανάπτυξη της τεχνικής του συνιστώσας. Ο κάθε μαθητής αλλά και ο ενήλικας εννοιολογικοποιεί διαφορετικά. Γιατί κάθε ένας απο αυτούς φέρει στη μάθησή του ένα πλήθος από επιδραστικές και γνωστικές εμπειρίες, στρώματα κατανοήσεων και συγκινήσεων από προηγούμενη μάθηση. Ολα αυτά είναι χώροι υποκειμενικής εμπειρίας όπως τους ονομάζει ο Bauersfield (1980), και σχηματίζουν ένα πρόπλασμα (background), απέναντι στο οποίο ο μικρόκοσμος πρέπει να προσαρμόσει το ρόλο του. Ο μικρόκοσμος ποτέ δεν θα μπορούσε να κτιστεί μακριά απο τις περασμένες εμπειρίες και διαισθήσεις του μαθητή, απο τίς προσδοκίες και τους στόχους του δασκάλου ή από το συγκεκριμένο κατά περίπτωση περιβάλλον.
Συχνά στη βιβλιογραφία οι μικρόκοσμοι περιγράφονται σαν μιά συλλογή απο υπολογιστικά εργαλεία (Software Tools). Αυτά τα υπολογιστικά εργαλεία κατασκευάζονται κατα τέτοιο τρόπο, ώστε να επιτρέπουν στα παιδιά να τα διερευνήσουν και να τα ελέγξουν, ενώ υπάρχει το δεδομένο ότι απο τη φύση τους τα εργαλεία αυτά είναι περιορισμένου ελέγχου (Hoyles,Noss, Sutherland, 1991). Οι Hoyles,Noss, Sutherland (1991), παρατηρούν, ότι μιά κοινά δηλούμενη λογική για την ανάπτυξη ενός μικρόκοσμου είναι ότι τα παιδιά μαθαίνουν δια μέσου της ενεργούς κατασκευής της γνώσης τους: η ουσιαστική ιδέα είναι ότι δια μέσου του παιχνιδιού μέσα στο μικρόκοσμο, τα παιδιά καταφέρνουν να κατανοήσουν τις ιδιότητές του. Οι ιδιότητες αυτές είναι χαρακτηριστικές του μικρόκοσμου και έχουν "φυτευτεί" σύμφωνα με απο τα πρίν καλά προσδιορισμένους μαθησιακούς στόχους.
Ωστόσο μέσα σε οποιοδήποτε προγραμματιστικό περιβάλλον τα παιδιά μπορούν να μάθουν χρησιμοποιώντας αυτά τα εργαλεία που προαναφέρθηκαν και να στοχαστούν πάνω στη ανατροφοδότηση που προσφέρει ο υπολογιστής (computer feedback). Ακόμη να αποκτήσουν την ικανότητα να διακρίνουν βασικά χαρακτηριστικά αυτών των εργαλείων καθώς επίσης να προχωρήσουν στην κατακευή νέων. Αλλά το αυτό που μας ενδιαφέρει εδώ είναι η μαθηματική υφή αυτών των χαρακτηριστικών αφού ο στρατηγικός μας στόχος παραμένει πάντα να βρούμε ένα υπολογιστικό περιβάλλον μέσα στο οποίο να μπορούν να αναπτυχθούν οι μαθηματικές ιδέες με τον καλύτερο και αποτελεσματικότερο τρόπο για τους μαθητές. Η άποψη του Noss (1985), είναι ότι οι χαρακτηριστικές ιδιότητες του μικρόκοσμου θα μπορούσαν κανονικά να είναι αναπαραστάσεις των μαθηματικών δομών και σχέσεων οι οποίες μπορούν να αφαιρεθούν με αλληλεπίδραση απο το μικρόκοσμο. Ετσι οι μικρόκοσμοι, μπορούν να ειδωθούν σαν υπολογιστικά περιβάλλοντα τα οποία ενσωματώνουν ("embody"), μαθηματικές ιδέες. Ενα τέτοιο κλασσικό παράδειγμα μικρόκοσμου είναι η γεωμετρία της χελώνας (turtle geometry).
Πέρα όμως απο το πρόβλημα του μαθηματικού χαρακτήρα του μικρόκοσμου ένα εξίσου πολύ σημαντικό πρόβλημα είναι το πώς πραγματώνεται η μάθηση μέσα σε ένα τέτοιο μικρόκοσμο. Κι ακόμη, όπως αναμένεται, ποιός είναι ο ρόλος του δασκάλου μέσα σε ένα τέτοιο περιβάλλον, ποιό είδος παρέμβασης είναι κατάλληλο να ασκήσει και τέλος πότε είναι δικαιολογημένη μια τέτοια παρέμβαση. Με άλλα λόγια αναζητούμε το είδος και την αναγκαιότητα ή μή της παιδαγωγικής παρέμβασης. Ο Papert (1980), προτείνει μιά ολοένα και μεγαλύτερη βύθιση στην υπολογιστική κουλτούρα με αλληλεπιδραστικές και κινητικές εμπειρίες που θα έχουν σαν αποτέλεσμα να κατορθώσουν τα παιδιά να εκτιμήσουν και να αποκτήσουν τα κυρίαρχα χαρακτηριστικά του μικρόκοσμου. Σε μιά τέτοια περίπτωση ο ρόλος του δασκάλου φαίνεται θεαματικά υποβαθμισμένος και ο σκοπός των παιδαγωγικών παρεμβάσεων καθόλου σαφής. Ο diSessa (1989), δίνει μιά μεγαλύτερη ώθηση σ'αυτή την ιδέα λέγοντας ότι η μάθηση μέσα σε πλούσια σύνολα, αλληλένδετων μικρόκοσμων που περικλείουν τις ίδιες δομές μπορεί να είναι και βαθειά και διαρκής χρονικά, επειδή κτίζεται πάνω στις διαισθήσεις που αναπτύσσονται με τη δράση. Η δραστηριότητα μέσα σ' αυτούς τους μικρόκοσμους μπορεί να προσφέρει ένα γόνιμο πρόπλασμα

(background), στο οποίο να βασιστεί μιά μετέπειτα διδασκαλία αυτών των δομών. Σημειώνουμε λοιπόν τα δύο κρίσιμα προβλήματα που σχετίζονται με τη λειτουργία του μικρόκοσμου και αφορούν την σαφήνεια (expliciness), και το χρονισμό της (timing), της παιδαγωγικής παρέμβασης.

Οι Noss (1985), Hoyles και Sutherland (1989), επισημαίνουν τον κίνδυνο του να υποθέσουμε ότι η απλή αλληλεπίδραση με ένα περιβάλλον σημαίνει αυτόματα και *εκτίμηση* των ιδεών που μορφώνουν την επιστημολογική του βάση. Με άλλα λόγια, επεξηγούν οι ίδιοι, ότι τα παιδιά αλληλεπιδρώντας με αυτό το περιβάλλον, θα δούν απο τη μιά την τοπική δομή και οργάνωση των παρεμβαλομένων μαθηματικών δομών και απο την άλλη θα αναγνωρίσουν σε ένα πιό γενικό επίπεδο, πώς οι δομές αυτές αποτελούν μέρος του ευρύτερου μαθηματικού λόγου. Πολύχρονες μελέτες απο τους ίδιους ερευνητές έδειξαν καθαρά ότι ο ρόλος της παιδαγωγικής παρέμβασης -που πολύ έχει παραμεληθεί- είναι πολύ κρίσιμος και επιδρά και στα δυό επίπεδα της εκτίμησης των παιδιών που προαναφέρθηκαν. Ετσι οι προτάσεις τους για το σχεδιασμό ενός μικρόκοσμου περιλαμβάνουν προσεκτικά σχεδιασμένες παιδαγωγικές παρεμβάσεις οι οποίες θα "επιβάλλουν" μαθηματική χροιά στην υπολογιστική δραστηριότητα και θα ενθαρρύνουν το στοχασμό και την πρόβλεψη για τη χρήση και κατασκευή των προγραμμάτων. Να σημειώσουμε εδώ ότι, οι τρείς ερευνητές προτείνουν παράλληλα με τη δραστηριότητα στο υπολογιστικό περιβάλλον την οργάνωση δραστηριοτήτων και εκτός αυτού (computer off), κατα ένα τρόπο με τη μορφή της παραδοσιακής διδασκαλίας, οι οποίες όμως θα έχουν σα στόχο να τονίσουν τη θεμελιώδη μαθηματική φύση της υπολογιστικής δουλειάς, να νομιμοποιήσουν και να καταστήσουν έγκυρες εκείνες τις όψεις που είναι σπουδαίες για μιά εκτίμηση των γενικών μαθηματικών δομών.

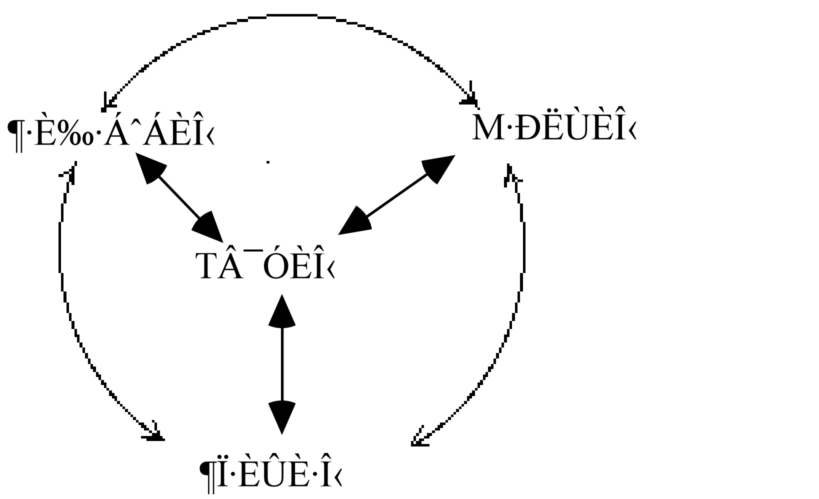
Οσο όμως κάνουμε λόγο για παρέμβαση του δασκάλου τόσο επιβάλλεται, στο ίδιο πλαίσιο, να συνυπολογίζουμε και τον παράγοντα μαθητής, πρώτον σε ό,τι αφορά το πρόβλημα της αυτονομίας του. Μέσα σε ένα υπολογιστικό περιβάλλον καθε δραστηριότητα έχει αναπόφευκτα δυό χαρακτηριστικά γνωρίσματα: απο τη μια είναι δραστηριότητα επίλυσης μιας προβληματικής κατάστασης που απαιτεί λειτουργικότητα δηλ. δομή και από την άλλη είναι μιά εξερευνητική δραστηριότητα που πρέπει να είναι διασκεδαστική για το μαθητή. Αυτός ο διπλός χαρακτήρας της δραστηριότητας μέσα σε ένα μικρόκοσμο είναι φυσικό να προκαλεί εντάσεις. Γιατί έχουμε να υλοποιήσουμε ταυτόχρονα συγκεκριμένους μαθησιακούς, αλλά και συγκεκριμένους διαδικαστικούς στόχους. Εχουμε, όπως εύστοχα παρατηρούν οι Hoyles, Noss, Sutherland (1991), να υλοποιήσουμε πολλαπλές ατζέντες. Τα παιδιά πρέπει να αντιληφθούν τη στοχαστική φύση των μαθηματικών χαρακτηριστικών του μικρόκοσμου και αυτό κατα την άποψη των παραπάνω ερευνητών έχει ανάγκη παιδαγωγικής παρέμβασης. Οι σχηματοποιήσεις (formalisations), που απαιτούνται απο τη μηχανή εφοδιάζουν τα παιδιά με το αναγκαίο ικρίωμα (scaffolding), για να κατακτήσουν τις μαθηματικές ιδέες που αποτελούν τη βάση των δραστηριοτήτων τους και κάτι παραπάνω: με μιά μορφή που προσεγγίζει το λόγο των "επίσημων" σχολικών μαθηματικών. Ωστόσο θα πρέπει να έχουν το χρόνο να παίξουν με τις ιδιότητες του περιβάλλοντος, να έρθουν αντιμέτωπα με τις ιδέες που αυτό περικλείει και να εξερευνήσουν τα διαθέσιμα απο αυτό εργαλεία.

Πέρα απο την αυτονομία που θίγεται απο την παρέμβαση ένα άλλο ζήτημα είναι κρίσιμης σημασίας στο σχεδιασμό του μικρόκοσμου: Οι προϊδεάσεις και οι προθέσεις των μαθητών οι οποίες θεμελιακά επηρεάζουν ό,τι τα παιδιά βλέπουν σαν δραστηριότητα, επηρεάζουν τις στρατηγικές που υιοθετούν και επιδρούν στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων των ίδιων τους των ενεργειών (Noss and Hoyles, 1992). Από τα παραπάνω διαφαίνεται ένας ποιοτικά διαφορετικός ρόλος για την παιδαγωγική απο εκείνο που μας επεφύλαξε η παραδοσιακή μέθοδος. Συχνά οι ενέργειες των μαθητών μέσα σε ένα τέτοιο περιβάλλον είναι απρόβλεπτες και απροσδόκητες όπως θα δούμε

παρακάτω. Στο σχεδιασμό επομένως του μικρόκοσμου θα πρέπει σαφώς να προβλέπονται δραστηριότητες που έχουν σα στόχο να αποκαλύψουν τις αρχικές σημασίες, τις στρατηγικές και τις διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών για τα μαθηματικά αφού πάνω σ'αυτά θα κτίσουμε αργότερα τη νέα γνώση.
Το τελευταίο ζήτημα σ' αυτή την εισαγωγή αφορά την επιστημολογική βάση του μικρόκοσμου. Ο μικρόκοσμος πρίν απ' όλα αντλεί απο την επιστημολογική του βάση, δηλ. από τις γνωστικές δομές που ο ίδιος αποπειράται να διαπλάσει. Στα μαθηματικά αυτό, υποστηρίζουν οι Hoyles,Noss, Sutherland (1991), είναι περίπλοκο, για δυό λόγους: Πρώτον, διότι οι γνωστικές δομές είναι σε ένα δεύτερο επίπεδο αφαίρεσης. Δεν έχουμε ενδιαφερθεί αρκετά για τις παραστατικές ή φυσικές ιδιότητες των υπολογιστικών αντικειμένων τα οποία πρόκειται να διαχειριστούμε (πρώτο επίπεδο αφαίρεσης). Ομως οι δομές, οι σχέσεις και οι επιτρεπτές ενέργειες πάνω σ' αυτά τα αντικείμενα είναι αυτές που τα ορίζουν, τα οργανώνουν και τα συνθέτουν σε μιά μαθηματική οντότητα. Δεύτερον, διότι οποιαδήποτε μαθηματική έννοια αποτελεί μέρος ενός περίπλοκου δικτύου εννοιών, έτσι ώστε ακουμπώντας μία από αυτές καθίσταται αναπόφευκτη η κλήση των κατανοήσεων ενός πλήθους άλλων σχετικών μαθηματικών ιδεών. Οι αντιλήψεις αυτών των μαθηματικών ιδεών είναι που τελικά καθορίζουν τις αλληλεπιδράσεις στο μικρόκοσμο. Τα παραπάνω σημαίνουν ότι ο μικρόκοσμος θα πρέπει να είναι αρκετά ευέλικτος ώστε να αντιμετωπίζει ένα αρκετά μεγάλο εύρος πιθανών διερευνήσεων αλλά και αποκλίσεων γιατί δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι έχουμε να υλοποιήσουμε για λογαριασμό των μαθητών πολλαπλές ατζέντες (Hoyles,Noss, Sutherland, 1991).
Μετά από αυτή την εισαγωγή είναι δυνατό να περάσουμε σε μιά αναλυτική καταγραφή των συνιστωσών που θα πρέπει να περιλαμβάνει ένας μικρόκοσμος προκειμένου να παίξει το ρόλο του εννοιολογικού πλαισίου για την ανάπτυξη των μαθηματικών ιδεών και πιό συγκεκριμένα της έννοιας του ρητού αριθμού με τις πολλαπλές της εκφάνσεις. Αυτό αποτελεί άλλωστε και το κυρίαρχο μέλημα αυτής της εργασίας. Γιατί απο τη θεωρητική ανάλυση του προβλήματος των κλασμάτων έγινε ολοφάνερο πως το γενικότερο πρόβλημα των μαθητών για τα κλάσματα ανάγεται σε πρόβλημα εννοιολογικής κατανόησής τους. Η εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων είναι ανεπαρκής και η εννοιολογική γνώση, γενικά, υστερεί σε σημαντικό βαθμό της διαδικαστικής γνώσης, όπως παρατηρούμε σε πολλά σημεία αυτής της έρευνας. Αρα αναζητούμε ένα μικρόκοσμο ο οποίος να μπορεί να λειτουργήσει σαν εννοιολογικό πεδίο για την ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών.

5.3 ΟΙ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΟΥ ΜΙΚΡΟΚΟΣΜΟΥ

Οι Hoyles και Noss (1987), διακρίνουν 4 συνιστώσες για ένα μικρόκοσμο που θα βοηθούσε την ανάπτυξη μαθηματικών ιδεών, την τεχνική, την παιδαγωγική, την παιδική και την πλαισιακή συνιστώσα. Κρίνουμε σκόπιμη την αναλυτική τους παρουσίαση αφού ο κριτικός σχολιασμός τους θα αναδείξει τη βαθύτερη ουσία και παραπέρα την εννοιολογική λειτουργία του μικρόκοσμου.



™¯. OÈ Û×ÓÈÛÙÒÛÂ˜ ÙÔ× ÌÈÎÚ¼ÎÔÛÌÔ×

1) Η τεχνική συνιστώσα (technical component)

Αυτή είναι το Software, δηλ. τα προγράμματα τα οποία θα αποσπάσουν την προσοχή του μαθητή πάνω σε καθορισμένες ιδέες και διαδικασίες. Είναι ένα σύνολο εργαλείων τα οποία προσφέρουν στον μαθητή ένα διαρθρωμένο αναπαραστατικό σύστημα για την κατανόηση μιάς συγκεκριμένης μαθηματικής δομής. Η τεχνική συνιστώσα ορίζει, αλλά και περιορίζει το σύνολο των ιδεών οι οποίες στη συνέχεια πλάθονται κατάλληλα και επιτρέπουν απο τη δομή τους τη διερεύνηση και την ευέλικτη χρήση των μαθηματικών εννοιών που προσπελαύνονται μέσω του μικρόκοσμου. Η τεχνική συνιστώσα έχει το χαρακτηριστικό της διαρκούς ανάπτυξης. Νέα προγράμματα είναι δυνατόν να γραφτούν τα οποία να περικλείουν συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες. Η κατανόηση των εννοιών αυτών θα γίνει μέσω των εργασιών που ανατίθενται στα παιδιά (tasks), και οι οποίες θα πρέπει να έχουν το χαρακτηριστικό του να είναι σημαντικές για τα παιδιά. Τα λεγόμενα στην αγγλική βιβλιογραφία projects δεν περιλαμβάνουν μόνο εργασίες διερεύνησης διαθέσιμων εργαλείων του μικρόκοσμου, αλλά και εργασίες παραγωγής νέων προγραμμάτων στο επίπεδο του εφικτού. Ετσι ο μικρόκοσμος επεκτείνεται απεριόριστα. Ο Harvey (1987), μιλώντας για την περίπτωση της Logo αναφέρει ότι αυτή δεν έχει ούτε κατώφλι ούτε ταβάνι. Η τεχνική συνιστώσα πρώτα και κύρια έχει να κάνει με τη γλώσσα προγραμματισμού. Επιλέξαμε σαν γλώσσα προγραμματισμού τη Logo για την ανάπτυξη του μικρόκοσμου των μαθηματικών εννοιών εξ αιτίας της ιδιαίτερης σχέσης αυτής της γλώσσας με τα μαθηματικά, αλλά και του κονστρακτιβιστικού χαρακτήρα της. Για το τελευταίο η Lemerise (1993), ισχυρίζεται ότι η Logo είναι, μιά σχεδόν τέλεια, εφαρμογή της πιαζετικής ιδέας του κονστρακτιβισμού. Η ανάλυση του τι είναι μαθηματικό στο περιβάλλον της Logo, αλλά και ποιοί είναι οι ακριβείς λόγοι που μας οδήγησαν στην επιλογή της γλώσσας αυτής παρατίθενται σε επόμενα κεφάλαια. Εδώ θα περιοριστούμε σε μερικές μόνο επισημάνσεις: Από μία άποψη κάποιος θα μπορούσε να πεί ότι οι γλώσσες προγραμματισμού είναι όλες ίδιες. Για παράδειγμα αν έχουμε να επιλύσουμε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα μπορούμε σχεδόν σε όλες τις γλώσσες να κατασκευάσουμε ένα πρόγραμμα, σύμφωνο με τη φιλοσοφία και το συντακτικό της και να λύσουμε αυτό το πρόβλημα. Ωστόσο οι σχεδιαστές των διάφορων γλωσσών πρίν να προχωρήσουν στο σχεδιασμό μιάς συγκεκριμένης γλώσσας αποφασίζουν πρώτα ποιό είδος προβλημάτων αυτή η γλώσσα θα μπορούσε να αντιμετωπίζει καλύτερα. Εμείς θέλουμε να οικοδομήσουμε ένα μαθησιακό περιβάλλον για παιδιά που η προγραμματιστική του δύναμη να επιτρέπει την κατασκευή υπολογιστικών αντικειμένων με μαθηματικές ιδιότητες, να είναι εύκολα προσβάσιμο από τα παιδιά και προπαντός να διευκολύνει το στοχαστικό χαρακτήρα των μαθηματικών δομών. Αντίθετα με τους Hoyles,Noss, Sutherland, (1991), η παρούσα έρευνα στέκεται κριτικά απέναντι στην οραματική άποψη, ότι θα πρέπει να βλέπουμε το μικρόκοσμο περισσότερο σαν ένα πλαίσιο για επέκταση και συντονισμό διαισθήσεων παρά σαν μέσο "θεραπείας" εννοιολογικών προβλημάτων ή σαν ένα πεδίο τυπικής διδασκαλίας των μαθηματικών δομών και των συνακόλουθων διαχειριστικών κανόνων. Ο μικρόκοσμος πρέπει να αντλεί τη δύναμή του απο την παραγωγή αποτελεσμάτων στο γνωστικό επίπεδο για να μπορέσει να αποτελέσει ένα πειστικό μέσο υπέρβασης των αδυναμιών και ανανέωσης της παραδοσιακής διδασκαλίας των μαθηματικών. Με άλλα λόγια, θεωρούμε το μικρόκοσμο σαν πηγή υπολογιστικής και μαθηματικής γνώσης. Αυτή η γνώση μεταφράζεται άμεσα σε ικανότητα να πετύχουμε αποτελεσματικές ενέργειες στο επίπεδο του μικρόκοσμου και είναι πολύ χρήσιμη όπως υποστηρίζει ο Kieren (1992), στη θεωρία των Logo περιβαλλόντων. Ο ορισμός της γνώσης σας ικανότητας για να πετύχουμε αποτελεσματικές ενεργειες έχει διατυπωθεί από τους φιλοσόφους Maturana και Varela (1987), και υιοθετείται στην παρούσα εργασία με την ίδια έννοια[15] .

Πριν δούμε τα καθαρά τεχνικά χαρακτηριστικά της Logo, θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι η Logo είναι κατα τέτοιο τρόπο σχεδιασμένη ώστε να κάνει σαφείς αρκετές απο τις θεμελιώδεις ιδέες του προγραμματισμού όπως είναι η φύση των μεταβλητών, των διαδικασιών και άλλων υπολογιστικών κατασκευών (Harvey, 1987). Αυτό σημαίνει πως μέσω της Logo μπορούμε να πετύχουμε ένα εύκολο πέρασμα στο κόσμο της πληροφορικής και ιδιαίτερα σε αυτό που αποκαλούμε δομημένο προγραμματισμό χωρίς ταυτόχρονα να απομακρυνθούμε καθόλου απο τον επιστημονικό της λόγο. Η εισαγωγή στον κόσμο αυτό ενός νέου παιδιού, αλλά και ενός ενήλικα μέσω μιάς άλλης γλώσσας, όπως είναι η BASIC που διδάσκεται σήμερα με τεράστια έμφαση στα ελληνικά σχολεία, συχνά είναι τραυματική, στρεβλή και ελλειπής. Αντίθετα με τη Logo που συνοδεύεται με ενθουσιασμό, η εισαγωγή με την BASIC αποθαρρύνει το μαθητευόμενο να προχωρήσει άφοβα και με αυτοπεποίθηση στον κόσμο της πληροφορικής, ενώ φαίνεται να δημιουργεί περιοριστικά εμπόδια στο γνωστικό και τεχνικό επίπεδο[16] (Στεργιοπούλου, Κυνηγός, Γυφτοδήμος, 1995, Μιχαηλίδης, 1989).

Σε επόμενο κεφάλαιο αναπτύσσονται τα τεχνικά χαρακτηριστικά της Logo που προσδιορίζουν ως ένα βαθμό και την υπολογιστική της δύναμη.

2) Η παιδαγωγική συνιστώσα (pedagogical component)

Η εξερεύνηση και η διερεύνηση μέσα σε ένα μικρόκοσμο είναι ανάγκη να αποκτήσουν δομή. Θα πρέπει δηλ. να εστιάσουμε σε ορισμένα σημεία του μικρόκοσμου, να επισημάνουμε σημεία εκκίνησης, να στοχαστούμε πάνω σε συγκεκριμένες του όψεις, να συνθέσουμε πιθανά αντιφατικές απόψεις, να βάλουμε σε μιά αλληλουχία τις απαραίτητες λειτουργίες και όλα αυτά προφανώς δε μπορούν να συμβούν αυτόματα στα παιδιά. Χρειάζονται παιδαγωγική παρέμβαση. Ο δάσκαλος διαδραματίζει ένα

[15] Ισως, η πρώϊμη, σε διεθνές επίπεδο, κατακραυγή σε βάρος της Logo να είναι αποτέλεσμα μιάς παρόμοιας αντίληψης, αφού πριν ακόμη αναπτυχθεί, δοκιμαστεί και ωριμάσει στο σχολικό πλαίσιο η Logo εμπειρία, έχει υποστεί ισοπεδωτικές κριτικές με βασικά επιχείρηματα ότι δεν προέκυψαν απο τη χρήση της πνευματικά οφέλη κι ότι δήθεν δεν έδωσε ό,τι υποσχέθηκε (Hassett, 1984).

[16] Οπως υποστηρίζει ο Μιχαηλίδης (1989), η BASIC είναι μιά γλώσσα χωρίς προγραμματική δομή, χωρίς αναδρομικότητα και η εκμάθησή της δημιουργεί προαντιληπτικές έννοιες (preconcepts), που δυσχεραίνουν σοβαρά την εκμάθηση άλλης πιό σύνθετης γλώσσας, επειδή έχει ήδη διαμορφωθεί μιά συμπεριφορά επίλυσης προβλημάτων σύμφωνα με τους κανόνες της BASIC και η συμπεριφορά αυτή επαναλαμβάνεται.

κρίσιμο ρόλο αφού πρώτος καθορίζει τους όρους του γνωστικού παιχνιδιού στο μικρόκοσμο και προσδιορίζει τις πολλαπλές αλληλεπιδράσεις. Ο δάσκαλος πρέπει να θέτει σαν πρώτης προτεραιότητας μέλημα την αποσαφήνιση της φύσης των "εργαλείων" που χρησιμοποιούνται στο μικρόκοσμο από τα παιδιά καθώς αυτά προγραμματίζουν μέσα σ' αυτόν (Hoyles, 1986).

Στο δάσκαλο ανήκει η ευθύνη να ενθαρρύνει τη χρήση διαισθητικών και αναστοχαστικών δραστηριοτήτων και να προσανατολίσει τα παιδιά στην κατεύθυνση του να αναπτύξουν τις δικές τους μεταγνωστικές διαδικασίες. Αυτό σημαίνει την ανάπτυξη ικανοτήτων για πρόβλεψη, αναστοχασμό και εκτίμηση. Ο δάσκαλος τέλος αναλαμβάνει τη φροντίδα να οδηγήσει τους μαθητές στη γενίκευση και στην αφαίρεση με κατάλληλη εκμετάλλευση "ειδικών περιπτώσεων" .

Η σπουδαιότητα της παιδαγωγικής συνιστώσας του μικρόκοσμου είναι τόσο μεγάλη ώστε η παραμέλησή της μπορεί να σημάνει αναποτελεσματικότητα και πιθανά πλήρη ακύρωσή του μικρόκοσμου. Ο Μακράκης (1996), χωρίς να αναφέρεται σε κάποιο συγκεκριμένο μικρόκοσμο, αλλά μιλώντας γενικά για την ανάπτυξη εκπαιδευτικού λογισμικού, διακρίνει τεχνικό και παιδαγωγικό υπόβαθρο σε αυτό και προτείνει ένα συστηματικό, αναδρομικό και λειτουργικό σχήμα για την ανάπτυξη της παιδαγωγικής φάσης του εκπαιδευτικού λογισμικού[17].

---

[17] Το περιγράφουμε επιγραμματικά:

i) Η αναγνώριση του προβλήματος (problem identification), που σημαίνει την αναγνώριση ή μή του γεγονότος ότι ένα πρόγραμμα με τη βοήθεια υπολογιστή όντως αποτελεί μιά ποιοτική διαφορά έναντι του παραδοσιακού τρόπου διδασκαλίας. Με άλλα λόγια, να επιβεβαιώσουμε ή όχι την υπόθεση ότι ένα πρόγραμμα στον υπολογιστή σημαίνει προσφορά και πιθανά καινοτομία στην παραδοσιακή διδασκαλία. Και ακόμη σημαίνει ξεκαθάρισμα του διλήμματος εάν είναι ή οχι ένα συγκεκριμμένο πρόβλημα ή θέμα άξιο να προσεγγισθεί από ένα πρόγραμμα στον υπολογιστή.

ii) Η εκτίμηση των αναγκών (needs assessment), που σημαίνει να καταγραφούν οι ανάγκες της διαδικασίας μάθησης και διδασκαλίας, οι αδυναμίες και οι τάσεις της παραδοσιακής μεθόδου, αλλά και οι δυσκολίες των μαθητών στη θεματική περιοχή που προσεγγίζεται, ώστε το προϊόν του λογισμικού να εστιάζει, να ικανοποιεί και να θεραπεύει αυτές τις ανάγκες.

iii) Ανάπτυξη μιάς πλήρους εικόνας για την ομάδα των μαθητών, (student-group profile) που σημαίνει ανίχνευση του γνωστικού επιπέδου των μαθητών, των ικανοτήτων, των προσωπικών στρατηγικών, ιδιαιτεροτήτων και πιθανών αντιθέσεών τους. (Αυτό ακριβώς προσπαθεί να εκμαιεύσει το ερωτηματολόγιο της έρευνας αυτής στο βαθμό που μπορεί).

iv) Καθορισμός των διδακτικών και μαθησιακών στόχων (teaching and learning aims), που σημαίνει να οικοδομήσουμε ένα πλαίσιο με τους διαθέσιμους πόρους (τύποι υπολογιστών, τεχνικές μέθοδοι κτλ.) με προσεκτικό ζύγισμα των καταστάσεων ώστε οι γνωστικοί στόχοι να μην αναπτύσσονται υπερβολικά σε βάρος των επιδραστικών και ψυχοκινητικών στόχων.

v) Ανάλυση έργου (task analysis), που σημαίνει ανάλυση των λειτουργιών και των ικανοτήτων που πρέπει να αναπτύξει ο χρήστης του λογισμικού για να προσπελάσει τους μαθησιακούς στόχους που ετέθησαν στο προηγούμενο βήμα (iv).

vi) Προγραμματισμός του περιεχομένου (planning of the content material), που σημαίνει πρακτικά την ένταξη του λογισμικού στο σχολικό αναλυτικό πρόγραμμα και προσαρμογή του στο γνωστικό επίπεδο, τις ικανότητες και τις ανάγκες των μαθητών.

vii) Συνέχεια του περιεχομένου (sequence of the content material), που σημαίνει την οργάνωση του περιεχομένου σε διδακτικές ενότητες και στο πλαίσιο ενός ακαδημαϊκού εξαμήνου (courseware) κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να διασφαλίζεται η αναλογία, η αλληλουχία, η έμφαση, η ενότητα και η ισορροπία των μερών του.

viii) Επιλογή των μεθόδων, μέσων, τρόπων και λύσεων (selection of methods, means, media and solutions), που σημαίνει επιλογή των μέσων και υιοθέτηση των στρατηγικών εκείνων που προάγουν τις γνωστικές και μεταγνωστικές δεξιότητες των μαθητών και επίσης αφήνουν σ' αυτούς περιθώρια πρωτοβουλιών και ελέγχου. Τέλος, απέναντι στο κρίσιμο ερώτημα της υιοθέτησης κονστρακτιβιστικών ή μπιχαβιοριστικών στρατηγικών μάθησης ο Μακράκης (1996) προτείνει την επιλογή των πρώτων όταν οι στόχοι μας αφορούν **το πως** να μάθουμε κάτι και των δεύτερων όταν οι στόχοι μας σχετίζονται με **το τί** να μάθουμε.

Οπως θα διαπιστώσουμε παρακάτω, αυτό που ο Μακράκης (οπ.παρ.) αποκαλεί παιδαγωγική φάση της ανάπτυξης του λογισμικού είναι περίπου ισοδύναμο με τις 4 συνιστώσες του μικρόκοσμου.

Οι Hoyles και Noss (1987), δηλώνουν ότι η προσωπική τους εμπειρία τους επιτρέπει να δώσουν μερικές πρακτικές συμβουλές στους δασκάλους που θέλουν να διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο σε παρόμοια περιβάλλοντα:

α) Να βοηθήσουν στην κατάργηση του διαχωρισμού μεταξύ προγραμματιστικής δραστηριότητας και "άλλων" μαθηματικών δραστηριοτήτων και να προάγουν τις διασυνδέσεις ανάμεσα στους δύο τρόπους δουλειάς.

β) Στο επίπεδο των αλληλεπιδράσεων δασκάλου- μαθητή θα πρέπει οι δάσκαλοι να έχουν υπ' όψιν τους ότι οι παρεμβάσεις που ξεκινούν από τους ίδιους είναι περισσότερο αποτελεσματικές όταν εμπλέκονται και εναρμονίζονται με την εξερευνητική δραστηριότητα των παιδιών παρά όταν γίνονται χάριν των προδιαγεγραμμένων (goal-direct) στόχων της προσέγγισης (Noss, 1984).

γ) Στα παιδιά πρέπει να δοθεί η ελευθερία να αποκτήσουν συνείδηση των δικών τους προγραμμάτων (procedures) για να κατανοήσουν τη δύναμη των νέων εργαλείων που τα ίδια δημιούργησαν. Οι ερωτήσεις του τύπου "Τί νομίζεις ότι θα συνέβαινε εάν ....; ", φαίνεται για τους Hoyles και Noss (1987), να είχαν γόνιμη λειτουργία στις πειραματικές τους τάξεις και τις θέτουν υπ' όψιν των νέων παιδαγωγών.

3) Η *παιδική συνιστώσα* (pupil component)

Αυτή έχει σχέση με τις γνωστικές και επιδραστικές όψεις του μικρόκοσμου. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι ο τρόπος που ένα παιδί αντιλαμβάνεται μιά σκόπιμα ανατιθέμενη εργασία (task), εξαρτάται από δύο παράγοντες:

Πρώτον, από τα συστήματα αναπαράστασης που είναι διαθέσιμα στο παιδί. Και δεύτερον, απο το εάν και κατα πόσο οι γνωστικές απαιτήσεις αυτής της εργασίας εμπίπτουν στη "ζώνη της προσεχούς ανάπτυξης", όπως την έχει ορίσει ο Vygotsky (1962). Οι Hoyles και Noss (1987), παρατηρούν πως ανάμεσα στους επιστήμονες της μαθηματικής παιδείας αποτελεί κοινό τόπο, ότι οι απαντήσεις των μαθητών βασίζονται πάνω σε τελείως ορθολογικές και συνεπείς αφαιρέσεις των περασμένων τους εμπειριών (Erlwanger, 1973), (Resnic, 1976), (Davis, 1984),(Easley, 1984).

Για την κυριαρχία του "ανακριβούς" στο μυαλό των μαθητών έχουν ευρύτατα αναφερθεί οι Booth (1984) και Hart (1984). Αυτές έδειξαν ότι οι "εσφαλμένες" μέθοδοι των παιδιών ίσως να είναι ιδιοσυγκρατικές και προσωπικές αλλά σε καμιά περίπτωση δεν είναι πρωταρχικές (primitive) απο τη φύση τους. Ακόμη αυτές οι "λαθεμένες" στρατηγικές είναι πολύ γερά δεμένες με πρωϊμότερες εμπειρίες μέσα στις οποίες αυτές οι στρατηγικές *ήσαν* σωστές.

Ετσι η παιδική συνιστώσα του μικρόκοσμου συγκροτείται από τις υπάρχουσες κατανοήσεις και τις μερικές αντιλήψεις που τα παιδιά φέρουν πριν φτάσουν στο μαθησιακό περιβάλλον του μικρόκοσμου. Με αυτές τις διαισθητικού και μερικού χαρακτήρα αντιλήψεις οι δάσκαλοι είναι αναγκασμένοι να δουλέψουν μέσα στο τεχνικό πλαίσιο του μικρόκοσμου. Τα παιδιά τα οποία διαθέτουν διαφορετικά μαθησιακά στύλ και παρουσιάζουν διαφορετικούς τρόπους δουλειάς θα αλληλεπιδράσουν με τον τεχνικό μικρόκοσμο καθώς θα επιχειρήσουν διάφορες εργασίες μέσα σ' αυτόν. Αυτό σημαίνει ότι από τα πράγματα υπάρχει αλληλεπίδραση παιδικής και τεχνικής συνιστώσας. Ομως, όπως θα δούμε παρακάτω, η αναπόφευκτη διαπλοκή των δύο συνιστωσών του μικρόκοσμου επεκτείνεται και στις υπόλοιπες με αποτέλεσμα όλες μαζί να λειτουργούν σαν σύστημα. Αυτό παραπέρα σημαίνει ότι μιά συνιστώσα δεν μπορεί να μη λαμβάνει υπόψιν τη συγκρότηση της άλλης για να έχουμε αποτελεσματική λειτουργία του μικρόκοσμου. Είδαμε σε προηγούμενα κεφάλαια ότι οι διαισθητικές αντιλήψεις των παιδιών είναι ένα δεδομένο το οποίο δεν μπορούμε να παρακάμψουμε. Θα κτίσουμε τη νέα γνώση πάνω σ' αυτό το δεδομένο και κατά συνέπεια η τεχνική συνιστώσα είναι αυτή που θα πρέπει να συγκροτηθεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε να προσαμόζεται στο υπάρχον γνωστικό υπόβαθρο των παιδιών. Η παιδική συνιστώσα επομένως φαίνεται να είναι το σημείο αφετηρίας για την οικοδόμηση του μικρόκοσμου.

Ωστόσο τα παιδιά φαίνεται να έχουν σαφή αντίληψη του τι είναι ικανά να πραγματοποιήσουν και του τι είναι ικανά να καταλάβουν γύρω απο τα μαθηματικά (Hoyles, 1982). Συχνά περιορίζουν τη δουλειά τους στα όρια της τεχνικής συνιστώσας του μικρόκοσμου και αυτό οι Hoyles kai Noss (1978), το ερμηνεύουν σαν αποτέλεσμα της εξόδου (output), που λαμβάνουν απο τον υπολογιστή, αλλά και σαν ένα τρόπο να αποκτήσουν εμπιστοσύνη και αίσθημα ελέγχου απέναντι στη μηχανή.

4) Η *πλαισιακή συνιστώσα* (context component)

Αυτή σχετίζεται με το κοινωνικό πλαίσιο μέσα στο οποίο η προγραμματιστική δραστηριότητα λαμβάνει χώρα. Οι Lave, Murtaugh, de la Rocha (1984), Wolf (1984), έδειξαν το δραματικό τρόπο με τον οποίο επηρεάζεται η απόδοση ενός μαθητή πάνω σε ένα μαθηματικό πρόβλημα από το πλαίσιο μέσα στο οποίο το πρόβλημα ενσωματώνεται, το τρόπο που αυτό τίθεται, και τη μέθοδο που αυτό εκτιμάται. Οι Hoyles, Sutherland και Evans (1985), παρατηρούν ότι οι στρατηγικές που υιοθετούνται μέσα στην τεχνική συνιστώσα του μικρόκοσμου εξαρτώνται απο τις σημασίες που παρεμβάλλονται απο το συγκυριακό πλαίσιο και από τις συγκινήσεις που αυτό εγείρει (για παράδειγμα, εάν η ανατιθέμενη εργασία εκλαμβάνεται σαν παιχνίδι ή καθήκον, σαν μαθηματική δουλειά ή σχεδιασμός εικόνας, αν είναι εύκολη ή δύσκολη).

Ο τρόπος που τα παιδιά εννοιολογικοποιούν μιά δραστηριότητα επηρεάζεται από την όλη ιστορία των συγκυριακών επιδράσεων, κοινωνικών, πολιτισμικών και στη συνέχεια μορφοποιείται με κοινωνική αλληλεπίδραση (Hoyles, 1985a). Το κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο, αναμφίβολα, επηρεάζει τον τρόπο που θα εκλάβουν τα παιδιά ένα πρόβλημα, αλλά και τον τρόπο που θα το αναπαραστήσουν. Με άλλα λόγια οι παράγοντες που επηρεάζουν τη στάση ενός παιδιού είναι η σχέση του με τους συμμαθητές του, ο βαθμός διάχυσης των ιδεών μέσα στην τάξη, η ύπαρξη ή μη διερευνητικού κλίματος μέσα σ' αυτήν. Ομως, οι πλαισιακοί παράγοντες αυτοί διαμορφώνονται σε σημαντικό βαθμό από το δάσκαλο. Επομένως είναι καταφανής η διαπλοκή παιδαγωγικής και πλαισιακής συνιστώσας. Η πλαισιακή συνιστώσα σαφώς περιλαμβάνει αλληλεπίδραση με την παιδική συνιστώσα αφού τα παιδιά με το προσωπικό τους στύλ όπως είδαμε και με τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις συμβάλλουν στη διαμόρφωση της ατμόσφαιρας μέσα στην τάξη. Και εδώ είναι φανερή η ύπαρξη στενής σχέσης ανάμεσα στην παιδική και την πλαισιακή συνιστώσα. Αλλά και οι γνωστικές απαιτήσεις του τεχνικού πλαισίου από την άλλη, σε καμιά περίπτωση δε θα μπορούσαν να υπερβαίνουν το βαθμό γνωστικής ανάπτυξης των παιδιών και για να θυμηθούμε και πάλι τον Vygotsky, θα πρέπει να εμπίπτουν στο διάκενο πραγματικής και ενδεχόμενης ανάπτυξης. Αρα υπάρχει φανερή σχέση τεχνικής και παιδικής συνιστώσας. Τελικό συμπέρασμα είναι ότι οι τέσσερις συνιστώσες του μικρόκοσμου παρακολουθούν η μία την εξέλιξη της άλλης και όσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός συντονισμού που επιτυγχάνεται, τόσο και η λειτουργία του μικρόκοσμου γονιμότερη.

Να σημειώσουμε εδώ ότι ο μικρόκοσμος του οποίου το περίγραμμα επιχειρήσαμε να δώσουμε αφορά Logo μαθησιακά περιβάλλοντα, ή καλύτερα, για να χρησιμοποιήσουμε τον όρο που επικράτησε στο διεθνές συνέδριο EUROLOGO' 93, τα ονομαζόμενα Logo-like περιβάλλοντα.

5.4 ΤΑ ΣΠΟΥΔΑΙΟΤΕΡΑ ΤΕΧΝΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ LOGO

α) *Η Logo είναι διαδικαστική (procedural).*

Μια procedure είναι μιά ομάδα εντολών στην οποία έχουμε δώσει ένα όνομα (procedure name). Οι εντολές μέσα στην procedure μπορεί να είναι Logo primitives ή άλλες procedures. Μια συγκεκριμένη εργασία δεν είναι ένα πελώριο ασπονδύλωτο πρόγραμμα. Οι procedures είναι τα μικρά, ξεχωριστά, δομικά στοιχεία τα οποία μπορούν να έχουν αυτόνομη υπόσταση και σκοπό, αναλύονται και συντίθενται εύκολα, και τέλος διαρθρώνονται σε ένα αρμονικό σύνολο που αποτελεί το γενικότερο πρόγραμμα. Δεν υστερεί, ως προς το χαρακτηριστικό αυτό, σε σχέση με καμμία απο τις μοντέρνες γλώσσες, PASCAL, C, FORTRAN κτλ.

β) *Είναι επεκτάσιμη (extensible).*

Παρά το γεγονός ότι στις μέρες μας πολλά μεγάλα προγράμματα περιλαμβάνουν μιά "scripting language", όπως η είναι η Hypertalk για την Hypercard, οι περισσότερες νέες γλώσσες προγραμματισμού δεν μπορούν να ειδωθούν σαν βάσεις για προγραμματιστική επέκταση, εκτός βέβαια αν κάποιος ξεκινήσει από την αρχή και γράψει ένα πλήρη interpriter ή compiler. Επομένως ο κύριος όγκος της προγραμματιστικής πανδαισίας που μας κατακλύζει δεν προσφέρεται για δημιουργία μικρόκοσμων. Γιατί σ' αυτό ακριβώς το χαρακτηριστικό, στην επεκτασιμότητα, βρίσκεται η τεχνική βάση των μικρόκοσμων (Harvey,1993). Οποιοσδήποτε Logo προγραμματιστής μπορεί να επεκτείνει τη Logo με επιπλέον primitives για να κατασκευάσει κάποιο μικρόκοσμο.

γ) *Είναι αλληλεπιδραστική (interactive).*

Οποιοδήποτε Logo primitive ή procedure εκτελείται με απλή πληκτρολόγηση και πάτημα στη συνέχεια του πλήκτρου ENTER ή RETURN. Ετσι η ανατροφοδότηση είναι άμεση και τα λάθη που εμφανίζονται άμεσα μπορούν να διορθωθούν.

δ) *Οι δομές δεδομένων που υποστηρίζει είναι τύπου List*[18]. Αυτό έχει σαν συνέπεια μιά σειρά πλεονεκτήματα:

i) Είναι δυνατός ο συνδυασμός δύο ή περισσοτέρων List για την οικοδόμηση μιάς νέας List.

ii) Είναι δυνατή η διαμέριση μιας List σε έναν αριθμό νέων List.

iii) Μπορούμε να αντιγράψουμε μιά List.

iv) Μπορούμε να καθορίσουμε το πλήθος των στοιχείων μιάς List.

v) Μπορούμε να ταξινομήσουμε τα στοιχεία μιας List.

ε) *Είναι συναρτησιακή (Functional).*

Σε μιά Functional γλώσσα όπως η Logo, το μοντέλο που αποτελεί τη βάση μιας πράξης είναι μιά μαθηματική συνάρτηση. Ετσι είναι δυνατό να ορίσουμε συναρτήσεις, να συνθέσουμε μια ή περισσότερες συναρτήσεις να υπολογίσουμε αντίστροφες συναρτήσεις. πχ.

(α)	(β)	(γ)
TO F :X	IN OUTPUT	F(X)=X+4
OUTPUT :X* 4	3 ----------> 7	ή X------>X+4
END	-2 ----------> 2	

Και οι τρείς αναπαραστάσεις αποτελούν διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης. Στη Logo για να ορίσουμε μιά συνάρτηση είναι απαραίτητο να

[18] **Λίστα** κατά τους Μαρινάκη, Τασόπουλο (1985), είναι ένα ταξινομημένο σύνολο στοιχείων , που ο αριθμός τους είναι μεταβαλλόμενος και για τα οποία επιτρέπονται προσθέσεις και αφαιρέσεις. Διακρίνομε δύο είδη List, την Linear list και την nonlinear list. Μια υλοποίηση των Linear List (που όλες οι γλώσσες προγραμματισμού χρησιμοποιούν) είναι οι γνωστοί μας πίνακες (μήτρες) που βλέπουμε στα προγράμματα εφαρμογών. Η Linear List διακρίνεται σε δυό κατηγορίες: Στις

a) Static linear list στις οποίες το μήκος του πίνακα είναι γνωστό πρίν απο το compilation (μετάφραση) του προγράμματος. Και στις

b) Dynamic linear list στις οποίες το μέγεθος του πίνακα δεν είναι αρχικά γνωστό και καθορίζεται κατα τη διάρκεια της εκτέλεσης του Προγράμματος.

χρησιμοποιήσουμε την ιδέα της εξόδου μέσω της οποίας η εικόνα εξέρχεται απο τη procedure. Τέλος μιά σύνθετη συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί με έναν τρόπο που ταιριάζει με μιά αλγεβρική παράσταση. Ας δούμε τα παραδείγματα:

```
TO SQUARE
OUTPUT :X*:X
END
```

Οταν η **SQUARE** τρέχει παράγει σαν έξοδο ένα αποτέλεσμα το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε οποιαδήποτε procedure θα καλούσε την **SQUARE.** Για παράδειγμα το αποτέλεσμα της εντολής

PRINT SQUARE 3

είναι 9. Επίσης αν ορίσουμε την AVERAGE ως εξής:

```
TO AVERAGE :X :Y
OUTPUT (:X +:Y)*0.5
END
```

τότε το αποτέλεσμα της παρακάτω εντολής

PRINT SQUARE (AVERAGE 5 6)

που ορίζει μιά σύνθετη συνάρτηση και σημαίνει το τετράγωνο του μέσου όρου των αριθμών 5 και 6 είναι 30.25.

στ) *Είναι αναδρομική.*

Η δυνατότητα χρήσης αναδρομικών procedures έχει σαν αποτέλεσμα σύντομα και κομψά προγράμματα που εμπλουτίζουν την κεντρική δομή ενός προβλήματος για να χρησιμοποιηθεί σε σύνθετες δομές.

5.5 ΛΟΓΟΙ ΕΚΛΟΓΗΣ ΤΗΣ LOGO ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΙΚΡΟΚΟΣΜΩΝ.

1) Η Logo είναι ειδικά σχεδιασμένη για να προμηθεύει ένα "τελείως φυσικό περιβάλλον για μια πειραματική προσέγγιση των μαθηματικών ιδεών και διαδικασιών" (Feurzing, Papert, Bloom, Grant, Solomon, 1969), και ένα πλαίσιο για χρήση γενικών ευρετικών αναλύσεων, σχεδιασμού και κριτικής θεώρησης (Hoyles, 1989).

2) Ο μικρόκοσμος των γραφικών της χελώνας προσφέρει, όπως επισημάναμε ξανά, την καλύτερη διαθέσιμη εισαγωγή στον προγραμματισμό για τάξεις μαθητών διάφορων επιδόσεων και ικανοτήτων (Hoyles, Sutherland, 1989). Είναι μια γλώσσα προσιτή και μπορεί να παρακινήσει.

3) Σπουδαίες μαθηματικές δραστηριότητες όπως είναι το σπάσιμο ενός προβλήματος σε μικρότερα διερευνήσιμα μέρη και η χρήση λύσεων πάνω στα δομικά συστατικά που αποτελούν μια μαθηματική κατασκευή ενθαρρύνονται απο τα πολύ σημαντικά χαρακτηριστικά της διαδικαστικότητας και της επεκτασιμότητας.

4) Η εκσφαλμάτωση υποβοηθάται απο την procedural φύση της Logo και ενθαρρύνεται απο το δυναμικό τρόπο σύνταξης και τις interactive ευκολίες που διαθέτει η Logo.

5) Αν δεχτούμε τις απόψεις των Vytgotsky (1978), Bruner (1966, 1985), Brown (1978, 1984), σύμφωνα με τις οποίες η μάθηση είναι προϊόν κοινωνικής αλληλεπίδρασης και διαλόγου η Logo αναμφίβολα διαθέτει τέτοιου είδους χαρακτηριστικά. Ερευνητικές μαρτυρίες (Logo Math Project, 1983- 1986), (Istructional Software Designe Project, 1986-1991, Harel & Papert, 1990), (Headlight Project, Harel, 1986, Kafai, & Harel,1990), έδειξαν πως το περιβάλλον της Logo είναι ευρετικό, παρακινεί τη μάθηση, ενθαρρύνει το διάλογο και τη συνεργασία και είναι αλληλεπιδραστικό από τη φύση του. Το τελευταίο σημαίνει ότι οι σχεδιαστές της Logo φρόντισαν να την εφοδιάσουν με τέτοιου είδους παιδαγωγικά χαρακτηριστικά. Ο Harvey (1993), μιλώντας στο διεθνές συνέδριο EUROLOGO' 93, επεσήμανε το γεγονός ότι αντίθετα με τη Logo, στις γλώσσες ανωτέρου επιπέδου, όπως για παράδειγμα η Pascal, μόνο ένας τρόπος υπάρχει να κάνεις μιά δραστηριότητα. Δεν κάνεις ότι σου αρέσει ή ότι θα μπορούσε να σε διασκεδάσει μαθαίνοντας. Δεν υπάρχει ελευθερία. Αυτά είναι χαρακτηριστικά μόνο

γλωσσών με παιδαγωγική φιλοσοφία, όπως η Logo. Ολα τα παραπάνω σημαίνουν ότι ο διάλογος σε γλώσσες σαν την Pascal δεν έχει κανένα νόημα αφού ένας και μόνο είναι ο ακολουθητέος δρόμος για την επίλυση ενός προβλήματος και δεν υπάρχουν πλουραλιστικές λύσεις από τις οποίες να επιλέξουν τα παιδιά όποια ταιριάζει στο συναισθηματικό και γνωστικό τους επίπεδο.
6) Τα μαθηματικά της Logo φαίνεται να ελκύουν ιδιαίτερα τα παιδιά ενώ αυτό δεν συμβαίνει με άλλες αλληλεπιδραστικές γλώσσες όπως οι APL και ISETL οι οποίες διαθέτουν περισσότερο συμβατικά μαθηματικά.

5.6 Η ΣΧΕΣΗ LOGO ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ *ή καλύτερα* Η ΣΧΕΣΗ LOGO ΚΑΙ PROBLEM SOLVING

Ο τίτλος αυτής της παραγράφου εμπλέκει, σκόπιμα, στη σχέση Logo και μαθηματικών τη διαδικασία του problem solving γιατί τα μαθηματικά είναι ένα σοβαρό όργανο στην επίλυση προβληματικών καταστάσεων. Οπως παρατηρεί ο Cockcroft (1982), "η ικανότητα να λύσουν (τα παιδιά) προβλήματα είναι στην καρδιά των μαθηματικών."
Αναφερθήκαμε ήδη σε μιά σειρά projects (Logo Math Project, Headlight, κτλ. στα οποία καταγράφηκαν οι εμπειρίες και οι τρόποι που τα παιδιά προγραμματίζουν μέσα σε ένα Logo περιβάλλον. Ο Noss (1985), προβαίνει σε μιά διερεύνηση των ευρετικών και μαθηματικών διαδικασιών που τα παιδιά του δημοτικού αναπτύσσουν καθώς αυτά προγραμματίζουν μέσα σε ένα τέτοιο περιβάλλον. Δεν υπάρχει, ωστόσο, μιά επαρκής, ευρεία διερεύνηση γύρω από την ιδιαίτερη φύση των problem solving στρατηγικών που χρησιμοποιούν τα παιδιά όταν προγραμματίζουν (Hoyles, Sutherland, 1989). Μια έρευνα που προσδοκά κάποιο είδος εξιδανικευμένης problem solving δραστηριότητας που θα μεταφερθεί από τον προγραμματισμό σε άλλα πλαίσια είναι μάλλον αφελής (Pea and Kurland, 1984).
Ο Clements (1986), επιχειρεί να εκτιμήσει την επίδραση της προγραμματιστικής μάθησης πάνω σε συγκεκριμένες δεξιότητες, όπως για παράδειγμα, στοχαστικότητα (reflectivity), αποκλίνουσα σκέψη (divergent thinking). Το συμπέρασμα από αυτή την μελέτη είναι κατά τον Clements ότι "ο Logo προγραμματισμός μπορεί να αυξήσει την απόδοση (performance), σε συγκεκριμένες γνωστικές και μεταγνωστικές δεξιότητες και πάνω σε μετρήσεις δημιουργικότητας. "
Στο επίκεντρο της προβληματικής ενός Logo περιβάλλοντος που στοχεύει να επιλύσει προβλήματα είναι οι διαδικασίες της υπόθεσης, της προκριματικής δοκιμής και της εκσφαλμάτωσης. Τα λάθη γίνονται "bugs" μέσα σ' ένα Logo περιβάλλον. Τα bugs έχουν το πλεονέκτημα να γίνονται πηγή γνώσης καθώς προσφέρουν μιά γέφυρα ανάμεσα στις ενέργειες των παιδιών και στην κατανόηση γενικών μαθηματικών σχέσεων. Αυτό γίνεται ως εξής: Για να γράψουν τα παιδιά ένα πρόγραμμα ασφαλώς και θα πρέπει να συλλάβουν τις έννοιες με συμβολικό τρόπο. Αυτό όμως με τη σειρά του σημαίνει αποσαφήνιση αυτών των εννοιών. Οι Hoyles και Sutherland (1989), τεκμηριώνουν τις παραπάνω θέσεις με εκτενείς αναφορές (βλ. κεφ. 3 το παράδειγμα των δύο παιδιών George και Asim).
Να δούμε σ' αυτό το σημείο πως τίθεται ένα πρόβλημα μέσα σε ένα Logo περιβάλλον. Η διαδικασία του ξετυλίγματος είναι τελείως φυσική. Στα παιδιά δίνεται η ευκαιρία να εκλέξουν τους δικούς τους στόχους και να αναπτύξουν τις δικές τους στρατηγικές επίλυσης και προγραμματισμού. Να αναλύσουν ερμηνεύσουν στη συνέχεια τα ίδια τους τα βήματα. Οι εμπειρίες από τα projects που αναφέρθηκαν έδειξαν ότι τα παιδιά απέκτησαν εμπιστοσύνη και βεβαιότητα στην αλληλεπίδρασή τους με το computer. Ανακάλυψαν τι μπορεί αυτό να κάνει και τι δεν μπορεί.Ο ρόλος του δασκάλου στο Logo Math project που προαναφέρθηκε ήταν να διευκολύνει την έτσι κι αλλιώς υπαρκτή συζήτηση σε ένα τέτοιο περιβάλλον και να την προσανατολίσει σε παραγωγικές κατευθύνσεις, στον αναστοχασμό γύρω απο την ανατροφοδότηση που

προσφέρει το computer. Η παιδαγωγική παρέμβαση, από την άλλη, δεν είχε σκοπό να επιβάλει, ούτε καν προσπάθησε να διδάξει την εκμάθηση εξειδικευμένων problem solving στρατηγικών.
Η Logo όμως από μόνη της ίσως να μην είναι, αναγκαστικά, κάτι το ενδιαφέρον για τα παιδιά. Γίνεται όμως σημαντική γι' αυτά, όπως έδειξε η Harel (1991), **όταν εντάσσεται σε μιά διαδικασία ανάπτυξης λογισμικού**, όπως για παράδειγμα για τα κλάσματα. Η διαδικασία αυτή έχει σαν κύριο χαρακτηριστικό τον επαγγελματικό σχεδιασμό και αναλαμβάνεται εξ ολοκλήρου απο το μαθητή- σχεδιαστή. Η Harel αποδίδει μεγάλη σημασία στην ανάπτυξη της γνώσης ως διαδικασίας σχεδιασμού στηριζόμενη στην ομώνυμη θεωρία του Perkins (1986), καθώς επίσης και στη θεωρία του κονστρακτιονισμού[19] του Papert (1980, 1991a, 1991b).
Οι Resnick (1991), Resnick, Ocko, (1990), Resnick, Ocko, & Papert (1988), βλέπουν τον σχεδιασμό σα μια εκπαιδευτική διαδικασία που οδηγεί τους μαθητές προς μια παραγωγική και προσωπική συνεισφορά στο μαθησιακό τους περιβάλλον. Η διαδικασία σχεδιασμού θέτει μαζί ανθρώπους, αισθήματα και καταστάσεις (Harel & Papert, 1990).
Ο σχεδιασμός για μάθηση (design for learning), είναι ένα πλούσιο παράδειγμα για μάθηση και για έρευνα πάνω στη μάθηση των μαθηματικών αναφέρει η Harel (1991). Και παραθέτει μιά σειρά από επιχειρήματα: Πρώτο ότι ο σχεδιασμός για μάθηση έχει το χαρακτηριστικό της κινητοποίησης. Τα παιδιά για να μάθουν οτιδήποτε θα πρέπει πρώτα να κινητοποιηθούν. Ιδιαίτερα για τα μαθηματικά η αναγνώριση του γεγονότος ότι κάτι είναι σημαντικό είναι ένας σημαντικός παράγοντας για την κατανόηση των δομών τους. Δεύτερο, ότι ο σχεδιασμός βασίζει τη μάθηση σε πραγματικές εκπληρώσεις. Οι μαθητές πρέπει να μάθουν ότι η γνώση των μαθηματικών δε συμβαίνει αυτόματα. Οι μαθητές σχεδιάζουν αναπαραστάσεις, κάνουν μαθηματικά και την κάνουν να συμβαίνει. Η παθητική μάθηση δεν έχει θέση σε τέτοια περιβάλλοντα. Τρίτο, η διαφορά στο να κάνεις απλώς κάτι και στο να σχεδιάζεις ένα πραγματικό προϊόν θέτει αυτόματα ζήτημα δέσμευσης για την ποιότητα από τη μιά και συνακόλουθα από την άλλη ζήτημα αμοιβής για την εργασία. Ο σχεδιασμός ενός προϊόντος προάγει το σεβασμό απέναντι στους χρήστες του προϊόντος και δεν μπορεί να γίνει ασφαλώς απρόσεχτα. Ο σχεδιασμός (design), είναι ενοποιητικός, ολοκληρωτικός και ολιστικός.Εφαρμόζοντας συγκεκριμένες διαδικασίες σχεδιασμού μέσα στο σχολικό περιβάλλον μπορούμε να εξασφαλίσουμε μιά ενδιαφέρουσα σύνθεση ανάμεσα στις "καθημερινού", "πραγματικού κόσμου" δραστηριότητες και στις "τυπικές" σχολικές δραστηριότητες. Πρόκειται λοιπόν για μιά ενοποιητικής φύσης διαδικασία η οποία δεν φαίνεται να έχει εκτιμηθεί απο την σχολική κουλτούρα των σχολείων της Ευρώπης και της Αμερικής.
Η Harel (1991), δεν θεωρεί τον σχεδιασμό σαν μιά άλλη δεξιότητα που πρέπει να μαθευτεί από τους μαθητές για να υπηρετήσουν καλύτερα την επιδιώκουσα το κέρδος βιομηχανική κοινωνία μας. Αντίθετα θεωρεί το σχεδιασμό σαν μιά "ενισχυτική αρχή (empowering principle), σαν ένα κλάδο που διευκολύνει μιαν άλλη μάθηση και που παντρεύει, πολιτιστικό υπόβαθρο, σχολικές δραστηριότητες, σκέψη, κατασκευή, δράση και στοχασμό."
Είναι φανερό απ'όλα τα παραπάνω πως η Harel έχει κατά νου το γνωστό νόμο της προσφοράς και ζήτησης, όταν μιλά για ποιότητα και αμοιβή του software που καλούνται οι μαθητές να κατασκευάσουν, με επαγγελματικές μάλιστα προδιαγραφές ώστε να πουληθεί στη συνέχεια επικερδώς. Η Harel όπως και ο Papert φαίνεται να

[19] Ο κονστρακτιονισμός (constructionism), είναι μιά σύνθεση κονστρακτιβισμού και της ιδέας που θεωρεί ότι το κτίσιμο των γνωστικών δομών ("στο κεφάλι"), πραγματοποιείται ιδιαίτερα καλά όταν το υποκείμενο απασχολείται με την κατασκευή υλικών δομών ("στον κόσμο"), όπως ακριβώς κάνουν τα παιδιά με κατασκευαστικές συσκευές.

υπερτιμά τις δυνατότητες των παιδιών, αλλά ταυτόχρονα εστιάζει σε πολύ ρεαλιστικά αιτήματα: τέτοια είναι η ανάγκη να αναπτύξουν τα νέα παιδιά, από νωρίς, το αίσθημα της ευθύνης και του σεβασμού προς τα άλλα μέλη της κοινωνίας, της αντίληψης για τον ανταγωνιστικό χαρακτήρα της κοινωνίας στην οποία αναγκαστικά θα ζήσουν. Ο κρίσιμος ρόλος του δασκάλου στην κατα τα άλλα σημαντική προβληματική της Harel δεν αναφέρεται πουθενά. Οι μαθητές φαίνεται από μόνοι τους να θέτουν τους προγραμματιστικούς στόχους τους και από μόνοι τους να τους πραγματοποιούν. Από την άλλη ένα σημείο που θα πρέπει να εστιάσουμε είναι ο ενοποιητικός, ολιστικός χαρακτήρας του σχεδιασμού. Οπως λέει η ίδια το σχεδιαστικό μοντέλο που προτείνει για τα κλάσματα είναι περιεκτικό και ενοποιητικό καθώς δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να αντιληφθούν τον τρόπο που οι μαθηματικές δουλειές στο σχολείο σχετίζονται με τους ίδιους, με τη ζωή τους, πώς η γλώσσα σχετίζεται με τα μαθηματικά, πως η τέχνη σχετίζεται με την επιστήμη, πως η επικοινωνία σχετίζεται με την κατανόηση. Το μοντέλο ISDP (Istructional Software Design Project), που προτείνει για τα κλάσματα έχει το πλεονέκτημα ότι οι μαθητές αναγκαστικά εμπλέκουν στο σχεδιασμό του μαθηματικές ιδέες και αναπαραστάσεις μαθηματικών εννοιών.

Ο σχεδιαστικός χαρακτήρας της μάθησης όπως την οραματίζεται η Harel είναι μιά ενδιαφέρουσα, σύγχρονη θέση στο χώρο της μαθηματικής παιδείας και οπωσδήποτε αποτελεί μιά πλήρη κονστρακτιβιστική προσέγγιση. Η Logo, όπως είδαμε καθαρά μέσα από αυτή την έρευνα επιδέχεται σχεδιαστικές προσεγγίσεις αφού η ιδιότητα της επεκτασιμότητας της το επιτρέπει.

Από όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι ο σχεδιασμός για μάθηση αφού εστιάζει πάνω σε προβλήματα πραγματικών καταστάσεων για να παραχθούν συγκεκριμένα, πραγματικά προϊόντα, είναι ένα problem solving και και μάλιστα όχι γενικού, αλλά ειδικού χαρακτήρα.

5.7 Η ΑΛΓΕΒΡΑ, Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ Η ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ ΤΗΣ LOGO ΣΤΟ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ ΔΙΑΚΕΝΟ

Η άλγεβρα σαν μά μαθηματική γλώσσα αναπτύχθηκε πρώτα σαν εργαλείο επίλυσης εξισώσεων στις οποίες το γράμμα ή το σύμβολο αναπαριστούσε ένα συγκεκριμένο, αλλά άγνωστο αριθμό. Στη συνέχεια πήρε τη μορφή της κλασσικής, γενικευμένης αριθμητικής στην οποία τα σύμβολα χρησιμοποιήθηκαν για να παραστήσουν σχέσεις ανάμεσα σε μεταβλητές (Vieta, 17ος αιώνας). Τέλος, η άλγεβρα πήρε τη μορφή γενικής μελέτης των δομών γνώσης ως μοντέρνα άλγεβρα. Η μοντέρνα άλγεβρα μπορεί να θεωρηθεί σαν μιά γλώσσα που έχει την ικανότητα, να κάνει σαφείς τις ομοιότητες στη δομή ανάμεσα σε διαφορετικά μαθηματικά συστήματα (Hoyles and Sutherland, 1989).

Η αναγκαιότητα του αλγεβρικού συμβολισμού, φαίνεται να είναι αναπόφευκτη. Οι λόγοι που επιβάλλουν τον αλγεβρικό συμβολισμό δεν είναι για να έχουμε μοντερνοποίηση στα σχολικά μαθηματικά ή κομψότητα στις, συνήθως μακροσκελείς, προφορικές, περιφραστικές εκφράσεις. Αλλά αντίθετα, όπως τονίζουν οι Byers και Erlwanger (1984), εισάγουμε τον αλγεβρικό συμβολισμό γιατί "δεν μπορούμε πλέον να κάνουμε χωρίς τη διδασκαλία του αλγεβρικού συμβολισμού η οποία είναι περισσότερο αναγκαία απο τη διδασκαλία της τιμής θέσεως[20] (place value). Οι συμβολικές εκφράσεις μετασχηματίζονται πολύ πιό εύκολα από τις αντίστοιχες προφορικές τους και έτσι όχι μόνο γλιτώνουμε χρόνο και εργασία, αλλά αυτές βοηθούν επίσης και στην κατανόηση του περιεχομένου."

Στο τελευταίο αυτό που υπαινίσσεται την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και δομών πρέπει να σταθούμε περισσότερο. Η σχετική έρευνα στο θέμα της κατανόησης της άλγεβρας (K_chemann, 1981), (Booth, 1984), έχει φωτίσει σημαντικά τα

[20] Είναι γνωστό ότι η διδασκαλία για τη θεσιακή αξία των ψηφίων είναι θέμα του μαθηματικού curriculum του Δημοτικού σχολείου και αφορά την Αριθμητική κι όχι την Αλγεβρα.

προβλήματα που τα παιδιά έχουν με την ερμηνεία των γραμμάτων, την τυποποίηση και τον συμβολισμό μιας γενικεύσιμης μεθόδου. Εχει παρατηρηθεί ότι τα παιδιά συχνά δεν συμβολίζουν τις μεθόδους που χρησιμοποιούν για να λύσουν προβλήματα στην αριθμητική. Επομένως αυτά δεν είναι ικανά να διαμορφώσουν ένα γενικευμένο τύπο για μιά μέθοδο κάτι που είναι αναγκαίο συχνά στην άλγεβρα. Με άλλα λόγια είναι φανερό ότι τα παιδιά συχνά ενδιαφέρονται να πάρουν μιά "απάντηση" σε ένα πρόβλημα και δεν τα απασχολεί η μεθοδολογική του αντιμετώπιση. Βέβαια αυτό δε δημιουργεί κανένα πρόβλημα στο χώρο της αριθμητικής, αλλά στο χώρο της άλγεβρας είναι κεντρικής σημασίας ζήτημα αφού η μέθοδος μπορεί να αναπαραστήσει τη δομή ενός προβλήματος. "Εάν τα παιδιά δεν έχουν διαθέσιμη εκείνη τη δομή στην αριθμητική περίπτωση," διαπιστώνει η Booth (1984), "είναι απίθανο να την παράγουν ή να την κατανοήσουν στην αλγεβρική περίπτωση." (σελ. 102). Επομένως οι καθηγητές των μαθηματικών είναι ανάγκη να βρούν προβλήματα τα οποία προκαλούν τη χρήση της άλγεβρας γιατί η άλγεβρα είναι σημαντική στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και δεν είναι απλώς ένα σύνολο από χειρισμούς (Vergnaud και Corte, 1986).

Ετσι φτάνουμε στο κρίσιμο ερώτημα: Με ποιό τρόπο θα μπορούσαμε να υποβοηθήσουμε τους μαθητές να κινηθούν περισσότερο στην κατεύθυνση της μεθόδου, η οποία έχει μεγαλύτερη αξία όπως είδαμε, απο την "απάντηση" που συνήθως αυτοί προτιμούν; Αυτή δεν είναι εύκολη δουλειά στο "παραδοσιακό", σχολικό πλαίσιο, υποστηρίζουν οι Hoyles και Sutherland (1989). Αντίθετα, αυτό είναι περισσότερο εφικτό, όπως υποστηρίζει η Booth (1984), να επιτευχθεί με το να μεταφέρουμε το πρόγραμμα διδασκαλίας στο πλαίσιο μιάς "μαθηματικής μηχανής", δηλ. στο computer. Σ' αυτό το πλαίσιο όπως, είναι ανάγκη να κατασκευαστεί κώδικας δηλ. πρόγραμμα του οποίου στόχος είναι να περιλάβει εντολές οι οποίες θα καταστήσουν ικανή τη μηχανή να λύσει δοσμένα προβλήματα. Η οικοδόμηση όμως του προγράμματος συνεπάγεται την σύλληψη και κατασκευή δομής. Και αυτή με τη σειρά της συνεπάγεται την εισαγωγή γραμμάτων - μεταβλητών σαν γενικευμένων αριθμών. (Για το σημαντικό όπως πρόβλημα της μεταβλητής σε σχέση με την άλγεβρα, αλλά και με τη Logo θα μιλήσουμε σε άλλη παράγραφο).

Υπάρχουν ερευνητικά δεδομένα που υποστηρίζουν ότι είναι δυνατόν το computer να αυξήσει τη μάθηση της άλγεβρας κάτω από ορισμένες συνθήκες. Ο Noss (1986), πραγματοποίησε μιά τέτοια μελέτη με παιδιά ηλικίας 19 ετών και πάνω τα οποία προγουμένως είχαν μάθει Logo σε διάστημα 18 μηνών. Το πόρισμα στο οποίο κατέληξε ο Noss ήταν ότι "τα παιδιά μπορούν κάτω από κατάλληλες συνθήκες να κάνουν χρήση της άλγεβρας που αυτά χρησιμοποίησαν μέσα σ' ένα Logo περιβάλλον για να κατασκευάσουν αλγεβρικές σημασίες μέσα σε ένα μή- υπολογιστικό περιβάλλον." (σελ. 354).

Με άλλα λόγια εδώ βλέπουμε καθαρά μιά ενδυνάμωση της παραδοσιακής διδασκαλίας της άλγεβρας (της με "χαρτί και μολύβι" άλγεβρας) που προέρχεται από μεταφορά δεξιοτήτων και γνώσεων που αποκτήθηκαν στο πλαίσιο της πληροφορικής και συγκεκριμένα στο υπολογιστικό περιβάλλον της Logo.

5.8 Η ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΟ ΜΙΚΡΟΚΟΣΜΟ ΤΗΣ LOGO

Τα παιδιά μπορούν να μάθουν μαθηματικά με την απασχόλησή τους μέσα σε μιά λειτουργική μαθηματική δραστηριότητα. Η κατασκευή μαθησιακών περιβαλλόντων μέσα στα οποία η δύναμη των μαθηματικών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να λύσει προβλήματα, προσφέρει μιά ευκαιρία να εφαρμόσουμε μαθηματικές ιδέες και λειτουργίες σαν εργαλεία, σε καταστάσεις οι οποίες έχουν προσωπικό ενδιαφέρον για το μαθητή(Hoyles and Noss, 1987). Σε τέτοιες περιπτώσεις είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι ο μαθητής- χρήστης ίσως δεν έχει σαφή συνείδηση των μαθηματικών εννοιών και σχέσεων που εμπλέκονται στη δραστηριότητα. Το πρόβλημα επομένως είναι να αναχθούν αυτές οι ασαφείς μαθηματικές δομές του μαθητή- χρήστη στο "επίπεδο της συνειδητής επίγνωσης" (Thom, 1973).

Ο Vygotsky (1962), τονίζει ότι η πρακτική εμπειρία έχει δείξει ότι η απ' ευθείας μάθηση των εννοιών είναι αδύνατη και άγονη. Ενας δάσκαλος που επιχειρεί κάτι τέτοιο δέν επιτυγχάνει τίποτα παραπάνω πέρα από ένα άδειο βερμπαλισμό, μιά παπαγαλίστικη επανάληψη των λέξεων από το παιδί, που αποστηθίζει τη γνώση των αντίστοιχων εννοιών, αλλά που στην πραγματικότητα επικαλύπτει ένα κενό. Αν λάβουμε σοβαρά υπ' όψιν μας την παραπάνω διαπίστωση θα πρέπει να αναζητήσουμε ένα τρόπο ώστε οι μαθηματικές ιδέες να παρεμβάλλονται μέσα σε κάποιες διαδικασίες, όχι απαραίτητα μαθηματικές διαδικασίες, αλλά που να εγείρουν τον μαθηματικό στοχασμό. Με άλλα λόγια θα πρέπει να οικοδομήσουμε ένα, όχι απαραίτητα αμιγές, μαθηματικό περιβάλλον το οποίο όμως να προσφέρει στους μαθητές την ευκαιρία να διερευνήσουν μαθηματικές έννοιες, να διατυπώσουν υποθέσεις για τις ιδιότητές των και να δοκιμάσουν έπειτα αυτές τις μαθηματικές υποθέσεις στην πράξη.

Ο Douady (1985), υποστηρίζει ότι συχνά οι μαθηματικοί αντιμετωπίζουν στη δουλειά τους προβλήματα που κανένας δεν γνωρίζει πως να τα λύσει. (Την ίδια στιγμή οι μαθητές πιστεύουν ότι ο δάσκαλός τους μπορεί να λύσει τα προβλήματα που αυτοί αντιμετωπίζουν). Ετσι οι μαθηματικοί **οδηγούνται στο να δημιουργήσουν έννοιες με τη μορφή εργαλείων**. Αυτά τα εργαλεία για να μεταβιβαστούν στην επιστημονική κοινότητα βγαίνουν έξω από το πλαίσιό τους και παίρνουν τη μορφή ενός μαθηματικού αντικειμένου. Ο Douady, ορίζει ένα μαθηματικό αντικείμενο σαν εργαλείο (tool), όταν το ενδιαφέρον μας εστιάζεται στη χρήση αυτού του αντικειμένου για να λύσουμε προβληματικές καταστάσεις. Με τον όρο *αντικείμενο*, ο Douady εννοεί "το πολιτισμικό αντικείμενο το οποίο έχει μιά θέση στο σώμα της επιστημονικής γνώσης, σε μιά δεδομένη στιγμή και είναι κοινωνικά αναγνωρισμένο " (σελ. 35, όπ. παρ.) .

Ενα περιβάλλον κατάλληλο να βοηθήσει την ανάπτυξη τέτοιων εργαλείων σαν κι αυτών που μόλις περιγράφηκαν φαίνεται να είναι ο μικρόκοσμος της Logo[21]. Αν θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε μιά ποιό συγκεκριμένη γλώσσα θα λέγαμε ότι τα αντικείμενα αυτά δεν είναι άλλα από τις δομημένες procedures οι οποίες αποτελούν και την πεμπτουσία των Logo mathematics (Kieren, 1992). Οι procedures αυτές δεν είναι μόνο αντικείμενα (objects), αλλά και γεννήτορες αντικειμένων (βλ. σε προηγούμενα κεφάλαια τη λειτουργία της superprocedure). Αλλά ας δούμε τον τρόπο που δουλεύουν αυτά τα υπολογιστικά εργαλεία. Τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν αυτά τα εργαλεία εστιάζοντας κυρίως στην έξοδό τους. Οι έξοδοι αυτών των εργαλείων βοηθούν τα παιδιά να διερευνήσουν τα αποτελέσματα της αλλαγής των αρχικών τιμών και ακόμη να δοκιμάσουν τα όρια της εφαρμοσιμότητας των ίδιων των εργαλείων. Η Logo, επισημαίνουν οι Hoyles και Noss (1987a), εξ αιτίας του τρόπου σχεδιασμού της είναι λογικό να περιμένουμε να ερευνά απ' ευθείας την έννοια καθαυτή, να ανασκάπτει δηλ. την εννοιολογική στοίβα (stack) των ιδεών και των σχέσεων που την σχηματίζουν. Τα παιδιά μπορούν να διακρίνουν μέσα από την κατασκευή του προγράμματος τις επιδράσεις των διάφορων συστατικών μερών του και να ερευνήσουν τη σχέση που έχουν αυτά με το όλο πρόγραμμα. Ετσι, όπως ξανά έχουμε επισημάνει, το παιχνίδι μέσα στο μικρόκοσμο της Logo δίνει στα παιδιά την ευκαιρία να προσεγγίσουν

[21] Βέβαια, όπως ο Noss (1992), έχει τονίσει ακόμη δεν έχουμε προσφέρει στους μαθητές μιά γλώσσα προγραμματισμού που να τους καταστήσει ικανούς να μεταφέρουν τη δύναμη των μαθηματικών εννοιών στην κουλτούρα μας. Αντίθετα με την BASIC που είναι μιά γλώσσα που κοιτάζει στο παρελθόν (καμμία από τις τεχνικές και πνευματικές αναγκαιότητες που επέβαλλαν τη γέννησή της δεν ισχύει πλέον) και που δυστυχώς διδάσκεται ευρύτατα στα ελληνικά σχολεία, η Logo είναι ένα εργαλείο να λύσουμε προβλήματα και να εκφραστούμε και να επικοινωνήσουμε μαθηματικά.

χαρακτηριστικά του περιβάλλοντος τα οποία αντανακλούν τη δομή και τη σύνθεση κάποιων παρεμβαλλομένων μαθηματικών (Hoyles, 1991).
Τα υπολογιστικά περιβάλλοντα που ο Papert και άλλοι μας περιέγραψαν υπόσχονται να είναι συγκεκριμένα όπως άλλωστε φαίνεται κι από την παραπάνω περιγραφείσα λειτουργία τους. Μέσα σ' αυτά τα συγκεκριμένα περιβάλλοντα θα γίνει, όπως υποθέτουμε) η πραγμάτωση αφηρημένων μαθηματικών! Ακόμη δεν μας διαφεύγει ότι υπολογιστικό αντικείμενο σημαίνει software, δηλ. procedures, variables, functions, recursion, που είναι, εξ ορισμού, αφηρημένα σαφώς περισσότερο από τα αντικείμενα του πραγματικού κόσμου. Είμαστε λοιπόν μπροστά απο κάποιο αδιέξοδο; Οι Hoyles και Noss (1987a), πιστεύουν ότι ο προγραμματισμός μπορεί να προσφέρει αναπαραστάσεις εννοιών και διαδικασιών οι οποίες καθιστούν ικανό το μαθητή να βάλει σαφή διαχωριστικά όρια ανάμεσα στο συγκεκριμένο και το αφηρημένο. Ο Kieren (1978), υποστηρίζει ότι η πιό σημαντική ίσως συμβολή της πληροφορικής στα μαθηματικά είναι στο θέμα του συμβολισμού. Ο συμβολισμός όπως έδειξε ο Dienes (1964), αναδεικνύει τη δύναμη των μαθηματικών αφού αποτελεί σπουδαίο αναλυτικό εργαλείο, αλλά για πολλούς μαθητές αποδείκτηκε σοβαρό εμπόδιο στη μάθηση των μαθηματικών. Ο αυστηρός, αφηρημένος συμβολισμός ήταν το κυρίαρχο χαρακτηριστικό των μοντέρνων ή νέων, όπως ονομάστηκαν, μαθηματικών, αλλά και η αιτία της πλήρους αποτυχίας τους στη δεκαετία του '60. Σε ένα τέτοιο λοιπόν σημαντικό, αλλά και ακανθώδες ζήτημα για τα μαθηματικά έρχεται να προσφέρει εννοιολογική συνδρομή η πληροφορική. Ας προσέξουμε έναν αλγόριθμο που προωρίζεται για έναν υπολογιστή. Αναμφίβολα είναι μιά καλή γέφυρα για τα τυπικά μαθηματικά, αλλά αποτελεί ταυτόχρονα και ένα χρήσιμο μέσο συμβολικού ελέγχου. Να σημειώσουμε επ' ευκαιρία ότι ο συμβολισμός του αλγόριθμου που αναφέραμε είναι απο τη φύση του κατασκευαστικός. Γιατί ο κώδικας κάθε σπουδαστή είναι προσωπικός, εκφράζεται δηλ. με το δικό του, ατομικό στύλ. Πέρα απο αυτό, ο αλγόριθμος είναι ακριβής ή τουλάχιστο πρέπει να είναι, εάν θέλουμε να είναι εφαρμόσιμος στη μηχανή. Μπορούμε να τον δοκιμάσουμε με ένα πραγματικό, χειροπιαστό τρόπο για να διαπιστώσουμε εάν αυτός "δουλεύει". Τέλος μπορούμε να τον τροποποιήσουμε με την έννοια της εκσφαλμάτωσης, αλλά και με την έννοια της γενίκευσης, ώστε να καλύψει ένα πλήθος περιπτώσεων και φαινομένων. Το αφηρημένο λοιπόν εργαλείο της πληροφορικής που ονομάσαμε αλγοριθμικό κώδικα μετρέπεται σε συγκεκριμένο και μαθηματικά χρήσιμο όργανο, όταν εφαρμόζεται στο υπολογιστικό περιβάλλον μιας μηχανής, με διάφανα αποτελέσματα.
Στο βαθμό που η διερεύνηση της έννοιας της μεταβλητής και των σχέσεων μεταξύ μεταβλητών (βλ. τα δύο σχετικές παραγράφους) σημαίνει ανάπτυξη της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών μας ενδιαφέρει να δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα αυτού του είδους (Noss, 1986):

```
TO POLYSPI :LENGTH :ANGLE :DELTA
FD :LENGTH
RT :ANGLE
POLYSPI (:LENTH+:DELTA) :ANGLE :DELTA
END
```

Τέτοια προγράμματα σαν κι αυτό, έδειξε ο Lawler (1980), μπορούν να προσφέρουν ένα δυναμικό περιβάλλον στο οποίο, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να διερευνήσουν την αλληλεπίδραση ανάμεσα σε διάφορες μεταβλητές και από την άποψη της εξελικτικής ψυχολογίας αυτή η αλληλεπίδραση ίσως είναι εκπληκτική (Lunzer, 1973, Collis, 1974, Halford, 1978, Karplus et al., 1982).
Ωστόσο, το πρόβλημα της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών είναι ευρύτερο και βαθύτερο. Οι Hoyles και Noss (1992), επισημαίνουν ότι με προσεκτική επιστημολογική ανάλυση είναι δυνατό να σχεδιαστεί η τεχνική συνιστώσα ενός μικρόκοσμου, δηλ. το

σύνολο των εργαλείων λογισμικού τα οποία προσφέρουν στο παιδί ένα αναπαραστατικό σύστημα κάποιων μαθηματικών δομών και σχέσεων. Αλλά το θέμα είναι σε ποιό βαθμό τα παιδιά αντιλαμβάνονται αυτή την δομή και με ποιό τρόπο θα ήταν δυνατόν να βοηθηθούν ώστε να αποκτήσουν επίγνωση αυτής, όταν δεν μπορούν να αναγνωρίσουν τα μαθηματικά τα οποία αναμένεται να ανακαλύψουν; Αυτό ακριβώς αποτελεί και την ουσιαστική προβληματική του σχεδιασμού του μικρόκοσμου και το οποίο οι Hoyles kai Noss (1992), ονομάζουν το ***παιχνίδι του παράδοξου***. Οι ίδιοι θα ήθελαν να παίξουν τα παιδιά με μαθηματικές έννοιες πριν ακόμη φτάσουν στη τυπική διδασκαλία τους γιατί το παιχνίδι αυτό είναι ένας τρόπος να βιώσουν τη δύναμη των μαθηματικών ιδεών. Ακόμη λέγουν ότι καθώς τα παιδιά παίζουν μέσα στο μικρόκοσμο είναι απίθανο να παίζουν με τις ίδιες ιδέες που είχαν στο μυαλό τους. Το παιχνίδι προσπορίζει σημασίες στη δραστηριότητα, αλλά καθιστά ασαφή την ιδιαιτερότητα της *σκόπιμης* σημασίας. Είναι ανάγκη όμως να δούμε ένα παράδειγμα απο μιά παλιότερη δουλειά των ίδιων, Hoyles και Noss (1987a), στο οποίο φαίνεται καθαρά πως τα παιδιά αντιλαμβάνονται προοδευτικά και γενικεύουν τις παρεμβαλόμενες σχέσεις μέσα στο μικρόκοσμο. Στα παιδιά δόθηκε η ακόλουθη γραμμένη procedure:

```
TO SHAPE :SIDE1 :SIDE2
    FD :SIDE1 RT 40
    FD :SIDE2 RT 140
    FD :SIDE1 RT  40
    FD :SIDE2 RT 140
END
```

Τα παιδιά εκλήθησαν να χρησιμοποιήσουν και να εξερευνήσουν την SHAPE μέσα σε διάφορες εργασίες άλλοτε δομημένες και άλλοτε εξερευνητικές. Τα παιδιά πράγματι κατασκεύασαν με την procedure αυτή κεραμωτά (tiling) πρότυπα, αλλά απαραίτητα δεν διέκριναν κυρίαρχα χαρακτηριστικά της εσωτερικής της δομής, δηλ. αποκλίσεις και αναλλοιωσιμότητες στην έξοδο, που ήταν πάντοτε ένα παραλληλόγραμμο.

Ετσι, το πρόβλημα του πώς τα παιδιά αντιλαμβάνονται τη φύση των εργαλείων που αυτά χρησιμοποιούν, του πώς σκέπτονται γύρω απο τα μαθηματικά που παρεμβάλονται και σε ποιό βαθμό η δραστηριότητά τους φαίνεται από τα ίδια τα παιδιά να είναι μαθηματική, παραμένει ανοικτό. Η εξερεύνηση και διερεύνηση της φύσης των πρωταρχικών εννοιών που ενσωματώνουν τα εργαλεία του μικρόκοσμου δεν είναι υπόθεση απλής αλληλεπίδρασης των μαθητών με το software. Δεν περιμένουμε δηλ. η συνεχής αλληλεπίδραση του μαθητή μέσα σε ένα πλούσιο περιβάλλον λογισμικού και υπολογιστικών μηχανών να επιφέρει **από μόνη της** ευρεία αντίληψη και συνειδητοποίηση των μαθηματικών εννοιών και σχέσεων. Οπως έχουμε επισημάνει ξανά σε άλλο σημείο της εργασίας μας, είναι ανάγκη να υπάρξει απαραίτητα προσεκτική παιδαγωγική παρέμβαση για να προσεγγίσουν οι μαθητές την ουσία του μικρόκοσμου και μέσα απο αυτήν την εννοιολογική δύναμη των μαθηματικών δομών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

6.1 Η επιλογή του οργάνου μέτρησης στην εμπειρική έρευνα.

Για την υλοποίηση των στόχων της εμπειρικής έρευνας επιλέξαμε σαν εργαλείο έρευνας το ερωτηματολόγιο. Η επιλογή δεν είναι τυχαία. Οι μαθητές, υποστηρίζει η Kerslake (1986, σελ. 2), άλλα διδάσκονται και άλλα κάνουν όταν τους δοθεί ένα πρόβλημα. Δεν χρησιμοποιούν διδαγμένους αλγόριθμους, αλλά εφαρμόζουν δικές τους τεχνικές, όταν αντιμετωπίζουν προβληματικές καταστάσεις. Ετσι, με δεδομένη στο ερευνητικό επίπεδο την μεγάλη διαφορετικότητα των αντιλήψεων των μαθητών στο πρόβλημα των κλασμάτων (Steffe, Battista & Clements, 1991), θα πρέπει να αναζητήσουμε ένα μέσο να εξεταστούν οι θέσεις και οι απόψεις ενός αρκετά μεγάλου εύρους περιπτώσεων. Ενα τέτοιο μέσο αναμφίβολα είναι το ερωτηματολόγιο.

6.2 Ο καθορισμός του δείγματος.

Η εμπειρική έρευνα απευθύνεται κύρια στον πληθυσμό των μαθητών της Ε' δημοτικού στην ευρύτερη περιοχή του πόλης του Ρεθύμνου, ο οποίος αριθμεί (σύμφωνα με επίσημα στοιχεία της Διευθύνσεως Δημοτικής Εκπαιδεύσεως) 476 παιδιά.

Ενας άλλος πληθυσμός στον οποίο απευθύνεται η έρευνα είναι εκείνος των μαθητών της Στ' δημοτικού ο οποίος είναι επίσης άλλα 450 άτομα. Συνολικός λοιπόν πληθυσμός για την έρευνά μας 926 άτομα. Η ευρύτερη περιοχή του Ρεθύμνου έχει τυπικά 17 δημοτικά σχολεία. Επειδή αρκετά από αυτά δεν έχουν μαθητές ή οι μαθητές τους στεγάζονται μαζί με τους μαθητές άλλων σχολείων στην πραγματικότητα έχουμε 12 Δημοτικά σχολεία. 'Αλλα σχολεία βρίσκονται εντός της πόλεως του Ρεθύμνου και άλλα εκτός αυτής. Με βάση λοιπόν το κριτήριο της γεωγραφικής περιοχής επιλέχθηκαν με το σύστημα των τυχαίων αριθμών 2 σχολεία εκτός της πόλεως και 3 σχολεία εντός της πόλεως του Ρεθύμνου.

Σε αυτά τα πέντε σχολεία επιδώσαμε το ερωτηματολόγιο σε 11 ολόκληρα τμήματα μαθητών της Ε' τάξης, και σε 5 ολόκληρα τμήματα μαθητών από την Στ' τάξη. Τα 16 λοιπόν τμήματα συγκρότησαν το δείγμα της έρευνας. Το δείγμα αυτό αριθμεί 381 παιδιά συνολικά (270 από την Ε' τάξη και 111 από την Στ' τάξη).

Στο βαθμό που η αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος εξαρτάται από το μέγεθός του, το δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό. Διότι όπως φαίνεται από σχετικό πίνακα της σελ. 62 του βιβλίου του Παπαναστασίου (1990), η πιθανότητα σφάλματος στην περίπτωσή μας, δηλ. για το δείγμα της Ε' και ΣΤ' δημοτικού είναι μικρότερη απο 2%.

6.3 Η πιλοτική φάση.

Στο στάδιο αυτό δόθηκε σε περίπου 25 μαθητές ένα ερωτηματολόγιο-πιλότος για να διαπιστωθεί αν και κατά πόσο θα έπρεπε να γίνουν προσαρμογές που θα βελτιώσουν τόσο τη μορφή όσο και το περιεχόμενο του τελικού ερωτηματολογίου. Πράγματι μπορούμε να παρατηρήσουμε τα παρακάτω:

1) Το επίπεδο του ερωτηματολογίου-πιλότος ήταν γενικά υψηλότερο από εκείνο των μαθητών. Για παράδειγμα η ερώτηση (9) χρειάστηκε να τροποποιηθεί 3 φορές προκειμένου να καταστεί πλήρως κατανοητή και προσπελάσιμη από τους μαθητές.

2) Οι ερωτήσεις που πάρθηκαν από διεθνείς έρευνες, παρουσίασαν εμφανή την ανάγκη, όπως έδειξε η διεξαγωγή της πιλοτικής φάσης, να τροποποιηθούν. Για παράδειγμα τα σχέδια στην ερώτηση (6) ήσαν όλα περικλειόμενα από ορθογώνια παραλληλόγραμμα και η εκφώνηση έκανε λόγο για κάρτες (cards). Αλλά γι'αυτές τις παρατηρήσεις θα αναφερθούμε με περισσότερες λεπτομέρειες στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

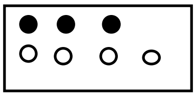
6.4 Χαρακτηριστικά και πηγές του ερωτηματολογίου.

Στο σχεδιασμό του τελικού ερωτηματολογίου δεν καταβλήθηκε προσπάθεια να τεθούν οι ερωτήσεις σε σειρά αύξουσας δυσκολίας, γιατί το ερωτηματολόγιο της συγκεκριμένης έρευνας δεν έχει σκοπό να συμβάλλει στη μάθηση των μαθητών, αλλά να διαπιστώσει το επίπεδο της ήδη κατακτημένης μάθησής τους.
Από την πλευρά της διεθνούς σχολικής πραγματικότητας κρίθηκε σκόπιμο να συμπεριληφθούν στο ερωτηματολόγιο οι ερωτήσεις 1, 5,6,9, όχι μόνο γιατί υπηρετούν τους ίδιους στόχους (θα αναφερθώ ξεχωριστά στην καθεμία παρακάτω), αλλά γιατί κυρίως αποτελούν προηγούμενη γνώση στο αντικείμενο και επομένως δεν στερούνται εγκυρότητας. Επιπλέον δύσκολα θα μπορούσε να στηριχτεί η άποψη ότι αυτές οι ερωτήσεις είναι πέρα και έξω από το πνεύμα των ελληνικών σχολικών μαθηματικών από την άποψη ότι δεν ξεφεύγουν από τους σκοπούς και τους στόχους του επίσημου αναλυτικού προγράμματος. Αντίθετα, τεκμηριώνεται η άποψη ότι οι ερωτήσεις αυτές ανάγονται σε σαφώς διατυπωμένα ζητούμενα που αναγράφονται στο βιβλίο του δασκάλου και στο σχολικό εγχειρίδιο. Αλλά ας δούμε μερικά σημεία:
1) Κατανόηση της έννοιας της κλασματικής μονάδας και του κλασματικού αριθμού μέσα από τους διάφορους τρόπους συγκρότησής τους (σιωπηρή αναφορά σε τρία μοντέλα):
1α) Μέρος Ολου, σελ. 83, Βιβλίο Δασκάλου, ΟΕΔΒ, 1992-1993
1β) Πηλίκο Διαίρεσης, σελ. 85, ίδιου βιβλίου και άσκηση 4 σελ. 51, Μαθηματικά Ε' Δημοτικού, ΟΕΔΒ, 1993-1994, Α' τχ.
1γ) Σημείο στην γραμμή αριθμών (βαθμολογημένος χάρακας, σελ. 53, του ίδιου βιβλίου, καθώς επίσης και πρόβλημα 7 της σελίδας 54.
2) Κατανόηση των ισοδύναμων κλασμάτων ως διαφορετικών εκφράσεων της ίδιας ποσότητας, σελ. 106, του Βιβλίου του Δασκάλου ο.π., και σελ. 5-8, Β'τχ., 1993-1994 του Βιβλίου του Μαθητή.
Σε ό,τι αφορά την ελληνική σχολική πραγματικότητα η ερώτηση (10) είναι πανομοιότυπη με το πρόβλημα (2) της σελ. 33 του διδακτικού εγχειριδίου, Μαθηματικά Ε' δημοτικού Β'τχ., ΟΕΔΒ, 1993-1994.
Η ερώτηση (11) του ερωτηματολογίου είναι επίσης στο ίδιο περίπου πνεύμα με την άσκηση (5) της σελ. 12, τχ. Β' του ίδιου διδακτικού εγχειριδίου.
Τέλος, η ερώτηση (2) του ερωτηματολογίου είναι σαφώς του ίδιου γνωστικού και εννοιολογικού περιεχομένου με το πρόβλημα (2) της σελ. 50 και με την άσκηση (4) της σελ. 47, Α'τχ. του παραπάνω διδακτικού εγχειριδίου. Υπάρχουν όμως και σημεία στο ερωτηματολόγιο που η διεθνής και η ελληνική σχολική εμπειρία ταυτίζονται. Είναι η ερώτηση (4) του ερωτηματολογίου. Οσον αφορά τη διεθνή διάσταση η ερώτηση (4) έχει την προέλευσή της στην έρευνα που έγινε από την ερευνητική ομάδα των Johnson, Brown, Hart, Booth, Sharma, Burns και Kerslake στη διάρκεια των ετών 1980-1983 στην Αγγλία (Bristol Polytechnic, SESM project, Chelsea College, University of London. Οσον αφορά δε την ελληνική της διάσταση η ερώτηση (4) είναι ακριβώς στο ίδιο πνεύμα με το πρόβλημα (2) της σελ. 49 τχ. Α', του παραπάνω διδακτικού εγχειριδίου του μαθητή και είναι επίσης αυτούσια με το πρόβλημα (5) της σελίδας 90, Μαθηματικά Ε' Δημοτικού, ΟΕΔΒ, 1992-1993.
Την ίδια διεθνή προέλευση με την ερώτηση (4) του ερωτηματολογίου έχουν και οι ερωτήσεις (1), (6) και (9).
Τέλος η ερώτηση (5) του ερωτηματολογίου έχει την προέλευσή της στην έρευνα των Behr, Lesh, Post που έγινε το σχολικό έτος 1980-1981, στα πλαίσια του RATIONAL NUMBER project στις Ηνωμένες Πολιτείες (Evanston, Minneapolis, Dekalb, Pittsburg).

6.5 Η τροποποιήσεις της πιλοτικής φάσης.

Η ερώτηση (2) του ερωτηματολογίου ήταν διατυπωμένη ως εξής:
"Τι κλάσμα του τριγώνου έχει μαυριστεί; Βάλε σε κύκλο τη σωστή απάντηση".

Τα αποτελέσματα της παραπάνω διατύπωσης ήταν:
1 στους 25, δηλαδή ποσοστό 4% έδωσε τη (δ) απάντηση.
Η ερώτηση (5) του ερωτηματολογίου ήταν διατυπωμένη ως εξής:
"Τι μήκος έχει το φίδι; Βάλε σε κύκλο τη σωστή απάντηση".
Αυτή ακριβώς ήταν η διατύπωση στην αντίστοιχη ερώτηση της αγγλικής έρευνας που προαναφέραμε. Τα περισσότερα από τα ερωτηθέντα παιδιά στην πιλοτική φάση εκφράστηκαν με αρνητικά επιφωνήματα στη θέα της ερώτησης.
Η ερώτηση (6) του ερωτηματολογίου ήταν διατυπωμένη ως εξής:
"Ποια από αυτές τις κάρτες θα βοηθούσε κάποιον να καταλάβει τι είναι το κλάσμα 3/4;"
Η ίδια διατύπωση υπήρχε και στην αντίστοιχη ερώτηση της αγγλικής έρευνας. Το κάθε ένα από τα 8 σχέδια όμως που τη συνόδευαν ήταν περικλειόμενο από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έτσι ώστε να δικαιολογείται ο χαρακτηρισμός "κάρτα". Επίσης το σχέδιο (στ) της ίδιας ερώτησης είχε τελείως άλλη μορφή: περιελάμβανε 7 μικρές μπάλες διατεταγμένες παράλληλα σε δυο σειρές. Η πρώτη σειρά περιελάμβανε 3μαύρες μπάλες και η δεύτερη 4 άσπρες. Οπως στο παρακάτω σχήμα:



Η πιλοτική φάση έδειξε καθαρά ότι τόσο το ορθογώνιο περίγραμμα όσο και η μορφή του σχεδίου (στ) ήσαν πηγές σύγχισης για τους μαθητές. Για το ορθογώνιο περίγραμμα ο λόγος φαίνεται να είναι ότι, οι μαθητές μας δεν έχουν συνηθίσει να δουλεύουν με trips, αυτοκόλλητα και κάρτες όταν κάνουν μαθηματικά. Αντίθετα στις μαθηματικές αίθουσες της Ευρώπης και της Αμερικής τα "κατασκευαστικά" μαθηματικά και ως προς την ουσία και ως προς τον τύπο είναι αποτέλεσμα της φιλοσοφίας που διέπει το αναλυτικό πρόγραμμα. Για παράδειγμα ολόκληρο το Α.Π. των μαθηματικών της Γαλλίας βασίζεται σε μία τέτοια φιλοσοφία (κονστρακτιβισμός).
Η ερώτηση (9) του ερωτηματολογίου είχε την εξής διατύπωση αρχικά:

==

"Μπορείς να βρεις κάποια κλάσματα που είναι ίδια σ'αυτή τη συλλογή;"

$$\frac{3}{4} \qquad \frac{12}{16}$$

$$\frac{2}{9} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{2}{6}$$

$$\frac{3}{9} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{5}{10}$$

==

Ετσι ακριβώς ήταν διατυπωμένη και στην προαναφερθείσα αγγλική έρευνα. Τα αποτελέσματα της πιλοτικής φάσης έδειξαν ότι οι πτυχές του προβλήματος δεν ήταν δυνατόν να συλληφθούν από τους μαθητές. Κανένας από τους 25 ερωτηθέντες μαθητές δε διέκρινε τις 5 κλάσεις ισοδυναμίας της συλλογής.
Η ερώτηση επαναδιατυπώθηκε με όρους που αναφέρονται στο διδακτικό εγχειρίδιο (σελ. 7, Β'τχ. Μαθηματικά Ε' δημοτικού, 1993-1994) ως εξής:

"Τα κλάσματα που είναι μέσα στο κουτί, αν τα προσέξεις σχηματίζουν 5 σειρές -έτσι ονομάζει τις ***κλάσεις ισοδυναμίας*** το διδακτικό εγχειρίδιο- ισοδύναμων κλασμάτων. Ποιες είναι αυτές;"

Τα παιδιά απορούσαν και πάλι τι εννοεί η ερώτηση και συγκεκριμένα δεν είχαν καταλάβει, όπως δήλωσαν, τον όρο "σειρά".

Να σημειωθεί ότι σε κάθε επαναδιατύπωση χρειάστηκε να ρωτηθούν νέα πρόσωπα που σημαίνει μετακίνηση της έρευνας σε άλλη σχολική τάξη ή σε άλλο σχολείο.

Τέλος, στο ερωτηματολόγιο-πιλότος υπήρχε και μια ερώτηση που απαλείφθηκε από την τελική μορφή του ερωτηματολογίου αλλά την αναφέρουμε χάριν της πληρότητας της έρευνας:

"Ποιο είναι το λάθος του μαθητή που έγραψε:

2=10/5=(6+4/1+4)=6/1=6

Μήπως δεν υπάρχει λάθος;"

Η ερώτηση διαπιστώθηκε ότι ήταν έξω από τα όρια του προβληματισμού των μαθητών της Ε' αλλά και της Στ' δημοτικού.

6.6 Χρόνος και τρόπος επίδοσης του ερωτηματολογίου.

Το ερωτηματολόγιο στην ουσία είναι προϊόν συγχώνευσης δύο ερωτηματολογίων όπως άλλωστε υπαγορεύτηκε από τη διάταξη της διδακτέας ύλης στα δύο τεύχη των μαθηματικών (Α' και Β' μέρος). Το Α' μέρος δόθηκε στους μαθητές 3 εβδομάδες μετά τη διδασκαλία (κεφάλαιο Β, Πρώτο μέρος, Μαθηματικά Ε' δημοτικού, ΟΕΔΒ, 1993-1994). Το κεφάλαιο αναφέρεται σε εννοιολογικά κυρίως ζητήματα των κλασμάτων. Η ίδια πολιτική ακολουθήθηκε και για το Β' μέρος του ερωτηματολογίου. Το αντίστοιχο κεφάλαιο του Δεύτερου μέρους πραγματεύται ζητήματα ισοδυναμίας κλασμάτων, σύγκρισης, διάταξης, αλγορίθμων για τις τέσσερες βασικές πράξεις και επίλυσης προβλημάτων (Κεφ. Στ', Δεύτερο μέρος, Μαθηματικά Ε'δημοτικού, ΟΕΔΒ, 1993-1994).

Ο χρόνος παρέλευσης των τριών εβδομάδων από το τέλος της διδασκαλίας έως την επίδοση του ερωτηματολογίου δεν προσδιορίζεται από τα διεθνή Standards αλλά αποτελεί πεποίθηση του γράφοντα. Η θέση που υποστηρίζεται από πολλούς ερευνητές για παρέλευση 3 μηνών από τη διδασκαλία είναι ανεδαφική για την παρούσα έρευνα. Η στέρεη εναπομένουσα γνώση η οποία αναζητείται είναι απροσπέλαστη στην περίπτωση των κλασμάτων κάτω από μια τέτοια προϋπόθεση. Αντί να αναζητήσουμε οιουσδήποτε άλλους λόγους, ας σταθμούμε στο εξής ανυπέρβλητο εμπόδιο:

Το κεφάλαιο Στ' των κλασμάτων που αποτελεί και τον κύριο όγκο της διδακτέας ύλης των κλασμάτων στην Ε'δημοτικού εξαντλείται διδακτικά το μήνα Μάιο ή στην καλύτερη περίπτωση το μήνα Απρίλιο. Και στη μια και στην άλλη περίπτωση το τέλος της χρονικής περιόδου των 3 μηνών που ξεκινά κατόπιν εμπίπτει στο μακρύ ζεστό καλοκαίρι ... των διακοπών.

Ο τρόπος επίδοσης του ερωτηματολογίου έγινε βάσει πρωτόκολλου το οποίο περιελάμβανε τα παρακάτω:

i) Το ερωτηματολόγιο επιδόθηκε ταυτόχρονα σε όλους τους μαθητές της τάξης την ώρα του μαθήματος των μαθηματικών.

ii) Τόσο για το πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου όσο και για το δεύτερο, ο χρόνος που διατέθηκε ήταν μια διδακτική ώρα (45 λεπτά) στην οποία προστίθετο και το διάλλειμα (10 λεπτά) όπου ήταν αναγκαίο.

iii) Αυτή η διδακτική ώρα ήταν υποχρεωτικά μια από τις 3 πρώτες του ημερήσιου-ωρολόγιου προγράμματος ώστε οι μαθητές να μην έχουν κουραστεί από το φόρτο προηγούμενων μαθημάτων.

iv) Ολόκληρο το ερωτηματολόγιο διαβάστηκε μέσα στην τάξη από τον υπογράφοντα και σε κάθε ερώτηση δόθηκαν διευκρινίσεις και κατά περίπτωση υποδείξεις. Συγκεκριμένα:

Στην πρώτη ερώτηση παρακινήθηκαν οι μαθητές να δώσουν ένα παράδειγμα και ίσως και ένα σχέδιο (αν το επιθυμούσαν) προκειμένου να εξηγήσουν για παράδειγμα στη γιαγιά τους, που δεν ξέρει ίσως, τι είναι ένα κλάσμα.
Στη δεύτερη ερώτηση εξηγήθηκε απλώς η λέξη "μαυριστεί".
Στην τρίτη ερώτηση δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση και κλήθηκαν οι μαθητές να την διαβάσουν και μόνοι τους άλλες 2 φορές πριν απαντήσουν.
Στην τέταρτη ερώτηση επισημάνθηκε ότι τα μπουκάλια είναι απολύτως όμοιες μεταξύ τους και το ίδιο ισχύει και για τις φλυτζάνες. Ακόμη αναφέρθηκε ότι τα μπουκάλια στην αρχή ήσαν γεμάτα και όταν τα αδειάσαμε γέμισαν ακριβώς 3 φλυτζάνες.
Στην πέμπτη ερώτηση επισημάνθηκε ότι το μυστικό της λύσης βρίσκεται στο πόσα κομάτια κάνουμε την ακέραια μονάδα.
Στην έκτη ερώτηση επισημάνθηκε ότι και τα 8 σχέδια είναι σωστά και ότι αυτό που ζητείται είναι να αποφασίσουν ποιο σχέδιο εξηγεί καλύτερα σε κάποιον που δεν ξέρει τι είναι το κλάσμα 3/4.
Στην έβδομη ερώτηση διευκρινίστηκε ότι στην πρώτη γραμμή (α) μετά την άνω και κάτω τελεία, αναζητείται ένα κλάσμα που να είναι πιο μεγάλο από τη γνωστή ακέραια μονάδα. Και στη δεύτερη (β) ότι αναζητείται ένα κλάσμα που να είναι πιο μικρό από την ακέραια μονάδα.
Στην όγδοη ερώτηση διευκρινίστηκε ότι το οικόπεδο αγοράστηκε από τη Μαρία, το Γιάννη και τον Κώστα και ανάλογα με τα λεφτά που είχε ο καθένας, πήρε και ανάλογο κομμάτι. Η Μαρία πήρε ένα κομάτι, ο Γιάννης ένα άλλο κομμάτι και ό,τι απόμεινε το πήρε ο Κώστας. Στο σημείο αυτό, σε αρκετές τάξεις, διατυπώθηκε από τους μαθητές, αμέσως μετά την εκφώνηση, το ερώτημα:
"Μα πόσο είναι το οικόπεδο;"
Αυτό δείχνει μια σαφή τάση πολλών μαθητών να εγκαταλείψουν το συμβολικό αφηρημένο επίπεδο των κλασμάτων και να επιστρέψουν στο επίπεδο των συγκεκριμένων "χειροπιαστών" ποσοτήτων και εκφράσεων των συμμιγών αριθμών.
Στην ένατη ερώτηση επισημάνθηκε ότι πρέπει να κάνουν δέκα συγκρίσεις για να απαντήσουν στην κάθε υποερώτηση. Ετσι ώστε να μην τους ξεφύγει κανένα κλάσμα. Στις περισσότερες αίθουσες, διαρκούσης της εξέτασης, διατυπώθηκε από τους μαθητές η ερώτηση: "μα αν ένα κλάσμα δεν μπαίνει σε καμιά από τις απαντήσεις, τι να το κάνουμε;"
Προτάθηκε στους μαθητές να δημιουργήσουν μια πέμπτη δική τους απάντηση και να το εντάξουν σ'αυτήν.
Στη δέκατη ερώτηση οι διευκρινίσεις που δόθηκαν, σχεδόν άγγιξαν τη λύση του προβλήματος αλλά όχι και τη σκέψη των μαθητών. Συγκεκριμένα ειπώθηκε στους μαθητές ότι ένα μέρος των χρημάτων του κουμπαρά ξοδεύτηκε για διάφορους σκοπούς. Αυτό ήταν τα 3/7 των χρημάτων του κουμπαρά. Αυτών των 3/7 ένα μέρος, τα 2/3, ξοδεύτηκαν συγκεκριμένα για βιβλία. Δηλαδή το πρόβλημα στην ουσία μας ρωτά ποια είναι τα 2/3 του 3/7.
Στην ενδέκατη ερώτηση εκτός από τη ρητά διατυπωμένη υπόδειξη ειπώθηκε στους μαθητές ότι το σύμβολο του μικρότερου δεν είναι υποχρεωτικό ανάμεσα στα διατεταγμένα κλάσματα.
Στη δωδέκατη και τελευταία ερώτηση επισημάνθηκε ότι οι τέσσερις γνωστές τους πράξεις από τους ακεραίους δεν εφαρμόζονται με τον ίδιο τρόπο και στα κλάσματα.
Τελειώνοντας, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι στην ερώτηση 10 διατυπώθηκε εντονώτερα από την πλευρά των μαθητών το ίδιο ερώτημα που τέθηκε κατά την ανάγνωση της ερώτησης (8):
"Πόσα χρήματα αρχικά είχε ο κουμπαράς;"

6.7 Πως βαθμολογήθηκαν οι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου.

Για τον υπολογισμό του γενικού βαθμού των μαθητών στα κλάσματα οι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου της έρευνας ομαδοποιήθηκαν με βάση τη δυσκολία τους σε 3 ομάδες. Η κλίμακα βαθμολογίας που χρησιμοποιήθηκε ήταν όμοια με εκείνη που εφαρμόζεται στην Ε' και ΣΤ' τάξη του Δημοτικού σχολείου δηλ. 0-10.

Την πρώτη ομάδα αποτέλεσαν οι σχετικά πιο δύσκολες ερωτήσεις δηλ. οι ερωτήσεις με εννοιολογικό κυρίως, αλλά και διαδικαστικό χαρακτήρα. Είναι οι ερωτήσεις 3, 8, 10 και 11. Αυτές βαθμολογήθηκαν με συντελεστή 1.

Την δεύτερη ομάδα αποτέλεσαν οι μικρότερης δυσκολίας ερωτήσεις 1, 4, 5 και 9. Αυτές βαθμολογήθηκαν με συντελεστή 0.9.

Την τρίτη ομάδα αποτέλεσαν οι ερωτήσεις ελάχιστης δυσκολίας 2, 7 και 12. Αυτές βαθμολογήθηκαν με συντελεστή 0.7.

6.8 Η επιλογή του μέσου για την ανάπτυξη του λογισμικού.

Σ' αυτή την παράγραφο αναπτύσσουμε τους λόγους για τους οποίους η Logo είναι η κατάλληλη επιλογή για την ανάπτυξη λογισμικού για την ιδιαίτερη περιοχή των μαθηματικών που αφορά τους κλασματικούς αριθμούς. Η έκδοση της Logo που χρησιμοποιείται σ' αυτή την εργασία είναι η Object Logo 2.61, μιά σύγχρονη γλώσσα με φιλοσοφία αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού[22].

1) Οι διάφορες "ερμηνείες" ή "υποκατασκευές" του ρητού αριθμού οι οποίες και αποτελούν τον πυρήνα της εννοιολογικής κατανόησης (βαθιά δομή) των κλασμάτων βρίσκουν πρόσφορο έδαφος για να αναπτυχθούν μέσα στο περιβάλλον της Logo. Για παράδειγμα οι ιδέες του λόγου (ratio) και των αναλογιών αναδύονται σχεδόν αναπόπευκτα (Hoyles, Noss and Sutherland, 1989, σελ. 5), όταν κάποιος εργάζεται στο υποσύνολο της Logo που ονομάζεται γραφικά χελώνας (turtle graphics). Οι ίδιοι παρατηρούν ότι οι μαθητές συχνά αναπτύσσουν θεωρήματα δράσης (theorems in action, κατα την έκφραση του Vergnaud, 1983), για να καταφέρουν να κτίσουν γενικευμένες procedures (βλ. άφθονα παραδείγματα στις εργασίες των Hoyles and Sutherland 1989, Sutherland, 1989). Οι procedures αυτές εάν έχουν σα στόχο τη μεγέθυνση (enlarging) ή την σμίκρυνση (shrinking) σχημάτων που οδηγούν εντελώς φυσικά στην ανάπτυξη μιας αναλογικής λογικής, επειδή από τη φύση τους τα σχήματα αυτά είναι σε αναλογία.

2) Αναμφίβολα ενισχύεται ο πολλαπλασιαστικός τρόπος σκέψης, ο οποίος, όπως είδαμε σε άλλα κεφάλαια αυτής της εργασίας, αποτελεί σημαντικό ζητούμενο για την εννοιολογική κατανόηση των κλάσμάτων. Ας μήν ξεχνάμε ότι η σχέση αριθμητή και παρονομαστή σε ένα κλάσμα είναι πολλαπλασιαστική και ότι η Hart (1984), ήθελε να ξεριζώσει την προσθετική στρατηγική από τη σκέψη των μαθητών και να ενισχύσει την πολλαπλαστική για να πετύχει αύξηση της κατανόησης των κλασματικών εννοιών. Αναφορικά με τη σχέση αναλογικής λογικής (proportional reasoning) που αναφέραμε παραπάνω και πολλαπλασιαστικής σχέσης υπάρχει υψηλή συνάφεια και μάλιστα ο Noelting (1980a kai 1980b), έδειξε ότι η απόδοση των μαθητών πάνω σε εργασίες αναλογικής λογικής φαίνεται να ήταν ένας δείκτης για το πόσο καλά κατέχουν την πολλαπλασιαστική σχέση. Τέλος να αναφέρουμε ότι ο πολλαπλασιασμός, η διαίρεση, οι λόγοι, τα κλάσματα και οι αναλογίες κατατάσσονται στο ίδιο τύπο αναλογικών δομών (Vergnaud, 1983).

---

22 Αξίζει να σημειωθεί ότι η τεκμηρίωση (documentation) του προγράμματος Object Logo, της εταιρείας Paradigm Software βασίστηκε στην ερευνητική δουλειά όχι μόνο τεχνικών της επιστήμης των υπολογιστών όπως για παράδειγμα ο Steve Hain, αλλά και επιστημόνων της μαθηματικής παιδείας, όπως ο Brian Harvey.

3) Το γραφικό περιβάλλον της Logo έχει επίσης τη δυνατότητα να προσφέρει ταυτόχρονα τριπλή αναπαράσταση:
α) οπτική (visual) αναπαράσταση στην οθόνη.
β) αριθμητική αναπαράσταση
γ)συμβολική αναπαράσταση με τη μορφή του κώδικα του Logo προγράμματος.
Ετσι η δυναμική αλληλεπίδραση μαθητή- λογισμικού είναι γεγονός που βοηθάει το μαθητή να έχει μιά πλήρη εικόνα του προβλήματος που προσπαθεί να λύσει.
4) Οι πρωταρχικές εντολές της Object Logo που ονομάζονται primitives επιφυλάσσει στα κλάσματα προνομιακή μεταχείρηση. Μερικά παραδείγματα:
a) Κάνει αναγνώριση δοθέντος αριθμού για το αν είναι ή όχι ρητός με την εντολή:
? Show RatioP |2+3i|
FALSE
? Show RatioP 1/3
TRUE
b) Κάνει αναγνώριση του αριθμητή και του παρονομαστή δοθέντος κλάσματος. Το αποτέλεσμα της εκτέλεσης της εντολής
? Print numerator 2/3
είναι το 2, ενώ της εντολής
? Print denominator 2/3
είναι το 3.
c) Υπολογίζει άμεσα το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο Ε.Κ.Π και το μέγιστο κοινό διαιρέτη Μ.Κ.Δ δύο αριθμών με τις εντολές:
? Print (LCM 60 100 45)
900
? Print (GCD 100 60 95)
5
d) Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης δύο κλασμάτων η object Logo το δίνει στην έξοδο πάλι σαν κλάσμα.
? Print 2/3+1/5
13/15.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΜΠΕΙΡΙΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Τα αποτελέσματα της εμπειρικής έρευνας ομαδοποιούνται ως εξής:

7.1 Γενική απόδοση των μαθητών στα κλάσματα.

7.2 Διαφοροποιήσεις της γενικής απόδοσης ανάλογα με το φύλο, την ηλικία, το σχολείο φοίτησης και το συγκεκριμένο τμήμα .

7.3 Μοντέλα κλασμάτων που διαθέτουν οι μαθητές.

7.4 Στάσεις των μαθητών απέναντι στα συνεχή και διακριτά μέσα.

7.5 Ερμηνείες του ρητού αριθμού 2/3 που φαίνεται να γνωρίζουν οι μαθητές.

7.6 Οι προτιμήσεις των γραφικών αναπαραστάσεων του κλασματικού αριθμού 3/4 από τους μαθητές.

7.7 Η αντίθεση εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης.

7.8 Η αντίθεση προβλήματος (word problem) και άσκησης (exercise).

7.9 Η ανάδυση συστηματικών λαθών (error pattern)και προτύπων στη σκέψη των μαθητών.

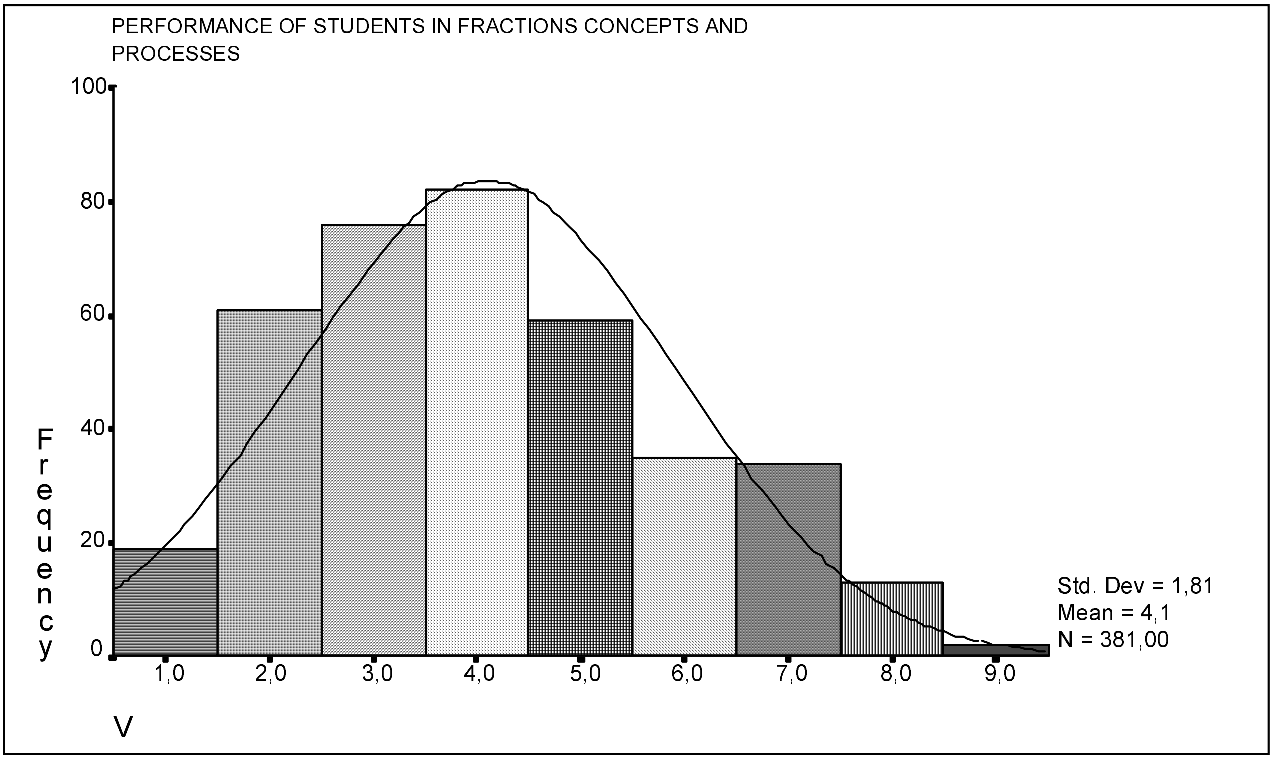
7.10 Η στάση των μαθητών απέναντι στο κλασματικό μοντέλο του τελεστή (operator).

7.11 Το παλινδρομικό μοντέλο (regression model).

7.12 Η επάρκεια του παλινδρομικού μοντέλου

7.1 Η ΓΕΝΙΚΗ ΑΠΟΔΟΣΗ

ΓΡΑΦΗΜΑ 1.



ΠΙΝΑΚΑΣ 1

V

Value Label	Value	Frequency	Percent	Valid Percent	Cum_ Perc
	1.00	19	5.0	5.0	5.0
	2.00	61	16.0	16.0	21.0
	3.00	76	19.9	19.9	40.9
	4.00	82	21.5	21.5	62.5
	5.00	59	15.5	15.5	78.0
	6.00	35	9.2	9.2	87.1
	7.00	34	8.9	8.9	96.1
	8.00	13	3.4	3.4	99.5
	9.00	2	.5	.5	100.0
	Total	381	100.0	100.0	

Mean	4.100	Std err	.093	Median	4.000
Mode	4.000	Std dev	1.814	Variance	3.290
Kurtosis	-.526	S E Kurt	.249	Skewness	.393
S E Skew	.125	Range	8.000	Minimum	1.000
Maximum	9.000	Sum	1562.000		

Valid cases 381 Missing cases 0

Αν συμβολίσουμε με V το γενικό βαθμό όλου του τέστ στα κλάσματα, η γενική εικόνα της βαθμολογίας των μαθητών με κλίμακα από το μηδέν μέχρι το δέκα αποδίδεται από το ΓΡΑΦΗΜΑ1. Πρόκειται για μιά κατά προσεγγιση κανονική κατανομή, με μέσο όρο 4,2 και τυπική απόκλιση 1,81 ενός δείγματος 381 μαθητών. Στον κατακόρυφο άξονα απεικονίζεται η απόλυτη συχνότητα του αριθμού των μαθητών. Για παράδειγμα 82 μαθητές δηλ. το 21.5 % του συνολικού δείγματος έχουν γενικό βαθμό 4, ενώ μόνο το 2 μαθητές δηλ. 0.5 % του δείγματος έχουν γενικό γενικό βαθμό 9.Τα πλήρη στατιστικά στοιχεία της κατανομής φαίνονται στον ΠΙΝΑΚΑ 1.

Είναι φανερό ότι η χαμηλή απόδοση των μαθητών στα κλάσματα, που επισημάθηκε σε αρκετά σημεία αυτής της εργασίας για τη διεθνή πραγματικότητα, Ευρωπαϊκή (Kerslake,1986, Hart, 1984) και Αμερικάνικη (Carpenter et al., 1980, Brown et al., 1988a kai 1988b), είναι ένα γεγονός που επιβεβαιώνεται και στην περίπτωσή μας (ευρύτερη περιοχή της πόλης του Ρεθύμνου με ικανό δείγμα μαθητών Ε' και ΣΤ' Δημοτικού και από τα πολλά σχολεία και ολόκληρα τμήματα από αυτά).
Το συμπέρασμα από τα παραπάνω είναι ότι ότι η παραδοσιακή διδασκαλία δεν κατάφερε να βελτώσει για πολλές δεκαετίες την κατάσταση στο χώρο των κλασμάτων και πιθανά ο μικρόκοσμος της Logo να αποτελέσει μιά αποτελεσματική ενίσχυσή της.

7.2 ΟΙ ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΑΠΟΔΟΣΗ

Πριν αναφερθούμε στις επί μέρους διαφοροποιήσεις και για την πληρότητα της εργασίας θα πρέπει να συσχετίσουμε το γενικό βαθμό του τεστ της έρευνά μας με τον ετήσιο βαθμό που έλαβαν την ίδια σχολική χρονιά (1993-1994) τα παιδιά στα μαθηματικά.
Ο βαθμός του τέστ της έρευνας και ο τελικός, διαφέρουν σημαντικά (Sign=0.000)όπως βλέπουμε από τον ΠΙΝΑΚΑ 2.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

- - - t-tests for paired samples - - -

Variable	Number of pairs	Corr	2-tail Sig	Mean	SD	SE of Mean
V				4.0997	1.814	.093
	381	.757	.000			
DASK				7.7008	1.709	.088

Paired Differences

Mean	SD	SE of Mean	t-value	df	2-tail Sig
-3.6010	1.233	.063	-57.02	380	.000
95% CI (-3.725; -3.477)					

Ο βαθμός που έλαβαν οι μαθητές από το δάσκαλο συμβολίζεται με DASK και έχει μέσο όρο 7.7 τη στιγμή που ο βαθμός V του τέστ έχει μέσο όρο 4.1 περίπου.
Η έρευνα κατέγραψε δύο πιθανούς λόγους που συμβαίνει αυτό και στηρίζεται αποκλειστικά σε μαρτυρίες των ίδιων των δασκάλων που βαθμολόγησαν τα παιδιά των 16 ολόκληρων τμημάτων τα οποία και αποτελούν το συνολικό δείγμα:
α) Η τελική βαθμολογία για διάφορους λόγους (παιδαγωγικούς, κοινωνικούς κτλ.) υπερβαίνει πάντα την γραπτή και προφορική απόδοση του μαθητή.
β) Το κεφάλαιο των κλασμάτων παρουσιάζει όντως μεγαλύτερη δυσκολία για τους μαθητές από τα υπόλοιπα της διδακτέας ύλης.

7.2.1 Η διαφοροποίηση κατά φύλο.

Με τη χρήση του κριτηρίου t-test groups παρατηρούμε από τον ΠΙΝΑΚΑ 3 ότι υπάρχει στατιστικώς σημαντική διαφορά σε επίπεδο 0.008 ανάμεσα στις δυό υποομάδες του πληθυσμού δηλ. στα αγόρια (SEX=1) και στα κορίτσια (SEX=2). Το κριτήριο Levene[23] δείχνει ότι υπάρχει ομοιογέγεια στις δυο υπό εξέταση ομάδες του πληθυσμού αφού P=0.249> 0.05 και επομένως από την πρό τελευταία γραμμή του πίνακα 3 δηλ. των ίσων διασπορών λαμβάνομε την τιμή t=-2.67 και την σημαντικότητα διπλής κατεύθυνσης που αντιστοιχεί σ' αυτήν 0.008.

[23] Το κριτήριο Levene είναι ένα κριτήριο για τη διαπίστωση της ισότητας των διασπορών το οποίο εισάγει το στατιστικό πρόγραμμα SPSS for WINDOWS στην έκδοση 6.0.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3

t-tests for independent samples of SEX_

Variable	Number of Cases	Mean	SD	SE of Mean
V_				
SEX 1,	199	3,8643	1,740	,123
SEX 2,	182	4,3571	1,862	,138

Mean Difference = -,4928_

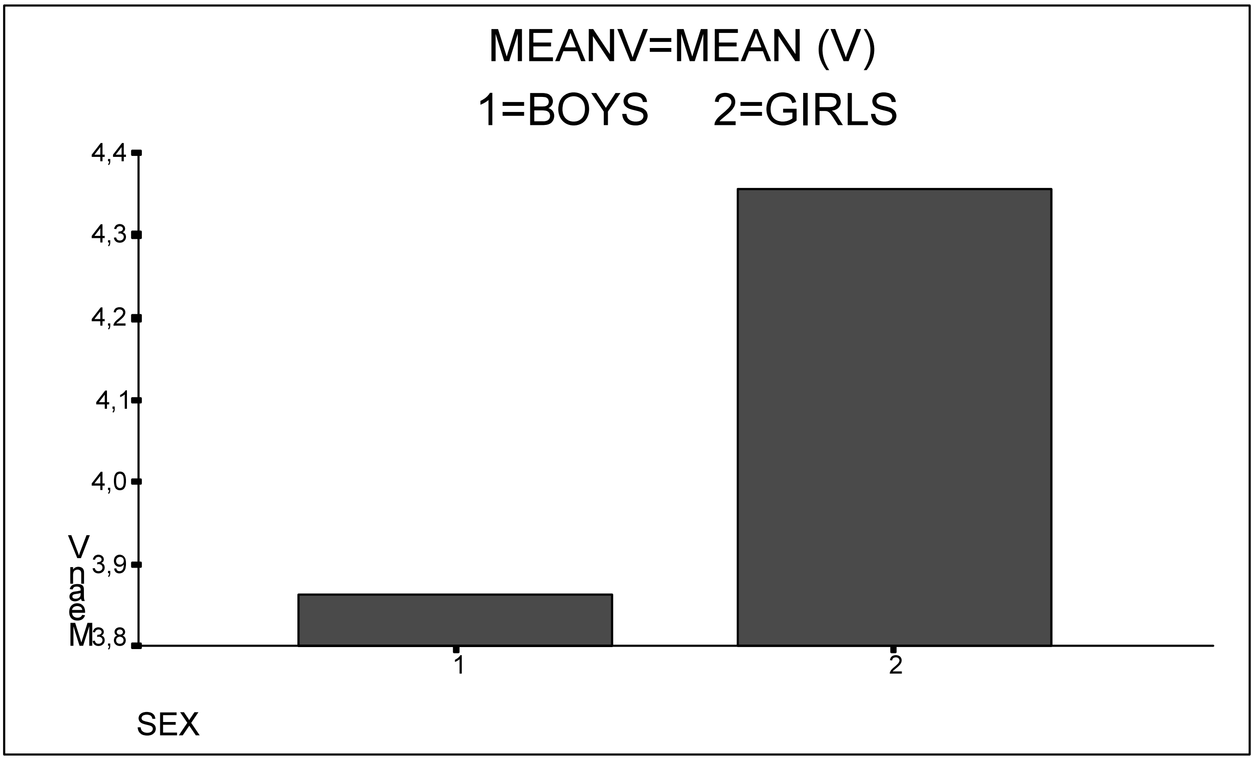
Levene's Test for Equality of Variances: F= 1,332 P= ,249_

t-test for Equality of Means

Variances	t-value	df	2-Tail Sig	SE of Diff	95% CI for Diff
Equal	-2,67	379	,008	,185	(-,856; -,130)
Unequal	-2,66	369,85	,008	,185	(-,857; -,129)

Ο μέσος όρος λοιπόν για τα κορίτσια 4,35 διαφέρει σημαντικά από τον αντίστοιχο 3,86 για τα αγόρια όπως μας δείχνει και το ΓΡΑΦΗΜΑ 2.

ΓΡΑΦΗΜΑ 2.



7.2.2 Η διαφοροποίηση κατά ηλικία.

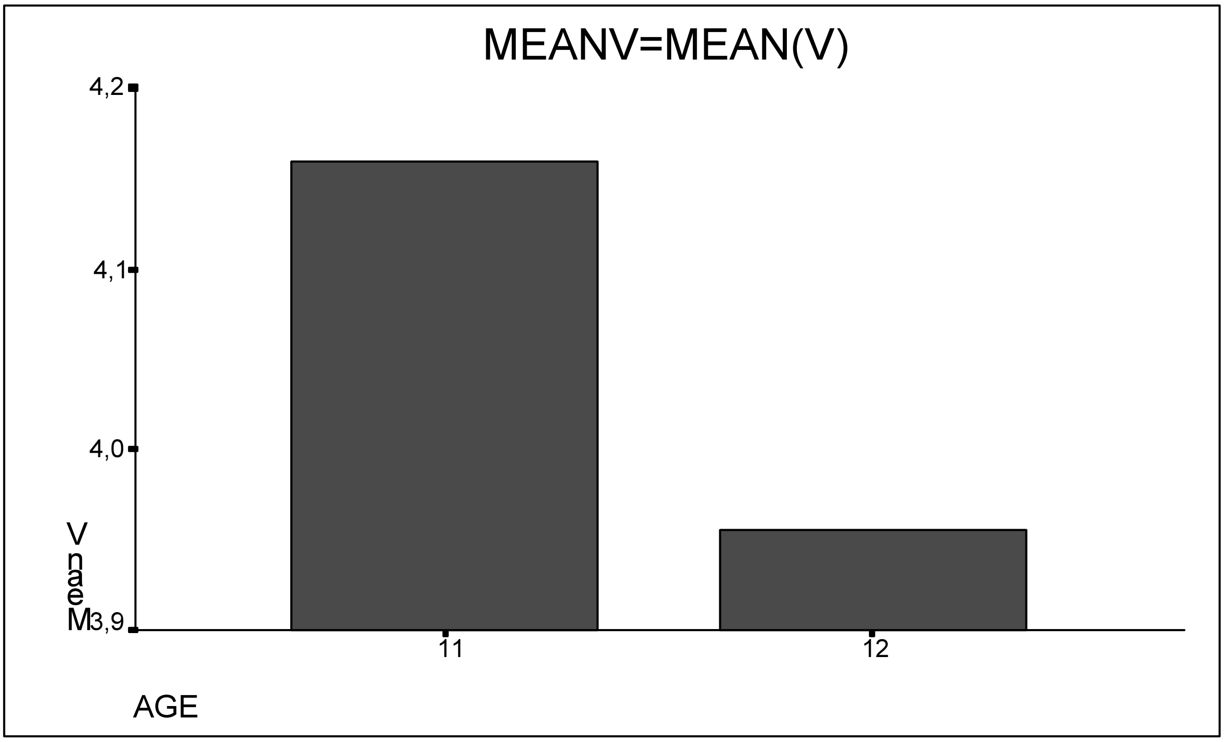
Από τον ΠΙΝΑΚΑ 4 βλέπουμε ότι η εφαρμογή του κριτηρίου t- test για τους 11 χρονους και τους 12 χρονους μαθητές δεν παρουσιάζει στατιστικώς σημαντική διαφορά.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4

```
_
t-tests for independent samples of  AGE_
                    Number_
     Variable        of Cases   Mean      SD      SE of Mean_
   ‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘_
     V_
_
     AGE 11,         270     4,1593    1,740       ,106_
     AGE 12,         111     3,9550    1,984       ,188_
   ‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘_
     Mean Difference = ,2043_
_
     Levene's Test for Equality of Variances: F= 3,187  P= ,075_
_
    t-test for Equality of Means                        95%_
 Variances  t-value   df   2-Tail Sig    SE of Diff     CI for Diff_
‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘_
 Equal      1,00    379        ,318       ,205      (-,198; ,607)_
 Unequal     ,95   183,09      ,345       ,216      (-,222; ,631)_
‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘_
```

Να σημειώσουμε ότι η διαφορά μεταξύ 11 χρονων και 12 χρονων μαθητών που εμφανίζεται στο ΓΡΑΦΗΜΑ 3 είναι μόνο στο δείγμα κι όχι στον πληθυσμό αφού δεν είναι στατιστικώς σημαντική. Επίσης να σημειώσουμε ότι οι 11 χρονοι είναι μαθητές της Ε' Δημοτικού και οι 12 χρονοι είναι μαθητές της ΣΤ' Δημοτικού.

ΓΡΑΦΗΜΑ 3.



7.2.3 Η διαφοροποίηση κατά σχολείο.
Από τη μελέτη των πινάκων 5 και 6 προκύπτουν τα εξής:
α) Η μέθοδος ONEWAY μπορεί να εφαρμοστεί με τη χρήση οποιουδήποτε στατιστικού κριτηρίου για άνισα δείγματα που διαθέτει το SPSS καθώς ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις της ανεξαρτησίας, της κανονικότητας και της ισότητας των διασπορών. Για το τελευταίο βλέπουμε και από τους δυό πίνακες το συντελεστή Cochran C να έχει σημαντικότητα P=43% γεγονός που αποδεικνύει την ισότητα των διασπορών στα δείγματα των σχολείων.
β) Τόσο με το συντηρητικό[24] κριτήριο TUKEY B σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, όσο και με το δυναμικό[25] κριτήριο DUNCAN σε επίπεδο σημαντικότητας 1% υπάρχουν στατιστικώς σημαντικές διαφορές ανάμεσα στα 5 υπό μελέτη σχολεία στα οποία έχουν δοθεί οι τυχαίοι[26] κωδικοί 8,9,10,11,12.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5

O N E W A Y - ΜΕΘΟΔΟΣ TUKEY B ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΗΤΑΣ 5%

Variable V
By Variable SCHOOL

---

[24] Το κριτήριο TUKEY είναι, όπως έδειξε ο Montgomery (1991), όντως ένα συντηρητικό κριτήριο, που σημαίνει ότι με αυτό η πιθανότητα να κάνουμε σφάλμα τύπου I είναι μικρή. Είναι περισσότερο συντηρητικό από το Newman- Keuls και αυτό με τη σειρά του από εκείνο του Duncan. (σελ. 78-79).

[25] Κατά το Montgomery (1991), το κριτήριο Duncan είναι αυτό με τη μεγαλύτερη Power =1-b και ακολουθούν τα Newman- Keuls και Tukey με ολοένα μικρότερη τοιαύτη (σελ. 78-79).

[26] Οι κωδικοί που δόθηκαν από την έρευνα στα υπό μελέτη σχολεία σε καμιά περίπτωση δεν αντιστοιχούν στην πραγματική τους ονομασία. Π.χ. SHOOL8 δεν σημαίνει 8ο Δημοτικό Σχολείο !

Analysis of Variance

Source	D.F.	Sum of Squares	Mean Squares	F Ratio	F Prob.
Between Groups	4	153.7732	38.4433	13.1833	.0000
Within Groups	376	1096.4368	2.9161		
Total	380	1250.2100			

- - - - - - - - - - O N E W A Y - - - - - - - - - -

Group	Count	Mean	Standard Deviation	Standard Error	95 Pct Conf Int for Mean		
Grp 8	86	3.2907	1.5857	.1710	2.9507	To	3.6307
Grp 9	52	3.3077	1.5021	.2083	2.8895	To	3.7259
Grp10	67	4.9403	1.8658	.2279	4.4852	To	5.3954
Grp11	82	4.4756	1.8205	.2010	4.0756	To	4.8756
Grp12	94	4.3511	1.7020	.1756	4.0025	To	4.6997
Total	381	4.0997	1.8138	.0929	3.9170	To	4.2825
Fixed Effects Model			1.7076	.0875	3.9277	To	4.2718
Random Effects Model				.3247	3.1982	To	5.0012

Random Effects Model - Estimate of Between Component Variance .4708

- - - - - - - - - - O N E W A Y - - - - - - - - - -

Group	Minimum	Maximum
Grp 8	1.0000	7.0000
Grp 9	1.0000	7.0000
Grp10	1.0000	9.0000
Grp11	1.0000	8.0000
Grp12	1.0000	9.0000
Total	1.0000	9.0000

Tests for Homogeneity of Variances

Cochrans C = Max. Variance/Sum(Variances) = .2407, P = .430 (Approx.)
Bartlett-Box F = 1.050 , P = .380
Maximum Variance / Minimum Variance 1.543

- - - - - - - - - - O N E W A Y - - - - - - - - - -

Variable V
By Variable SCHOOL

Multiple Range Test

Tukey-B Procedure
Ranges for the .050 level -

3.34 3.61 3.77 3.88

The ranges above are table ranges.
The value actually compared with Mean(J)-Mean(I) is..
1.2075 * Range * Sqrt(1/N(I) + 1/N(J))

(*) Denotes pairs of groups significantly different at the .050 level

- - - - - - - - - - O N E W A Y - - - - - - - - - -

Variable V
(Continued)

Mean	Group	Grp 8	Grp 9	Grp 12	Grp 11	Grp 10
3.2907	Grp 8					
3.3077	Grp 9					
4.3511	Grp12	*	*			
4.4756	Grp11	*	*			
4.9403	Grp10	*	*			

ΠΙΝΑΚΑΣ 6

O N E W A Y - ΜΕΘΟΔΟΣ DUNCAN ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΗΤΑΣ 1 %

Variable V
By Variable SCHOOL

Analysis of Variance

Source	D.F.	Sum of Squares	Mean Squares	F Ratio	F Prob.
Between Groups	4	153.7732	38.4433	13.1833	.0000
Within Groups	376	1096.4368	2.9161		
Total	380	1250.2100			

- - - - - - - - - - O N E W A Y - - - - - - - - - -

Group	Count	Mean	Standard Deviation	Standard Error	95 Pct Conf Int for Mean		
Grp 8	86	3.2907	1.5857	.1710	2.9507	To	3.6307
Grp 9	52	3.3077	1.5021	.2083	2.8895	To	3.7259
Grp10	67	4.9403	1.8658	.2279	4.4852	To	5.3954
Grp11	82	4.4756	1.8205	.2010	4.0756	To	4.8756
Grp12	94	4.3511	1.7020	.1756	4.0025	To	4.6997
Total	381	4.0997	1.8138	.0929	3.9170	To	4.2825
Fixed Effects Model			1.7076	.0875	3.9277	To	4.2718
Random Effects Model				.3247	3.1982	To	5.0012

Random Effects Model - Estimate of Between Component Variance .4708

- - - - - - - - - - O N E W A Y - - - - - - - - - -

Group	Minimum	Maximum
Grp 8	1.0000	7.0000
Grp 9	1.0000	7.0000
Grp10	1.0000	9.0000
Grp11	1.0000	8.0000
Grp12	1.0000	9.0000
Total	1.0000	9.0000

Tests for Homogeneity of Variances

Cochrans C = Max. Variance/Sum(Variances) = .2407, P = .430 (Approx.)
Bartlett-Box F = 1.050 , P = .380
Maximum Variance / Minimum Variance 1.543

- - - - - - - - - - O N E W A Y - - - - - - - - - -

Variable V
By Variable SCHOOL

Multiple Range Test
Duncan Procedure
Ranges for the .010 level -

3.66 3.81 3.92 3.99

The ranges above are table ranges.
The value actually compared with Mean(J)-Mean(I) is..
1.2075 * Range * Sqrt(1/N(I) + 1/N(J))

(*) Denotes pairs of groups significantly different at the .010 level

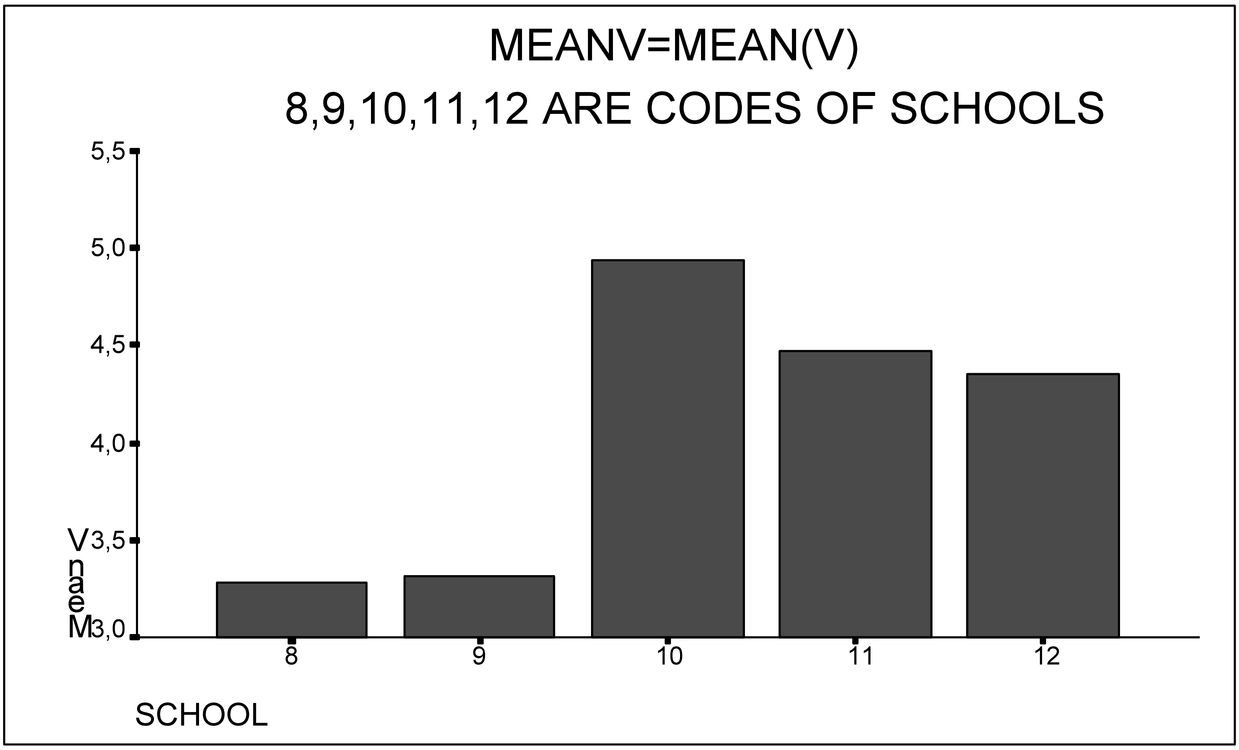
```
          - - - - - - - - - - O N E W A Y - - - - - - - - - -

 Variable  V
 (Continued)


                 G G G G G
                 r r r r r
                 p p p p p
                   1 1 1
 Mean     Group    8 9 2 1 0

 3.2907   Grp 8
 3.3077   Grp 9
 4.3511   Grp12    * *
 4.4756   Grp11    * *
 4.9403   Grp10    * *
```

ΓΡΑΦΗΜΑ 4.



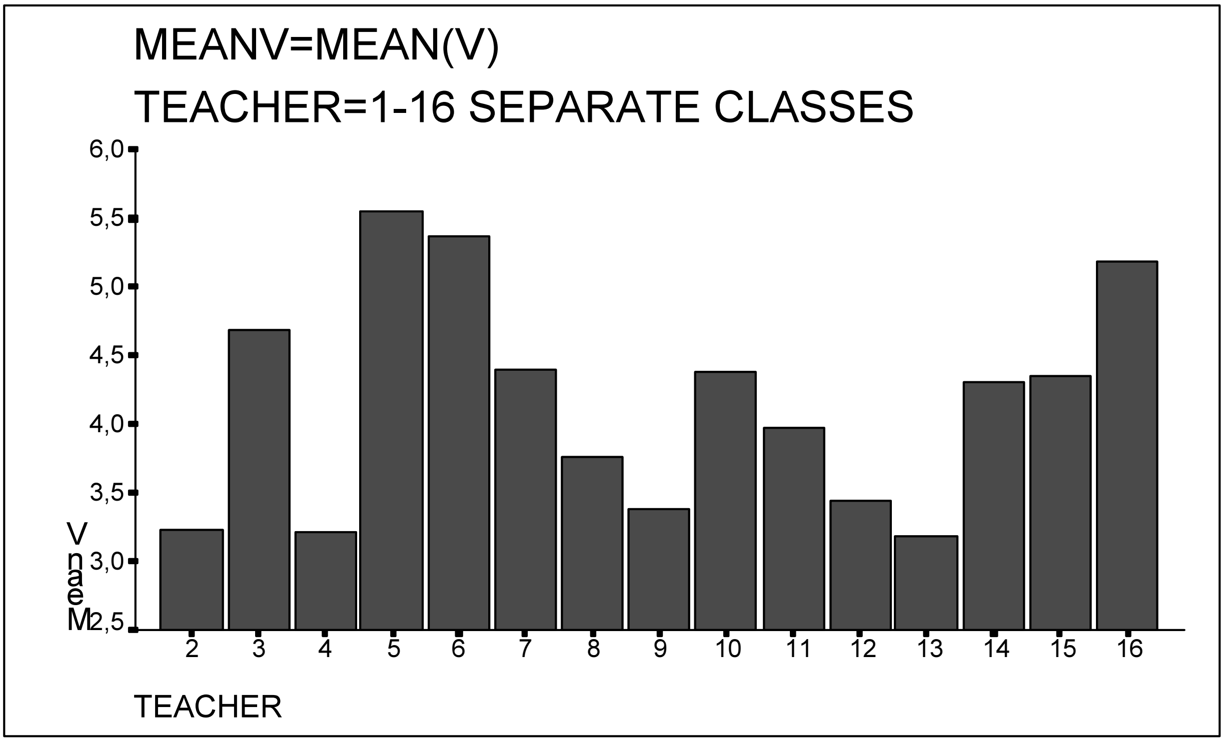
Το ΓΡΑΦΗΜΑ 4 αναπαριστά την κατάσταση στο πληθυσμό κι όχι μόνο στο δείγμα. Η επίδοση των μαθητών στα κλάσματα δεν είναι η ίδια από σχολείο σε σχολείο. Η στατιστική ανάλυση δείχνει σαφώς ότι τα σχολεία διαιρούνται σε δύο ομάδες ως προς την επίδοση. Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει τα σχολεία με κωδικούς 8 και 9 ενώ η δεύτερη τα σχολεία 10, 11 και 12. Η κάθε ομάδα δεν παρουσιάζει στατιστικώς σημαντικές διαφορές ανάμεσα στα μέλη της. Για παράδειγμα, τα σχολεία με κωδικό 10 και 12 σε ό,τι αφορά την επίδοση δέν παρουσιάζουν στατιστικώς σημαντική διαφορά.
Σχετικά με την αιτιολογία της παρουσιαζόμενης διαφοράς ανάμεσα στις δυό ομάδες σχολείων θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η κάθε μιά από τις δύο ομάδες εμπίπτει σε διαφορετική γεωγραφική περιοχή. Πιό συγκεκριμένα, η μιά ομάδα σχολείων βρίσκεται εντός και η άλλη εκτός της πόλης του Ρεθύμνου.

Χρειάζεται περισσότερη έρευνα για την ερμηνεία αυτής της διαφοράς.

7.2.4 Η διαφοροποίηση κατά τμήμα.

Τα 5 σχολεία από τα οποία ελείφθη το δείγμα είχαν συνολικά 16 τμήματα. Σε κάθε τμήμα και για ολόκληρο το ακαδημαϊκό έτος ένας και μόνο δάσκαλος είχε την ευθύνη της διδακτικής πράξης. Υπενθυμίζουμε ότι δύο φορές[27] στο ίδιο ακαδημαϊκό έτος διεξήχθη το τεστ για τα κλάσματα διατηρουμένου του ίδιου δασκάλου. Για το λόγο αυτό εισάγουμε στις μετρήσεις μας τη μεταβλητή TEACHER με τιμές από 1-16. Αξίζει να δούμε, λοιπόν, πιθανές διαφορές ανάμεσα στα 16 τμήματα.

ΓΡΑΦΗΜΑ 5.



ΠΙΝΑΚΑΣ 7

O N E W A Y - ΜΕΘΟΔΟΣ DUNCAN ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΣΗΜΑΝΤ. 1 %

Variable V
By Variable TEACHER

Analysis of Variance

Source	D.F.	Sum of Squares	Mean Squares	F Ratio	F Prob.
Between Groups	15	256.7267	17.1151	6.2880	.0000
Within Groups	365	993.4833	2.7219		
Total	380	1250.2100			

[27] Την πρώτη φορά (Δεκ. 1993) επιδόθηκε στους μαθητές το Α' μέρος του ερωτηματολογίου και τη δεύτερη (Μάης 1994) το Β' μέρος.

Group	Count	Mean	Standard Deviation	Standard Error	95 Pct Conf Int for Mean		
Grp 1	16	2.1875	.6551	.1638	1.8384	To	2.5366
Grp 2	18	3.2222	1.6997	.4006	2.3770	To	4.0674
Grp 3	32	4.6875	1.9746	.3491	3.9756	To	5.3994
Grp 4	23	3.2174	1.3469	.2809	2.6349	To	3.7998
Grp 5	22	5.5455	1.8446	.3933	4.7276	To	6.3633
Grp 6	22	5.3636	2.0365	.4342	4.4607	To	6.2666
Grp 7	30	4.4000	1.4044	.2564	3.8756	To	4.9244
Grp 8	29	3.7586	1.5037	.2792	3.1866	To	4.3306
Grp 9	29	3.3793	1.6348	.3036	2.7575	To	4.0011
Grp10	31	4.3871	1.7640	.3168	3.7400	To	5.0342
Grp11	32	3.9688	1.6360	.2892	3.3789	To	4.5586
Grp12	18	3.4444	1.3815	.3256	2.7574	To	4.1314
Grp13	17	3.1765	1.1851	.2874	2.5672	To	3.7858
Grp14	23	4.3043	1.3630	.2842	3.7150	To	4.8937
Grp15	17	4.3529	1.9982	.4846	3.3256	To	5.3803
Grp16	22	5.1818	2.0386	.4346	4.2780	To	6.0857
Total	381	4.0997	1.8138	.0929	3.9170	To	4.2825
Fixed Effects Model			1.6498	.0845	3.9335	To	4.2659

- - - - - - - - - - O N E W A Y - - - - - - - - - -

Random Effects Model				.2172	3.6367	To	4.5628

Random Effects Model - Estimate of Between Component Variance .6067

Group	Minimum	Maximum
Grp 1	1.0000	3.0000
Grp 2	1.0000	7.0000
Grp 3	2.0000	9.0000
Grp 4	1.0000	6.0000
Grp 5	2.0000	8.0000
Grp 6	1.0000	8.0000
Grp 7	2.0000	8.0000
Grp 8	1.0000	7.0000
Grp 9	1.0000	7.0000
Grp10	1.0000	7.0000
Grp11	1.0000	8.0000
Grp12	1.0000	6.0000
Grp13	1.0000	5.0000
Grp14	2.0000	7.0000
Grp15	1.0000	7.0000
Grp16	1.0000	9.0000
Total	1.0000	9.0000

Tests for Homogeneity of Variances

Cochrans C = Max. Variance/Sum(Variances) = .0976, P = .589 (Approx.)

```
 Bartlett-Box F =                    2.132 , P =  .006
 Maximum Variance / Minimum Variance       9.684
----------------------------------------------------------------------------
                 G G G G G G G G G G G G G G G G
                 r r r r r r r r r r r r r r r
                 p p p p p p p p p p p p p p p p
                  1      1   1 1 1 1     1
 Mean      Group      1 3 4 2 9 2 8 1 4 5 0 7 3 6 6 5

 2.1875    Grp 1
 3.1765    Grp13
 3.2174    Grp 4
 3.2222    Grp 2
 3.3793    Grp 9
 3.4444    Grp12
 3.7586    Grp 8     *
 3.9688    Grp11      *
 4.3043    Grp14      *
 4.3529    Grp15      *
 4.3871    Grp10      *
 4.4000    Grp 7     *
 4.6875    Grp 3     * * * * *
 5.1818    Grp16      * * * * * * *
 5.3636    Grp 6     * * * * * * * *
 5.5455    Grp 5     * * * * * * * *
```

Η μελέτη του πίνακα 7 δεν μπορεί να είναι ολοκληρωμένη αν δεν διευκρινίσουμε σε ποιό σχολείο και σε ποιά τάξη ή ηλικία ανήκει το κάθε τμήμα. Κάθε σχολείο έχει τα εξής τμήματα:
SCHOOL8=Group1,Group2, Group12, Group13, Group15.
SCHOOL9=Group4,Group9.
SCHOOL10=Group6,Group14, Group16.
SCHOOL11=Group5,Group8, Group10.
SCHOOL12=Group3,Group7, Group11.
Και κάθε τάξη δηλ. παιδιά ίδιας ηλικίας περιλαμβάνει τα εξής τμήματα:
Ε' ΤΑΞΗ (ηλικίας 11 χρόνων)=Group6,Group7, Group8, Group9, Group10,Group11,Group12, Group13, Group14, Group15, Group16.
ΣΤ' ΤΑΞΗ (ηλικίας 12χρόνων)=Group1,Group2, Group3, Group4, Group5.

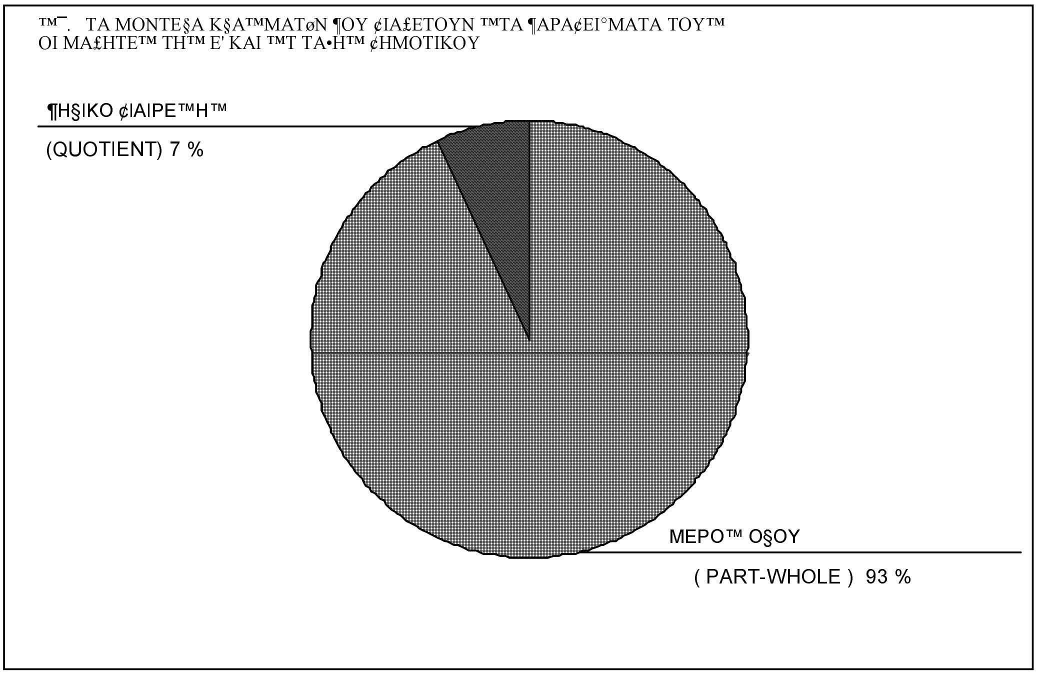
Τώρα μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι οι εικονιζόμενες διαφορές μεταξύ τμημάτων είναι περισσότερο διαφορές ανάμεσα σε τμήματα διαφορετικών σχολείων, λιγότερο ανάμεσα σε ηλικίες ή τάξεις (για το ίδιο πράγμα πρόκειται) και ανύπαρκτες μέσα στην ίδια τάξη του ίδιου σχολείου, είτε αυτό είναι "υψηλής" είτε "χαμηλής" απόδοσης. Αν λάβουμε υπ' όψιν μας ότι σε επίπεδο ηλικίας ή τάξης αποδείχθηκε ότι δεν υπάρχει στατιστικώς σημαντική διαφορά, κι ότι η μέθοδος ANOVA δεν εδειξε να υπάρχει αλληλεπίδραση των μεταβλητών που αφορούν το φύλο, την ηλικία, το σχολείο και το τμήμα (γι' αυτό άλλωστε δεν την αναφέρουμε), το συμπέρασμα που συνάγεται είναι ότι ο παράγων ΣΧΟΛΕΙΟ φαίνεται να είναι σοβαρός για την απόδοση στα κλάσματα.
Αυτό που πρέπει να επισημάνουμε εδώ είναι ότι εάν λάβουμε ένα οποιοδήποτε σχολείο και ελέγξουμε διαφορές ανάμεσα σε οποιαδήποτε τμήματα της ίδιας τάξης θα διαπιστώσουμε ότι δεν υπάρχουν. Αυτό το στοιχείο είναι πολύ σταθερό σε ολόκληρο το δείγμα με χωρίς καμία, απολύτως, απόκλιση. Κι αυτό συμβαίνει παρά το γεγονός ότι

το υπεύθυνο πρόσωπο για τη διδακτική παρέμβαση είναι διαφορετικό από τμήμα σε τμήμα. Το στοιχείο αυτό ίσως αφήνει υπαινιγμούς ότι γενικά η παραδοσιακή διδασκαλία μαζί με τις όποιες εκφάνσεις της και τις κατά περίπτωση ιδιαιτερότητες στη μεθοδολογία και τις στρατηγικές, εμφανίζει πάραυτα μιά ομοιομορφία στο επίπεδο των αποτελεσμάτων. Η γενική απόδοση παραμένει ασφαλώς χαμηλή. Κι αυτό δεν μπορεί να είναι κατάληξη μιάς αποτελεσματικής διδασκαλίας.
Χρειάζεται περισσότερη έρευνα στην ερμηνεία αυτού του θέματος. Ισως η βοήθεια που μπορεί να προσφέρει στην παραδοσιακή διδασκαλία των κλασμάτων ο μικρόκοσμος της Logo να την καταστήσει περισότερο αποτελεσματική.

7.3 ΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΠΟΥ ΔΙΑΘΕΤΟΥΝ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ.

Ενα από τα ευρήματα που προκύπτει από τη μελέτη της ερώτησης 1 του ερωτηματολογίου της έρευνας, αφορά τα **διατιθέμενα** από τους μαθητές μοντέλα κλασμάτων. Καθώς μελετούμε τα παραδείγματα που προσφέρουν στην προσπάθειά τους να εξηγήσουν τί είναι ένα κλάσμα μπορούμε να καταγράψουμε κάθε φορά το μοντέλο κλάσματος που φαίνεται να είναι οικείο στο μαθητή. Για παράδειγμα, ο μαθητής που γράφει " Θα μπορούσα να εξηγήσω στη γιαγιά μου τί είναι ένα κλάσμα εάν έχω ένα ψωμί και το κόψω σε δέκα ίσες φέτες θα της πώ, πάρε μία σου δίνω το 1/10 του ψωμιού." Οι περισσότεροι μαθητές προχωρούν και σε γραφική αναπαράσταση του παραδείγματος. Ο συγκεκριμένος μαθητής σχεδίασε ένα ψωμί το χώρισε σε 10 ίσα μέρη και χρωμάτισε με το μολύβι το ένα.
Οπως φαίνεται από τον ΠΙΝΑΚΑ 8 από τους 381 μαθητές της Ε' και ΣΤ' τάξης του Δημοτικού οι 66 δηλ. ποσοστό 17.3 % δεν έδωσαν παράδειγμα στο οποίο να διαφαίνεται σαφώς η χρήση κάποιου μοντέλου κλασμάτων το οποίο να διαθέτουν εύκολα ή να χρησιμοποιούν. Από τους υπόλοιπους που απάντησαν τα αποτελέσματα φαίνονται στο ΓΡΑΦΗΜΑ 6.

ΓΡΑΦΗΜΑ 6.



ΠΙΝΑΚΑΣ 8

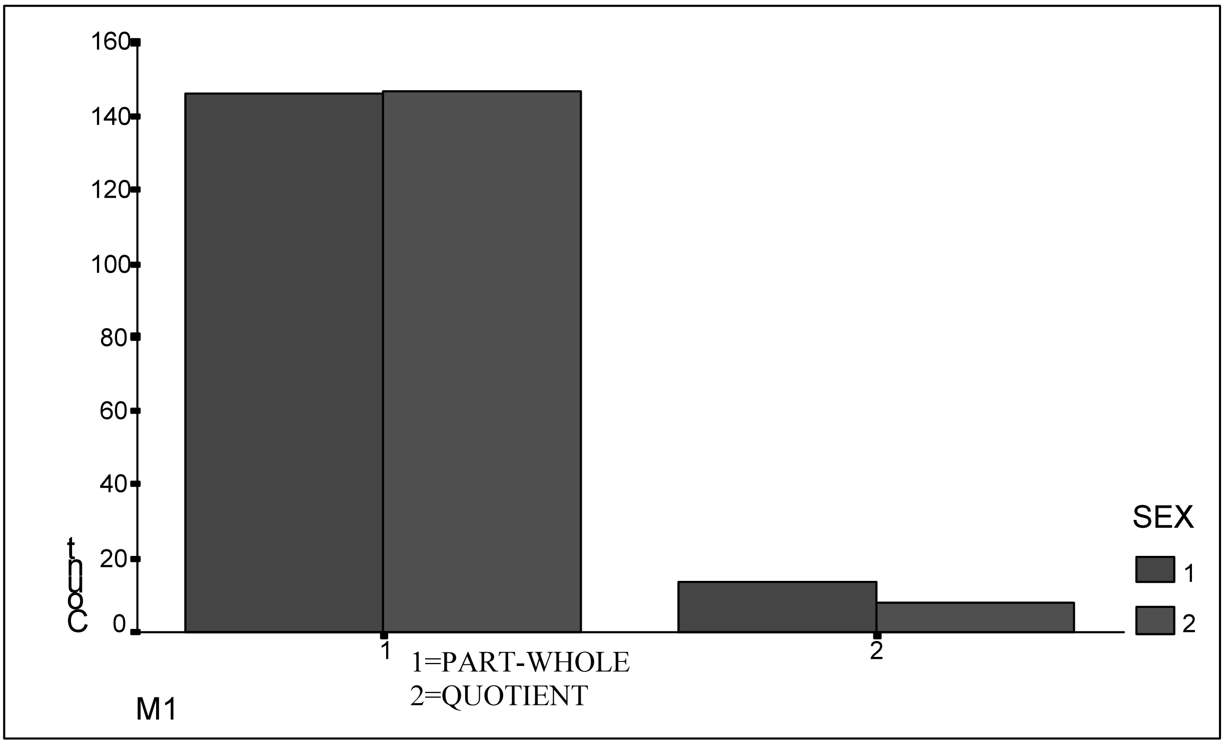
M1

Value Label	Value	Frequency	Percent	Valid Percent	Cum Percent
	1	293	76.9	93.0	93.0
	2	22	5.8	7.0	100.0
	9	66	17.3	Missing	
	Total	381	100.0	100.0	

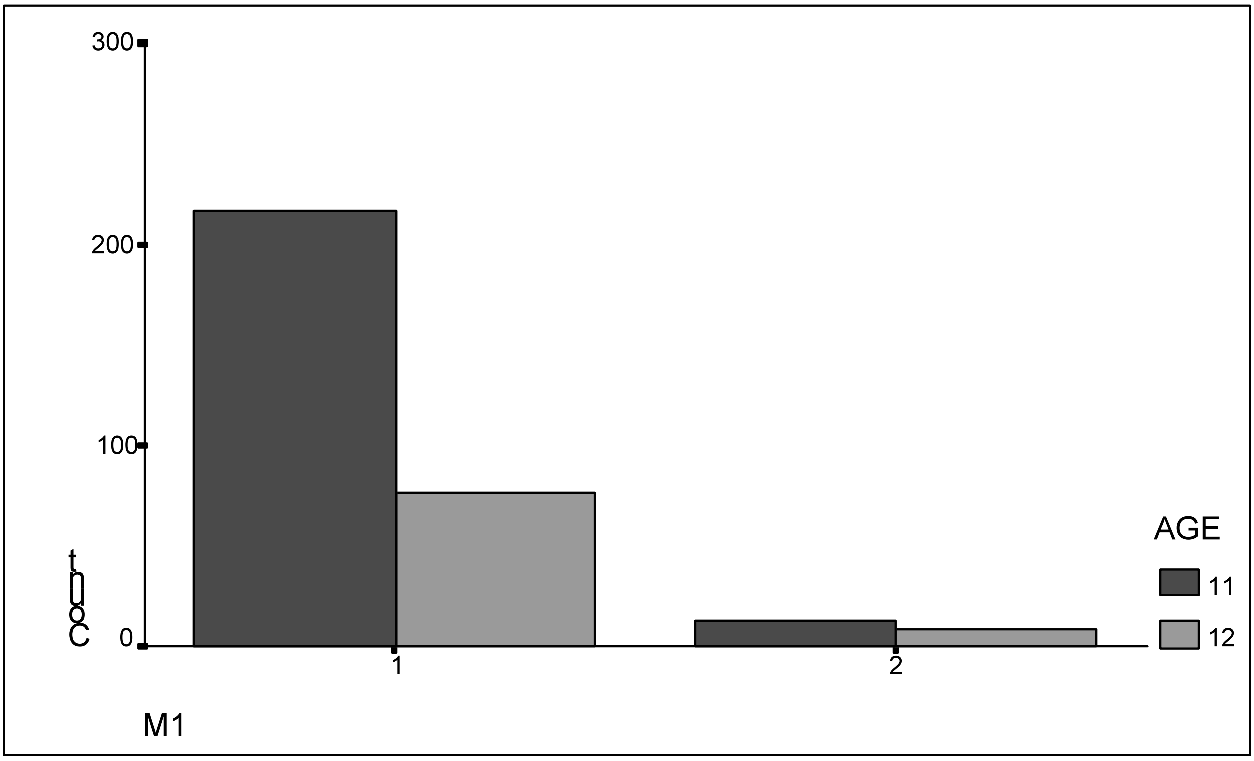
Valid cases 315 Missing cases 66

Θα εξετάσουμε τώρα με τη βοήθεια γραφημάτων αν αυτό που παρατηρείται γενικά στο δείγμα δηλ. η επικράτηση του μοντέλου μέρος- όλου διαφοροποιείται και κατά πόσο κατα φύλο, ηλικία, σχολείο και τμήμα.

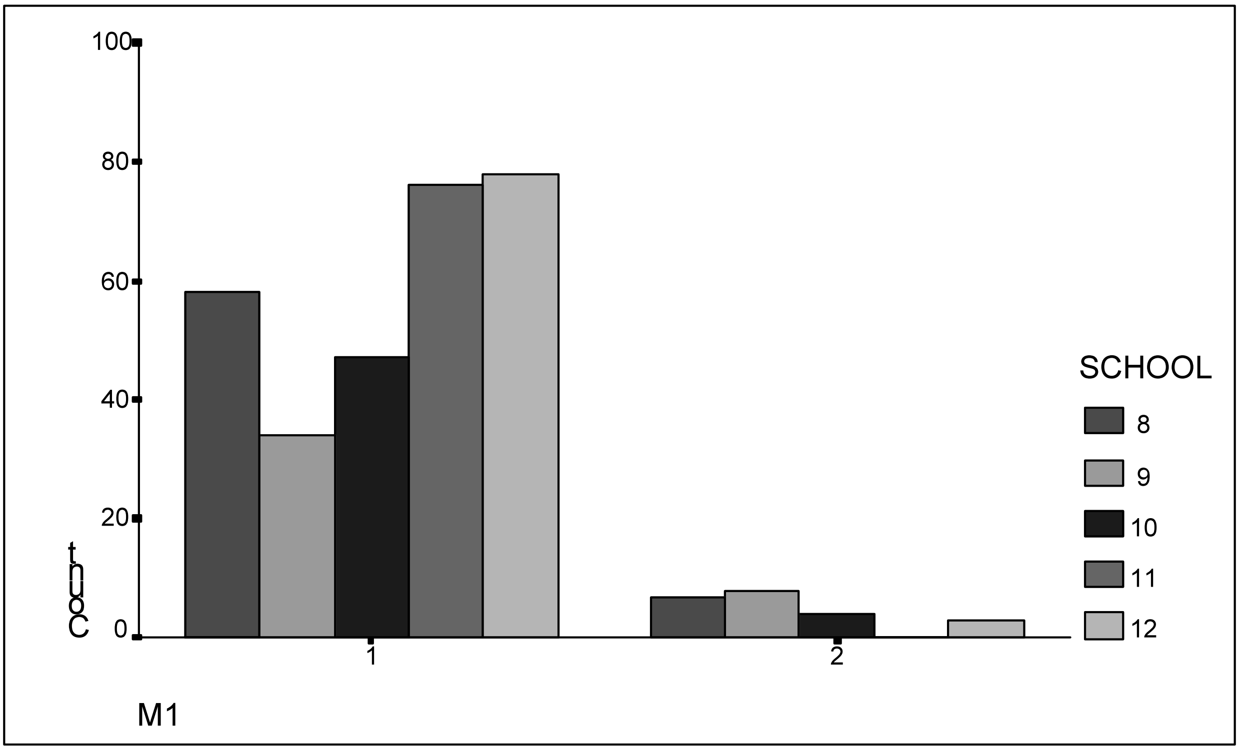
ΓΡΑΦΗΜΑ 7.



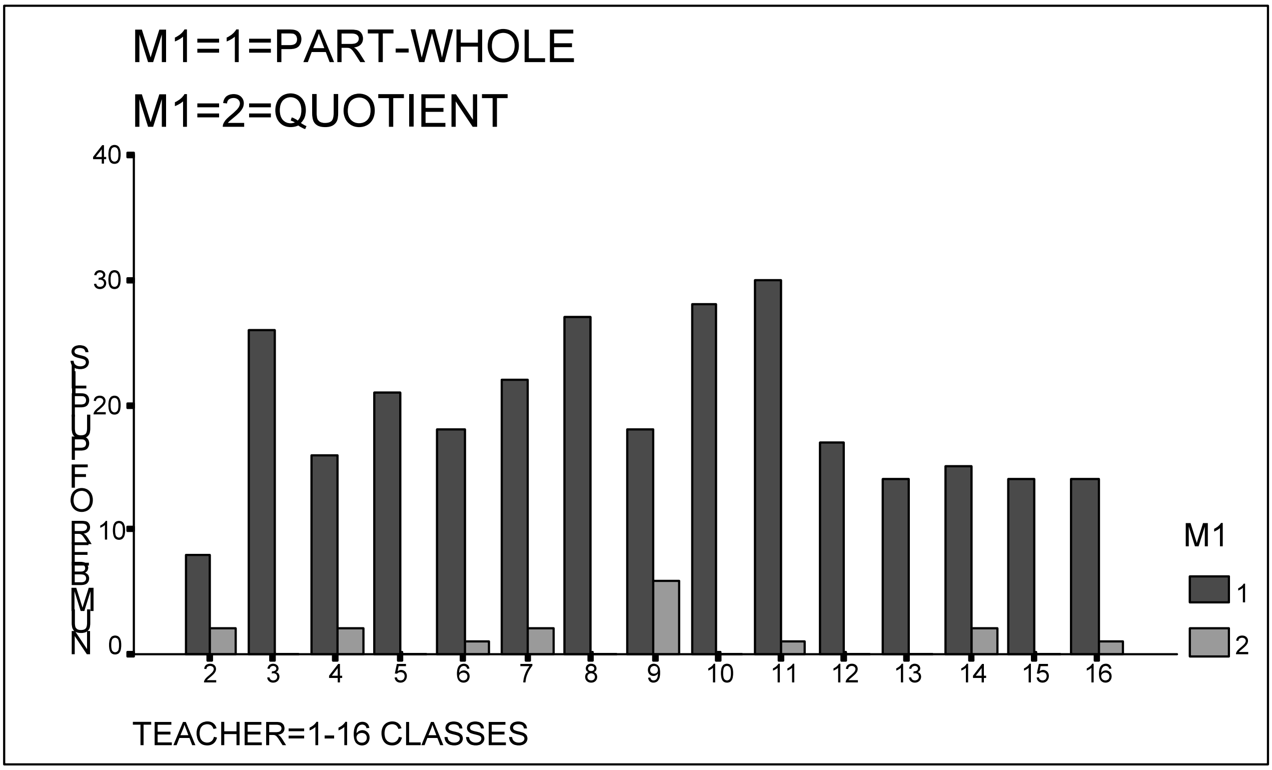
ΓΡΑΦΗΜΑ 8.



ΓΡΑΦΗΜΑ 9.



ΓΡΑΦΗΜΑ 10.

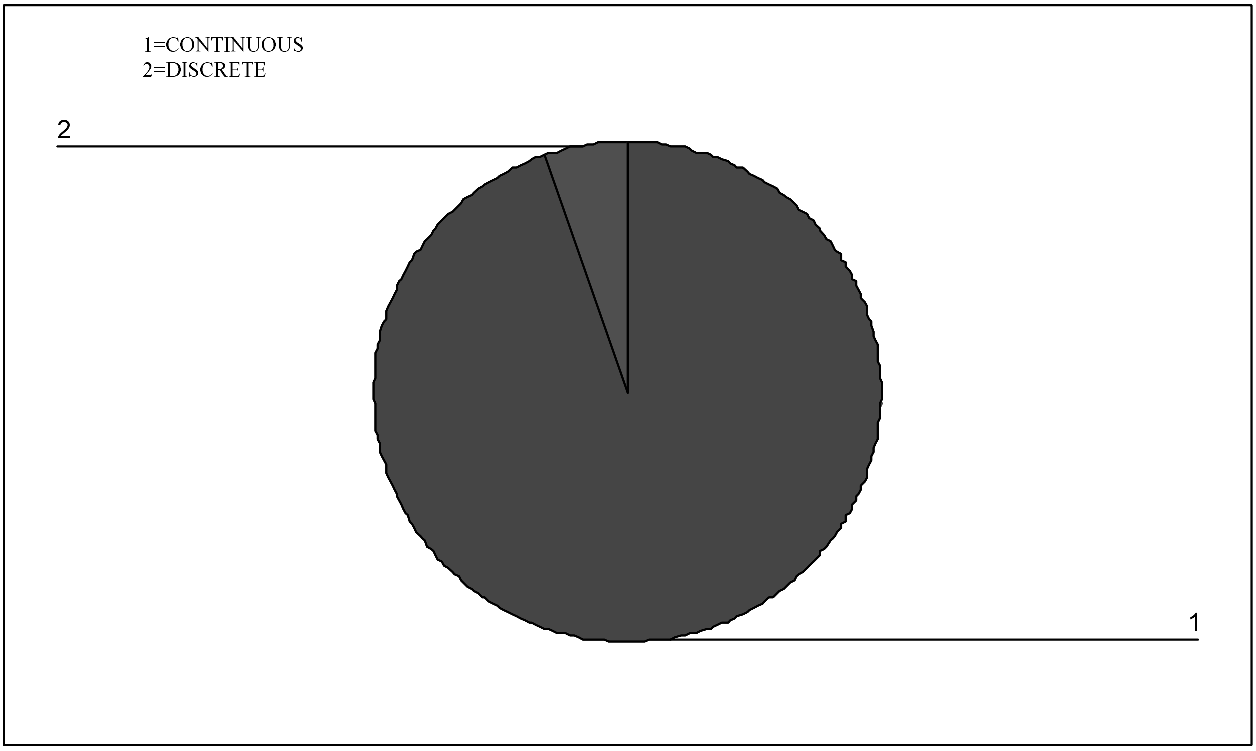


Από τη μελέτη όλων των γραφημάτων προκύπτει ότι κυριαρχία του μοντέλου μέρος-όλου (part-whole) στη σκέψη των μαθητών είναι αδιαμφισβήτητη σε κάθε φύλο, σε κάθε ηλικία, σε κάθε σχολείο και σε κάθε τμήμα. Ενα άλλο επίσης μοντέλο που διαθέτουν οι μαθητές, αλλά σε πολύ μικρότερο βαθμό είναι το πηλίκο διαίρεσης (quotient).

Να σημειώσουμε ότι σε κάποιο τμήμα (Νο1) δεν κατέστη δυνατόν να διαγνώσουμε την ύπαρξη του ενός ή του άλλου μοντέλου γιατί εκεί τα παιδιά δεν έδωσαν παράδειγμα στην ερώτηση 1 του ερωτηματολογίου.
Επομένως ο μικρόκοσμος που επιδιώκει την εννοιολογική αναβάθμιση των κλασμάτων στη σκέψη των μαθητών θα πρέπει να ενισχύσει τα υπόλοιπα μοντέλα εκτός εκείνο του μέρους όλου (βλ. παρακάτω στην ανάπτυξη του λογισμικού).

7.4 ΣΤΑΣΕΙΣ ΑΠΕΝΑΤΙ ΣΤΑ ΣΥΝΕΧΗ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΕΣΑ.
Από την απάντηση των μαθητών στην ερώτηση 1 καθίσταται δυνατό να διαγνώσουμε τις στάσεις των μαθητών απέναντι στα συνεχή και διακριτά μέσα. Για παράδειγμα, ένας μαθητής που προσπαθεί να εξηγήσει τι είναι το κλάσμα 1/9 δίνοντας ένα σύνολο από 9 μικρές μπαλίτσες, διατεταγμένες σε δύο γραμμές των 5 και 4 αντίστοιχα και έχει χρωματισμένη μιά από αυτές φαίνεται να χρησιμοποιεί τα διακριτά μέσα για να εκφραστεί.

ΓΡΑΦΗΜΑ 11.



Από το ΓΡΑΦΗΜΑ 11 και τον ΠΙΝΑΚΑ 9 βλέπουμε ότι τα παιδιά χρησιμοποιούν σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό τα συνεχή από τα διακριτά μέσα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 9

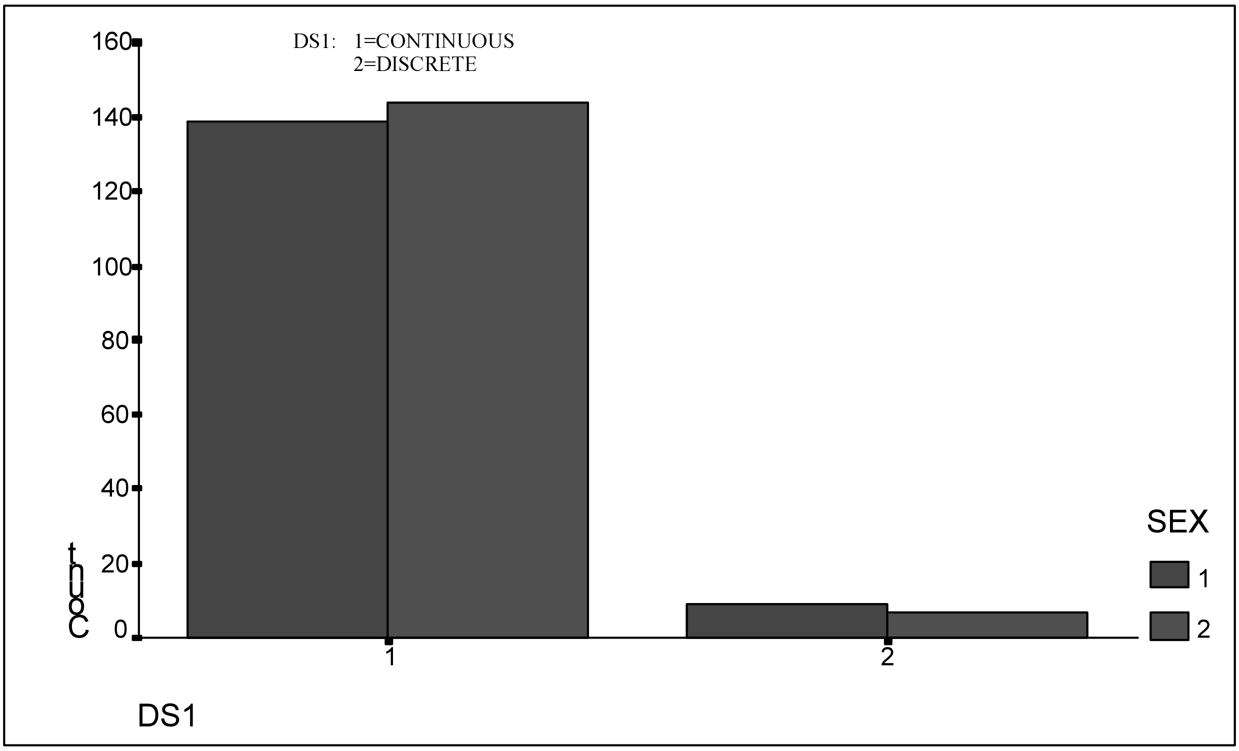
DS1

Value Label	Value	Frequency	Percent	Valid Percent	Cum Percent
	1	283	74.3	94.6	94.6
	2	16	4.2	5.4	100.0
	9	82	21.5	Missing	
	-------	-------	-------		
	Total	381	100.0	100.0	

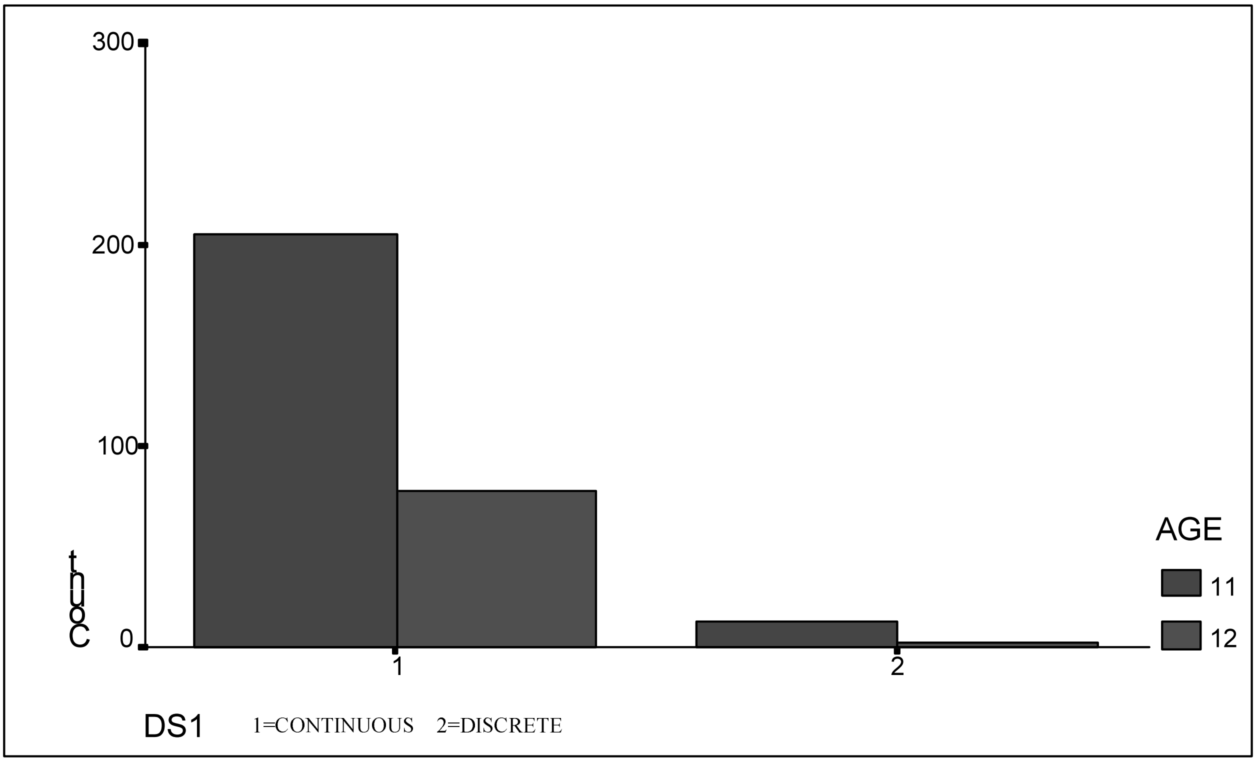
Valid cases 299 Missing cases 82

Μιά εικόνα για το πως κατανέμεται σε σχέση με το φύλο, την ηλικία, το σχολείο και το τμήμα η χρήση των συνεχών και διακριτών μέσων μας δίνουν τα ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ 12 , 13 , 14, 15 αντίστοιχα.

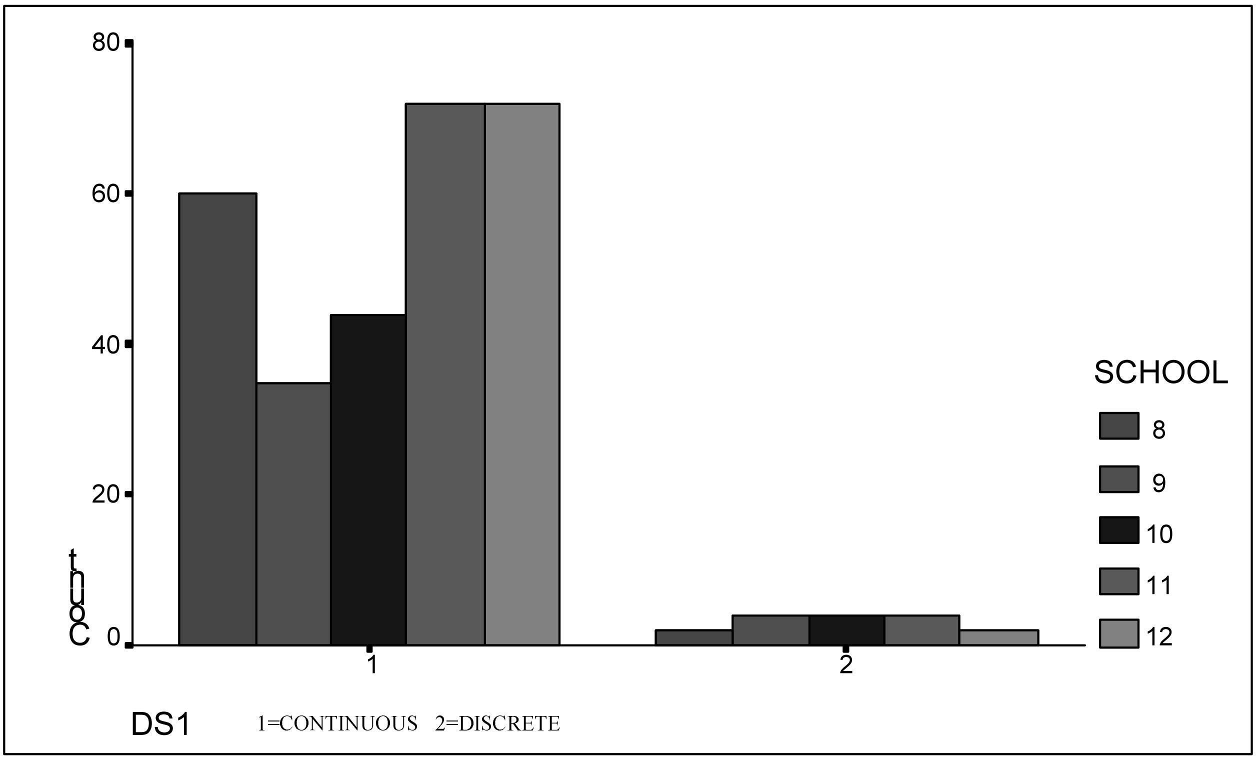
ΓΡΑΦΗΜΑ 12.



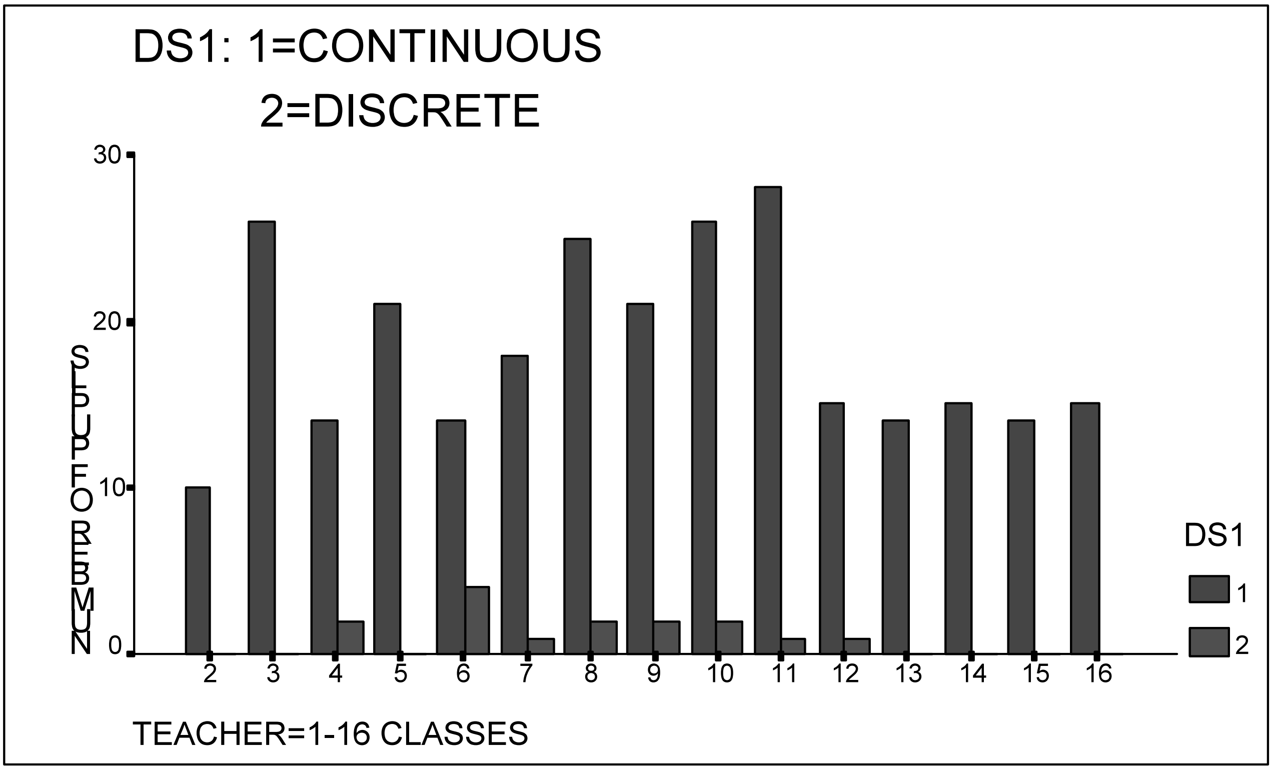
ΓΡΑΦΗΜΑ 13.



ΓΡΑΦΗΜΑ 14.



ΓΡΑΦΗΜΑ 15.



Παρατηρούμε δηλ. ότι οι μαθητές είτε πρόκειται για αγόρια, είτε για κορίτσια, είτε πρόκειται για την ηλικία των 11 είτε για την ηλικία των 12 χρόνων, είτε παρακολουθούν ένα συγκεκριμένο σχολείο ή όχι, είτε τέλος ανήκουν σε ένα ορισμένο τμήμα ή όχι έχουν την τάση να χρησιμοποιούν στα παραδείγματά τους τα συνεχή περισσότερο και ελάχιστα τα διακριτά μέσα. Κατά συνέπεια ο μικρόκοσμος που προτιθέμεθα να κατασκευάσουμε θα πρέπει να στοχεύει στην απάλειψη αυτής της εννοιολογικής ανισομέρειας.

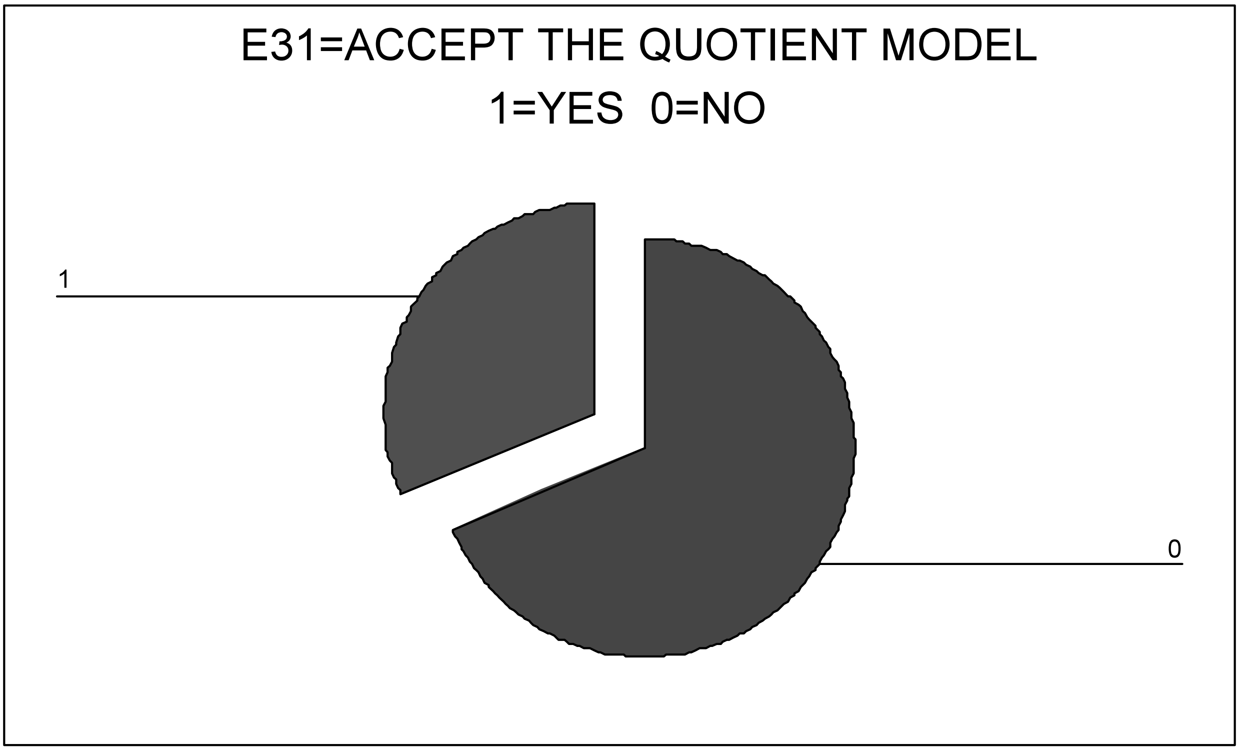
7.5 ΕΡΜΗΝΕΙΕΣ ΤΟΥ ΡΗΤΟΥ 2/3 ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ.

Η ερώτηση 3 του ερωτηματολογίου προσπαθεί να διαπιστώσει σε ποιό βαθμό οι μαθητές αποδέχονται συγκεκριμένες ερμηνείες του ρητού αριθμού 2/3. Από τις απαντήσεις των μαθητών εμμέσως, πλήν σαφώς είναι δυνατόν να εξαχθούν συμπεράσματα για το πόσο γνωρίζουν ή αγνοούν τις διάφορες ερμηνείες του συμβόλου 2/3 και κατά συνέπεια, συγκεκριμένα, παραδεκτά σήμερα μοντέλα του ρητού αριθμού.

Εισάγουμε 8 διχοτομικές μεταβλητές, Ε31,Ε32, Ε33, Ε34, Ε35, Ε36, Ε37, δηλ. όσες είναι και οι υποερωτήσεις της 3 με τιμές 1=ΝΑΙ και 0=ΟΧΙ ως προς την αποδοχή ή μή της κάθε πρότασης.

α) Αποδοχή της πρώτης πρότασης της ερώτησης 3 (μεταβλητή Ε31).

ΓΡΑΦΗΜΑ 16.



ΠΙΝΑΚΑΣ 10

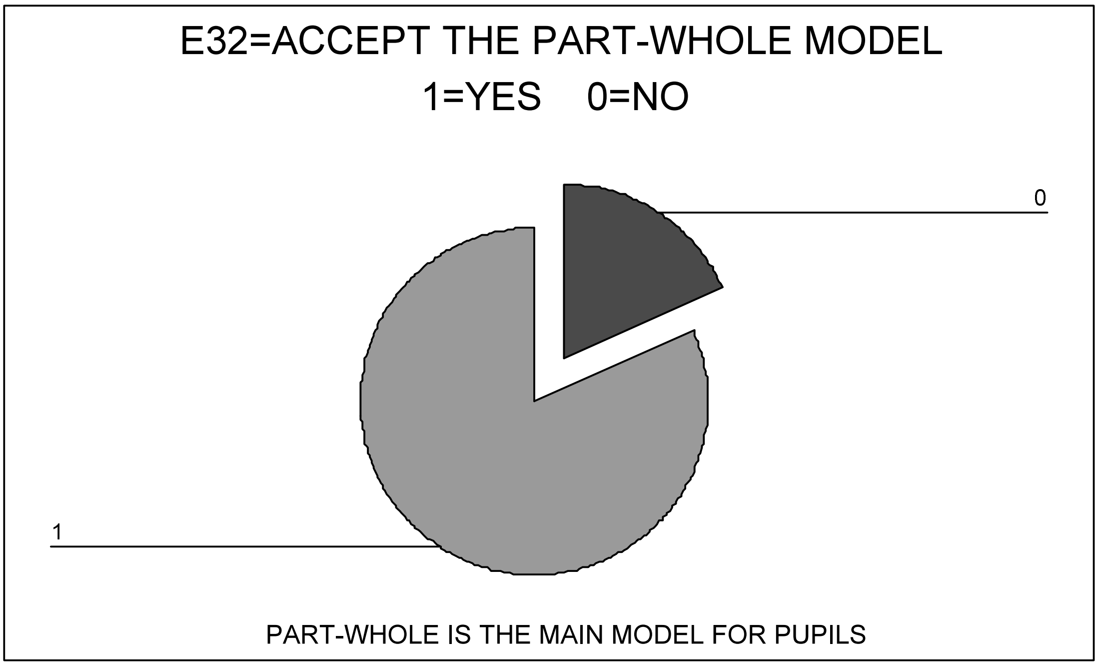
E31_

Value Label	Value	Frequency	Percent	Valid Percent	Cum Percent
	0	250	65.6	68.7	68.7
	1	114	29.9	31.3	100.0
	.	17	4.5	Missing	
	Total	381	100.0	100.0	

Valid cases 364 Missing cases 17_

β) Αποδοχή της δεύτερης πρότασης της ερώτησης 3 (μεταβλητή Ε32).

ΓΡΑΦΗΜΑ 17.



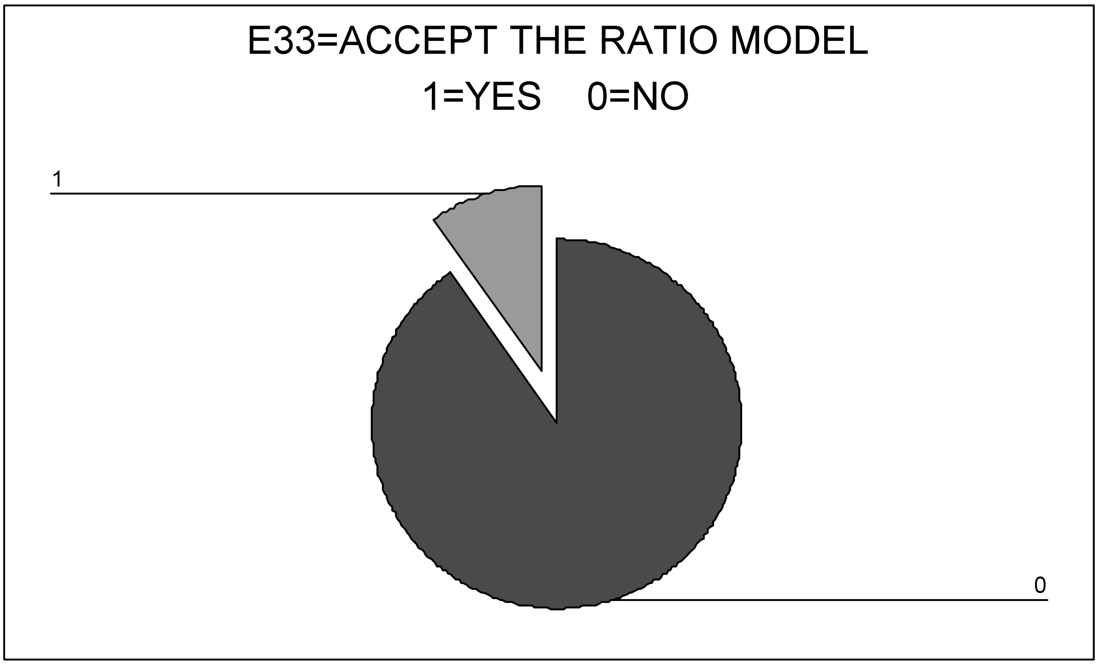
ΠΙΝΑΚΑΣ 11

E32_

Value Label	Value	Frequency	Percent	Valid Percent	Cum Percent
	0	67	17.6	18.4	18.4
	1	297	78.0	81.6	100.0
	.	17	4.5	Missing	
	Total	381	100.0	100.0	

Valid cases 364 Missing cases 17_

γ) Αποδοχή της τρίτης πρότασης της ερώτησης 3 (μεταβλητή E33).
ΓΡΑΦΗΜΑ 18.



ΠΙΝΑΚΑΣ 12

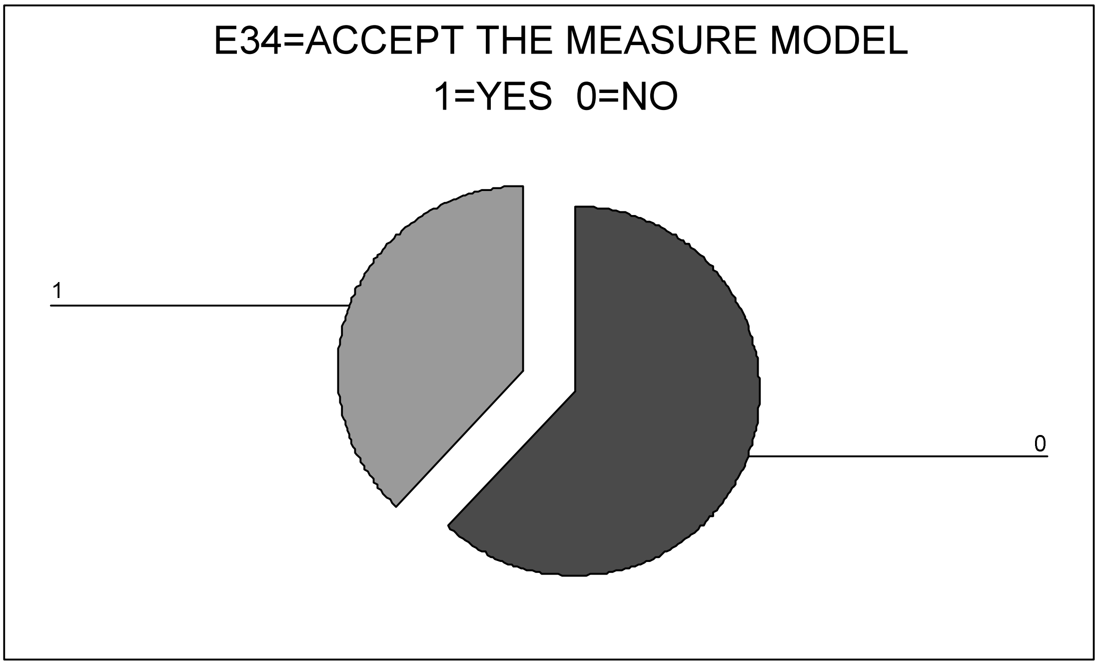
E33_

Value Label	Value	Frequency	Percent	Valid Percent	Cum Percent
	0	344	90.3	90.3	90.3
	1	37	9.7	9.7	100.0
	Total	381	100.0	100.0	

Valid cases 381 Missing cases 0

γ) Αποδοχή της τέταρτης πρότασης της ερώτησης 3 (μεταβλητή Ε34).

ΓΡΑΦΗΜΑ 19.



ΠΙΝΑΚΑΣ 13

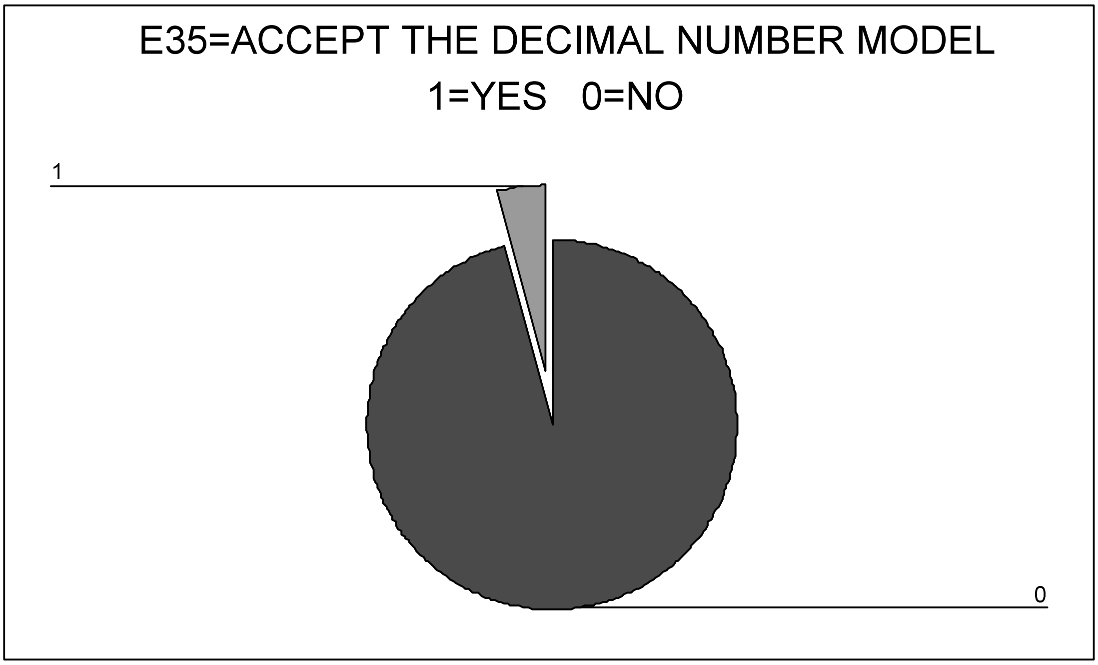
E34

Value Label	Value	Frequency	Percent	Valid Percent	Cum Percent
	0	225	59.1	61.8	61.8
	1	139	36.5	38.2	100.0
	.	17	4.5	Missing	
	Total	381	100.0	100.0	

Valid cases 364 Missing cases 17

ε) Αποδοχή της πέμπτης πρότασης της ερώτησης 3 (μεταβλητή Ε35).

ΓΡΑΦΗΜΑ 20.



ΠΙΝΑΚΑΣ 14

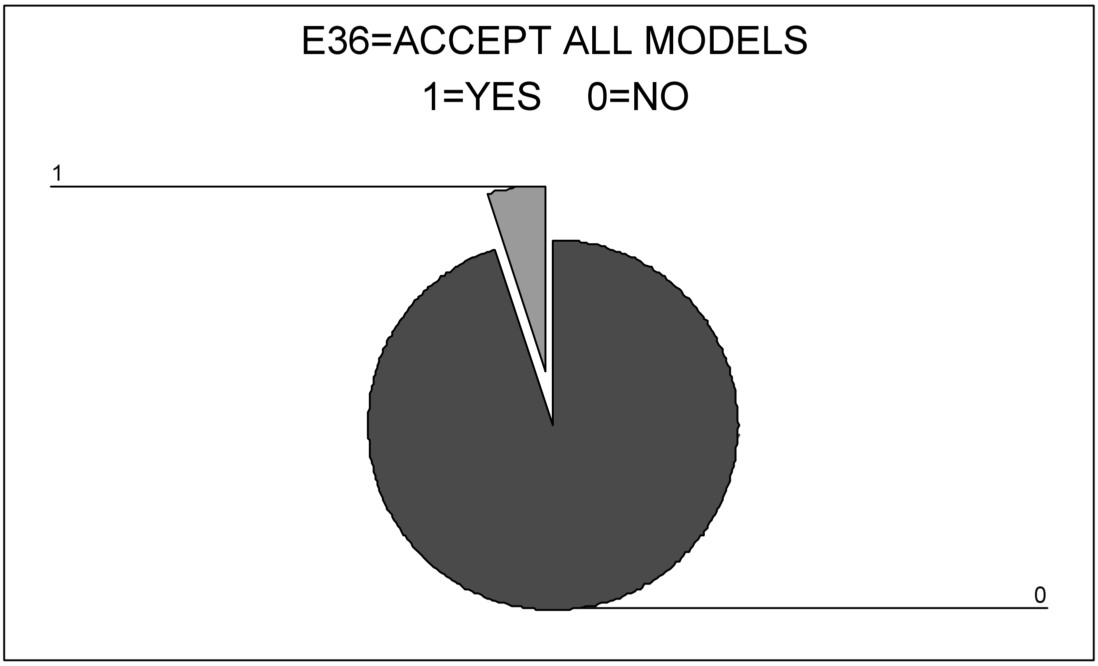
E35_

Value Label	Value	Frequency	Percent	Valid Percent	Cum Percent
	0	349	91.6	95.9	95.9
	1	15	3.9	4.1	100.0
	.	17	4.5	Missing	
	Total	381	100.0	100.0	

Valid cases 364 Missing cases 17_

στ) Αποδοχή της έκτης πρότασης της ερώτησης 3 (μεταβλητή Ε36).

ΓΡΑΦΗΜΑ 21.



ΠΙΝΑΚΑΣ 15

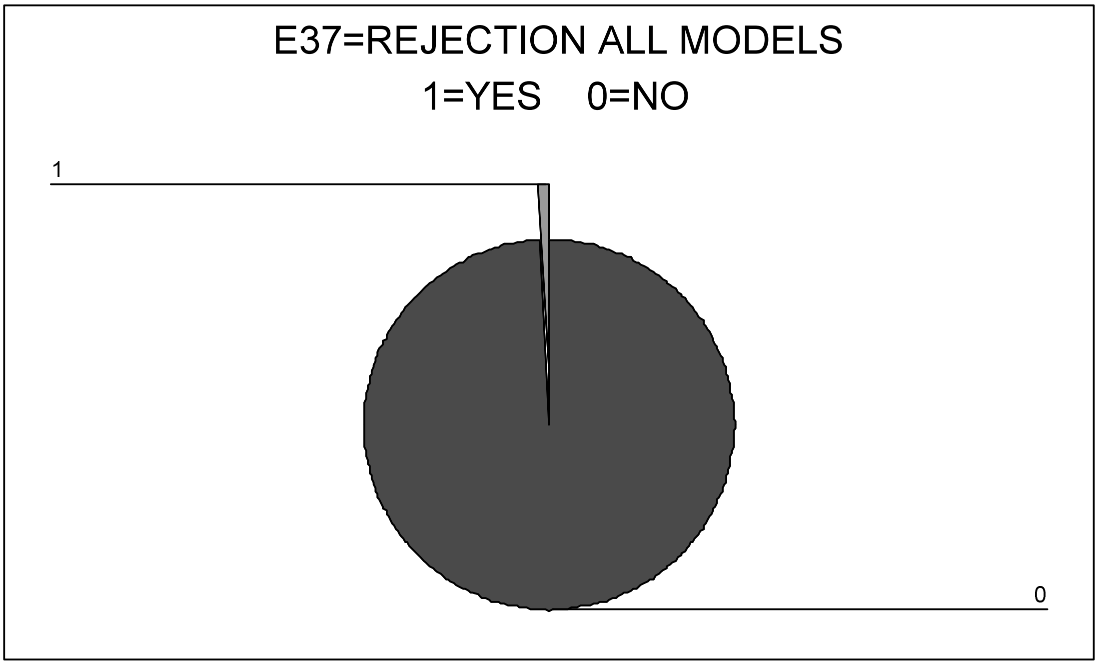
E36

Value Label	Value	Frequency	Percent	Valid Percent	Cum Percent
	0	346	90.8	95.1	95.1
	1	18	4.7	4.9	100.0
	.	17	4.5	Missing	
	Total	381	100.0	100.0	

Valid cases 364 Missing cases 17

ζ) Αποδοχή της έβδομης πρότασης της ερώτησης 3 (μεταβλητή Ε37).

ΓΡΑΦΗΜΑ 22.



ΠΙΝΑΚΑΣ 16

E37

Value Label	Value	Frequency	Percent	Valid Percent	Cum_ Percent_
	0	361	94.8	99.2	99.2_
	1	3	.8	.8	100.0_
	.	17	4.5	Missing_	
		-------	-------	-------_	
	Total	381	100.0	100.0_	

Valid cases 364 Missing cases 17_

Αν θέλαμε να έχουμε μιά συγκεντρωτική εικόνα για την ερώτηση 3 θα πρέπει να αναγάγουμε το σύνολο όλων των ερωτήσεών της σε κατηγορίες μιάς και μόνο μεταβλητής με το όνομα E3ALL. Αυτό μπορεί να γίνει με τη διαδικασία MULTI RESPONSE του στατιστικού προγράμματος SPSS.

ΠΙΝΑΚΑΣ 17

Group E3ALL_
(Value tabulated = 1)_

Dichotomy label	Name	Count	Pct of Responses	Pct of Cases_
	E31	114	18.3	31.3_
	E32	297	47.7	81.6_
	E33	37	5.9	10.2_
	E34	139	22.3	38.2_
	E35	15	2.4	4.1_
	E36	18	2.9	4.9_
	E37	3	.5	.8_
		-------	-----	-----_
Total responses		623	100.0	171.2_

17 missing cases; 364 valid cases_

Η κατανομή των ποσοστών της μεταβλητής E3ALL με το φύλο έχει ως εξής (ΠΙΝΑΚΑΣ 18):

ΠΙΝΑΚΑΣ 18

* * * C R O S S T A B U L A T I O N * * *_

E3ALL (tabulating 1)_
by SEX_

SEX_

Count __

_ Row_
_ Total_
_ 1 _ 2 __

E3ALL				
	E31	67	47	114
				31.3
	E32	144	153	297
				81.6
	E33	21	16	37
				10.2
	E34	78	61	139
				38.2
	E35	6	9	15
				4.1
	E36	8	10	18
				4.9
	E37	0	3	3
				.8
	Column	185	179	364
	Total	50.8	49.2	100.0

Percents and totals based on respondents

364 valid cases; 17 missing cases

Η κατανομή των ποσοστών της μεταβλητής E3ALL με την ηλικία έχει ως εξής (ΠΙΝΑΚΑΣ 19):

ΠΙΝΑΚΑΣ 19

* * * C R O S S T A B U L A T I O N * * *

E3ALL (tabulating 1)
by AGE

AGE

	Count	11	12	Row Total
E3ALL				
	E31	72	42	114
				31.3
	E32	209	88	297
				81.6
	E33	26	11	37
				10.2

			Row Total
E34	106	33	139
			38.2
E35	13	2	15
			4.1
E36	10	8	18
			4.9
E37	3	0	3
			.8
Column	259	105	364
Total	71.2	28.8	100.0

Percents and totals based on respondents_

364 valid cases; 17 missing cases_

Η κατανομή των ποσοστών της μεταβλητής E3ALL με το σχολείο έχει ως εξής (ΠΙΝΑΚΑΣ 20):

ΠΙΝΑΚΑΣ 20

* * * C R O S S T A B U L A T I O N * * *_

E3ALL (tabulating 1)_
by SCHOOL_

SCHOOL_

Count

E3ALL	8	9	10	11	12	Row Total
E31	23	7	26	27	31	114
						31.3
E32	63	39	50	71	74	297
						81.6
E33	7	1	10	7	12	37
						10.2
E34	48	6	27	30	28	139
						38.2
E35	5	3	0	2	5	15
						4.1
E36	2	3	4	4	5	18
						4.9

E37	1	0	0	1	1	3
						.8
Column Total	81	48	61	80	94	364
	22.3	13.2	16.8	22.0	25.8	100.0

Percents and totals based on respondents_

364 valid cases; 17 missing cases_

Η κατανομή των ποσοστών της μεταβλητής E3ALL με το τμήμα έχει ως εξής (ΠΙΝΑΚΑΣ 21):

ΠΙΝΑΚΑΣ 21

* * * C R O S S T A B U L A T I O N * * *_

E3ALL (tabulating 1)_
by TEACHER_

Page 1 of 3_

TEACHER_

Count

E3ALL	2	3	4	5	6	Row Total
E31	4	19	1	12	4	108
						30.8
E32	15	25	17	21	17	287
						81.8
E33	5	2	1	3	3	37
						10.5
E34	7	12	5	6	9	136
						38.7
E35	0	0	1	1	0	15
						4.3
E36	0	4	3	0	0	17
						4.8
E37	0	0	0	0	0	3
						.9
Column	17	32	22	21	19	351

Total	4.8	9.1	6.3	6.0	5.4	100.0

Percents and totals based on respondents

(Continued)

* * * C R O S S T A B U L A T I O N * * *

E3ALL (tabulating 1)
by TEACHER

Page 2 of 3

TEACHER

E3ALL Count	7	8	9	10	11	Row Total
E31	6	9	6	6	6	108 30.8
E32	23	23	22	27	26	287 81.8
E33	2	2	0	2	8	37 10.5
E34	8	13	1	11	8	136 38.7
E35	4	1	2	0	1	15 4.3
E36	0	4	0	0	1	17 4.8
E37	1	1	0	0	0	3 .9
Column	30	28	26	31	32	351
Total	8.5	8.0	7.4	8.8	9.1	100.0

Percents and totals based on respondents

(Continued)

_
_
_
* * * C R O S S T A B U L A T I O N * * *_

_
E3ALL (tabulating 1)_
by TEACHER_

_
Page 3 of 3_
TEACHER_

_
Count __

E3ALL	12	13	14	15	16	Row Total
E31	5	0	10	8	12	108
						30.8
E32	11	13	17	14	16	287
						81.8
E33	0	0	4	2	3	37
						10.5
E34	16	6	11	16	7	136
						38.7
E35	1	3	0	1	0	15
						4.3
E36	1	0	1	0	3	17
						4.8
E37	0	1	0	0	0	3
						.9
Column	18	16	22	17	20	351
Total	5.1	4.6	6.3	4.8	5.7	100.0

_
Percents and totals based on respondents_

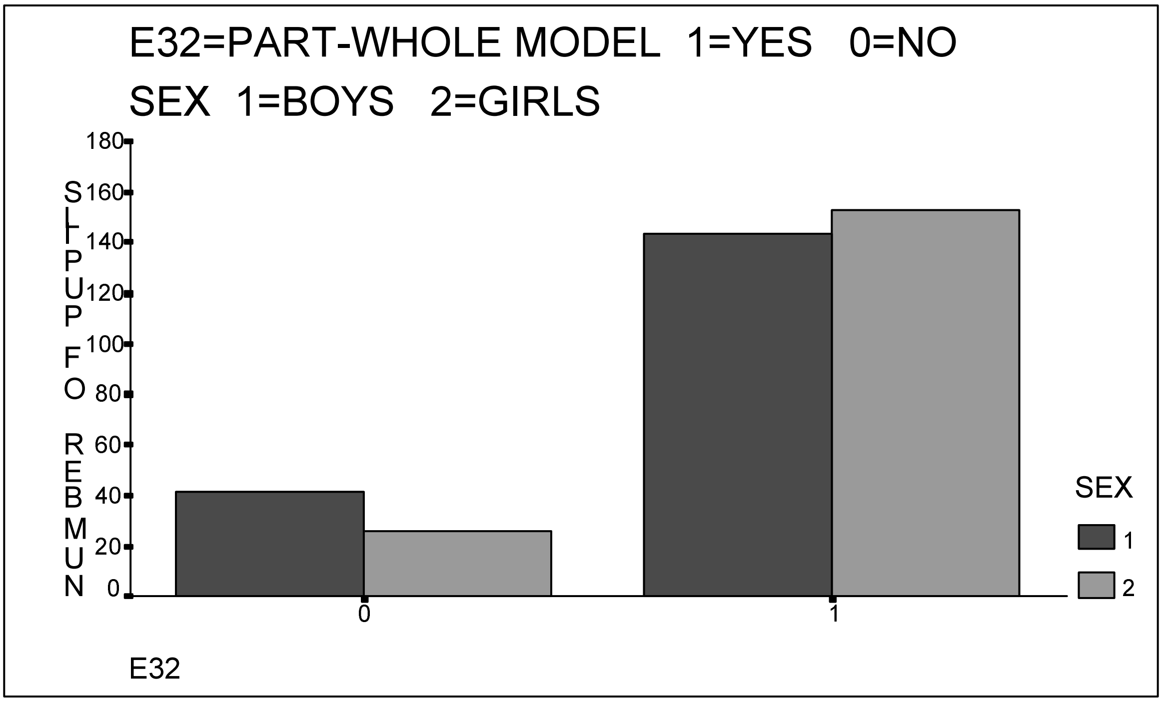
_
351 valid cases; 30 missing cases_

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ 21

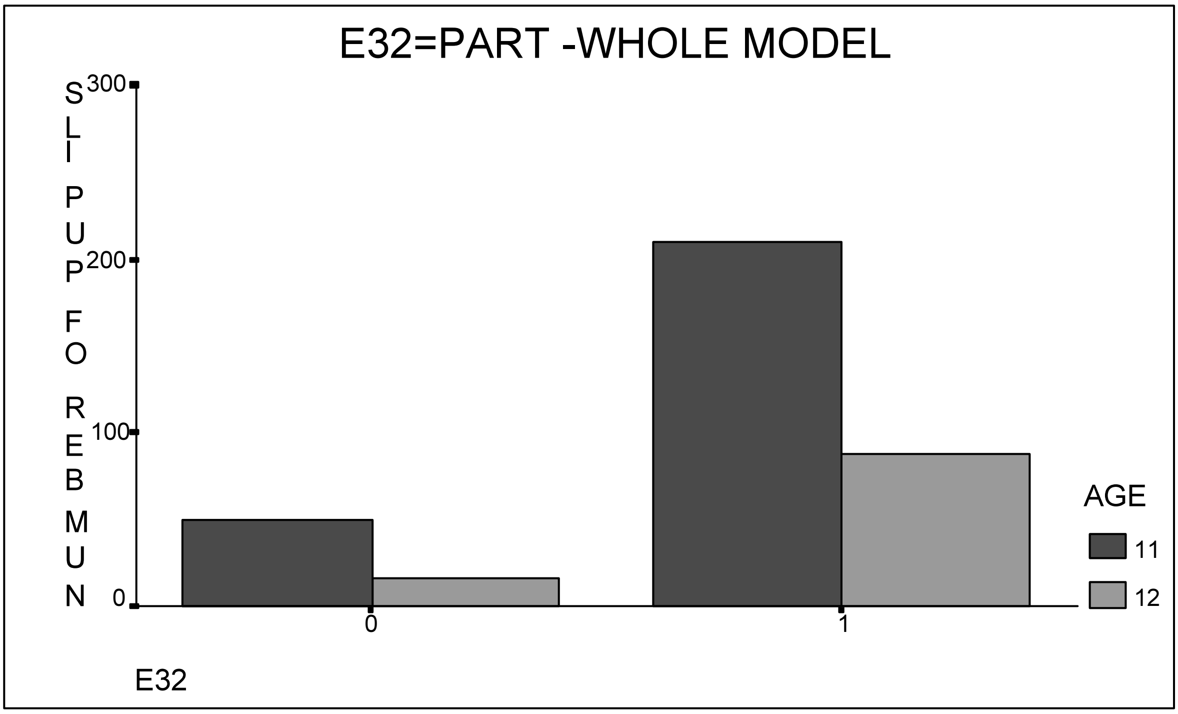
Από τη μελέτη της ερώτησης 3 προκύπτει ότι οι μαθητές αποδέχονται την ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος- όλου σε πολύ μεγάλο βαθμό, 81.6 % ενώ φαίνεται επίσης να αναγνωρίζουν σε μικρότερο βαθμό το κλάσμα σαν μιά διαίρεση 31.3 %. Να σημειώσουμε με προσοχή ότι η αποδοχή της τέταρτης ερμηνείας του κλάσματος 38.2 % δεν οδηγεί ευθέως στο συμπέρασμα ότι γνωρίζουν στο βαθμό αυτό την ερμηνεία του κλάσματος ως σημείο πάνω στη γραμμή αριθμών (number line) ή ως διανύσματος. Ο τρόπος με τον οποίο αναγκαστήκαμε να διατυπώσουμε την τέταρτη ερώτηση είναι πιθανό να φέρνει στο μυαλό των μαθητών το μέρος- όλου μοντέλο. Η ερώτηση αναφέρει σαφώς το "χωρίζουμε και παίρνουμε" και έτσι εξηγείται κατά τη γνώμη μας το σχετικά σημαντικό ποσοστό 38.2 %.

Θα είναι όμως καλό από την άποψη της αντικειμενικότητας να συσχετίσουμε τα αποτελέσματα της ερώτησης 1 του ερωτηματολογίου με εκείνα της ερώτησης 3β σε ό,τι αφορά το περίφημο μέρος- όλου μοντέλο.

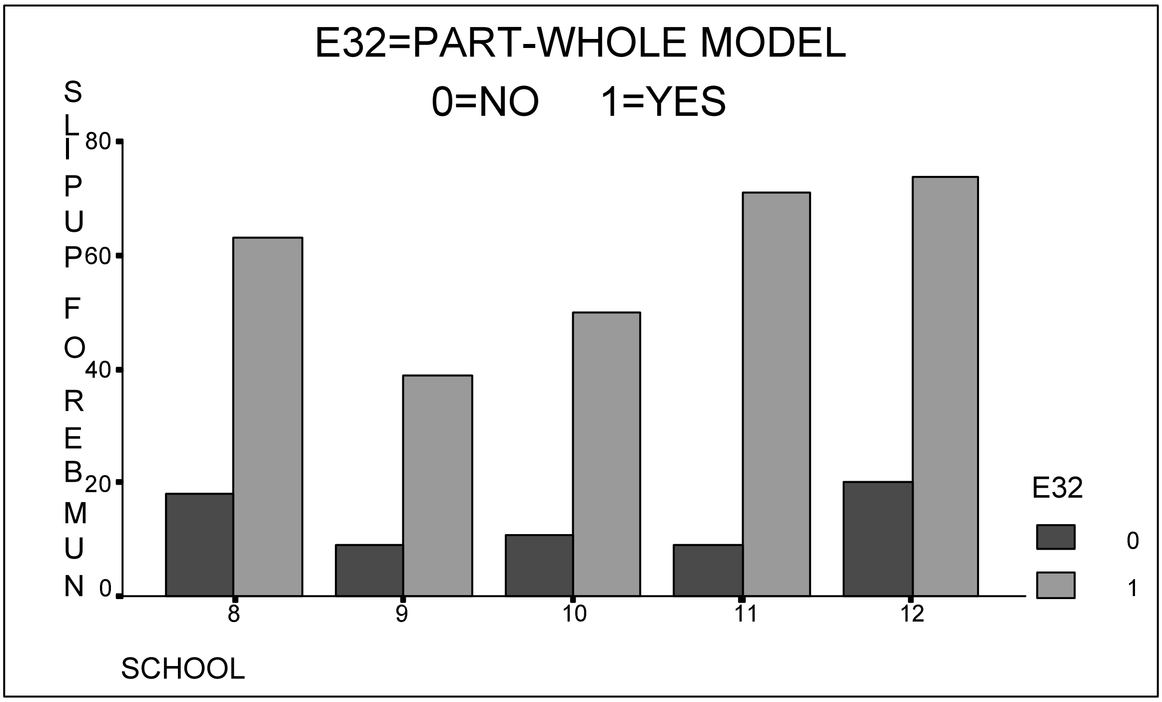
ΓΡΑΦΗΜΑ 23.



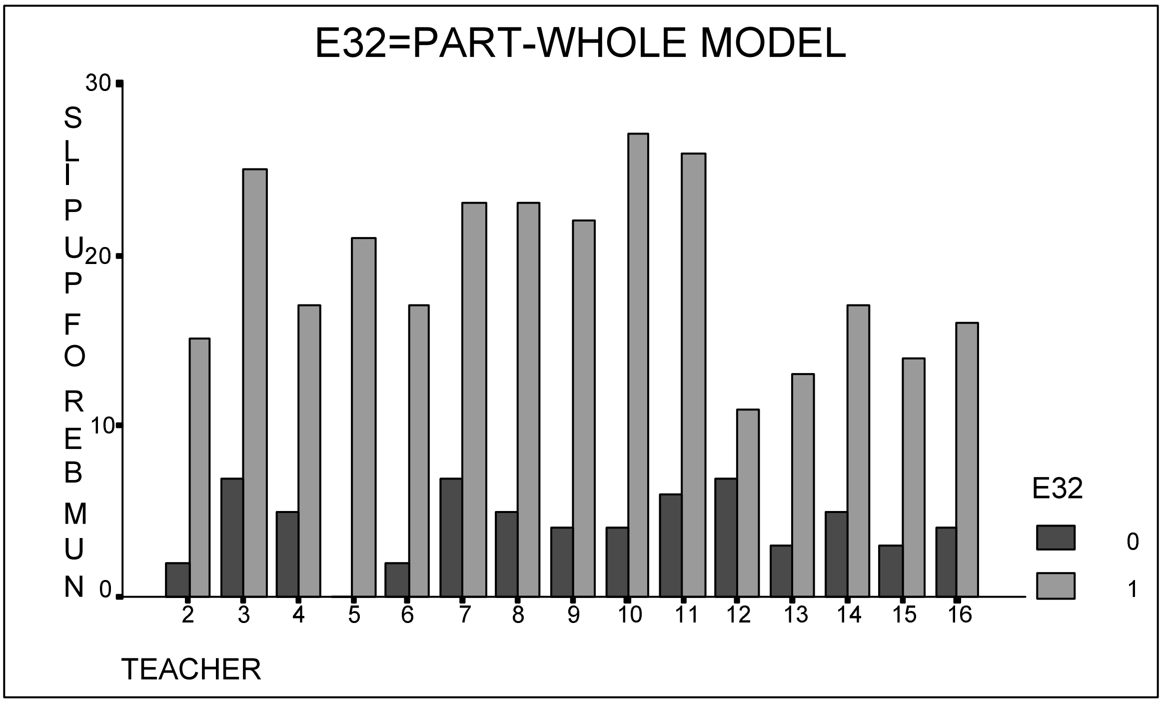
ΓΡΑΦΗΜΑ 24.



ΓΡΑΦΗΜΑ 25.



ΓΡΑΦΗΜΑ 26.

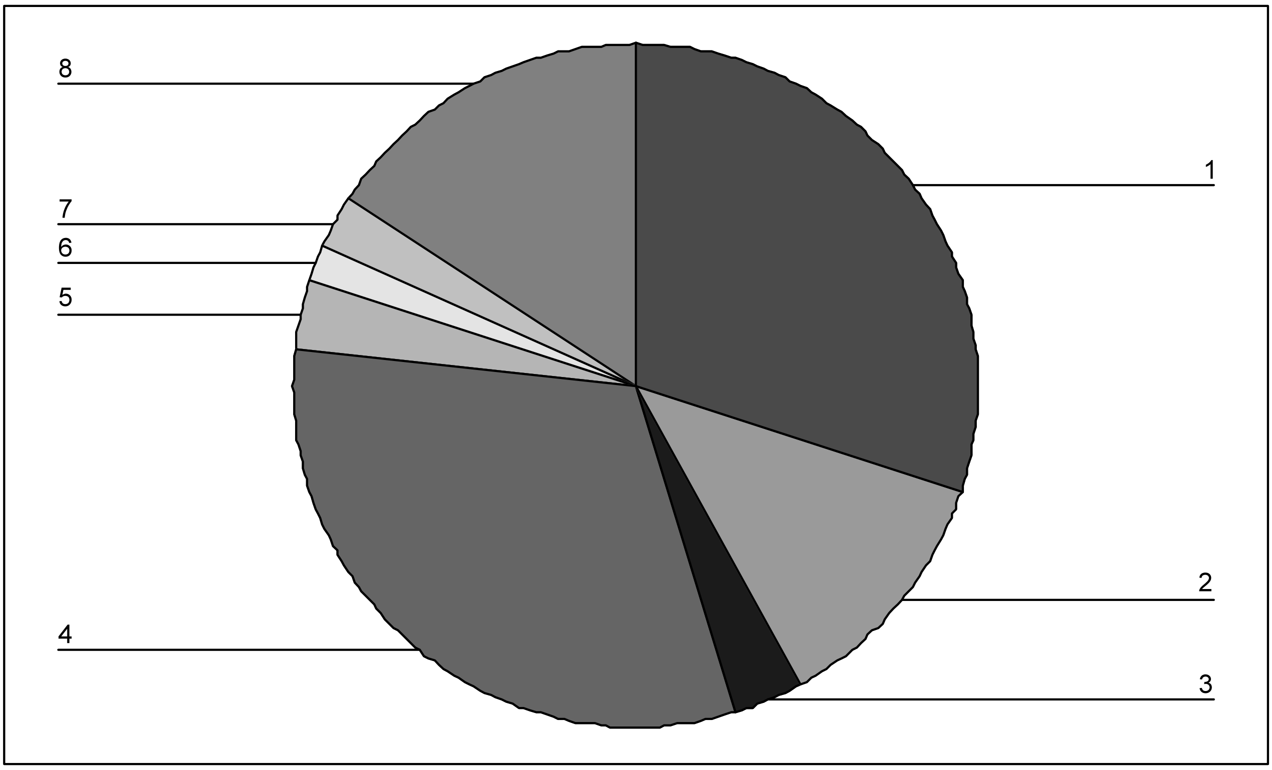


Τα αποτελέσματα των δύο ερωτήσεων 1 και 3β που αναφέραμε συνάδουν σε ικανοποιητικό βαθμό. Ενισχύεται έτσι το συμπέρασμα για την κυριαρχία του μέρους-όλου μοντέλου στη σκέψη των μαθητών.

7.6 ΠΡΟΤΙΜΗΣΕΙΣ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ 3/4.

Εάν ορίσουμε για την ερώτηση 6 του ερωτηματολογίου μιά μεταβλητή με το όνομα Ε6 και τιμές 1,2...8 δηλ. όσα και τα αναπαραστικά σχήματα του αριθμού 3/4 που προτείνονται τότε τα αποτελέσματα μας δίνονται από το ΓΡΑΦΗΜΑ 27. Βλέπουμε δηλ. ότι τα "κατ'εξοχήν" γεωμετρικά σχήματα 1 (=α) και 4(=δ) είναι πολύ ψηλά στις προτιμήσεις των μαθητών. Αν θέλουμε ακριβή ποσοστά τότε θα πρέπει να συμβουλευτούμε τον ΠΙΝΑΚΑ 22.

ΓΡΑΦΗΜΑ 27.



ΠΙΝΑΚΑΣ 22

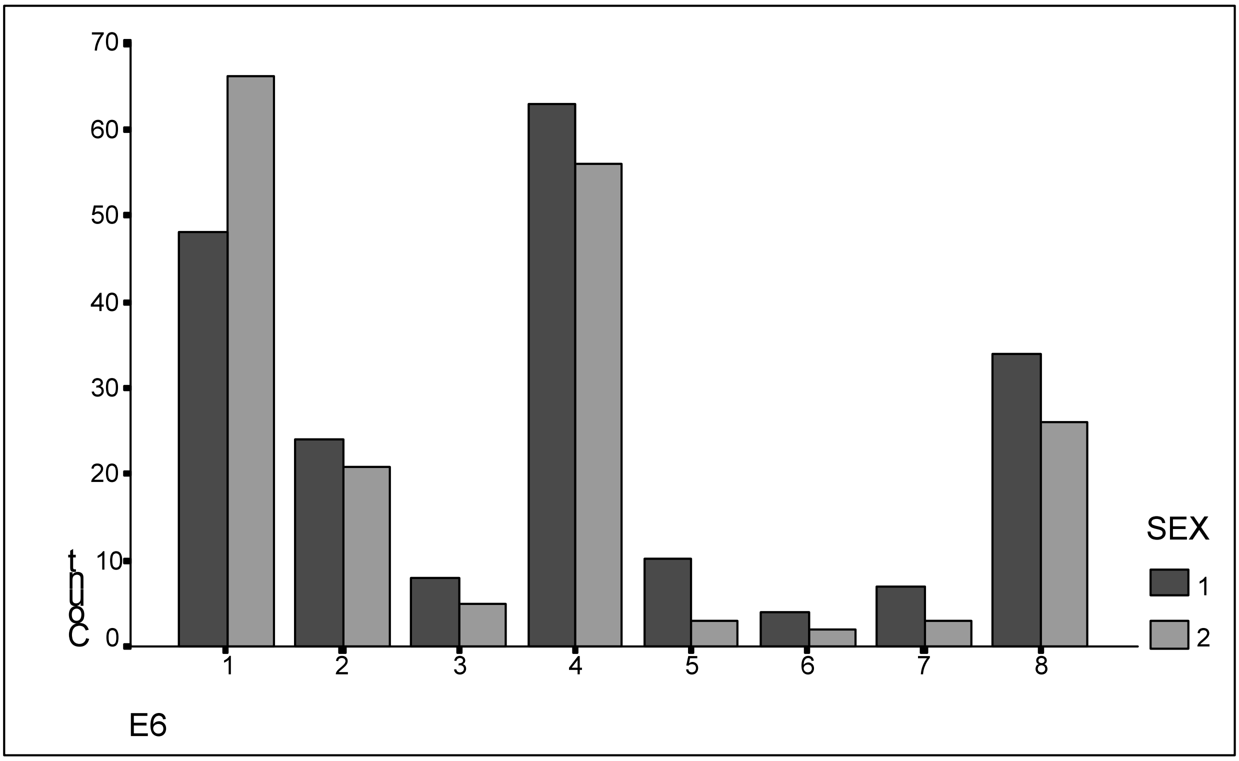
E6

Value Label	Value	Frequency	Percent	Valid Percent	Cum Percent
	1	114	29.9	30.0	30.0
	2	45	11.8	11.8	41.8
	3	13	3.4	3.4	45.3
	4	119	31.2	31.3	76.6
	5	13	3.4	3.4	80.0
	6	6	1.6	1.6	81.6
	7	10	2.6	2.6	84.2
	8	60	15.7	15.8	100.0
	9	1	.3	Missing	
	Total	381	100.0	100.0	

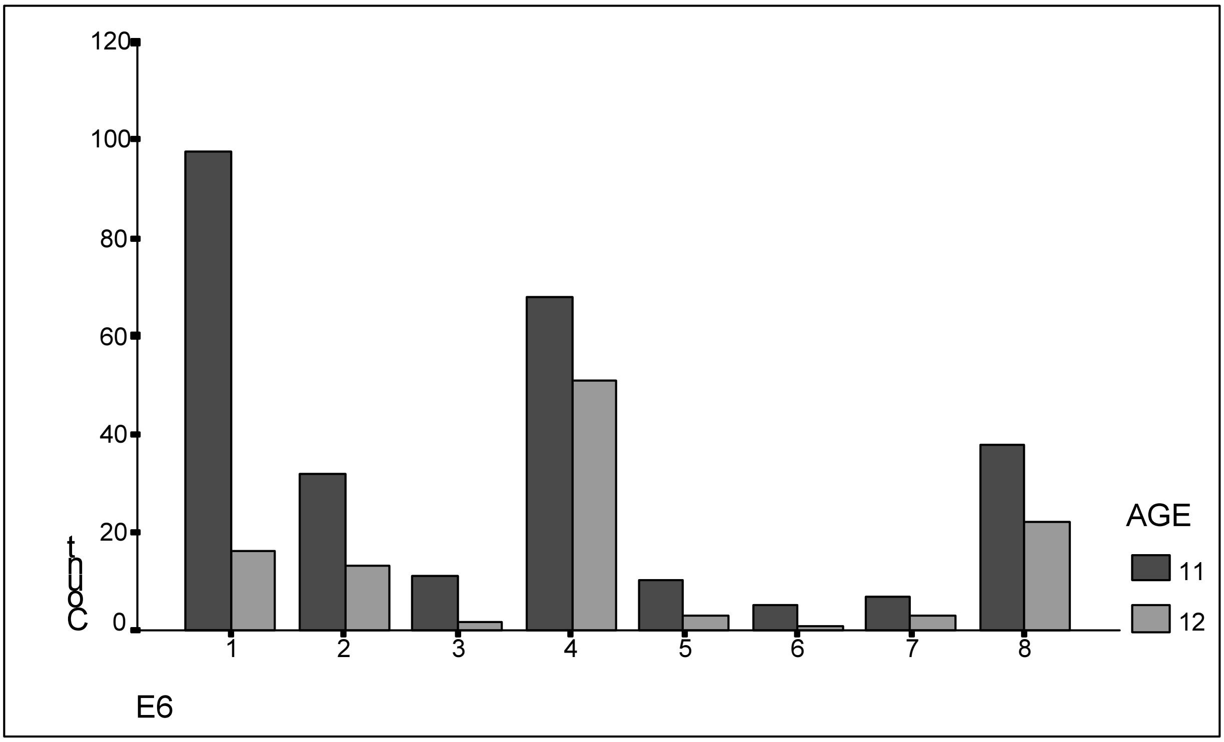
Valid cases 380 Missing cases 1

Στο ίδιο συμπέρασμα για την προτίμηση των μαθητών στα γεωμετρικά σχήματα κατέληξε και η Kerslake (1986), στην έρευνά της στην Αγγλία. Στην περίπτωσή μας τα γεωμετρικά σχήματα υπάρχουν στο διδακτικό βιβλίο, προβάλονται ως παραδείγματα από τους δασκάλους όπως οι ίδιοι μαρτυρούν και κατά συνέπεια μπορούμε να προβούμε σε κάποια εξήγηση.
Αυτό που προκαλεί εντύπωση είναι το ποσοστό 15.8 % το οποίο εμφανίζει πρόσθετη δυσκολία να εξηγηθεί. Να υποθέσουμε ότι οι μαθητές το εκλαμβάνουν σαν μιά διαίρεση του 3 διά του 4 ; Αν δεχτούμε αυτή την εξήγηση βλέπουμε κι ένα αντίστοιχα σημαντικό ποσοστό 31.3 % να αποδέχεται την ερμηνεία της διαίρεσης (quotient) για το κλάσμα. Στο σημείο αυτό είναι ευκαιρία να ομολογήσουμε ότι η διαγνωστική δύναμη ενός ερωτηματολογίου ως εργαλείου έρευνας δεν μπορεί να ξεπεράσει κάποια όρια. Πιστεύουμε ότι θα έπρεπε να ληφθούν συνεντεύξεις από μερίδα των 60 παιδιών που έδωσαν την απάντηση αυτή ώστε να προσεγγίσουμε με πιό άμεσο τρόπο το εύρημα.

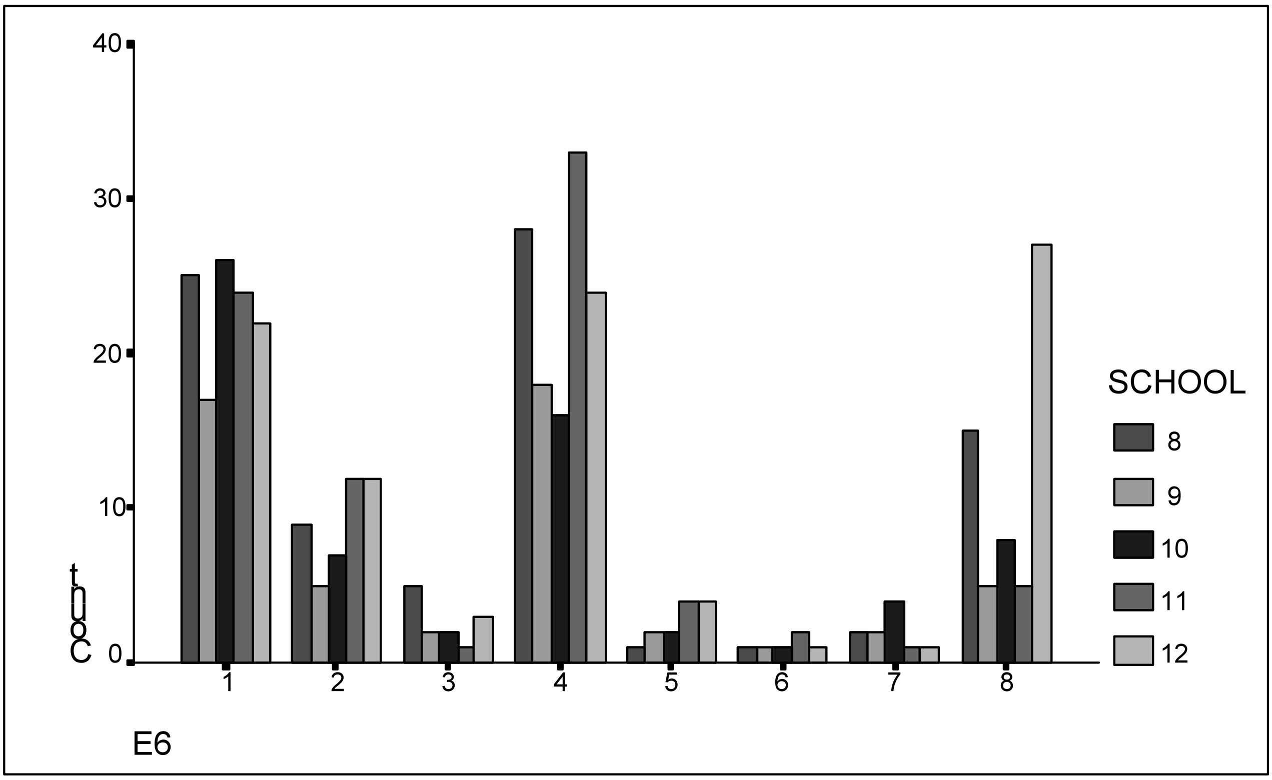
ΓΡΑΦΗΜΑ 28.



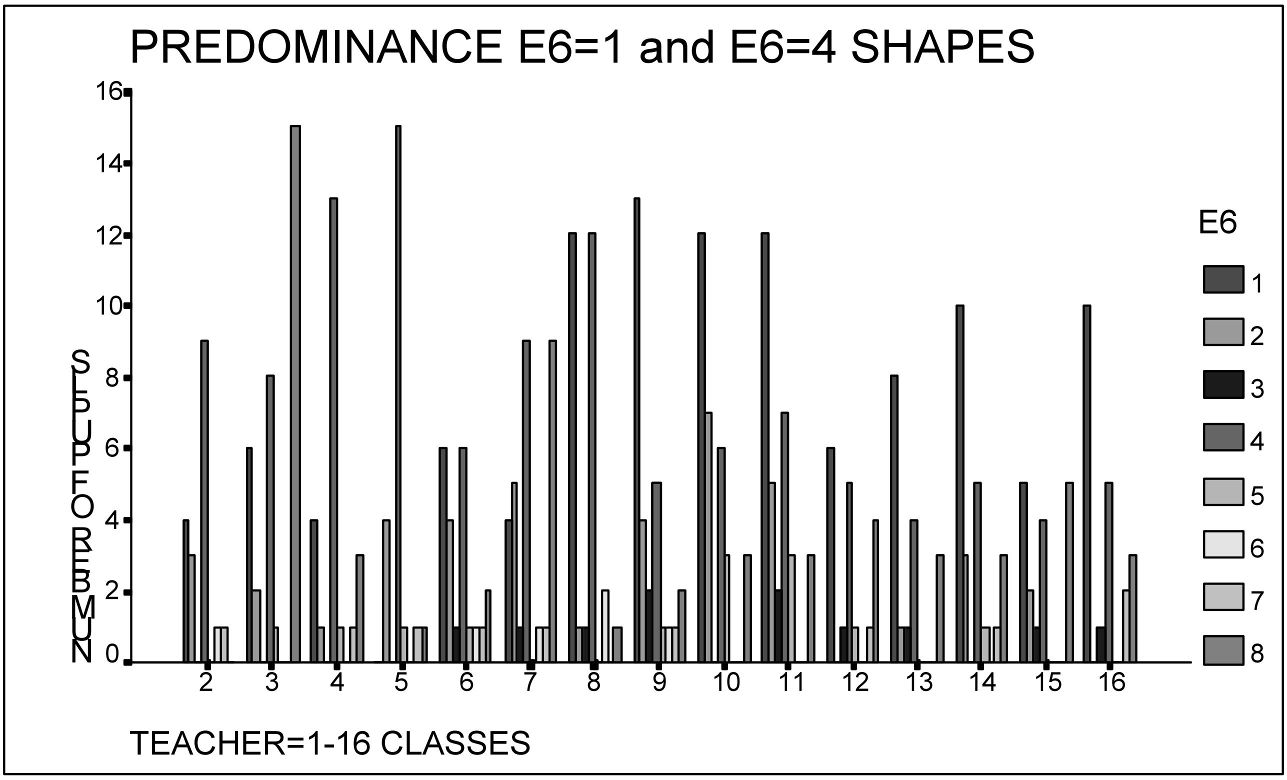
ΓΡΑΦΗΜΑ 29.


120
100
80
60
40
20
0
Count
1
2
3
4
5
6
7
8
E6
AGE
11
12

ΓΡΑΦΗΜΑ 30.


40
30
20
10
0
Count
1
2
3
4
5
6
7
8
E6
SCHOOL
8
9
10
11
12

ΓΡΑΦΗΜΑ 31.



Από τα γραφήματα 28,29,30 και 31 παρατηρούμε τη διαφοροποίηση των προτιμήσεων (ως προς τα αναπαραστατικά μοντέλα του 3/4) των μαθητών ανάλογα με το φύλο τους, την ηλικία, το σχολείο και το τμήμα τους.

7.7 Η ΑΝΤΙΘΕΣΗ ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΔΙΚΑΣΤΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ

Στο κεφ. 1 έχουμε ορίσει το περιεχόμενο των όρων εννοιολογική και διαδικαστική γνώση. Θεωρούμε εδώ ότι οι ερωτήσεις 2,4,5,8 και 10 εκφράζουν εννοιολογική γνώση για το δείγμα των 381 μαθητών. Θεωρούμε ότι η ερώτηση 12 με τις 4 βασικές πράξεις εκφράζει διαδικαστική γνώση. Αν συμβολίσουμε με VE το μέσο όρο της απόδοσης στις θεωρούμενες εννοιολογικές ερωτήσεις και V12 το μέσο όρο της απόδοσης στη θεωρούμενη διαδικαστική ερώτηση, τότε με τη μέθοδο t-test pairs βλέπουμε τη διαφορά ανάμεσα στις δύο κατηγορίες γνώσης. Από τον ΠΙΝΑΚΑ 23 παρατηρούμε ότι υπάρχει στατιστικώς σημαντική διαφορά σε επίπεδο κάτω του 1 ‰ ανάμεσα στην εννοιολογική και τη διαδικαστική γνώση. Ο μέσος όρος για την πρώτη εμφανίζεται να είναι 2.56 ενώ για τη δεύτερη 4.52.

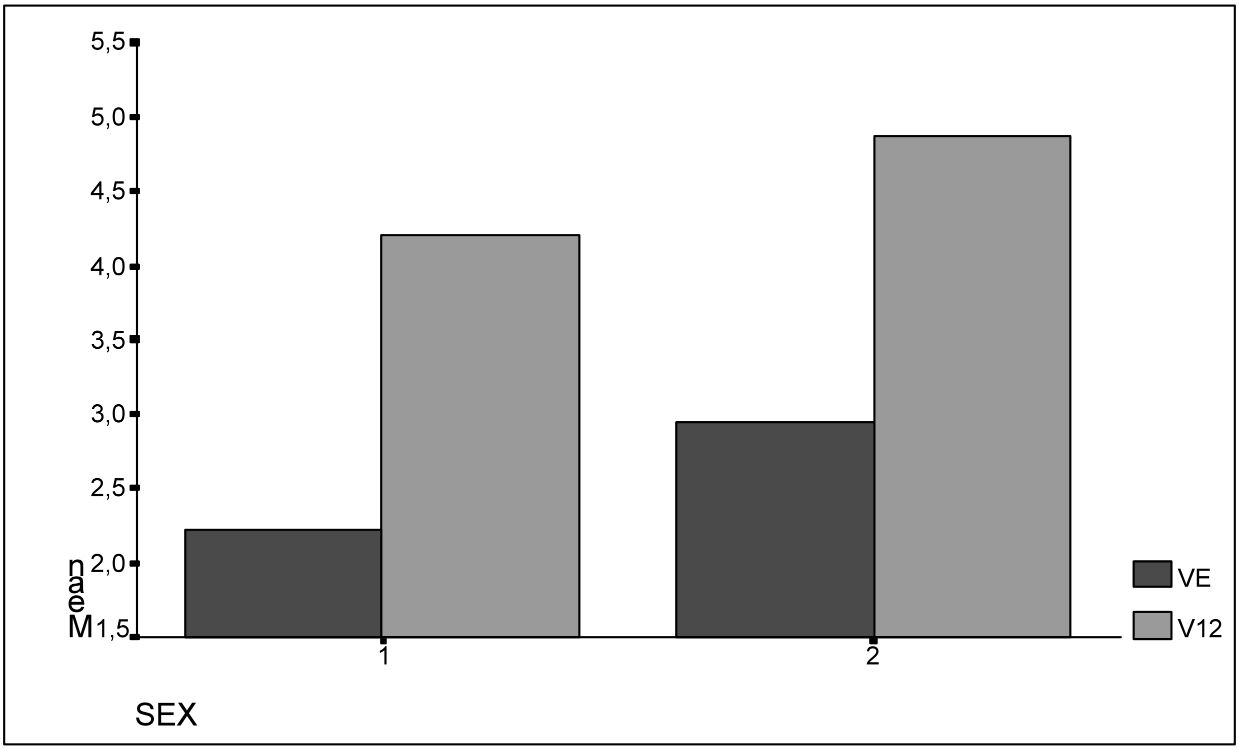
ΠΙΝΑΚΑΣ 23

- - - t-tests for paired samples - - -

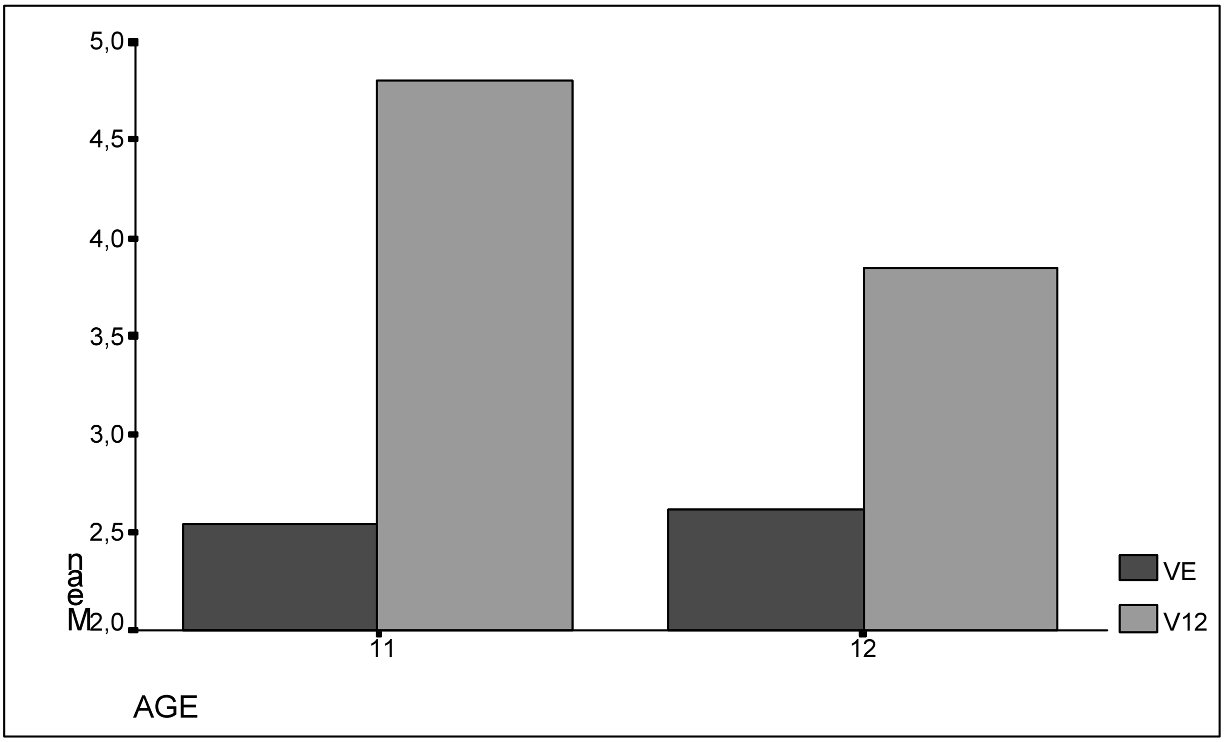
Variable	Number of pairs	Corr	2-tail Sig	Mean	SD	SE of Mean
VE				2.5690	2.079	.107
	381	.464	.000			
V12				4.5276	3.148	.161

```
_
_
        Paired Differences      ”_
  Mean       SD      SE of Mean  ”     t-value    df  2-tail Sig_
‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘’‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘‘
                                                                                          _
 -1.9585      2.857      .146    ”      -13.38    380      .000_
 95% CI (-2.246; -1.671)          ”_
```

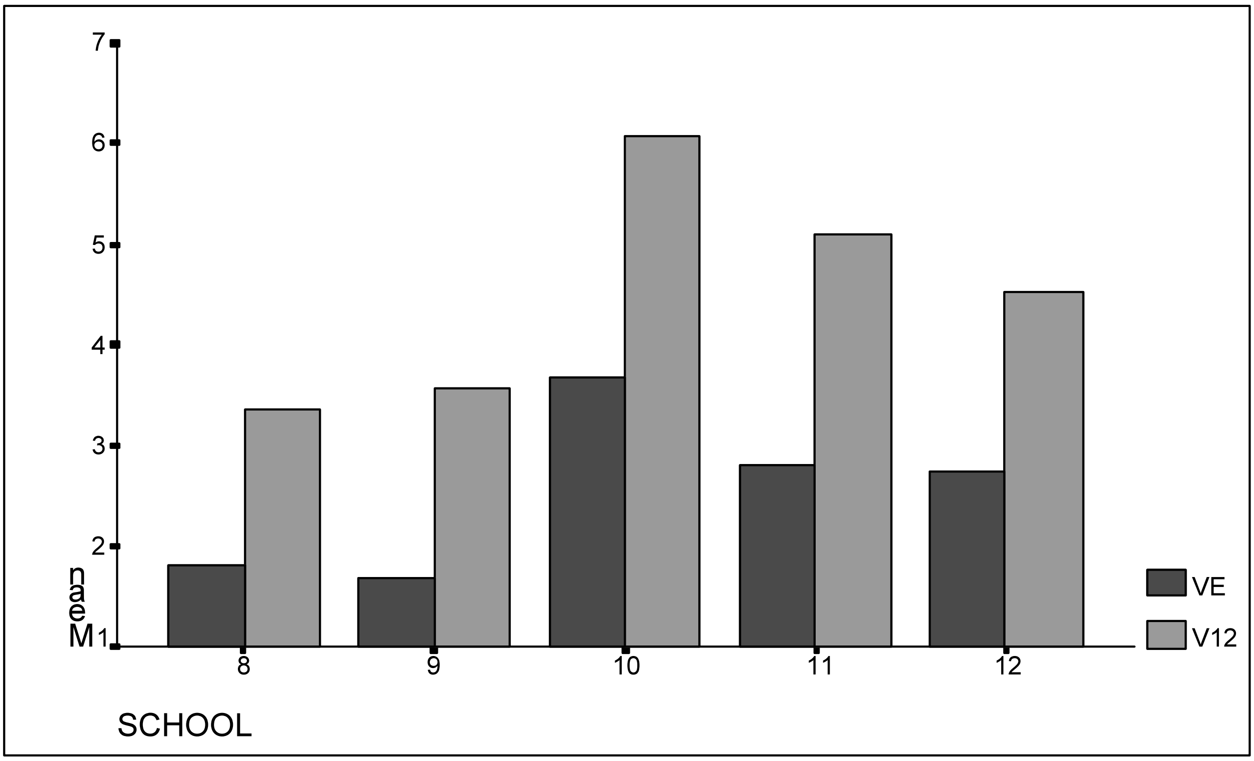
ΓΡΑΦΗΜΑ 32.



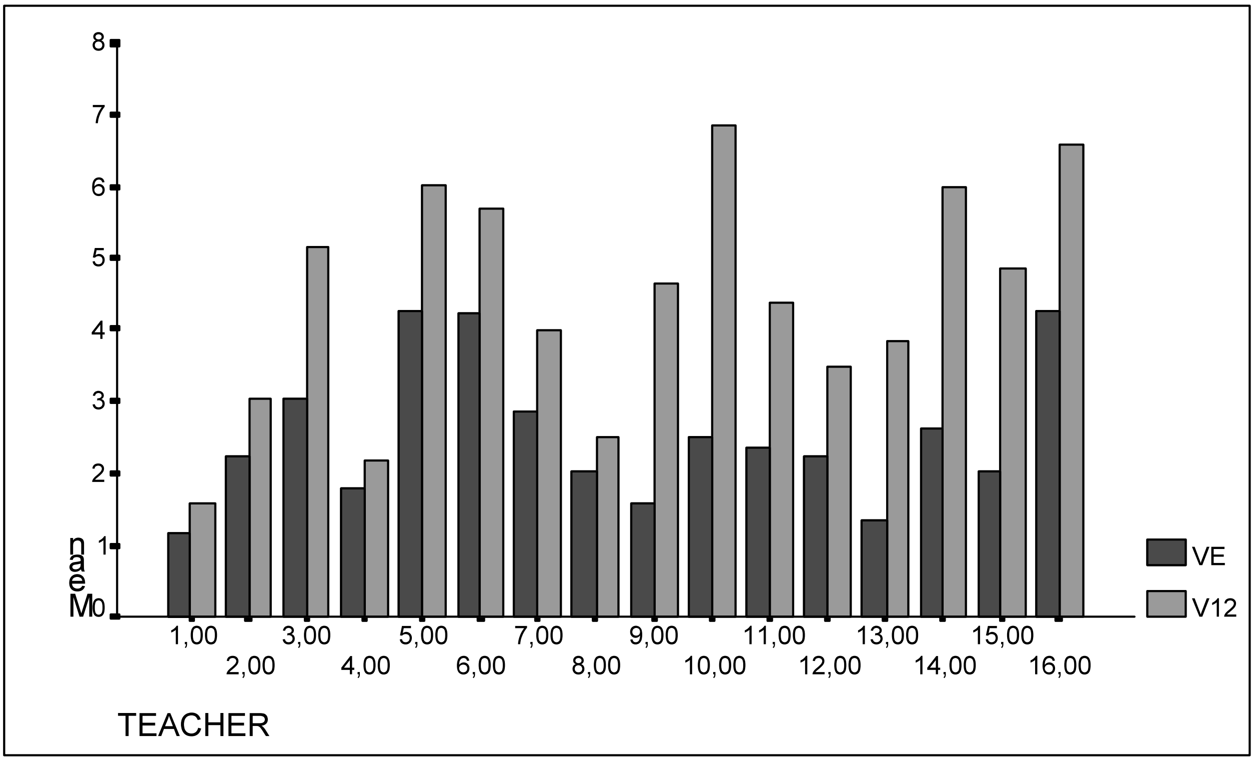
ΓΡΑΦΗΜΑ 33.



ΓΡΑΦΗΜΑ 34.



ΓΡΑΦΗΜΑ 35.



Η παρατηρούμενη διαφορά ανάμεσα στην εννοιολογική και τη διαδικαστική γνώση υπέρ της δεύτερης διατηρείται περίπου στα ίδια επίπεδα με το φύλο (περίπου κατα 2 μονάδες βλ. ΓΡΑΦΗΜΑ 32), εμφανίζεται αυξημένη στην ηλικία των 11 ετών ενώ μειώνεται στην ηλικία των 12 (βλ. ΓΡΑΦΗΜΑ 33), διατηρείται σταθερή από σχολείο σε σχολείο (ΓΡΑΦΗΜΑ 34) και τέλος υπάρχει αυξομειούμενη από αίθουσα σε αίθουσα διδασκαλίας (ΓΡΑΦΗΜΑ 35).

Ας δούμε τώρα ευρήματα από τη διεθνή εμπειρία. Οι Carpenter et al., (1980), Brown et al., (1988a και 1988b), βρήκαν μετά από μελέτες σε εθνική κλίμακα ότι 9 χρονοι, 13 χρονοι και 17 χρονοι στις Ηνωμένες Πολιτείες έχουν μικρή ικανότητα στο να κάνουν διάφορους υπολογισμούς με τα κλάσματα και ελάχιστη εννοιολογική γνώση γι' αυτά. Μήπως, ακριβώς το ίδιο απεικονίζουν τα αποτελέσματα της δικής μας έρευνας; Διότι είναι φανερό ότι και η διαδικαστική και η εννοιολογική γνώση, είναι αμφότερες, σαφώς σε πολύ χαμηλά επίπεδα (ο μέσος όρος τους στο συνολικό δείγμα δεν ξεπερνά το 5 δηλ. το μέσο της κλίμακας βαθμολογίας). Ωστόσο υπάρχει μεταξύ τους στατιστικώς σημαντική διαφορά.

Κατά συνέπεια ο προσανατολισμός του μικρόκοσμου που φιλοδοξεί να αντιμετωπίσει το πρόβλημα των κλάσμάτων θα πρέπει να είναι περισσότερο εννοιολογικός.

7.8 Η ΑΝΤΙΘΕΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ (WORD PROBLEM) ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΗΣ (EXERCISE).

Αν θεωρήσουμε δύο από τις τέσσερις βασικές πράξεις κλασμάτων την πρόσθεση και την αφαίρεση σαν απλές ασκήσεις από τη μιά και και από την άλλη αυτές τις ίδιες πράξεις τις συνθέσουμε σε πρόβλημα, δηλ. κατασκευάσουμε πρόβλημα που να τις εμπλέκει είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε την επίδοση των μαθητών στις δύο περιπτώσεις. Η ερώτηση 8 του ερωτηματολογίου και οι δύο πρώτες υποερωτήσεις της ερώτησης 12 μπορούν να μας βοηθήσουν να εξετάσουμε το ζήτημα αυτό. Συμβολίζουμε με VPROB την επίδοση στο πρόβλημα της ερώτησης 8 και VASK=(V12A+V12B)/2 την επίδοση στις δυό πρώτες υποερωτήσεις της ερώτησης

12. Τότε με τη μέθοδο του t-test pairs έχουμε τα αποτελέσματα του ΠΙΝΑΚΑ 24. Στον πίνακα αυτό παρατηρούμε ότι υπάρχει στατιστικώς σημαντική διαφορά ανάμεσα στις δύο επιδόσεις (σε διπλή κατεύθυνση Sign=0.000).

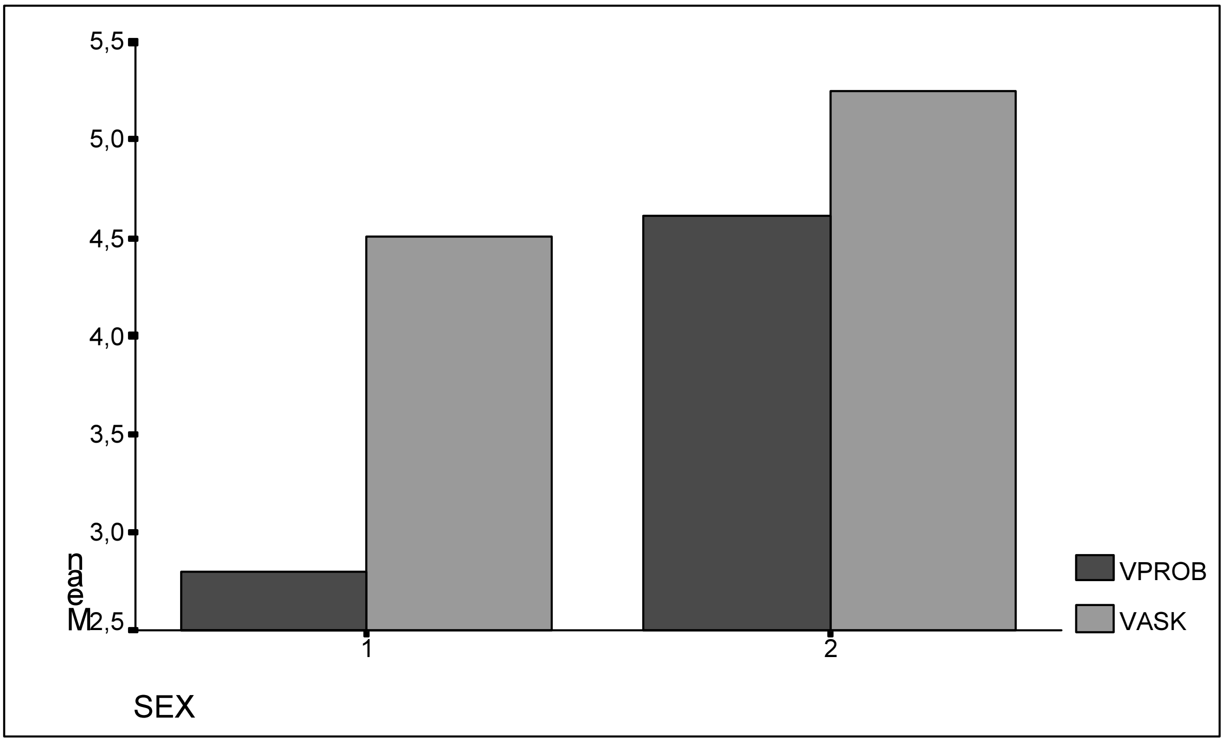
ΠΙΝΑΚΑΣ 24

- - - t-tests for paired samples - - -

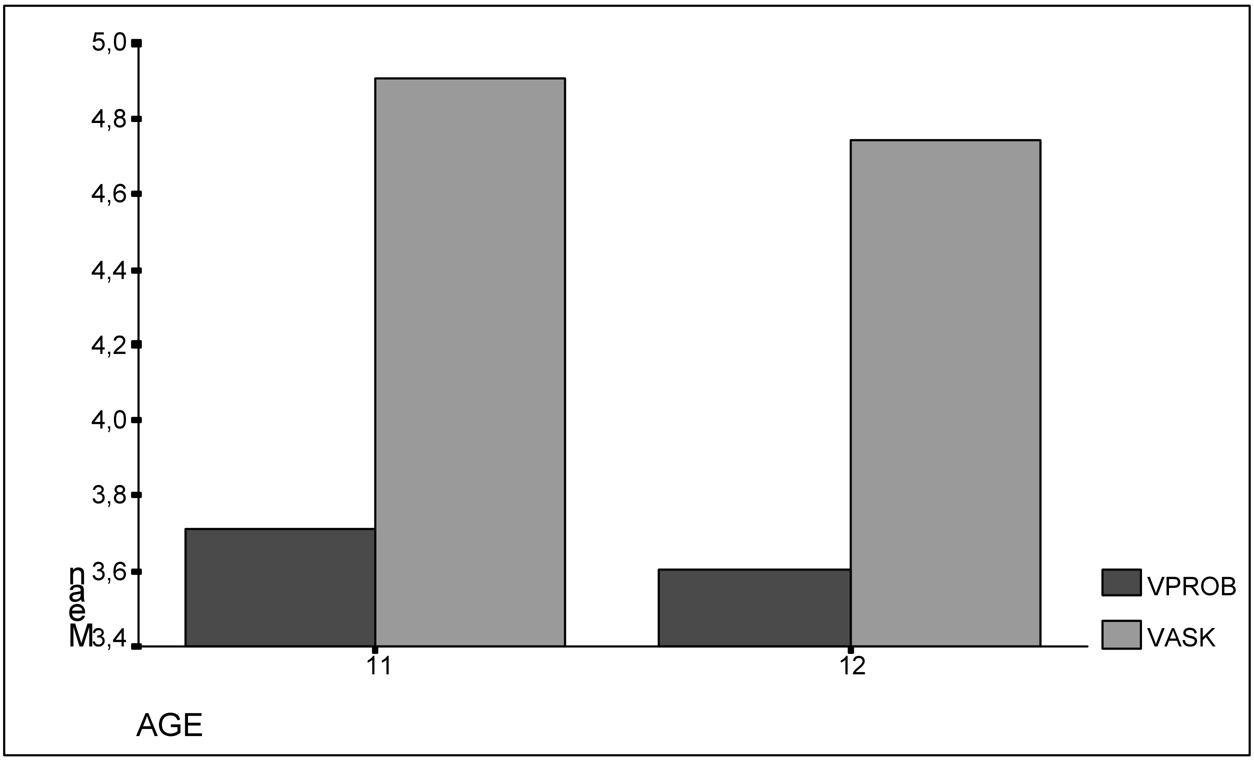
Variable	Number of pairs	Corr	2-tail Sig	Mean	SD	SE of Mean
VPROB				3.6815	4.186	.245
	292	.594	.000			
VASK				4.8630	4.265	.250

Paired Differences Mean	SD	SE of Mean	t-value	df	2-tail Sig
-1.1815	3.808	.223	-5.30	291	.000
95% CI (-1.620; -.743)					

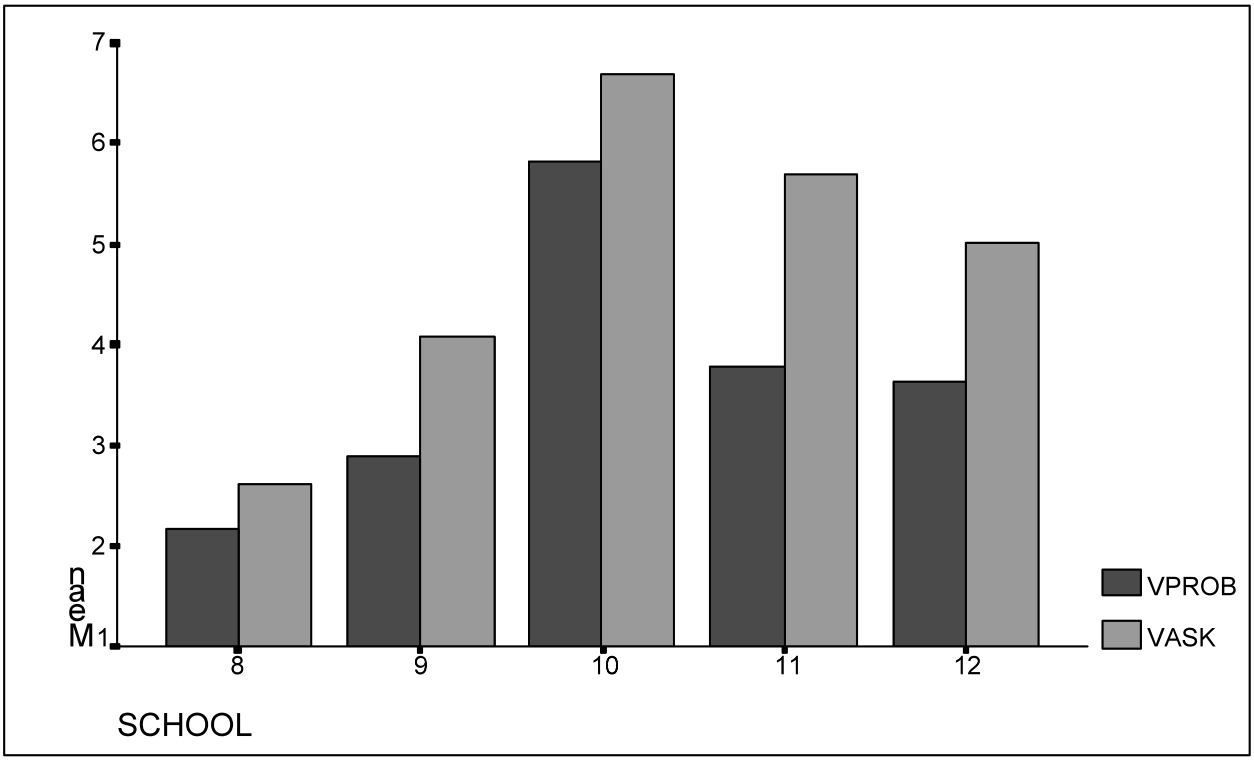
ΓΡΑΦΗΜΑ 36.



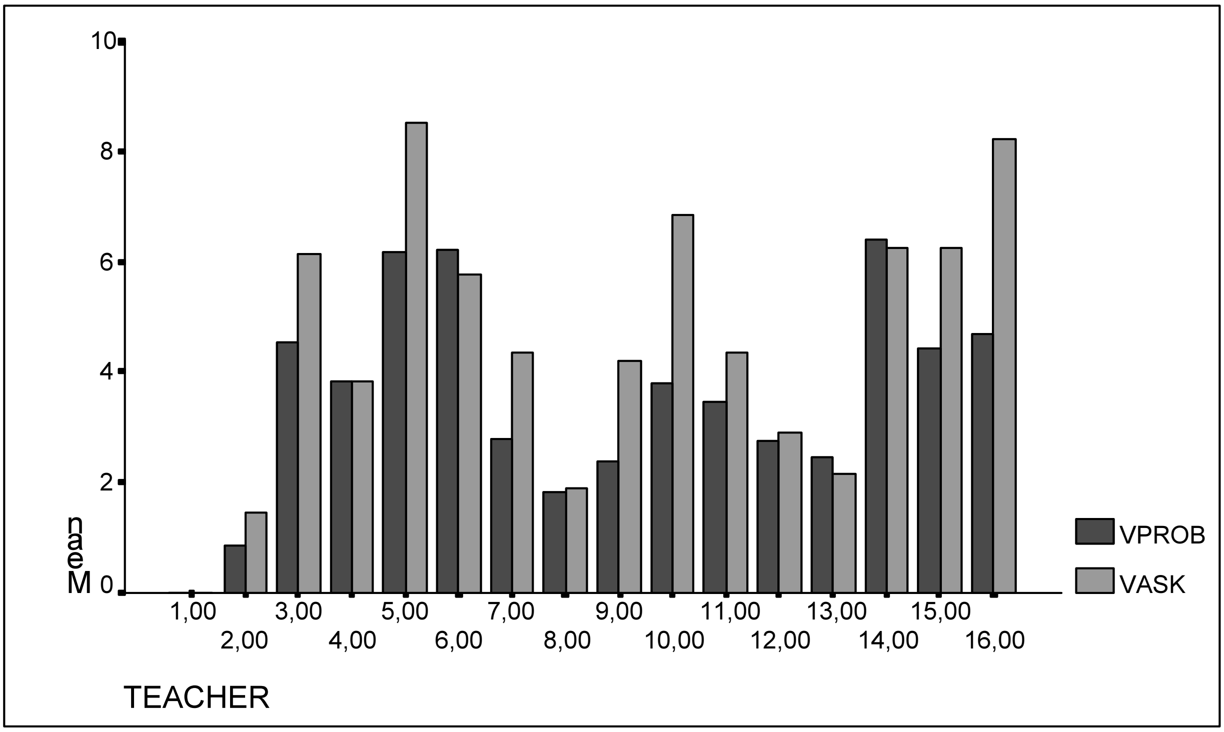
ΓΡΑΦΗΜΑ 37.



ΓΡΑΦΗΜΑ 38.



ΓΡΑΦΗΜΑ 39.

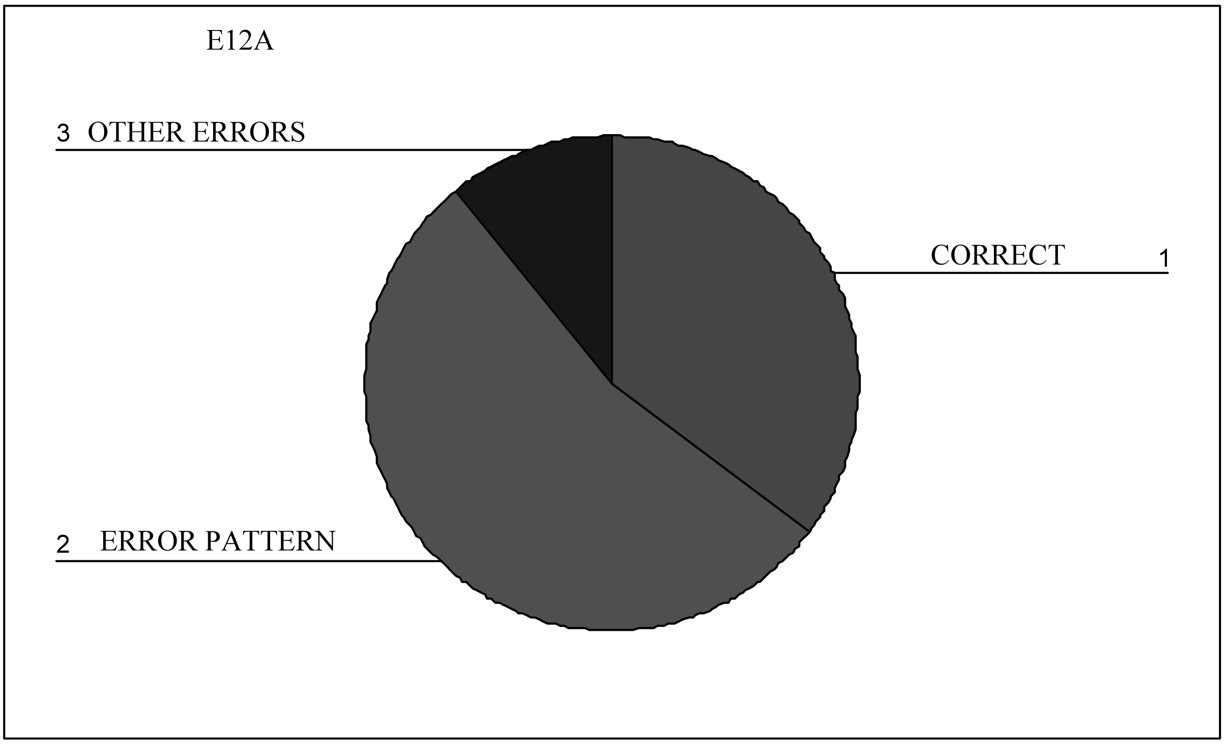


Η παρατηρούμενη διαφορά υπέρ της ικανότητας του να λύσουν άσκηση τα παιδιά διατηρείται σε όλες τις περιπτώσεις όπως μας δείχνουν τα γραφήματα 36, 37 και 38. Στο γράφημα 39 υπάρχουν μικρές αποκλίσεις όπως για παράδειγμα τα τμήματα 6 και 14 τα οποία δεν μπορούν να ανατρέψουν τη γενική εικόνα. Το γενικό αποτέλεσμα στην εξεταζόμενη διαφορά αποτελεί κατά τη γνώμη μας ένα επιπλέον δείκτη ότι το μεγάλο ζητούμενο στην υπόθεση των κλασμάτων, αλλά και της μαθηματικής παιδείας πιθανά, είναι η εννοιολογική γνώση.

7.9 Η ΑΝΑΔΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΩΝ ΛΑΘΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΣΤΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ.

α)Σε αρκετά σημεία αυτής της εργασίας έχουμε αναφερθεί στο πέρασμα από το αριθμητικό σύστημα των ακεραίων σε εκείνο των κλασματικών αριθμών και στις γνωστικές επιπτώσεις που το συνοδεύουν. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ένα συστηματικό, γνωστό από παλιά λάθος (error pattern) στην πρόσθεση των κλασμάτων. Ας συμβολίσουμε την πρώτη υποερώτηση της ερωτήσεως 12 του ερωτηματολογίου με τη μεταβλητή Ε12Α και τιμές 1=έκανε σωστά την πρόσθεση, 2=έκανε λάθος την πρόσθεση και συγκεκριμένα πρόσθεσε τους αριθμητές και έφτιαξε τον αριθμητή του κλάσματος- αποτέλεσμα και μετά πρόσθεσε παρονομαστές και έφτιαξε τον παρονομαστή του κλάσματος- αποτέλεσμα, 3=έκανε άλλου είδους λάθος, 9=δεν απάντησε καν.

ΓΡΑΦΗΜΑ 40.



ΠΙΝΑΚΑΣ 25

E12A

Value Label	Value	Frequency	Percent	Valid Percent	Cum Percent
	1	126	33.1	35.3	35.3
	2	192	50.4	53.8	89.1
	3	39	10.2	10.9	100.0
	9	24	6.3	Missing	
	Total	381	100.0	100.0	

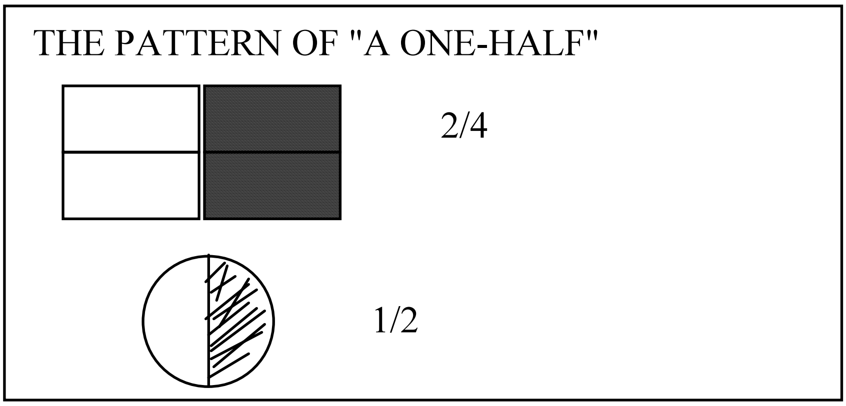
Valid cases 357 Missing cases 24

Από το ΓΡΑΦΗΜΑ 40 και τον ΠΙΝΑΚΑ 25 παρατηρούμε ότι το 64% περίπου των παιδιών κάνει λάθος στην πρόσθεση των κλασμάτων κι από αυτό μέγα μέρος 54% κάνει το ίδιο ακριβώς λάθος. Αυτό το λάθος, σε καμιά περίπτωση, δεν μπορεί να αποδοθεί στην τύχη και μας επιτρέπει να κάνουμε λόγο για συστηματικό λάθος (error pattern). Το συστηματικό αυτό λάθος αφήνει υπόνοιες για χρήση και εφαρμογή κανόνων πάνω στα κλάσματα από ένα άλλο πιθανώς καλύτερα γνωστό και οικείο αριθμητικό σύστημα που τα παιδιά έμαθαν προηγούμενα, το σύστημα των ακεραίων αριθμών. Αυτό όμως, ακόμη σήμερα, δεν είναι ξεκάθαρο. Δεν είναι δηλ. ξεκάθαρο ότι πρόκειται για μιά γενίκευση της πρόσθεσης των ακεραίων αριθμών. Οπως υποστηρίζουν οι Carpenter, Coburn, Reys & Wilson (1978), η εξήγηση αυτή είναι απλοϊκή, το λάθος αντιστέκεται επί πολλές δεκαετίες κι ο λόγος είναι ότι διαθέτει εννοιολογική υποστήριξη. Το τελευταίο όμως αυτό επιχείρημα για την εννοιολογική υποστήριξη δεν διευκρινίζεται με σαφή τρόπο από τους ίδιους.

Με τη βοήθεια των γραφικών της Logo θα μπορούσε ίσως ν' αντιμετωπιστεί αυτό το λάθος με προγράμματα που θα έκαναν περισσότερο γραφική, παρά αλγεβρική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων. Να σημειώσουμε με την ευκαιρία ότι η Object Logo δίνει το άθροισμα δύο κλασμάτων πάλι σε κλασματική μορφή.

β) Ενα άλλο συστηματικό λάθος στη συμπεριφορά των μαθητών σε ό,τι αφορά τα κλάσματα περιγράφεται στην παράγραφο που αναλύει τη στάση των μαθητών απέναντι στο κλασματικό μοντέλο του τελεστή.

γ)Τα δύο συστηματικά πρότυπα που διαγνώσθηκαν στη συμπεριφορά των μαθητών δεν είναι τα μόνα. Υπάρχει επίσης και ένα τρίτο, το πρότυπο του "μισού" (έτσι το ονομάζουμε στην έρευνά μας) το οποίο θα εξηγήσουμε αμέσως. Στην ερώτηση 1 του ερωτηματολογίου οι μαθητές, σχεδόν όλοι, απάντησαν για το τι είναι ένα κλάσμα με παραδείγματα. Από τα παραδείγματα που έδωσαν ένα ποσοστό 30% προερχόμενο και από τα δύο φύλα, και από τις δυό ηλικίες και από όλα τα σχολεία και τμήματα εμφανίζεται να δίνει παράδειγμα με μισό είτε με τη μορφή του 1/2 είτε με τη μορφή του 2/4. Οπως στα παρακάτω σχήματα:

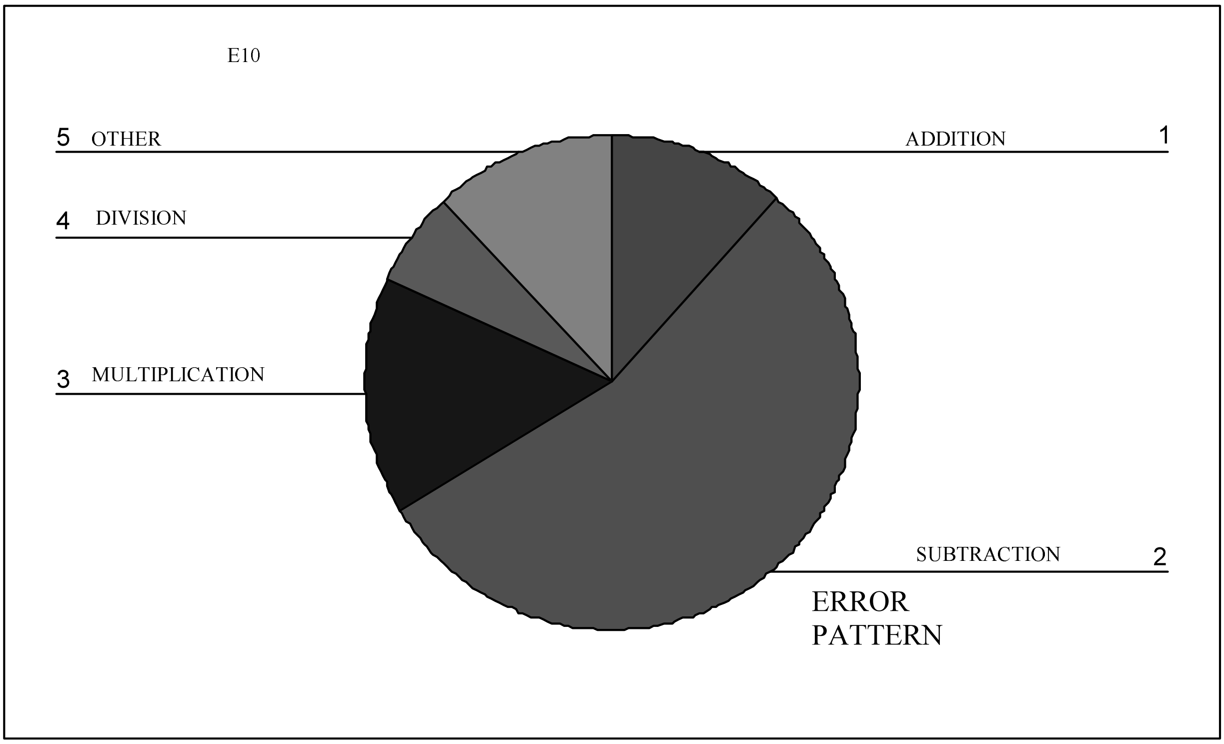


Το δεδομένο αυτό έχει ανάγκη περαιτέρω διερεύνησης.

7.10 Η ΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΣΤΟ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ ΤΕΛΕΣΤΗ (OPERATOR).

Η μελέτη της ερώτησης 10 του ερωτηματολογίου σχετίζεται όπως είναι φανερό με την ερμηνεία του κλάσματος ως τελεστή. Είναι ένα από τα πλέον αφηρημένα και δύσκολα μοντέλα του κλάσματος (Ρουσόπουλος, 1991). Αυτό το γεγονός, το έχουμε επισημάνει στο θεωρητικό επίπεδο και θα επιχειρήσουμε να το δείξουμε και στο εμπειρικό τοιούτο. Ας συμβολίσουμε, για τα παρακάτω, την ερώτηση 10 με τη μεταβλητή Ε10 και με τιμές 1=έκανε πρόσθεση, 2=έκανε αφαίρεση, 3=έκανε πολ/σμό, 4=έκανε διαίρεση και 9=δεν απάντησε.

ΓΡΑΦΗΜΑ 41.



ΠΙΝΑΚΑΣ 26

E10

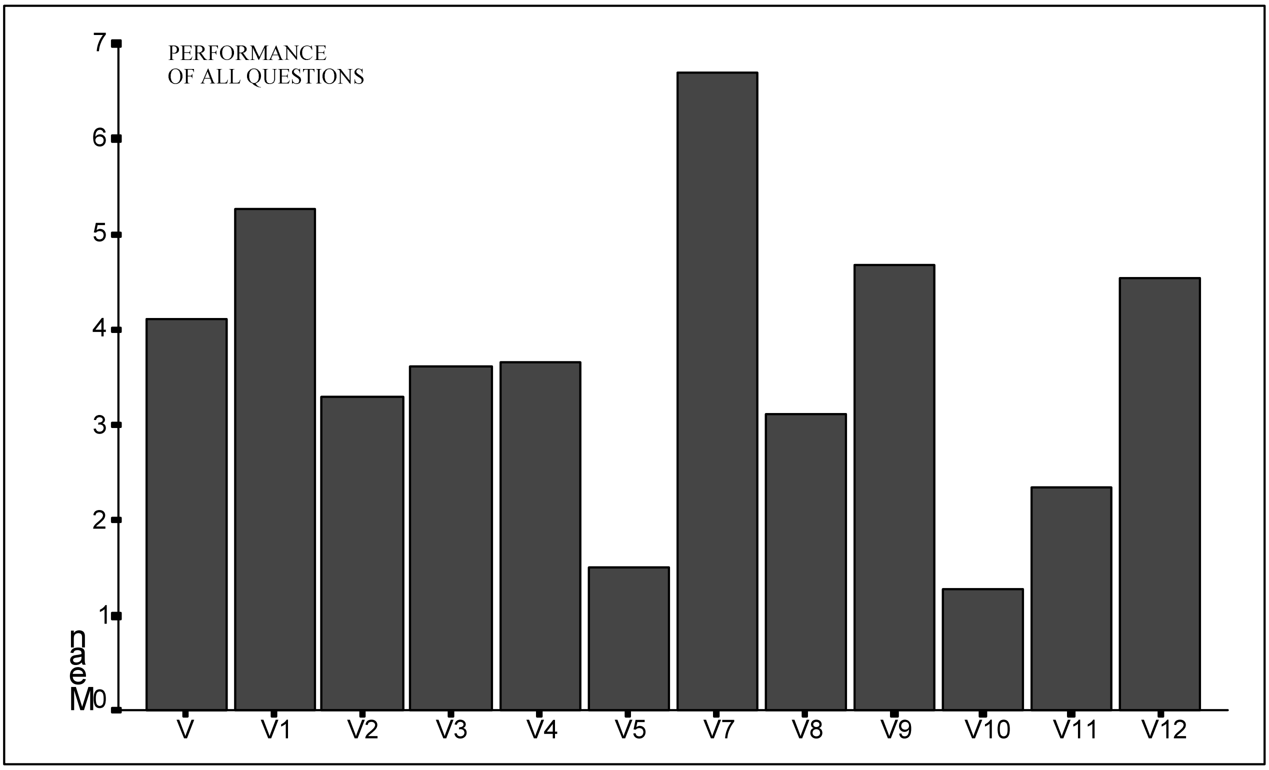
Value Label	Value	Frequency	Percent	Valid Percent	Cum Percent
	1	33	8.7	11.7	11.7
	2	154	40.4	54.6	66.3
	3	44	11.5	15.6	81.9
	4	17	4.5	6.0	87.9
	5	34	8.9	12.1	100.0
	9	99	26.0	Missing	
	Total	381	100.0	100.0	

Valid cases 282 Missing cases 99

Από το ΓΡΑΦΗΜΑ 41 και τον ΠΙΝΑΚΑ 26 παρατηρούμε ότι ένα υψηλό ποσοστό (40.4 % των ερωτηθέντων μαθητών) έκανε αφαίρεση και μόνο ένα ποσοστό 11.5 % έκανε πολ/σμό, δηλ. αντιμετώπισε σωστά την ερώτηση 10. Ακόμη ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό 26% δεν απάντησε καν την ερώτηση. Το μεγάλο ποσοστό για την πράξη της αφαίρεσης, κατά την άποψή μας, δεν μπορεί να αποδοθεί στην τύχη, είναι ένα συχνά επαναλαμβανόμενο λάθος (error pattern) στα ερωτηματολόγια των μαθητών που υπαινίσσεται μιά συστηματική συμπεριφορά. Το λάθος αυτό είναι πιθανό, χωρίς να είναι βέβαιο, να οφείλεται σε μεταφορά και εφαρμογή κανόνων από το αριθμητικό σύστημα των ακεραίων με το οποίο οι μαθητές φαίνεται να είναι ισχυρά προκολλημένοι. Με άλλα λόγια, ίσως να πρόκειται για μιά γενίκευση της πράξης της αφαίρεσης των ακεραίων αριθμών. Να σημειώσουμε ότι εκφράσεις σαν την "τα 2/3 **από** τα χρήματα που ξόδεψε" και η οποία ερμηνεύθηκε σαν αφαίρεση αναφέρονται ρητά το σχολικό εγχειρίδιο. Η ερώτηση 10 του ερωτηματολογίου είναι πανομοιότυπη με το πρόβλημα (2) της σελ. 33 του διδακτικού εγχειριδίου, Μαθηματικά Ε' δημοτικού Β'τχ., ΟΕΔΒ, 1993-1994.

Ενας δείκτης αναφορικά με το πόσο δύσκολο είναι για τους μαθητές η κατανόηση αυτού του μοντέλου είναι η επίδοση στην ερώτηση 10 σε σχέση με τις επιδόσεις όλων των άλλων ερωτήσεων. Από το ΓΡΑΦΗΜΑ 42 παρατηρούμε ότι η επίδοση των μαθητών σ' αυτή την ερώτηση είναι η χαμηλότερη από εκείνες όλων των ερωτήσεων του ερωτηματολογίου.

ΓΡΑΦΗΜΑ 42.



7.11 ΤΟ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ (REGRESSION MODEL).

Σ' αυτή την ενότητα επιχειρούμε να διερευνήσουμε παράγοντες που επηρρεάζουν την τελική επίδοση των μαθητών. Για το σκοπό αυτό κατασκευάζουμε ένα παλινδρομικό μοντέλο με την συμμετοχή των ανεξάρτητων μεταβλητών που αφορούν το φύλο SEX, την ηλικία AGE, και το σχολείο SCHOOL. Για να γίνει η εισαγωγή των μεταβλητών στο μοντέλο προχωρούμε στο μετασχηματισμό των αρχικών μεταβλητών ως εξής:

α)Για τη μεταβλητή SEX ορίζουμε τη διχοτομική μεταβλητή SEX1 με τιμές 1 για τα αγόρια και μηδεν για τα κορίτσια.

β) Για τη μεταβλητή AGE ορίζουμε τη διχοτομική μεταβλητή AGE1 με τιμές 1 για την ηλικία των 11 χρόνων δηλ. για τα παιδιά της Ε' τάξης και τιμή μηδέν για την ηλικία των 12 χρόνων δηλ. για τα παιδιά της ΣΤ' τάξης.

γ) Για τη μεταβλητή SCHOOL η οποία έχει 5 επίπεδα (όσα δηλ. και τα σχολεία που εξετάζουμε), ορίζουμε 4 νέες διχοτομικές μεταβλητές, SCHOOL9, SCHOOL10, SCHOOL11, και SCHOOL12 με τιμές 1=υπάρχει το χαρακτηριστικό, δηλ. ανήκει ο μαθητής στο συγκεκριμένο σχολείο και μηδέν=δεν υπάρχει το χαρακτηριστικό δηλ. δεν ανήκει ο μαθητής στο συγκεκριμένο σχολείο. Για παράδειγμα, στη μεταβλητή SCHOOL9 η οποία αφορά το σχολείο με κωδικό 9, η τιμή 1 σημαίνει ότι ο μαθητής ανήκει στο σχολείο 9 και η τιμή μηδέν σημαίνει ότι ο μαθητής δεν ανήκει στο σχολείο 9. Θεωρούμε το SCHOOL8 σαν σχολείο αναφοράς. Ετσι το σχολείο αυτό υπάρχει στο μοντέλο μόνο έμμεσα, δεν φαίνεται, αλλά προφανώς εκφράζεται μέσα σ' αυτό.
δ) Η εξαρτημένη μεταβλητή V η οποία εκφράζει το γενικό βαθμό των μαθητών σε ολόκληρο το τέστ μετασχηματίζεται για να επιτύχουμε δύο στόχους: Πρώτον, να προσεγγίσουμε περισσότερο τις απαιτήσεις των παραδοχών και δεύτερον, να ερμηνεύσουμε καλύτερα, όπως θα δούμε παρακάτω τα δεδομένα μας. Ο μετασχηματισμός που ενδείκνυται στην περίπτωσή μας είναι λογαριθμικός και συγκεκριμένα με βάση το e (φυσικοί λογάριθμοι). Ετσι θέσαμε LNV=LN(V) για το μετασχηματισμό της εξαρτημένης μεταβλητής.
Η μέθοδος του REGRESSION είναι δυνατόν να εφαρμοστεί καθώς οι παραδοχές της ανεξαρτησίας των παρατηρήσεων, της κανονικότητας, της γραμμικότητας, της ισότητας των διασπορών, και της πολυσυγγραμμικότητας (multicolinearity), ικανοποιούνται, όπως θα τεκμηριώσουμε παρακάτω.

ΠΙΝΑΚΑΣ 27

_
**** MULTIPLE REGRESSION ****_

_
_
Listwise Deletion of Missing Data_

_
Equation Number 1 Dependent Variable.. LNV_

_
The following variables are constants or have missing correlations:_

_
AGE1_

_
They will be deleted from the analysis._

_
Block Number 1. Method: Enter_

_
_
Variable(s) Entered on Step Number_
1.. SCHOOL12_
2.. SEX1_
3.. SCHOOL9_
4.. SCHOOL11_
5.. SCHOOL10_

_
_
Multiple R .31424_
R Square .09875_
Adjusted R Square .08168_
Standard Error .46903_

_
Analysis of Variance_

	DF	Sum of Squares	Mean Square_
Regression	5	6.36329	1.27266_
Residual	264	58.07713	.21999_

_
F = 5.78510 Signif F = .0000_

_

_
------------------ Variables in the Equation ------------------_

_

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T_
SEX1	-.137441	.057438	-.140631	-2.393	.0174_
SCHOOL9	-.106288	.108706	-.067364	-.978	.3291_
SCHOOL10	.341147	.086959	.301624	3.923	.0001_
SCHOOL11	.126992	.088866	.108069	1.429	.1542_
SCHOOL12	.169837	.088199	.146217	1.926	.0552_
(Constant)	1.248009	.070238		17.768	.0000_

_

_
End Block Number 1 All requested variables entered._

Οπως είπαμε και προηγούμενα ο λογαριθμητικός μετασχηματισμός θα μας βοηθήσει να ερμηνεύσουμε τα αποτελέσματά μας με εναργέστερο τρόπο. Πράγματι, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη συνεισφορά των μεταβλητών στο μοντέλο επί τη βάσει ποσοστών επί τοις εκατό[28]. Ετσι, από τον ΠΙΝΑΚΑ 27 παρατηρούμε τα εξής:

α) Το παλινδρομικό μοντέλο εξωβέλισε τον παράγοντα AGE που αφορά την ηλικία και συνεπώς την τάξη, ως μή σημαντικό στον επηρρεασμό της εξαρτημένης μεταβλητής V που αφορά τη γενική απόδοση στα κλάσματα. Να υπενθυμήσουμε ότι το στοιχείο που βρήκαμε εδώ για την ηλικία συνάδει με το στοιχείο που βρήκαμε στην παράγραφο 1, όταν κάναμε λόγο για πιθανή διαφορά ανάμεσα στα παιδιά των 11 και 12 ετών ως προς τη γενική απόδοση. Είχαμε βρει δηλ. ότι δεν είναι στατιστικώς σημαντική η παρατηρούμενη διαφορά ανάμεσα στους 11χρονους και 12χρονους μαθητές ή αλλιώς, δεν είναι στατιστικώς σημαντική η διαφορά ανάμεσα στα παιδιά της Ε' και ΣΤ' τάξης του Δημοτικού ως πρός την απόδοσή τους στα κλάσματα.

β) Αφού συμβολίσαμε στη μεταβλητή SEX με 1 τα αγόρια και μηδέν τα κορίτσια από τη στήλη του συντελεστή μερικής παλινδρόμησης (partial correlation coefficient), B διαπιστώνουμε ότι η γενική απόδοση των αγοριών στα κλάσματα, όταν οι άλλοι παράγοντες του μοντέλου διατηρούνται σταθεροί είναι 13,8 % κατώτερη από εκείνη των κοριτσιών.

[28] Είναι δυνατόν να δοθεί μιά απλή μαθηματική απόδειξη για τον ισχυρισμό αυτό: Αφού ο συντελεστής B αντιπροσωπεύει την μεταβολή (αύξηση π.χ.) της εξαρτημένης μεταβλητής όταν η αντίστοιχη ανεξάρτητη μεταβληθεί (αυξηθεί π.χ.) κατά μία μονάδα, ενώ οι υπόλοιπες μεταβλητές του μοντέλου παραμείνουν σταθερές, τότε, για παράδειγμα, για τον συντελεστή μερικής συσχέτισης που αφορά το φύλο θα έχουμε:

Ln (VA) -LnV(VK)=-0.14 => Ln (VA) -Ln(VK)=Ln (e $^{-0.14}$) => Ln (VA/VK)= Ln (e $^{-0.14}$) =>

$$\frac{\mathrm{VA}}{\mathrm{VK}} = e^{-0.14} \Rightarrow \frac{\mathrm{VA}}{\mathrm{VK}} = 1 + \frac{-0.14}{1!} \Rightarrow \frac{\mathrm{VA}}{\mathrm{VK}} = 0.86 \Rightarrow \mathrm{VA} = 0.86\ \mathrm{VK}\,.$$

Να σημειώσουμε ότι από το ανάπτυγμα του e ^{x} κρατάμε μόνο τους δύο πρώτους σημαντικούς όρους και ότι με VA και VK συμβολίσαμε τους βαθμούς των αγοριών και των κοριτσιών αντίστοιχα.

γ) Αφού σαν σχολείο αναφοράς θεωρήσαμε το σχολείο με κωδικό 8 δηλ. το SCHOOL8, τότε από τη στήλη του B διαπιστώνουμε ότι η απόδοση του σχολείου με κωδικό 9 είναι κατώτερη κατά 10,7 % από την αντίστοιχη του σχολείου με κωδικό 8, όταν οι άλλοι παράγοντες του μοντέλου δηλ. ουσιαστικά το φύλο (αφού η ηλικία ή η τάξη έτσι κι αλλιώς δεν επηρεάζει) παραμένουν σταθεροί. Με απλούστερα λόγια, η απόδοση του μέσου μαθητή του σχολείου 9 όταν θεωρήσουμε τους υπόλοιπους από τους εξεταζόμενους παράγοντες του μοντέλου σταθερούς, είναι κατώτερη κατά 10.7 % σε σχέση με την αντίστοιχη του μέσου μαθητή του σχολείου 8. Αυτό παραπέρα σημαίνει, μιά η βαθμολογία στο Δημοτικό είναι με κλίμακα από μηδέν μέχρι το 10 κατά μιά περίπου μονάδα.

δ) Αντίθετα, για το SCHOOL10 η βαθμολογία εμφανίζεται αυξημένη κατά 34.2 % σε σχέση με το SCHOOL8.

ε) Ομοια με το SCHOOL10, το SCHOOL11 εμφανίζει και αυτό αύξηση 12.7 % σε σχέση με το SCHOOL8, η οποία όπως είναι συγκριτικά μικρότερη σε σχέση με την αντίστοιχη του SCHOOL10.

στ) Το σχολείο τέλος με κωδικό 12 δηλ. το SCHOOL12 εμφανίζει μιά αύξηση της τάξης του 17% περίπου σε σχέση με την αντίστοιχη του SCHOOL8.

Να σημειώσουμε ότι τα σχολεία με κωδικούς 10,11,12 τα οποία στο μοντέλο σημειώνονται με θετικό πρόσημο ήσαν εκείνα που προηγούμενα στην ανάλυσή μας εντάχθηκαν στην ομάδα "υψηλής απόδοσης", ενώ αντίθετα το σχολείο με κωδικό 9 που καταγράφεται στο μοντέλο με αρνητικό πρόσημο μαζί με το σχολείο αναφοράς SCHOOL8 που αποδίδεται με μηδενικό διάνυσμα ήσαν εκείνα που εντάχθηκαν στην ομάδα της "χαμηλής απόδοσης". Τέλος να σημειώσουμε ότι, η ομάδα της "χαμηλής απόδοσης" συνέπεσε να αποτελείται από σχολεία γεωγραφικά εκτός, σε αντίθεση με την ομάδα της "υψηλής απόδοσης" που συνέπεσε να αποτελείται από σχολεία γεωγραφικά εντός, της πόλεως του Ρεθύμνου. Το στοιχείο αυτό αναδεικνύεται με σαφή τρόπο απο τη στατιστική ανάλυση και επομένως αξίζει περαιτέρω διερεύνησης.

7.12 *Η Ε*ΠΑΡΚ*Ε*ΙΑ Τ*Ο*Υ ΠΑΛΙΝΔ*Ρ*ΟΜΙΚ*Ο*Υ Μ*Ο*ΝΤ*ΕΛΟ*Υ.

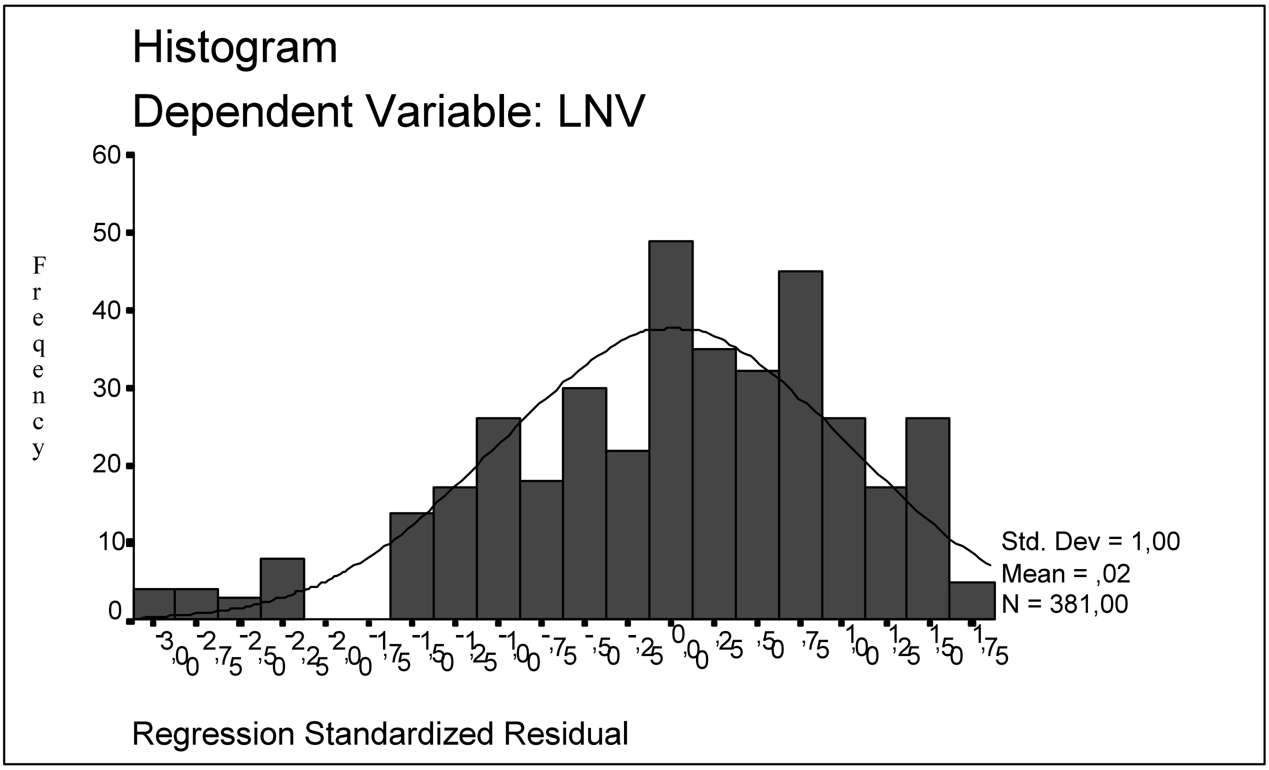
Για τη στατιστική επάρκεια του μοντέλου θα εξετάσουμε 5 παραδοχές:

α) Ανεξαρτησία. Οι παρατηρήσεις είναι ανεξάρτητες όπως δείξαμε στην παράγραφο που αφορά τον καθορισμό του δείγματος.

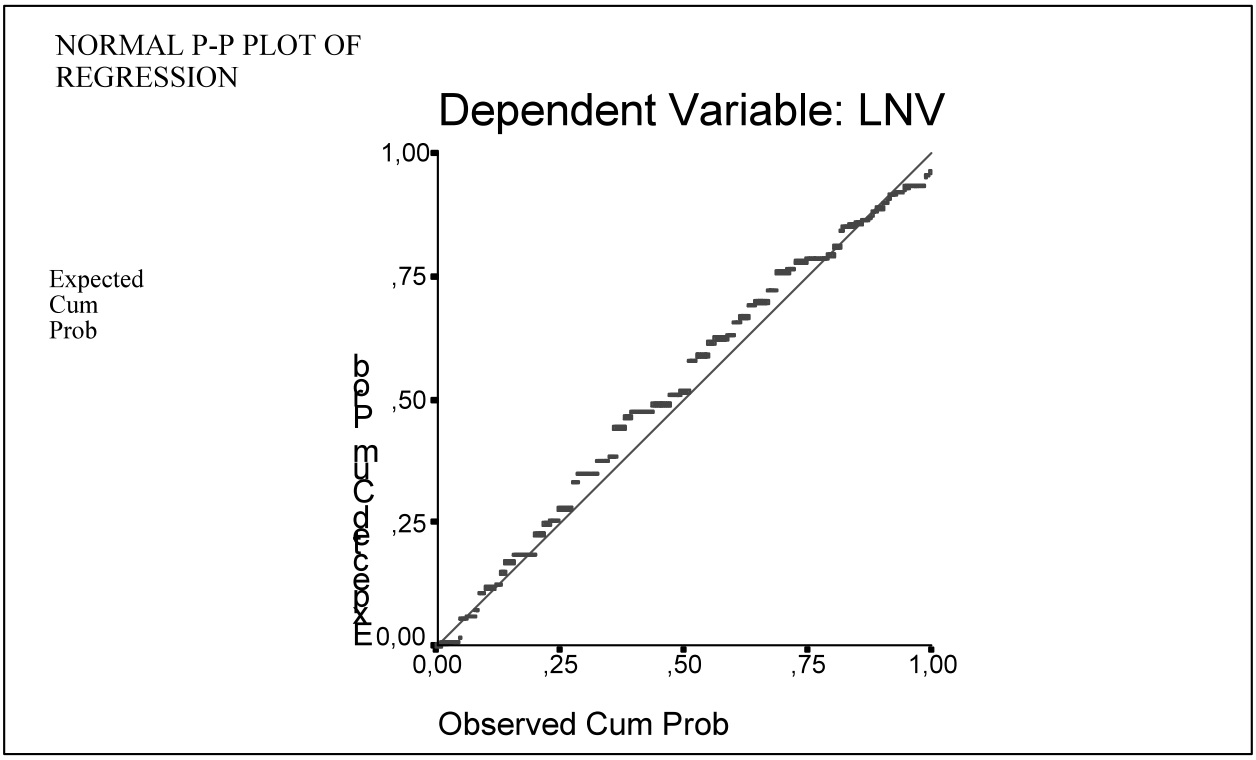
β) Η κανονικότητα του μοντέλου.

Στο ΓΡΑΦΗΜΑ 43 απεικονίζεται η κατανομή των τυποποιημένων υπολοίπων (standardized residuals), τα οποία μας παρέχουν ενδείξεις ότι πρόκειται κατά προσέγγιση για μιά κανονική κατανομή. Ενας άλλος δείκτης που συγκλίνει στην ίδια άποψη είναι το καλούμενο P-P Plot των τυποποιημένων υπολοίπων που απεικονίζεται στο ΓΡΑΦΗΜΑ 44.

ΓΡΑΦΗΜΑ 43.



ΓΡΑΦΗΜΑ 44.

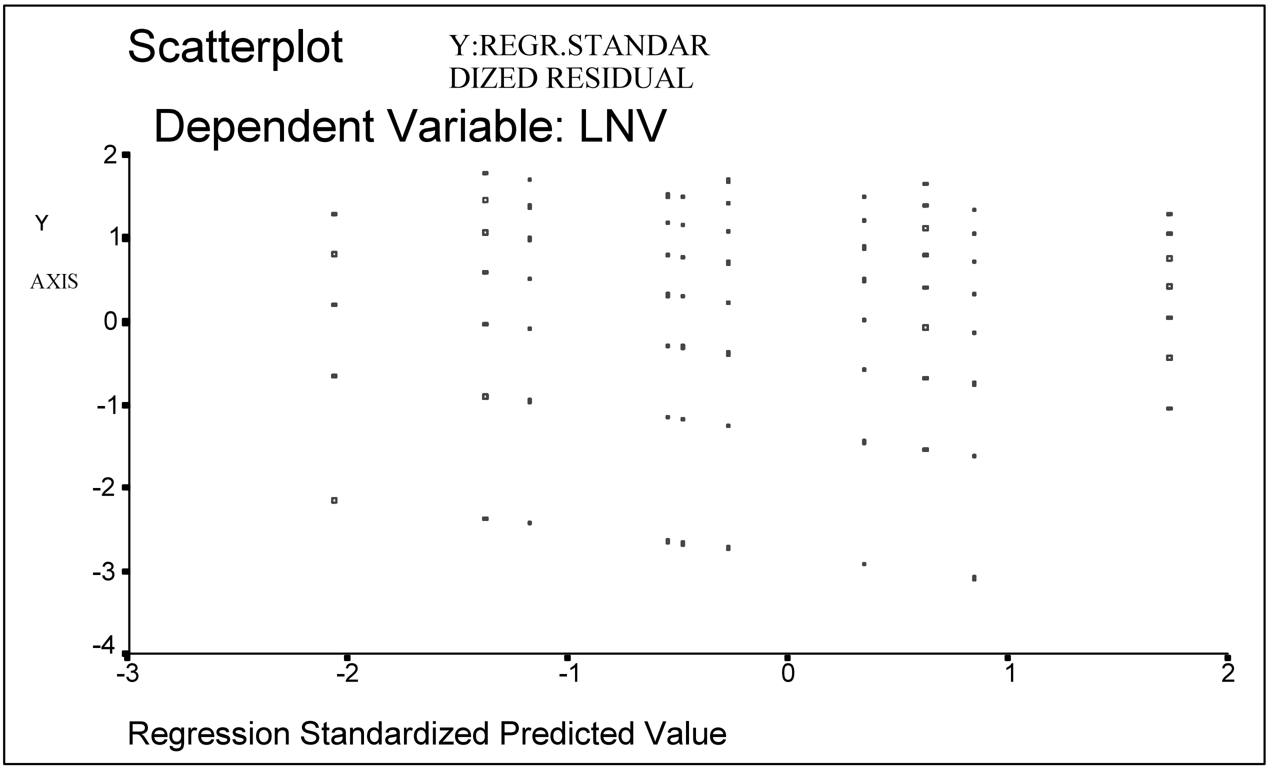


Στο ΓΡΑΦΗΜΑ 44 παρατηρούμε τα τυποποιημένα υπόλοιπα να συσσωρεύονται γύρω από μιά ευθεία γραμμή που αποτελεί τη γραμμή παλινδρόμησης. Στον κατακόρυφο άξονα των ψ απεικονίζονται οι τιμές της αναμενόμενης αθροιστικής πιθανότητας (expected cum. Probability) και στον οριζόντιο των χ οι τιμές της παρατηρούμενης αθροιστικής πιθανότητας (observed cum. probability).

γ) Η γραμμικότητα του μοντέλου.

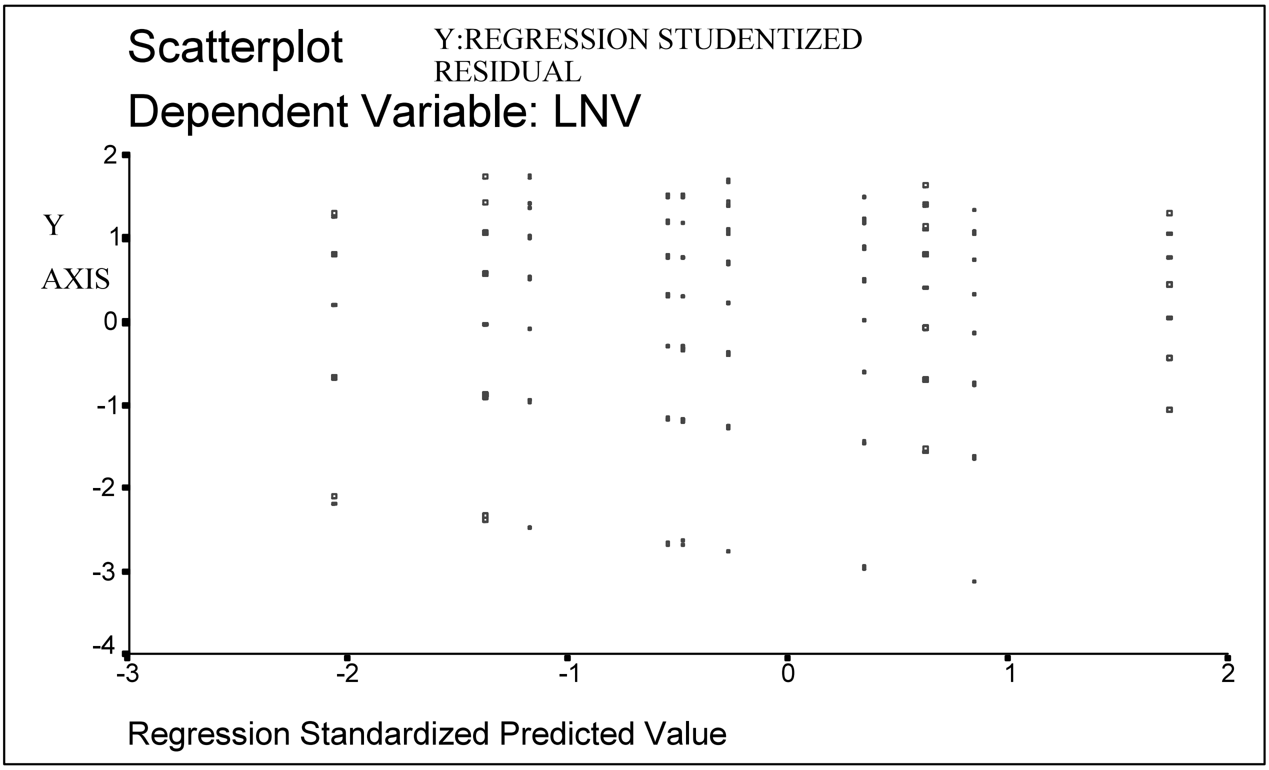
Εάν απεικονίσουμε σε ένα διάγραμμα τις τιμές των τυποποιημένων υπολοίπων σε σχέση με τις αντίστοιχες τυποποιημένες προβλεπόμενες τιμές (standardized predicted values) θα μπορούμε να διαπιστώσουμε προσεγγιστικά την ύπαρξη ή μή της γραμμικότητας του μοντέλου. Εάν σχηματίσουμε μιά οριζόντια λωρίδα της οποίας ο άξονας αντιστοιχεί στην τιμή μηδέν των τυποποιημένων υπολοίπων και μέσα σ' αυτή τη λωρίδα περιλαμβάνονται τυχαία κατανεμημένα τα περισσότερα residuals χωρίς την παρουσία κάποιου προτύπου (pattern), τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι πληρούται η συνθήκη της γραμμικότητας. Το
ΓΡΑΦΗΜΑ 45 δείχνει να πληρούται κατα προσέγγιση αυτή η συνθήκη.

ΓΡΑΦΗΜΑ 45.



δ) Η ισότητα των διασπορών.
Εάν απεικονίσουμε σε ένα διάγραμμα τις τιμές των studentized υπολοίπων σε σχέση με τις αντίστοιχες τυποποιημένες προβλεπόμενες τιμές (standardized predicted values) θα μπορούμε να διαπιστώσουμε προσεγγιστικά την ύπαρξη ή μή της ισότητας των διασπορών. Εάν σχηματίσουμε μιά οριζόντια λωρίδα της οποίας ο άξονας αντιστοιχεί στην τιμή μηδέν των studentized υπολοίπων και μέσα σ' αυτή τη λωρίδα περιλαμβάνονται τυχαία κατανεμημένα τα περισσότερα residuals χωρίς την παρουσία κάποιου προτύπου (pattern), τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι πληρούται η συνθήκη της ισότητας των δοασπορών. Το ΓΡΑΦΗΜΑ 46 δείχνει να πληρούται κατά προσέγγιση αυτή η συνθήκη.

ΓΡΑΦΗΜΑ 46.



ε) Ελεγχος για πολυσυγγραμικότητα[29] (multicollinearity).
Στο SPSS υπάρχουν αυτοτελείς διαδικασίες και δείκτες όπως η tolerance ή ο παράγων VIF (variance inflation factor) που ελέγχουν τη ύπαρξη συγγραμικότητας. Ομως το παλινδρομικό μοντέλο με τη μέθοδο του ENTER που χρησιμοποιήσαμε διεξάγει μόνο του τον έλεγχο και μας πληροφορεί στην περίπτωση που υπάρχει. Εδώ δεν παρατηρήθηκε κάτι τέτοιο. Επομένως πληρούται και η τελευταία παραδοχή.

[29] Συγγραμμικότητα (collinearity) λέμε ότι υπάρχει σε ένα παλινδρομικό μοντέλο όταν παρουσιάζει υψηλή πολλαπλή συσχέτιση στην περίπτωση που μιά από τις ανεξάρτητες μεταβλητές παλινδρομείται πάνω στις άλλες. Με απλούστερα λόγια όταν, υπάρχει υψηλή συσχέτιση ανάμεσα στις ανεξάρτητες μεταβλητές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ
Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ

8.0 Αναγκαίες διευκρινήσεις.

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσεται η τεχνική συνιστώσα του μικρόκοσμου με στοιχεία και από τις υπόλοιπες τρείς, πλαισιακής, παιδαγωγικής και παιδικής που έχουμε περιγράψει. Τα προγράμματα που προτείνονται έχουν σαν στόχο να "διδάξουν" τον υπολογιστή να κάνει διάφορες εργασίες, σχεδιαστικού, μαθηματικού, λογικού και παιδαγωγικού χαρακτήρα. Μέσα από αυτή τη διαδικασία της "διδασκαλίας" του υπολογιστή φαίνεται να προκύπτουν γνωστικά οφέλη για τον εκτελούντα ρόλο δασκάλου μικρό (ή μεγάλο) μαθητή. Οπως είδαμε από τα προηγούμενα, οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με τις μαθηματικές έννοιες, που ίσως δεν είναι ξεκάθαρες στη σκέψη τους, αφού αυτές οι έννοιες εμπλέκονται στη διαδικασία ανάπτυξης του προγράμματος. Δεν υπάρχει πρόγραμμα, όσο απλό κι άν είναι, που να μην χρειάζεται ένα σχεδιασμό, ένα λογικό διάγραμμα ροής και μιά ελάχιστη ή εκτενή μαθηματική ανάλυση. Επομένως η ανάπτυξη του κώδικα ενός τέτοιου προγράμματος το οποίο να "τρέχει" δίνοντας πραγματικά και ορατά στην οθόνη αποτελέσματα σημαίνει αναγκαστικά αποσαφήνιση και εννοιολογικό ξεκαθάρισμα συγκεκριμένων μαθηματικών δομών.

Επειδή η Object Logo δεν υποστηρίζει ελληνικά θα πρέπει να δεχτούμε σαν αναγκαίο κακό ένα είδος "εξελληνισμού" των διαδικασιών. Θα γράφουμε - αφού αυτό δεν επηρρεάζει την επιστημονική ακρίβεια- με λατινικούς χαρακτήρες. Τα προγράμματα που προέκυψαν σαν αναγκαιότητες εννοιολογικής και αλγοριθμικής αντιμετώπισης των κλασμάτων από τη θεωρητική ανάλυση κατανέμονται στις παρακάτω κατηγορίες:

8.1 Προγράμματα για την ενίσχυση της πολλαπλασιαστικής στρατηγικής.
Τα προγράμματα αυτά τα οποία αναπτύσσονται παρακάτω είναι:

8.1.*a* EYQEIA.
8.1.*b* GRAMMA L.
8.1.*c* TETRAGWNO.
8.1.*d* MEIOYMENA TETRAGWNA.
8.1.*e* GENIKO POLYGWNO.
8.1.f TYXAIO POLYGWNO.

8.2 Πρόγραμμα για την εννοιολογικοποίηση του κλάσματος, από την άποψη των διακριτών μέσων και συνεχών μέσων. Η στατιστική ανάλυση των στοιχείων για τους μαθητές του Δημοτικού έδειξε την απουσία στρατηγικών με διακριτά μέσα. Το πέρασμα απο τα συνεχή προς τα διακριτά μέσα ή το αντίθετο, όπως ξανατονίσαμε σε άλλο σημείο αυτής της εργασίας, είναι ένα βασικό φιλοσοφικό πρόβλημα. Καθώς όμως είναι ανάγκη οι μικροί μαθητές να χρησιμοποιούν για τη λύση των προβλημάτων τους με κλάσματα τόσο συνεχή όσο και διακριτά μέσα, ο μαθηματικός μικρόκοσμος της Logo, όπως και η παραδοσιακή διδασκαλία, αναπόφευκτα συναντούν το πρόβλημα. Μιά ιδέα που ίσως είναι χρήσιμη στο πλαίσιο του μικρόκοσμου είναι η κατασκευή ενός συνεχούς μαθηματικού αντικειμένου από διακριτά αντικείμενα. Αν κατασκευάσουμε για παράδειγμα ένα αστέρι με σπίρτα μπορούμε αρχικά τουλάχιστο να δικαιολογήσουμε ότι θεωρητικά στέκεται στο ενδιάμεσο συνεχών και διακριτών μέσων. Σαν σύνολο διακριτών μέσων μπορούμε να το δεχτούμε σαν ένα διακριτό μέσο. Αλλά το αστέρι σαν ένωση διακριτών μέσων επίσης μπορούμε να το θεωρήσουμε σαν ένα συνεχές μέσο (π.χ. το αστέρι της Βεργίνας). Το πρόγραμμα ονομάζεται ASTERI.

8.3 Προγράμματα για την ανάπτυξη της γνωστικής λειτουργίας της μοναδοποίησης και για την αισθητοποίηση της υποκατασκευής measure του κλάσματος (EYQEIA, YPODEKAMETRO).

8.4 Πρόγραμμα για απλοποίηση κλάσματος (APLOPOIHSH).

8.5 Προγράμματα για την ισοδυναμία και τη σύγκριση

8.5.*a* TREKSE.

8.5.*b* ISODYNAMA.

8.6 Προγράμματα για την υποκατασκευή RATIO του κλάσματος:

8.6.*a* Το πρόγραμμα KOYKLA.

8.6.*b* Το πρόγραμμα MH_KOYKLA.

8.6.*c* Τα προγράμματα SPITI1,SPITI2, SPITI, SPITIA.

8.6.*d* Το πρόγραμμα OIKOGENEIA.

8.6.*e* Το πρόγραμμα GEITONIA.

8.7 Προγράμματα για την αισθητοποίηση του αρνητικού αριθμού.

Θέτουμε θετικές και αρνητικές εισόδους σε δεδομένη procedure. Παρακολουθούμε μιά άλλη διαδρομή για τη χελώνα με τελικό σχήμα προσανατολισμένο διαφορετικά. Ολα τα προγράμματα επιδέχονται αρνητική είσοδο στο πλαίσιο του μικρόκοσμου της Logo. Η λειτουργία του αρνητικού αριθμού είναι ιδιαίτερα εμφανής στα προγράμματα YPODEKAMETRO και KOYKLA.

8.7.*a* Η άλλη όψη του προγράμματος YPODEKAMETRO.

8.7.*b* Η άλλη όψη του προγράμματος KOYKLA.

8.8 Προγράμματα που να ενισχύουν την ιδέα στο μυαλό των μαθητών ότι το κλάσμα είναι αριθμός.

Είναι πιθανό όλα τα προγράμματα στο πλαίσιο του προτεινόμενου μικρόκοσμου, αφού δέχονται σαν εισόδους κλασματικούς αριθμούς και ιδιαίτερα τα προγράμματα YPODEKAMETRO και TREKSE να επιτελούν τέτοια λειτουργία. Αυτό όμως, είναι αυτονόητο ότι δεν μπορεί να εξεταστεί σ' αυτή την εργασία.Δεν υπάρχει επίσης ερευνητική μαρτυρία για το θέμα αυτό. Τίθεται σαν ερώτημα σε μελλοντική έρευνα.

8.9 Τα μαύρα κουτιά (black box) στην ανάπτυξη του λογισμικού

8.1 ΤΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΙΣΧΥΣΗ ΤΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ-ΣΤΙΚΗΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ

8.1.α Το πρόγραμμα ΕΥQΕΙΑ.

Η πολλαπλασιαστική σχέση είναι παρούσα πριν καλά καλά εισαχθούμε στο περιβάλλον της Logo. Ας δούμε πώς.
Αν δώσουμε την εντολή:
FORWARD 100
το αποτέλεσμα στην οθόνη θα είναι μιά ευθεία γραμμή μήκους 100 βημάτων χελώνας.
--------------------|>
Εάν πάρουμε το υποδεκάμετρο (κανόνα) και μετρήσουμε τη γραμμή αυτή βλέπουμε ότι έχει μήκος 3.5 cm. Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι η χελώνα δε βηματίζει με εκατοστά. Αν θέλουμε να την αναγκάσουμε να βηματίζει με εκατοστά θα πρέπει να σκεφτούμε μαθηματικά και πιό συγκεκριμένα πολλαπλασιαστικά.
<u>Μαθηματική ανάλυση</u> (Από την Δ' Δημοτικού).
Τα 100 βήματα χελώνας είναι 3.5 εκατοστά
 Χ; βήματα χελώνας είναι το 1 εκατοστό

$\chi=100\ (\frac{1}{3.5})=28.57$ βήματα χελώνας.

Αυτό σημαίνει ότι εάν θέλουμε η χελώνα να προχωρήσει 1 εκατοστό θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το βήμα της περίπου εικοσιοκτώμισυ φορές.
Στο σημείο αυτό είναι ανάγκη να δούμε μιά απλή procedure που θα φτειάχνει γενικά ευθείες γραμμές.

```
TO EUQEIA :MHKOS
FD :MHKOS
END
```

Δίνουμε τώρα την εντολή:
EUQEIA 1
και στην οθόνη μας εμφανίζεται μιά τόσο μικρή ευθεία που μοιάζει με κουκίδα!
Εάν όμως το μήκος, μέσα στην procedure, το πολλαπλασιάσουμε με 28.57 δημιουργούμε τη ζητούμενη procedure:

```
TO EUQEIA :MHKOS
FD :MHKOS*28.57
END
```

Αυτή φτειάχνει ευθείες οποιουδήποτε μήκους και μάλιστα σε εκατοστά όπως μπορούμε άμεσα να διαπιστώσουμε (υποδεκάμετρο). Τα αποτελέσματα των διαδοχικών εντολών,

? RT 90 [από το κέντρο οθόνης στροφή δεξιά κατα 90 μοίρες]
? ΕΥQΕΙΑ 10 [κίνηση της χελώνας από το κέντρο της οθόνης 10 cm]
? ΕΥQΕΙΑ -20 [κίνηση από το κέντρο προς τα πίσω κατά 20 cm]

είναι τα παρακάτω:

```
                                             |>
                                             ----------------------------------------|>
|>--------------------------------------------------------------------------------
```

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε τη λειτουργία του αρνητικού αριθμού, στην τελευταία εντολή, που στη συγκεκριμένη περίπτωση μεταφράζεται σε κίνηση προς τα πίσω.[30]

8.1.*b* Το πρόγραμμα *L*.

Μπορούμε να γράψουμε μιά procedure η οποία να σχεδιάζει, όταν εκτελείται ένα απλό γράμμα της αγγλικής γλώσσας, το γράμμα L.

<u>Μαθηματική ανάλυση.</u>

Το γράμμα L σχηματίζεται από 2 κάθετα μεταξύ τους ευθύγραμμα τμήματα. Το οριζόντιο τμήμα είναι το μισό του κάθετου ή αν το εκφράσουμε διαφορετικά, το κάθετο τμήμα είναι το διπλάσιο του οριζόντιου.

```
TO L
RT 90
FD 50
BK 50
LT 90
FD 100
BK 100
END
```

Αν θέλαμε στη συνέχεια να παράγουμε διάφορων διαστάσεων γράμματα L θα πρέπει, προφανώς, να εισάγουμε μιά μεταβλητή που θα αναπαριστά το επιθυμητό, κάθε φορά, μήκος. Η πολλαπλασιαστική σχέση που θα ισχύει για τα δύο μήκη αναφέρθηκε παραπάνω και είναι 2:1 για το κατακόρυφο και το οριζόντιο τμήμα.

```
TO L :MHKOS
RT 90
FD :MHKOS
BK :MHKOS
LT 90
FD :MHKOS*2
BK :MHKOS*2
END
```

Αν στη συνέχεια δώσουμε τις παρακάτω 5 εντολές διαδοχικά:

L 40 ENTER [Σχεδιάζει το γράμμα L με 40 το οριζόντιο και 80 το κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα]

PU [Σηκώνει πάνω την πέννα της χελώνας, άρα δε σχεδιάζει τίποτα]

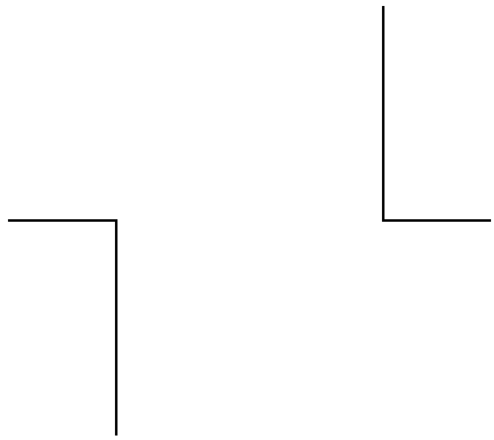
BK 100 [Η χελώνα πάει 100 βήματα πίσω χωρίς να σχεδιάζει λόγω της προηγούμενης εντολής PU]

PD [Κατεβάζει την πέννα της χελώνας, άρα σχεδιάζει από δω και πέρα..]

L - 40 ENTER [Σχεδιάζει ανάστροφα, λόγω της αρνητικής εισόδου, το γράμμα L. Να μιά αισθητοποίηση του αρνητικού αριθμού με απλό τρόπο!].

---

[30] Στο πλαίσιο της παραδοσιακής διδασκαλίας δηλ. σε μή υπολογιστικά πλαίσια δεν είναι εύκολο να δούμε αναπαραστατική λειτουργία του αρνητικού αριθμού.



™¯. Τ· ·¾ÔÙÂÏ¤ÛÌ·Ù· Ù˘Ó ÂÓÙÔÏÒÓ :
L 40 ENTER
PU ENTER
BK 100 ENTER
PD ENTER
L -40 ENTER

8.1.*c* Το πρόγραμμα T*E*GRAGWN*O*.

Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα τετράγωνο συγκεκριμένης πλευράς, για παράδειγμα 50 βημάτων χελώνας θα χρησιμοποιήσουμε τη εντολή repeat για να επαναλάβει μόνη της η LOGO τη διαδικασία "προχώρησε τόσο και μετά στρίψε κατά μιά ορθή γωνία".

Μαθηματική ανάλυση.

Είναι γνωστό από τη γεωμετρία ότι το τετράγωνο είναι το παραλληλόγραμμο με 4 ίσες πλευρές και 4 ορθές γωνίες. Αρα η εντολή FORWARD (μπροστά) θα παίρνει την ίδια τιμή και τις 4 φορές που σχεδιάζει τις πλευρές του τετραγώνου. Το ίδιο θα συμβαίνει και με την εντολή RIGHT (δεξιά), που θα παίρνει την τιμή 90 (μοίρες).

```
TO TETRAGWNO
REPEAT 4 [FD 50 RT 90]
END
```

Αν όμως προκύψει η ανάγκη σχεδιασμού τετραγώνου τυχαίας πλευράς τότε εισάγουμε, στη θέση της τιμής 5, τη μεταβλητή με το όνομα PLEYRA που την αναπαριστά.

```
TO TETRAGWNO :PLEYRA
REPEAT 4 [FD  :PLEYRA  RT 90]
END
```

8.1.*d* Το πρόγραμμα M*E*I*O*YM*E*NA T*E*TRAGWNA.

Η procedure αυτή ενισχύει την πολλαπλασιαστική λογική από την άποψη ότι σχεδιάζει τετράγωνα ολοένα και μικρότερα τα οποία έχουν μιά σταθερή ειδοποιό διαφορά κάθε ένα από το επόμενό του. Πιό συγκεκριμένα, η procedure παράγει μιά ακολουθία τετραγώνων, κάθε ένα των οποίων έχει πλευρά που είναι μικρότερη κατά τα 3/4 από την πλευρά του προηγουμένου του.

Μαθηματική ανάλυση.

Αν συμβολίσουμε την πλευρά του πρώτου τετραγώνου με τη μεταβλητή PLEYRA τότε η ποσότητα PLEYRA*(3/4) αναπαριστά πάντοτε την πλευρά του επόμενου τετραγώνου μειωμένη κατά 3/4.

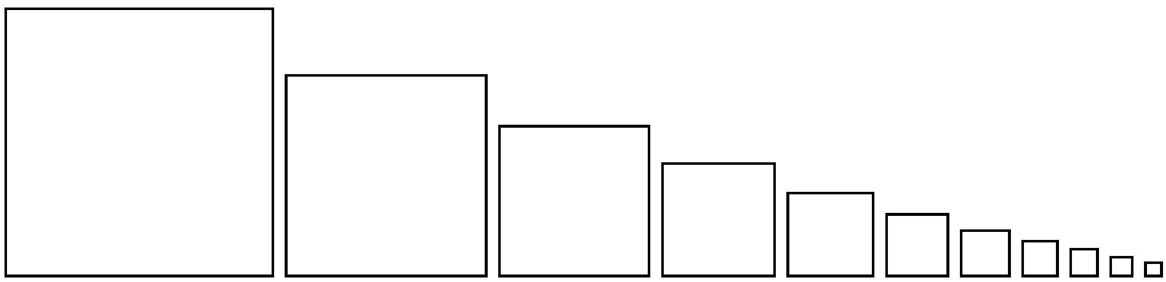
```
PU
SETPOS [-200 -50]
PD
TO MTETRAGWNO :PLEYRA
IF :PLEYRA <5 [STOP]
REPEAT 4 [FD :PLEYRA  RT 90]
PU
RT 90
FD :PLEYRA+5
LT 90
PD
MTETRAGWNO :PLEYRA*(3/4)
END
```

Ας δούμε τώρα την έξοδο των παρακάτω εντολών

PU ENTER [Η πένα της χελώνας επάνω].

SETPOS [-200 -50] ENTER [Η χελώνα τοποθετείται στο σημείο με συντεταγμένες -200 για το χ και -50 για το ψ].

MTETRAGWNO 100 [Σχεδιάζει την ακολουθία των μειούμενων τετραγώνων].



™¯. Η ·ÎÔÏÔ×Ð›· Ù˘Ó ÌÂÈÔ‡ÌÂÓ˘Ó ÙÂÙÚ·ÁÒÓ˘Ó Î·Ù¿ 3/4.

8.1.*e* Το πρόγραμμα G*E*NIK*O* P*OL*YGWN*O*.

Αυτό σχεδιάζει κανονικά[31] πολύγωνα τυχαίου αριθμού πλευρών και τυχαίου μήκους πλευράς.

Μαθηματική ανάλυση.

Από τη επίπεδη Γεωμετρία είναι γνωστό ότι ένα τρίγωνο έχει άθροισμα γωνιών 180 μοίρες. Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο επομένως κάθε γωνία του θα είναι 60 μοίρες.

---

[31] Κανονικά πολύγωνα ονομάζονται όσα έχουν όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες ίσες.

Από την Γεωμετρία της Χελώνας (Turtle Geometry) είναι επίσης γνωστό ότι "το άθροισμα των στροφών που μιά χελώνα εκτελεί προκειμένου να διαγράψει μιά κλειστή τροχιά είναι πάντα 360 μοίρες".

Ετσι, όπως άλλωστε είμαστε σε θέση να διαπιστώσουμε άμεσα στο πλαίσιο της Logo οι εντολές

```
REPEAT 3 [FD 30 RT 120]
REPEAT 4 [FD 30 RT  90]
REPEAT 5 [FD 30  RT  72]
REPEAT 6 [FD 30 RT  60]
```

σχεδιάζουν ένα κανονικό τρίγωνο, τετράγωνο, πεντάγωνο, εξάγωνο, αντίστοιχα. Από την άλλη παρατηρούμε ότι το γινόμενο των επαναλήψεων επί τη γωνία στροφής είναι σε όλες τις περιπτώσεις των κανονικών σχημάτων σταθερό και πάντα ίσο με 360. Δηλ.

3X120=360.

4X90=360.

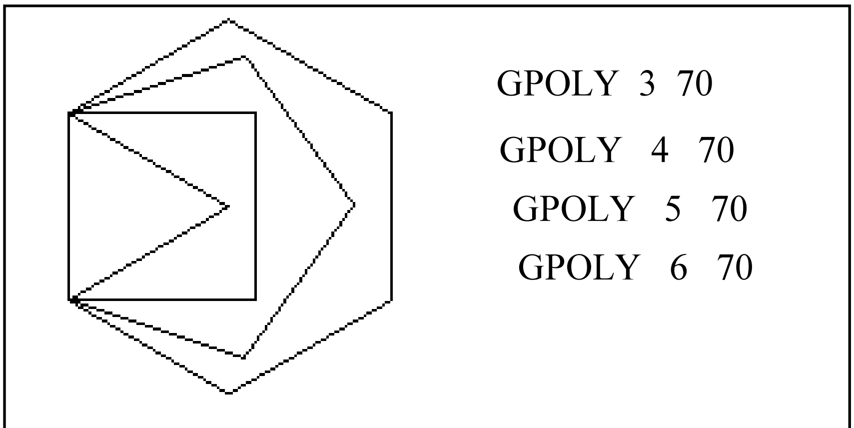
5X72=360.

6X60=360.

Αυτά τα παραδείγματα, μας οδηγούν αναμφίβολα σε μιά διαισθητική αντίληψη του προαναφερθέντος θεωρήματος της Γεωμετρίας της Χελώνας το οποίο οπωσδήποτε θεμελιώνει μιά πολλαπλασιαστική σχέση: Αν οι πλευρές του τυχαίου πολυγώνου είναι K τότε η κάθε στροφή της χελώνας για το σχηματισμό της αντίστοιχης γωνίας θα πρέπει να είναι 360/K. Ισχύει δηλ. σε κάθε περίπτωση η σχέση: K X (360/K)=360. Συνεπώς η procedure για το σχεδιασμό τυχαίου κανονικού πολυγώνου, δηλ. κανονικού πολυγώνου με τυχαίο αριθμό πλερών και με τυχαίο μήκος πλευράς έχει ως εξής:

```
TO GPOLY :K :PLEYRA
REPEAT :K [FD :PLEYRA RT 360/:K]
END
```

Οι έξοδοι των διάφορων εισόδων της procedure GPOLY απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



™¯. ΟÈ ‰È¿ÊÔÚÔÈ ¤ÍÔ‰ÔÈ ÙË˜ GPOLY

8.1.f Το πρόγραμμα ΤΥΧΑΙ*Ο* Ρ*OL*YGWN*O*.

Τελειώνοντας τα προγράμματα για την ενίσχυση της πολλαπλασιαστικής στρατηγικής παραθέτουμε μιά procedure η οποία μοιάζει με παιχνίδι καθώς η κλήση της κάθε φορά έχει σαν αποτέλεσμα το σχεδιασμό ενός τυχαίου κανονικού πολυγώνου που όμως δεν ξεπερνά ένα ορισμένο πλήθος πλευρών το οποίο ορίζεται στην είσοδο από εμάς.

Μαθηματική ανάλυση.

Η συνάρτηση RANDOM είναι μιά χρήσιμη συνάρτηση που μας δίνει τυχαίους φυσικούς αριθμούς που δεν ξεπερνούν κάποια δεδομένη τιμή. Για παράδειγμα η συνάρτηση RANDOM 17 μπορεί να έχει σαν αποτέλεσμα την απόδοση ενός τυχαίου φυσικού αριθμού από το μηδέν μέχρι το 17.

```
TO RPOLY :K
MAKE "K 3+RANDOM :K
REPEAT :K [FD 70 RT 360/:K]
END
```

Η εντολή

RPOLY 7 ENTER

θα δώσει ένα τυχαίο κανονικό πολύγωνο το οποίο θα έχει 3 ή 4 ή 5 ή 6 ή 7 πλευρές. Με άλλα λόγια θα δώσει ένα πολύγωνο με ελάχιστο αριθμό πλευρών 3 και μέγιστο 7.

8.2 Το πρόγραμμα AST*E*RI.

Λογικομαθηματική ανάλυση.

Το πρόγραμμα ASTERI παρέχει γραφική αναπαράσταση του προβλήματος πόσα σπίρτα αποτελούν ένα κλασματικό μέρος μιάς δεδομένης ποσότητας σπίρτων (ΟΛΟ).

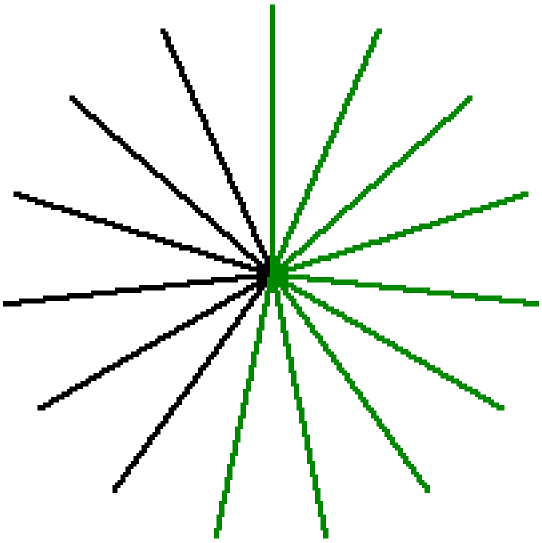
Φυσικά, οι αδυναμίες του προγράμματος δεν οφείλονται κατά πρώτο λόγο στο ίδιο. Αντανακλούν θεωρητικά αδιέξοδα όπως άλλωστε αναμένεται. Για παράδειγμα, ποιά απάντηση θα μπορούσε να δοθεί στο ερώτημα: " πόσα σπίρτα είναι το 1/4 των 19 σπίρτων"; Η απάντηση 4.75 στο πρόβλημα των καμηλών του παλιού Αραβα, που αναφέραμε στην αρχή, ποιά γνωστική ή συναισθηματική αξία θα είχε για τα παιδιά; Μήπως θα πρέπει μέσα στις μαθηματικές αίθουσες να λάβουμε σοβαρά υπόψιν τη συμβουλή του Δερβίση ("σας δίνω την καμήλα μου!"), κάτι το οποίο λέει με άλλα λόγια κι ο Streefland (1993), όταν προτείνει να εφαρμόσουμε το κλάσμα σε μιά **κατάλληλη** ποσότητα; Οπωσδήποτε, για το 1/4 μιά κατάλληλη ποσότητα δεν είναι το 19. Υπάρχουν έπειρες κατάλληλες ποσότητες και η πλησιέστερη στην περίπτωσή μας το 20.

Το πρόγραμμα έχει ως εξής:

```
TO ASTERI :PLHQOS :KLASMA
PU
SETPOS [-200 0]
PD
```

```
SETPENSIZE 2 2
MAKE "ARIQ NUMERATOR :KLASMA
MAKE "PAR DENOMINATOR :KLASMA
MAKE "AKERPHLIKO INTQUOTIENT :ARIQ :PAR
PRINT :AKERPHLIKO
MAKE "KKLASMA :KLASMA-:AKERPHLIKO
PRINT :KKLASMA
TEST :AKERPHLIKO = 1
IFTRUE [OUTPUT ASTERI2 :PLHQOS :KKLASMA]
TEST :AKERPHLIKO > 1
IFTRUE [OUTPUT ASTERI1 :PLHQOS :KKLASMA :AKERPHLIKO]
REPEAT :PLHQOS [FD 100 BK 100 RT 360 / :PLHQOS]
SETPENCOLOR 341
REPEAT :PLHQOS*:KLASMA [FD 100 BK 100 RT 360/:PLHQOS]
END
TO ASTERI1 :PLHQOS :KKLASMA :AKERPHLIKO
SETPENCOLOR 341
REPEAT :AKERPHLIKO [REPEAT :PLHQOS [FD 100 BK 100 RT 360/:PLHQOS] PU RT 90
FD 140 PD]
TEST :KKLASMA=0
IFTRUE [STOP]
SETPENCOLOR 33
REPEAT :PLHQOS [FD 100 BK 100 RT 360/:PLHQOS]
SETPENCOLOR 341
REPEAT :PLHQOS*:KKLASMA [FD 100 BK 100 RT 360 / :PLHQOS]
END
TO ASTERI2 :PLHQOS :KKLASMA
SETPENCOLOR 341
REPEAT :PLHQOS [FD 100 BK 100 RT 360/:PLHQOS]
TEST :KKLASMA=0
IFTRUE [STOP]
PU RT 90 FD 140 PD
SETPENCOLOR 33
REPEAT :PLHQOS [FD 100 BK 100 RT 360/:PLHQOS]
SETPENCOLOR 341
REPEAT :PLHQOS*:KKLASMA [FD 100 BK 100 RT 360 / :PLHQOS]
END
```

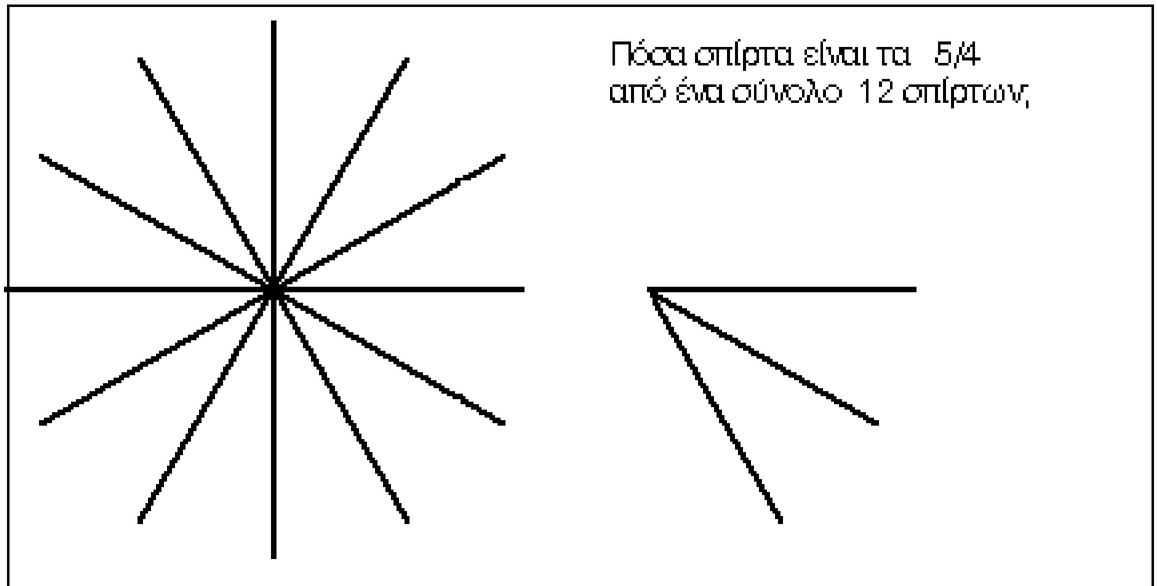
Ας δούμε μιά έξοδό του για ποσότητα 15 σπίρτων και 3/5 από αυτά:



Πόσα σπίρτα είναι τα 3/5 από μιά ποσότητα 15 σπίρτων;
Το πρόγραμμα καθώς είναι έγχρωμο σχηματίζει ένα αστέρι από 15 σπίρτα από τα οποία 6 είναι μαύρου χρώματος και 9 είναι πράσινου (κλάσμα 3/5).
Πάντα το κλασματικό μέρος απεικονίζεται με πράσινο χρώμα.

Σχ. Μιά έξοδος του προγράμματος ASTERI με εισόδους 15 και 3/5 (περίπτωση κλάσματος < 1).

Ωστόσο το πρόγραμμα είναι σε θέση να απαντήσει σε ένα πρόβλημα που ίσως δυσκολεύεται η παραδοσιακή διδασκαλία (η "με χαρτί και μολύβι"). Για παράδειγμα εάν δοθούν στο χέρι ενός παιδιού 12 σπίρτα και του ζητηθεί να απαντήσει πόσα σπίρτα αποτελούν τα 5/4 αυτών, πόσο εύκολο είναι να το βρεί; Η Mack (1987, 1993), εξετάζει προσεκτικά το ίδιο παράδειγμα σε συνεχές πλαίσιο (πίτσα) και ο μαθητής φαίνεται να το βλέπει εξωπραγματικό ("αφού υπάρχουν 4 κομμάτια πώς μπορούμε να πάρουμε 5 κυρία;", σελ. 91 στην εργασία της Mack, 1993).
Ας δούμε την έξοδο του προγράμματος με εισόδους 12 και 5/4:



Σχ. Η έξοδος του προγράμματος ASTERI με εισόδους 12 και 5/4.

8.3 Το πρόγραμμα YPODEKAMETRO.

Πρίν να ξεκινήσουμε το μοντέλο του ρητού αριθμού "γραμμή αριθμών" (measure) ορίζουμε 8 απλές procedures για τα διαθέσιμα χρώματα της Object Logo που καλούνται με κωδικούς:

```
TO MAYRO
OUTPUT 33
END
TO ASPRO
OUTPUT 30
END
TO KOKKINO
OUTPUT 205
END
TO PRASINO
OUTPUT 341
END
TO MPLE
OUTPUT 409
END
TO KYANO
OUTPUT 273
END
TO MAGENTA
OUTPUT 137
END
TO KITRINO
OUTPUT 69
END
```

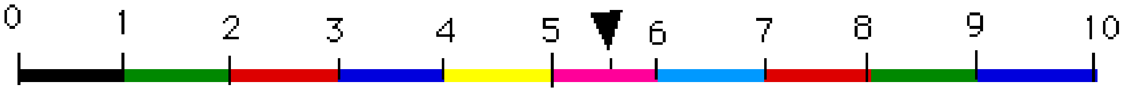
Λογικομαθηματική ανάλυση.

Αν υποθέσουμε ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε οποιοδήποτε μέτρο (measure) θα πρέπει προφανώς να ορίσουμε τη μονάδα μήκους. Η στρατηγική που ακολουθούμε γι' αυτό είναι όμοια με εκείνη που υιοθετήσαμε στο πρώτο μας . Στο μικρόκοσμο της Logo η βασική μονάδα μήκους είναι το βήμα χελώνας. Για να ορίσουμε ένα δικό μας "υποδεκάμετρο" στην επιφάνεια της οθόνης του υπολογιστή μας με τυπικές ενδείξεις από το μηδέν μέχρι το δέκα, δηλ. εξ αιτίας τεχνικών περιορισμών, είμαστε αναγκασμένοι να πάρουμε αυθαίρετα μιά μονάδα μήκους ίση με 40 περίπου βήματα χελώνας. Επομένως το "υποδεκάμετρό" μας δεν μετρά εκατοστά. (Αν το "κανονίσουμε" να μετρά εκατοστά σύμφωνα με τη στρατηγική που περιγράψαμε στο πρόγραμμα ΕΥQΕΙΑ η μαθησιακή λειτουργία θα έχει δυσκολίες καθώς η ευκρίνεια των κλασματικών υποδιαρέσεων που προκύπτουν είναι απαράδεκτα μικρή). Μετράει λοιπόν αναγκαστικά 40ρια βημάτων χελώνας. Με άλλα λόγια, έχει σταθερή μονάδα μήκους που αντιστοιχεί σε 40 βήματα χελώνας. Η εννοιολογική λειτουργία της μοναδοποίησης θα συντελείται επομένως σε περιορισμένο, αλλά αποδοτικό πλαίσιο. Μπορούμε άνετα να προτείνουμε αρκετά μεγάλες μονάδες μήκους μειώνοντας αντίστοιχα το συνολικό μήκος του "υποδεκαμέτρου" μας. Με βάση αυτό σκεπτικό κατασκευάζουμε το παρακάτω πρόγραμμα:

```
TO YPODEKAMETRO :ARIQMOS
PU SETPOS [-200 0] RT 90
BK 7*40 PD
SETPENCOLOR MAYRO
SETPENSIZE 5 5
FD 40
SETPENCOLOR PRASINO
FD 40
SETPENCOLOR KOKKINO
FD 40
SETPENCOLOR MPLE
FD 40
SETPENCOLOR KITRINO
FD 40
SETPENCOLOR MAGENTA
FD 40
SETPENCOLOR KYANO
FD 40
SETPENCOLOR KOKKINO
FD 40
SETPENCOLOR PRASINO
FD 40
SETPENCOLOR MPLE
FD 40
PU
BK 10*40
LT 90
FD 20 RT 90
FD 40*:ARIQMOS
RT 90
PR :ARIQMOS
END
```

Το πρόγραμμα αυτό δέχεται σαν είσοδο ένα κλασματικό αριθμό και αφού σχεδιάσει το "υποδεκάμετρο" που περιγράψαμε εντοπίζει επάνω σ' αυτό τον αριθμό αυτό με μεταφορά της χελώνας στο ανάλογο σημείο. Ας δούμε μιά έξοδο του προγράμματος με είσοδο 17/3:

Το ΥΠΟΔΕΚΑΜΕΤΡΟ έχει μονάδα μήκους 40 βήματα χελώνας.
Η χελώνα δείχνει το σημείο 17/3. Η χελώνα εδώ σε σχήμα τριγώνου.



Σχ. Η έξοδος του προγράμματος YPODEKAMETRO με είσοδο 17/3.

Να σημειώσουμε κάτι αυτονόητο: Η εννοιολογική λειτουργία της μοναδοποίησης περισσότερο θα οφεληθεί από την κατασκευή του προγράμματος, η οποία άλλωστε δεν παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες, παρά από τη μακρά χρήση του από τους μαθητές. Η μακρά χρήση του προγράμματος, δηλ. η επανάληψη των εκτελέσεών του με διαφορετικές εισόδους, θα βοηθήσει περισσότερο στη διαισθητική αντίληψη του κλάσματος ως σημείου στη γραμμή αριθμών παρά στην εννοιολογική γνώση του ρητού αριθμού.

8.4 Το πρόγραμμα APLOPOIHSH.

<u>Μαθηματική ανάλυση.</u>

Απλοποίηση ενός κλάσματος σημαίνει να μειωθούν στο ελάχιστο δυνατό οι όροι του χωρίς ωστόσο να μεταβληθεί η τιμή του. Ενας τρόπος για να γίνει αυτό είναι να διαιρούμε συνεχώς τους όρους του με το ίδιο αριθμό έως ότου γίνεται αυτό. Στη μορφή αυτή το κλάσμα λέμε ότι είναι ανάγωγο δηλ. δεν υπάρχει πλέον αριθμός εκτός του 1 που να διαιρεί ταυτόχρονα τον αριθμητή και τον παρονομαστή του. Επομένως στο πρόβλημα αυτό πρακτικά ανάγεται σε πρόβλημα εύρεσης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των δύο όρων του κλάσματος με τον οποίο θα διαιρεθούν. Το αποτέλεσμα των δύο διαρέσεων θα είναι οι δύο όροι του νέου κλάσματος το οποίο έχει την ίδια τιμή με το αρχικό.

```
TO APLOPOIHSH :KLASMA
MAKE "ARIQ NUMERATOR :KLASMA
MAKE "PAR DENOMINATOR :KLASMA
OUTPUT (APL :ARIQ :PAR)
END
TO APL :ARIQ :PAR
 OUTPUT (A1 :ARIQ :PAR (GCD :ARIQ :PAR))
END
TO A1 :ARIQ :PAR :GCD
PRINT (WORD :ARIQ/:GCD "/ :PAR/:GCD)
END
```

Ας δούμε μιά έξοδό του. Αν δώσουμε την εντολή

APLOPOIHSH 34/85 ENTER

θα λάβουμε στην έξοδο 2/5.

8.5 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΚΑΙ ΤΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ

8.5.α Το πρόγραμμα TREKSE

Μαθηματική ανάλυση.

Το πρόβλημα της σύγκρισης ή της ισοδυναμίας δύο κλασμάτων, για παράδειγμα το 3/5 και το 5/8 ανάγεται πρακτικά σε πρόβλημα αναγνώρισης του μεγέθους των κλασμάτων αυτών. Ο Streefland (1993), επισημαίνει ότι αν θέλουμε να διαπιστώσουμε θα πρέπει να βρούμε μιά βολική τιμή πάνω στην οποία να εφαρμόσουμε τα συγκρινόμενα κλάσματα ώστε να διαπιστωθεί η διαφορά ή η ισοδυναμία των μεγεθών τους. Με άλλα λόγια, για να συγκρίνουμε δυό κλάσματα θα πρέπει να παρακολουθήσουμε τη λειτουργία τους ως τελεστών (operators).

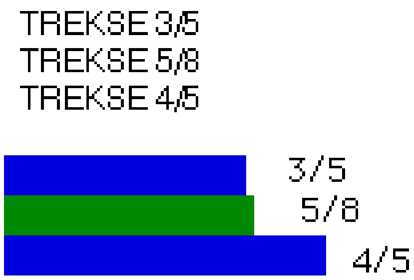
Στο περιβάλλον της Logo αυτό είναι ιδιαίτερα εφικτό [32]. Μπορούμε να πάρουμε αυθαίρετα μιά τιμή, για παράδειγμα 150 βήματα χελώνας και χωρίς βλάβη της γενικότητας, να εφαρμόσουμε σ' αυτή όποια κλάσματα θέλουμε να ελέγξουμε ως προς την ισοδυναμία. Το πρόγραμμα είναι το εξής:

```
PU HOME
SETPOS [-150 50]
PD
TO TREKSE :KLASMA
RT 90
SETPENSIZE 1 15
MAKE "XRWMA PARETYXAIO [205 273 409 341 137 69]
SETPENCOLOR :XRWMA
FD :KLASMA * 150
PRINT :KLASMA
BK :KLASMA * 150
RT 90
FD 15
LT 180
END
TO PARETYXAIO :X
OUTPUT ITEM (1 + RANDOM (COUNT :X)) :X
END
```

Το πρόγραμμα διαθέτει τυχαίο χρώμα από μιά λίστα διαθέσιμων από την Logo χρωμάτων με απότέλεσμα να γίνεται περισσότερο ελκυστικό για τους μαθητές.

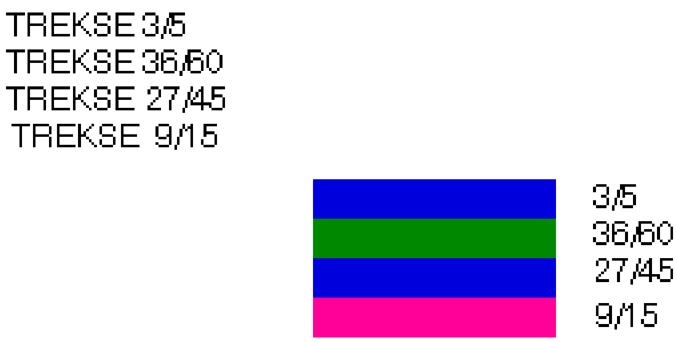
Ας δούμε τώρα την έξοδο της procedure TREKSE με διαδοχικές εισόδους τα κλάσματα 3/5, 5/8 και 4/5.

[32] Πρακτικά σημαίνει να βάλουμε τα συγκρινόμενα κλάσματα να "τρέξουν" στο πλαίσιο των γραφικών της χελώνας. Οποιο κλάσμα μεταφέρει τη χελώνα μακρύτερα αυτό είναι σαφώς το μεγαλύτερο σε μέγεθος.



Σχ. Το σχετικό μέγεθος των κλασμάτων όπως αποκαλύπτεται από την procedure TREKSE.

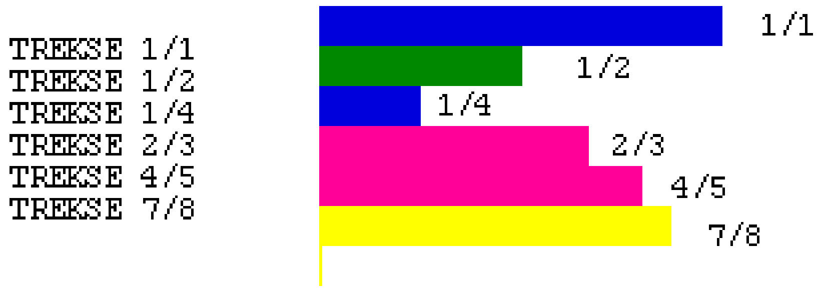
Το συμπέρασμα των παραπάνω εξόδων είναι ότι ισχύει:
3/5 < 5/8 < 4/5.
Επίσης αν δωσουμε διαδοχικά τις εντολές:
TREKSE 3/5 ENTER
TREKSE 36/60 ENTER
TREKSE 27/45 ENTER
TREKSE 9/15 ENTER
διαπιστώνουμε άμεσα ότι οι ευθύγραμμες διαδρομές της χελώνας είναι ισομήκεις, πράγμα που τεκμηριώνει ότι τα κλάσματα 3/5, 36/60, 27/45, 9/15 είναι ισοδύναμα.



Σχ. Οι έξοδοι του προγράμματος TREKSE δείχνουν ότι τα κλάσματα 3/5, 36/60, 27/45, 9/15 είναι ισοδύναμα.

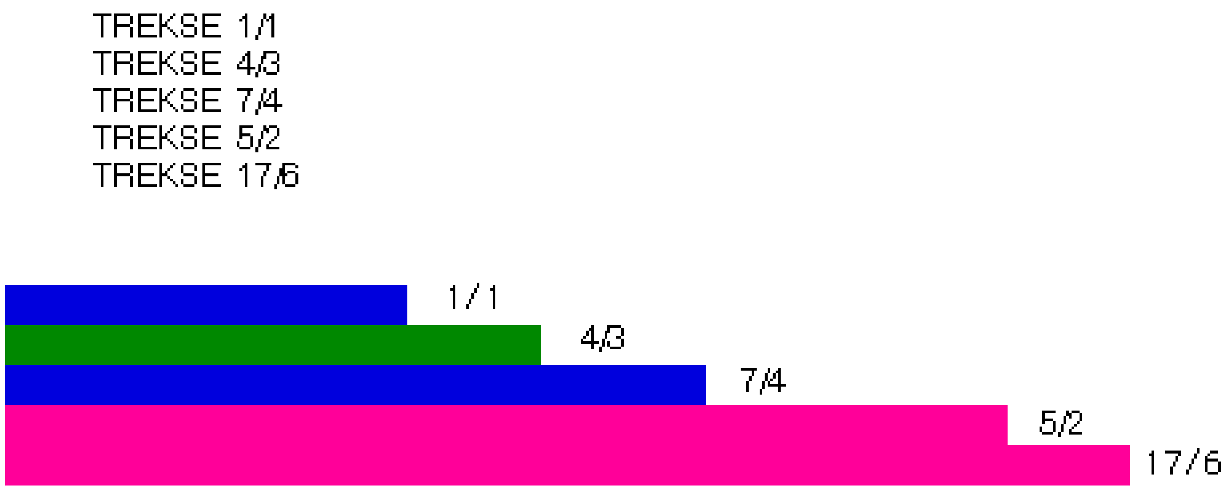
Ομως η εμβέλεια του απλού αυτού προγράμματος ίσως ξεπερνά τα όρια της αριθμητικής. Στο βαθμό που επιτρέπει η διαισθητική γνώση των μικρών μαθητών θα μπορέσουν να αντιληφθούν μιά σειρά από ιδιότητες του συνόλου των ρητών αριθμών. Για παράδειγμα είναι εύκολο να παρατηρηθεί ότι όσο αυξάνουμε τον αριθμητή ενός κλάσματος, κρατώντας τον παρονομαστή σταθερό η τιμή του κλάσματος αυθάνει. Αντίθετα η τιμή του μειώνεται αν κρατήσουμε σταθερό τον αριθμητή και αυξάνουμε συνεχώς τον παρονομαστή.
Σε ό,τι αφορά ένα αναγνωρισμένο λάθος για το οποίο έχουμε αναφερθεί στα προηγούμενα, ότι δηλ. "πολλαπλασιασμός σημαίνει οπωσδήποτε

αύξηση", το πρόγραμμα είναι σε θέση να δώσει σαφή, απλά και χειροπιαστά αποτελέσματα:
Δίνουμε σαν εισόδους τις εξής τιμές 1, 1/2, 1/4, 2/3, 4/5, 7/8 δηλ. τιμές που έχουν το χαρακτηριστικό, πλήν της πρώτης να είναι κλάσματα μικρότερα της μονάδας. Τα αποτελέσματα είναι ορατά στο παρακάτω σχήμα:



Σχ. Οι έξοδοι του προγράμματος TREKSE με εισόδους κλάσματα < 1

Δηλ. η λειτουργία του κλάσματος ως τελεστή που εγκλείεται στο πρόγραμμα TREKSE έδειξε ότι τα κλάσματα που είναι μικρότερα της μονάδας προκαλούν συρρίκνωση του αρχικού μήκους που αναπαριστά την ακέραια μονάδα. Αντίθετα αν δώσουμε σαν εισόδους τις τιμές 1, 4/3, 7/4, 5/2, 17/3 βλέπουμε ότι το αρχικό μήκος επιμηκύνεται σε όλες τις περιπτώσεις αφού πρόκειται για κλάσματα μεγαλύτερα της μονάδας. Το παρακάτω σχήμα "μιλάει" μόνο του:



Σχ. Οι έξοδοι του προγράμματος TREKSE με εισόδους κλάσματα > 1.

Είναι γνωστό, τέλος, από την Αλγεβρα ότι το όριο της ακολουθίας n/(n+1) όταν το n τείνει στο άπειρο συγκλίνει προς το 1. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι όσο προχωρούμε σε μεγαλύτερους αριθμούς ο λόγος κάποιου αριθμού

προς τον επόμενό του ολοένα και αυξάνει. Ετσι αν βάλουμε, για παράδειγμα, τα κλάσματα 3/4, 4/5, 5/6, 6/7 και 19/20 να "τρέξουν" με τη χελώνα θα παρατηρήσουμε ότι κάθε ένα από αυτά θα φτάσει μακρύτερα τη χελώνα από το προηγούμενό του, λόγω ακριβώς αυτής της ιδιότητας.
Το ερώτημα που τίθεται εδώ είναι το εάν και κατά πόσο όταν το κλάσμα χρησιμοποιείται σαν είσοδος σε αυτή την procedure ή και σε άλλες βοηθά το μαθητή να αντιληφθεί ότι και το κλάσμα είναι αριθμός, ιδέα που απουσιάζει σε σημαντικό βαθμό από τη σκέψη μαθητών και δασκάλων όπως είδαμε.

8.5.*b* Το πρόγραμμα ISODYNAMA

<u>Μαθηματική ανάλυση</u>

Εάν θεωρήσουμε ένα δεδομένο κλάσμα τότε ένα πλήθος κλασμάτων μπορούν να προκύψουν από τον πολλαπλασιασμό και των δύο όρων του με έναν και τον αυτό αριθμό ο οποίος θα πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός. Ο πολλαπλασιασμός αυτός ίσως να σημαίνει και διαίρεση εξ αιτίας της σχέσης α.(1/β)=(α/β). Προϋπόθεση βέβαια να πάρουμε ισοδύναμα κλάσματα με διαίρεση είναι να διαιρούνται (ακριβώς) αμφότεροι οι όροι του κλάσματος. Στο πρόγραμμα δίνονται δύο είσοδοι: η πρώτη είναι το κλάσμα του οποίου αναζητούνται ισοδύναμα κλάσματα και η δεύτερη είναι ο αριθός των ζητούμενων ισοδύναμων προς το δεδομένο κλασμάτων. Το πρόγραμμα έχει ως εξής:

```
TO ISODYNAMA :KLASMA :POSA
MAKE "ARIQ NUMERATOR :KLASMA
MAKE "PAR DENOMINATOR :KLASMA
MAKE "ARIQ1 :ARIQ * :POSA
MAKE "PAR1 :PAR * :POSA
PRINT (WORD :ARIQ1 "/ :PAR1)
IF :POSA < 2 [STOP]
ISODYNAMA :KLASMA :POSA - 1
END
```

Ας δούμε την έξοδο των εντολών :
ISODYNAMA 3/4 5 ENTER
ISODYNAMA 3/4 1000 ENTER
Το αποτέλεσμα της πρώτης είναι η παρακάτω ακολουθία των ισοδύναμων προς το 3/4 κλασμάτων.
15/20
12/16
9/12
6/8
3/4
Το αποτέλεσμα της δεύτερης είναι μιά μακρά[33] ακολουθία 1000 ισοδύναμων κλασμάτων προς το 3/4. Με επανειλημένες εξόδους της εντολής αυτής είναι φανερό ότι ενισχύεται στη σκέψη των μαθητών η ιδέα ότι η ακολουθία των ισοδύναμων κλασμάτων, πράγματι, δεν έχει πέρας.

---

[33] Ανάλογα με την ισχύ του ηλεκτρονικού μας υπολογιστή από πλευράς ταχύτητας και μνήμης μπορούμε να ζητήσουμε πάρα πολύ μεγάλους αριθμούς ισοδύναμων κλασμάτων και να τους λάβουμε σε λίγα λεπτά.

8.6 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΟΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΛΟΓΟΣ (RATIO) ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

Τα προγράμματα αυτά έχουν σα στόχο να ενισχύσουν την αναλογική σκέψη των μαθητών. Να δώσουν στα παιδιά την ευκαιρία να αντιληφθούν το κλάσμα σαν λόγο, να κατασκευάσουν και να συγκρίνουν αναλογίες. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι κονστρακτιβιστική, όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, και επίσης αντιδιαστέλει με σαφή τρόπο την προσθετική με την πολλαπλασιαστική και αναλογική λογική. Ταυτόχρονα με την κονστρακτιβιστική μεθοδολογία εφαρμόζεται και μιά ψυχολογική μέθοδος που φαίνεται να έχει σαφή αποτελέσματα στη μάθηση των παιδιών. Ονομάζεται μέθοδος της γνωστικής σύγκρουσης (cognitive conflict). Πρόκειται για ένα κλασσικό μοντέλο εννοιολογικής προόδου το οποίο έχει νόημα μόνο όταν τα τελικά αποτελέσματα των ενεργειών των παιδιών απάδουν με τους αρχικούς σκοπούς των. Τις γνωστικές και ψυχολογικές επιπτώσεις στη μάθηση των παιδιών, από την εφαρμογή της μεθόδου, οι Winograd και Flores (1988), ονομάζουν break downs.

8.6.α Το πρόγραμμα ΚΟΥΚΛΑ

<u>Μαθηματική ανάλυση</u>

Το πρόγραμμα αυτό έχει σα στόχο το σχεδιασμό με τη βοήθεια των γραφικών της Logo ενός "ανθρώπου". Βασική μαθηματική ιδέα για το γενικό σχέδιο που παριστάνει μιά ανθρώπινη φιγούρα είναι ότι όλα τα μέρη αυτής της φιγούρας μπορούν να παρασταθούν συναρτήσει ενός και μόνο θεμελειώδους μήκους. Αν για παράδειγμα, συμβολίσουμε το μήκος του λαιμού με α τότε το μήκος του κάθε χεριού θα πρέπει να παρασταθεί με 3 επί α τουλάχιστον.

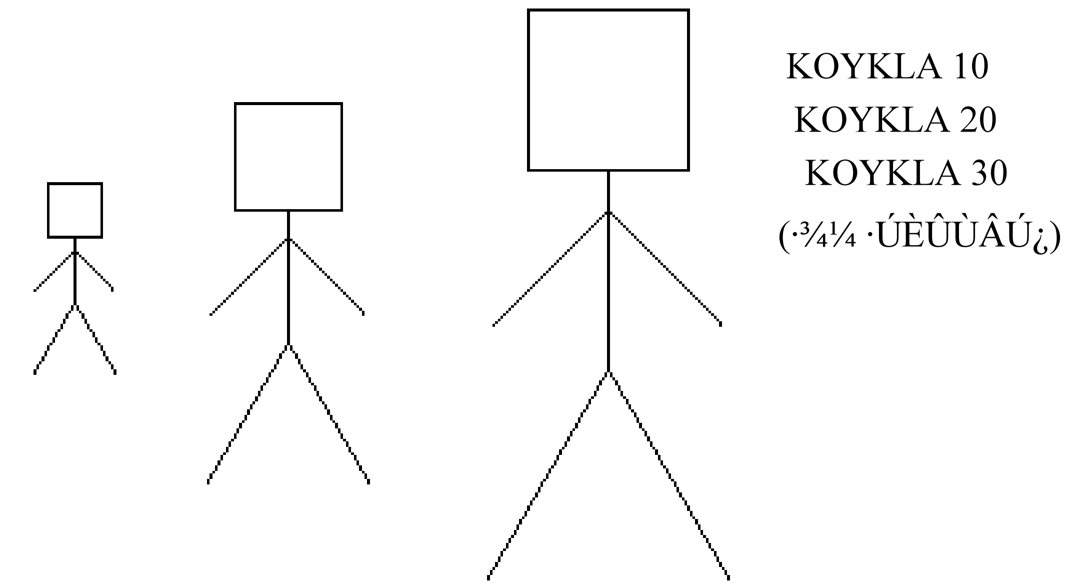
Κτίζουμε λοιπόν αυτοτελείς procedures οι οποίες σχεδιάζουν η κάθε μία ένα μέρος του όλου σχεδίου. Για παράδειγμα μιά procedure σχεδιάζει το κεφάλι, μιά άλλη το λαιμό, μιά άλλη τα χέρια κ.ο.κ. Ωστόσο λαμβάνουμε μέριμνα ώστε το όλο σχέδιο να έχει οργανικότητα και ορθολογική συνάρθρωση στη λειτουργία του σε σχέση με τις διάφορες εισόδους που εμείς θα επιλέγουμε. Αυτό σημαίνει ότι η θέση της χελώνας μετά την εκτέλεση της κάθε procedure θα πρέπει να είναι η κατάλληλη ώστε να εξασφαλισθεί η συνέχεια της κατασκευής. Αυτή η κονστρακτιβιστική διαδικασία είναι κυρίαρχο χαρακτηριστικό του Logo προγραμματισμού και δεν περιορίζεται ασφαλώς στο συγκεκριμένο πρόγραμμα. Ισως συμβάλει στην ανάπτυξη ειδικών δεξιοτήτων, οι οποίες αφορούν ένα άλλο τομέα γνώσης (ικανότητες σχεδιασμού) που αποβλέπει στην ευρύτερη και όχι μόνο μαθηματική, ολοκλήρωση των παιδιών (Perkins,1986).

Το πρόγραμμα έχει ως εξής:

```
TO KEFALI :SIZE
RT 90 FD :SIZE/2
WAIT 2
LT 90 FD :SIZE
LT 90 FD :SIZE
LT 90 FD :SIZE
LT 90 FD :SIZE/2 LT 90
```

```
WAIT 2
END
TO LAIMOS :SIZE
BACK :SIZE/2
END
TO XERIA :SIZE
RT 135 FD :SIZE
BK :SIZE
RT 90 FD :SIZE
BK :SIZE
LT 45
WAIT 2
END
TO SWMA :SIZE
FD :SIZE
WAIT 2
END
TO PODIA :SIZE
LT 30 FD :SIZE
BK :SIZE RT 60
FD :SIZE BK :SIZE
RT 150
WAIT 2
END
TO ALMA :SIZE
PU
FD :SIZE
PD
WAIT 2
END
TO KOYKLA :SIZE
KEFALI :SIZE*2
LAIMOS :SIZE
XERIA :SIZE*2
SWMA :SIZE*2
PODIA :SIZE*3
ALMA :SIZE*2
METATOPISH :SIZE
END
TO METATOPISH :SIZE
PU LT 90
FD 4*:SIZE
RT 90 PD
END
```

Ας παρακολουθήσουμε τρεις εξόδους της εντολής KOYKLA:



™¯. ΟÈ %‰È¿ÊÔÚÔÈ ¤ÍÔ%‰ÔÈ ÙË˜ ÂÓÙÔÏ‹˜ KOYKLA.

8.6.*b* Το πρόγραμμα ΜΗ_KOYKLA

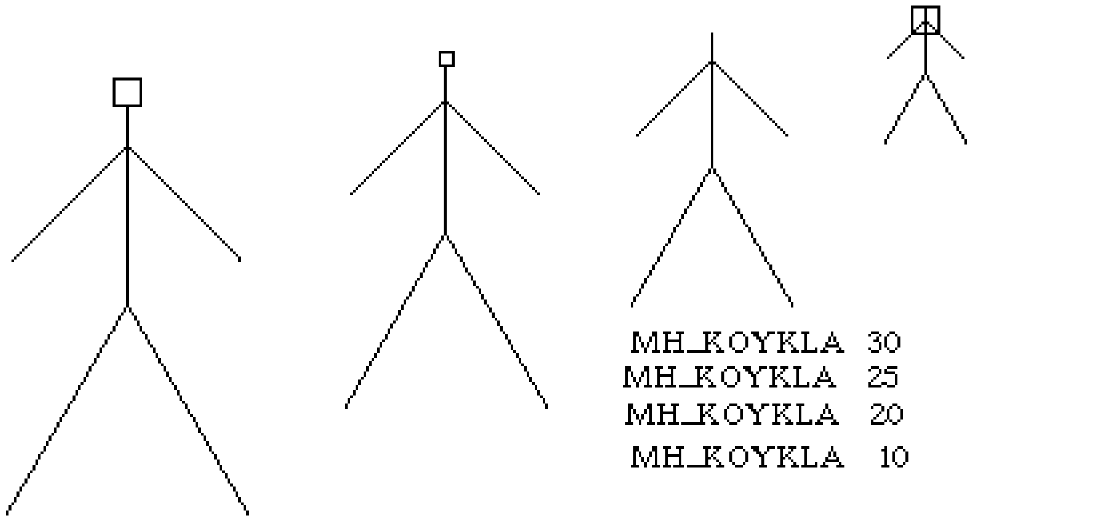
<u>Μαθηματική ανάλυση</u>

Αν καλέσουμε τα παιδιά στο προηγούμενο πρόγραμμα να τροποποιήσουν την εντολή που αναφέρεται στο μέγεθος του κεφαλιού (13 η σειρά από το τέλος) και συγκεκριμένα να επιδιώξουν μικρότερο μέγεθος γι' αυτό (χωρίς ν' αλλάξουν τα υπόλοιπα μέρη του σώματος), αναμένεται από μέρους των παιδιών αφαιρετική στρατηγική και όχι αναλογική /πολλαπλασιαστική στρατηγική (Hoyles, Noss, Sutherland, 1991). Δηλ. η εντολή τροποποιείται πιθανώς ως εξής:

KEFALI :SIZE -20

Το πρόγραμμα KOYKLA κατά τα άλλα δεν αλλάζει και ας υποθέσουμε ότι του δίνουμε το νέο όνομα ΜΗ_KOYKLA.

Τα αποτελέσματα φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



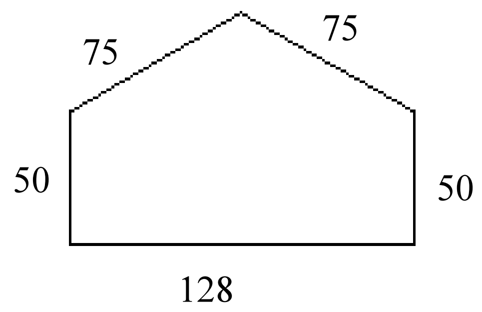
Σχ. Οι συνέπειες της αποφυγής της αναλογικής/πολλαπλασιαστικής στρατηγικής ή η υιοθέτηση της προσθετικής/αφαιρετικής στρατηγικής.

8.6.*c* Τα προγράμματα SPITI1 SPITI2 SPITI και SPITIA

Ολα αυτά τα προγράμματα αναδεικνύουν από μιά άλλη σκοπιά τις συνέπειες της αποφυγής της αναλογικής σκέψης την οποία είναι ανάγκη τα παιδιά να οικειοποιηθούν για να κατανοήσουν την έννοια του κλάσματος. Πρός αυτή την κατεύθυνση αναπόφευκτα οδηγεί η μέθοδος της γνωστικής σύγκρουσης. Στα παιδιά μπορούμε να δώσουμε το πρόγραμμα SPITI1 ή να το κατασκευάσουμε μαζί.

```
TO SPITI1
FD 50
RT 60
FD 75
RT 60
FD 75
RT 60
FD 50
RT 90
FD 128
RT 90
END
```

Τα αποτελέσματα της εκτέλεσης του φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:

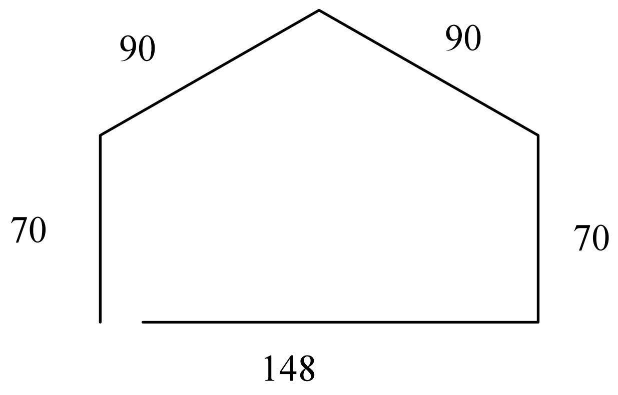


Σχ. Η έξοδος της εντολής SPITI 1

Αν καλέσουμε τους μαθητές να τροποποιήσουν το πρόγραμμα αυτό ώστε να σχεδιάζει ένα σπίτι μεγαλύτερης πλευράς, για παράδειγμα κατά 20, η προσθετική στρατηγική εφόσον υιοθετηθεί θα διαψεύσει τον επιδιωκόμενο στόχο. Το πρόγραμμα που θα προκύψει από μιά τέτοια στρατηγική είναι, βέβαια, το παρακάτω:

```
TO SPITI2
FD 50+20
RT 60
FD 75+20
RT 60
FD 75+20
RT 60
FD 50+20
RT 90
FD 128+20
RT 90
END
```

Τα αποτελέσματα, ωστόσο, της εκτέλεσής του φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



™¯. Η ¤ÍÔ‰Ô˜ ÙÔ× ¾ÚÔÁÚ¿ÌÌ·ÙÔ˜ SPITI2
‰Â›¯ÓÂÈ ÙÈ˜ Û×Ó¤¾ÂÈÂ˜ ÙË˜ ×ÈÔÐ¤ÙËÛË˜ ÙË˜ ¾ÚÔÛÐÂÙÈÎ‹˜
ÛÙÚ·ÙËÁÈÎ‹˜. TÔ Û¯‹Ì· ‰ÂÓ "ÎÏÂ'ÈÓÂÈ" !

<u>Μαθηματική ανάλυση</u>

Για να επιτύχουμε την οικοδόμηση ενός προγράμματος που να σχεδιάζει σπίτι τυχαίας πλευράς πρέπει να σκεφτούμε πολλαπλασιαστικά: Αν συμβολίσουμε με a μιά κάθετη πλευρά του σπιτιού και b μιά από τις ίσες πλευρές της σκεπής του τότε ο λόγος a/b είναι σταθερός και ίσος με 50/75 ή αλλιώς 2/3. Επίσης αν συμβολίσουμε με c το μήκος της οριζόντιας πλευράς τότε ο λόγος a/c είναι σταθερός και ίσος με 50/128 ή 64/25. Επομένως ισχύει:

$$\frac{a}{b} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3} \Rightarrow b = (\frac{3}{2})\,a$$

$$\frac{a}{c} = \frac{50}{128} = \frac{25}{64} \Rightarrow c = (\frac{64}{25})\,a$$

Ετσι, πρόγραμμα SPITI διαμορφώνεται με τυχαία πλευρά SIDE και συναρτήσει αυτής μπορούν να εκφραστούν όλες οι υπόλοιπες:

```
TO SPITI :SIZE
FD :SIZE
RT 60
FD (3/2)*:SIZE
RT 60
FD (3/2)*:SIZE
RT 60
FD :SIZE
RT 90
FD (64/25)*:SIZE
RT 90
END
```

Το παρακάτω σχήμα μας δείχνει μιά έξοδο του προγράμματος με είσοδο εκείνη ακριβώς που απέτυχε με τη χρήση της προσθετικής στρατηγικής δηλ. 70.

SPITI 70 ENTER

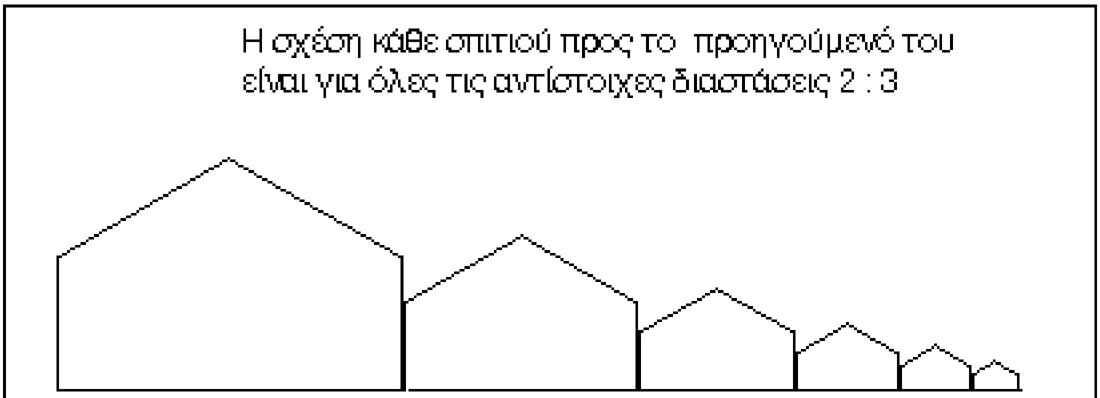
(Τα μήκη των πλευρών προκύπτουν από την εφαρμογή των εξισώσεων που προαναφέρθηκαν)

Σχ. Τα αποτελέσματα της υιοθέτησης αναλογικής στρατηγικής. Μιά έξοδος του προγράμματος SPITI με τυχαία είσοδο.

Αν συνεχίσουμε την κατασκευαστική δραστηριότητα υιοθετώντας μιά σύνθεση προσθετικής και αναλογικής λογικής και εκμεταλλευόμενοι την ιδότητα της αναδρομής που μας παρέχει η LOGO, θα μπορούσαμε να οικοδομήσουμε μιά ακολουθία συνεχόμενων σπιτιών για τα οποία η αναλογία των πλευρών μία προς μία είναι, για παράδειγμα 2: 3. Το πρόγραμμα SPITIA αποτελεί μιά ενσάρκωση αυτών των ιδεών:

```
TO SPITIA :SIZE
IF :SIZE < 5 [STOP]
FD :SIZE
RT 60
FD (3/2)*:SIZE
RT 60
FD (3/2)*:SIZE
RT 60
FD :SIZE
RT 90
FD (64/25)*:SIZE
RT 180
FD 1+(64/25)*:SIZE
LT 90
SPITIA (2/3)*:SIZE
END
```

Το παρακάτω σχήμα επιβεβαιώνει τους ισχυρισμούς αυτούς:



Σχ. Η έξοδος του προγράμματος SPITIA50.

8.6.*d* Το πρόγραμμα *O*IK*O*G*E*N*E*IA.

Η κονστρακτιβιστική δραστηριότητα όπως έχουμε ξανά επισημάνει προχωρεί με χρήση ήδη κατασκευασμένων δομικών στοιχείων όπως, στην περίπτωσή μας, procedures που σχεδιάζουν διάφορα μικρά κομμάτια του συνολικού σχεδίου, (κεφάλι, λαιμός κτλ), που με τη σειρά τους συγκροτούν μεγαλύτερα κομμάτια (ανθρώπινα σώματα πατέρα, μητέρας κτλ), αλλά και με ανάπτυξη ή επιστράτευση ικανοτήτων σχεδιασμού. Μιά τέτοια είναι ο υπολογισμός κατάλληλων αποστάσεων για την είσοδο μιάς τριμελούς οικογένειας στο χώρο του σπιτιού. Ας το αποπειραθούμε:

```
TO OIKOGENEIA :SIZE
FD :SIZE
RT 60
FD (3/2)*:SIZE
RT 60
FD (3/2)*:SIZE
RT 60
FD :SIZE
RT 90
FD (64/25)*:SIZE
RT 90
PU
RT 30
FD :SIZE LT 30
PD
KOYKLA (1/8)*:SIZE
KOYKLA (1/12)*:SIZE
KOYKLA (1/16)*:SIZE
END
TO KEFALI :SIZE
RT 90 FD :SIZE/2
WAIT 2
LT 90 FD :SIZE
LT 90 FD :SIZE
LT 90 FD :SIZE
LT 90 FD :SIZE/2 LT 90
WAIT 2
END
TO LAIMOS :SIZE
BACK :SIZE/2
```

```
END
TO XERIA :SIZE
RT 135 FD :SIZE
BK :SIZE
RT 90 FD :SIZE
BK :SIZE
LT 45
WAIT 2
END
TO SWMA :SIZE
FD :SIZE
WAIT 2
END
TO PODIA :SIZE
LT 30 FD :SIZE
BK :SIZE RT 60
FD :SIZE BK :SIZE
RT 150
WAIT 2
END
TO ALMA :SIZE
PU
FD :SIZE
PD
WAIT 2
END
TO KOYKLA :SIZE
KEFALI :SIZE*2
LAIMOS :SIZE
XERIA :SIZE*2
SWMA :SIZE*2
PODIA :SIZE*3
ALMA :SIZE*2
METATOPISH :SIZE
END
TO METATOPISH :SIZE
PU RT 90
FD 4*:SIZE
LT 90 PD
END
```

Τα αποτελέσματα στο παρακάτω σχήμα:

Σχ. Η εκτέλεση του προγράμματος OIKOGENEIA 100

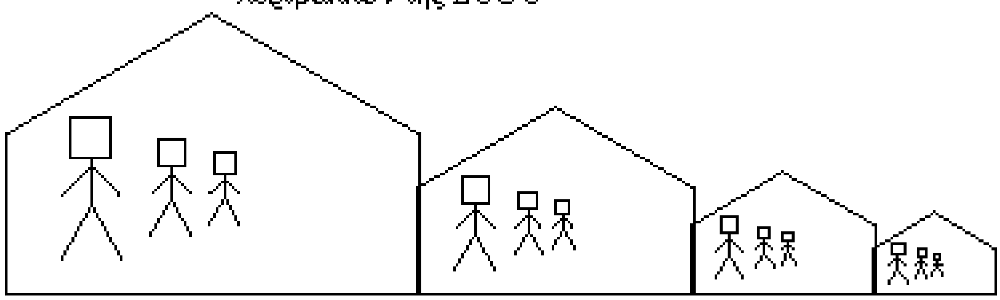
8.6e) Το πρόγραμμα GEITONIA

Μολονότι η κονστρακτιβιστική διαδικασία δεν έχει σύνορα αναγκαζόμαστε να παραθέσουμε, για ευνόητους λόγους, το πρόγραμμα GEITONIA σαν οριακή της έκφραση.

```
TO GEITONIA :SIZE
PU
SETPOS [-230 -50]
PD
OIKOGENEIA :SIZE
PU SETPOS [-230 -50]
PD
RT 90
FD 1+(64/25)*:SIZE
LT 90
OIKOGENEIA (2/3)*:SIZE
PU SETPOS [-230 -50]
PD
RT 90
FD 1+(64/25)*:SIZE+((64/25)*:SIZE)*(2/3)
LT 90
OIKOGENEIA (2/3)*(2/3)*:SIZE
PU SETPOS [-230 -50]
PD
RT 90
FD 1+(64/25)*:SIZE+((64/25)*:SIZE)*(2/3)+((64/25)*:SIZE)*(2/3)*(2/3)
LT 90
OIKOGENEIA (2/3)*(2/3)*(2/3)*:SIZE
PU HOME
PD
END
TO OIKOGENEIA :SIZE
FD :SIZE
RT 60
FD (3/2)*:SIZE
RT 60
FD (3/2)*:SIZE
RT 60
```

```
FD :SIZE
RT 90
FD (64/25)*:SIZE
RT 90
PU
RT 30
FD :SIZE LT 30
PD
KOYKLA (1/8)*:SIZE
KOYKLA (1/12)*:SIZE
KOYKLA (1/16)*:SIZE
END
TO KEFALI :SIZE
RT 90 FD :SIZE/2
LT 90 FD :SIZE
LT 90 FD :SIZE
LT 90 FD :SIZE
LT 90 FD :SIZE/2
LT 90
END
TO LAIMOS :SIZE
BACK :SIZE/2
END
TO XERIA :SIZE
RT 135 FD :SIZE
BK :SIZE
RT 90 FD :SIZE
BK :SIZE
LT 45
END
TO SWMA :SIZE
FD :SIZE
END
TO PODIA :SIZE
LT 30 FD :SIZE
BK :SIZE RT 60
FD :SIZE BK :SIZE
RT 150
END
TO ALMA :SIZE
PU
FD :SIZE
PD
END
TO KOYKLA :SIZE
KEFALI :SIZE*2
LAIMOS :SIZE
XERIA :SIZE*2
SWMA :SIZE*2
PODIA :SIZE*3
ALMA :SIZE*2
METATOPISH :SIZE
END
TO METATOPISH :SIZE
PU RT 90
FD 4*:SIZE
LT 90 PD
END
```

Τα αποτελέσματα μιάς από τις εξόδους του απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



Σχ. Η έξοδος του προγράμματος GEITONIA 60.

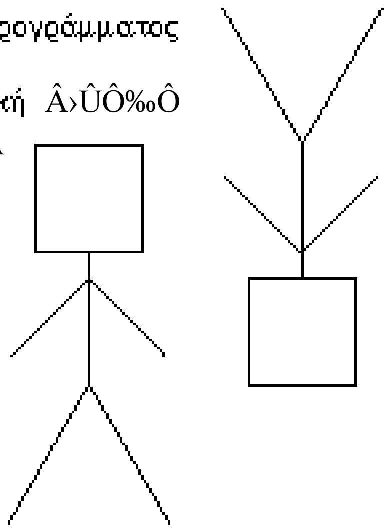
8.7) ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΙΣΘΗΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΑΡΝΗΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

8.7*a) Η* άλλη όψη του προγράμματος ΥΠΟΔΕΚΑΜΕΤΡΟ.

Εχουμε αναφερθεί σ' αυτό προηγούμενα.

8.7*b) Η* άλλη όψη του προγράμματος KOYKLA.

Αν θέσουμε διαδοχικά δύο κατ' απόλυτη τιμή ίσους αριθμούς για εισόδους στο πρόγραμμα κούκλα θα λάβουμε την εικόνα του παρακάτω σχήματος:



Σχ. Η λειτουργία του αρνητικού αριθμού στο πλαίσιο του μικρόκοσμου της Logo.

8.9 ΤΑ ΜΑΥΡΑ ΚΟΥΤΙΑ (BLACK BOXES) ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ

Οι Blaho, Kalas, Tomcsanyi (1993), διακρίνουν 3 σκοπιές θέασης για τις διάφορες εφαρμογές των Logo περιβαλλόντων: Τη σκοπιά των μαθητών (learners' side), τη σκοπιά του δασκάλου (teacher's side) και τη σκοπιά του σχεδιαστή (developer) του εκπαιδευτικού λογισμικού. Και θεωρούν ότι ένα λογισμικό στο οποίο θα συνυπάρχουν και οι τρείς αυτοί ρόλοι θα μπορούσε να είναι εκπαιδευτικά αποτελεσματικότερο.

Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας, όλα τα προγράμματα που αναπτύχθηκαν, απευθύνονται περισσότερο στο μαθητή παρά στο δάσκαλο. Ο ρόλος του δασκάλου που περιγράψαμε στην παιδαγωγική συνιστώσα του μικρόκοσμου χαρακτηρίζεται από κατάλληλες, χρονικά και τοπικά εύστοχες παρεμβάσεις με απώτερο σκοπό να οδηγηθούν τα παιδιά στην κατανόηση των κλασματικών εννοιών. Οι μαθητές από την άλλη, είναι βέβαιο ότι θα αποκομίσουν μεγαλύτερα γνωστικά οφέλη, όσο περισσότερο αναμιχθούν στην προγραμματιστική διαδικασία, όσο δηλ. περισσότερο αποδυθούν σ' ένα ρόλο παρόμοιο με εκείνο του σχεδιαστή λογισμικού (Software designer). Ομως αυτό δεν είναι συχνά εύκολο και εξαρτάται από πολλούς παράγοντες στους οποίους έχουμε αναφερθεί. Ετσι ορισμένα προγράμματα θα χρησιμοποιηθούν σε πρώτη φάση αναγκαστικά σαν "μαύρα κουτιά". Ο Hillel (1993), προσδιορίζει τη λειτουργία τους "ως μερών μιάς σκόπιμης στρατηγικής η οποία χρησιμοποιείται στην αρχική φάση της εξέτασης μιας μαθηματικής ενότητας", όπως για παράδειγμα οι ρητοί και κλασματικοί αριθμοί. Πρώτο βήμα στην κατανόηση του περιεχομένου ενός "μαύρου κουτιού" είναι "το περπάτημα γύρω απ' αυτό" ("walking around it") κατά την έκφραση του Hillel και η εξέταση των ιδιοτήτων του. Πώς γίνεται αυτό; Οι μαθητές αρχικά εστιάζουν την προσοχή τους περισσότερο στον τύπο και στη σημασία των εξόδων, στην απόκλιση που συνεπάγεται η αλλαγή των εισόδων, παρά στο μηχανισμό ενός προγράμματος (procedure). Για παράδειγμα, η αντεστραμένη κούκλα με μιά απλή αλλαγή στο πρόσημο της εισόδου και ακόμη η κούκλα χωρίς κεφάλι που συνεπάγεται η εγκατάλειψη της πολλαπλασιαστικής στρατηγικής.

Με αυτές τις σκέψεις θα μπορούσε να ξεκινήσει μιά αρχιτεκτονική για τη διδασκαλία του μαθηματικού κεφαλαίου που αφορά τα κλάσματα με τη βοήθεια του μικρόκοσμου της Logo.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από τη μελέτη της έρευνας προκύπτει ότι είναι εφικτή η προσέγγιση των κλασμάτων με την κατασκευή ενός μικρόκοσμου που βασίζεται στη Logo. Στην προσπάθειά μας να προσεγγίσουμε αυτό το στόχο προέκυψαν αρκετά συμπεράσματα . Πιό συγκεκριμένα, από τη θεωρητική αναζήτηση που αφορά τα κλάσματα και τη Logo (Κεφ.1,3,4 και 5) , από τη στατιστική ανάλυση (Κεφ. 7), και τέλος από την ανάπτυξη του λογισμικού (Κεφ. 8), προκύπτουν τα παρακάτω:

1. Η παραδοσιακή διδασκαλία με τις όποιες εξειδικευμένες εφαρμογές της της στην Ευρώπη (REALISTIC PARADIGM, CSMS PROJECT, SESM PROJECT, CMF PROJECT), και στην Αμερική (RATIONAL NUMBER PROJECT, NORTH AMERICAN CURRICULUM PROJECT), δεν κατάφερε να αντιμετωπίσει το πρόβλημα των κλασμάτων ούτε στην εννοιολογική ούτε στη διαδικαστική του διάσταση. Ισως η εναλλακτική πρόταση στο αδιέξοδο της παραδοσιακής διδασκαλίας να είναι η αναδιάρθρωσή της με τη βοήθεια ενός νέου, αποτελεσματικού μέσου όπως είναι οι μικρόκοσμοι που κτίζονται με τη Logo. Ο μικρόκοσμος από τη φύση του με τις συνιστώσες που περιγράψαμε δεν έρχεται να υποκαταστήσει την παραδοσιακή διδασκαλία και το δάσκαλο, όπως φιλοδοξούν να κάνουν τα διάφορα νοήμονα ή έμπειρα συστήματα. Αντίθετα έρχεται να λειτουργήσει στο πλαίσιο της παραδοσιακής διδασκαλίας το οποίο αναπόφευκτα αλλάζει δραματικά. Ο μικρόκοσμος με την πλαισιακή του συνιστώσα διευρύνει και εμπλουτίζει με αποτελεσματικότερα εργαλεία την παραδοσιακή μέθοδο και της δίνει νέο νόημα και περιεχόμενο. Ο μικρόκοσμος χρησιμοποιεί δοκιμασμένες ψυχολογικές στρατηγικές όπως για παράδειγμα τη μέθοδο της γνωστικής σύγκρουσης (cognitive conflict), και επιτυγχάνει εύκολα ό,τι δεν θα μπορούσε ίσως καθόλου ή να επιτύχει δύσκολα η παραδοσιακή διδασκαλία. Για παράδειγμα είδαμε ότι, τα παιδιά είναι ισχυρά συνδεδεμένα με την προσθετική στρατηγική η οποία τα εμποδίζει να αντιληφθούν τον πολλαπλασιαστική φύση του κλάσματος. Οταν προσπαθούν να την εφαρμόσουν στο πλαίσιο του μικρόκοσμου συγκρούονται με τους στόχους που τα ίδια έθεσαν. Η αποκεφαλισμένη κούκλα (πρόγραμμα MH_KOYKLA) είναι μιά δραματική επιβεβαίωση αυτού του ισχυρισμού.

2. Ο μικρόκοσμος ζωντανεύει τις μαθηματικές ιδέες, τις καθιστά ελκυστικές και ευκολότερα προσπελάσιμες. Για παράδειγμα η ισοδυναμία, μιά ιδρυτική έννοια των μαθηματικών (Εξαρχάκος, 1993), που δύσκολα μπορούν να συλλάβουν σε βάθος τα παιδιά ξετυλίγεται στο πλαίσιο του μικρόκοσμου εντελώς φυσικά. Το πρόγραμμα TREKSE αποδίδει σε αυτή την έννοια ανθρώπινες ιδιότητες, βάζει τα κλάσματα να "τρέξουν" και φυσικά αποδεικνύεται ότι υπάρχουν **αμέτρητα** διαφορετικά κλάσματα που ξεκινούν μαζί και τερματίζουν στο ίδιο ακριβώς σημείο γιατί απλώς είναι ισοδύναμα!

3. Η έρευνα έδειξε πως το κλάσμα είναι μιά εξαιρετικά σύνθετη, πολυδιάστατη έννοια που μάλλον είναι αδύνατο να την προσπελάσουν **απ' ευθείας** οι μαθητές. Είναι πιθανό η προσπέλασή της να γίνεται μέσα από την κατάκτηση άλλων ενδιάμεσων εννοιών και σχέσεων.

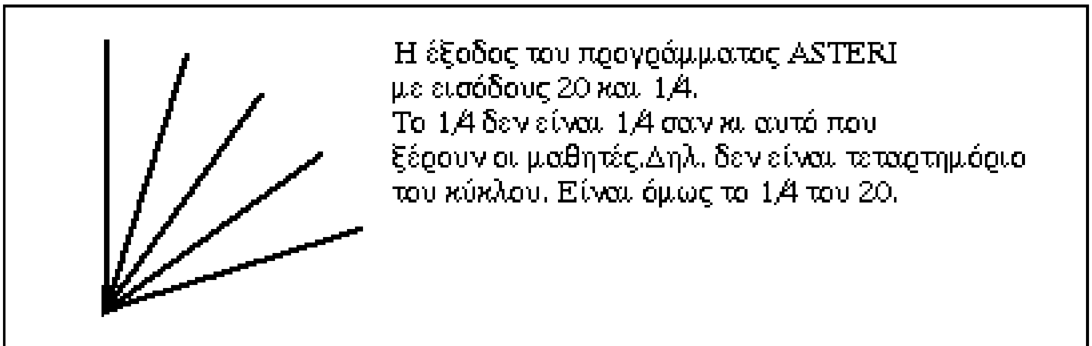
α) Η πολλαπλασιαστική δομή.

Φαίνεται λοιπόν πως είναι ανάγκη να ενισχύσουμε την πολλαπλασιαστική δομή στη σκέψη των μαθητών και είδαμε ότι ο μικρόκοσμος απαντά σε αυτή την απαίτηση με σαφή τρόπο. Επτά προγράμματα έχουν αναλάβει να εκπληρώσουν αυτό το στόχο (βλ. παράγραφο 8.1).

β) Ενας άλλος παράγων που πιθανά οδηγεί, στην κατάκτηση της έννοιας του κλάσματος είναι οι έννοιες της διαμέρισης και της μοναδοποίησης. Και στα δύο θέματα είναι σε θέση ο μικρόκοσμος να ανταποκριθεί θετικά. Τα προγράμματα που μπορούμε, μαζί με τους μαθητές να αναπτύξουμε, χρησιμοποιώντας σαν βάση τα πρόγραμματα EYQEIA και YPODEKAMETRO, είναι δυνατό να μας επιτρέψουν να πετύχουμε τη σύλληψη αυτών των εννοιών. Για παράδειγμα, η χελώνα μπορεί να βηματίζει με δικό της βήμα ή με βήμα ενός εκατοστού ή ενός δεκάτου. Εξαρτάται από το πώς θα το ορίσουμε στο πρόγραμμα EYQEIA . Το βήμα μικρότερο ή μεγαλύτερο είναι η μεταβαλόμενη μονάδα μέτρησης. Αλλά αναπόσπαστα συνδεδεμένη με τη μοναδοποίηση είναι η έννοια της διαμέρισης. Για παράδειγμα, το υποδεκάμετρο μπορεί να έχει το ίδιο πραγματικό μήκος συνέχεια. Αυτό το συγκεκριμένο μήκος όπως μπορούμε να το υποδιαιρέσουμε σε όσα κομμάτια θέλουμε, ορίζοντας παράλληλα και μιά νέα μονάδα. Δηλ. οι μικρές αλλαγές στα επίσης μικρά προγράμματα του μικρόκοσμου συνεπάγονται μεγάλα γνωστικά οφέλη.

γ) Ενας επίσης σημαντικός παράγων για να επιτύχουμε μιά βαθιά και ολοκληρωμένη εικόνα της έννοιας του κλάσματος είναι η κατανόηση των διάφορων υποκατασκευών του κλάσματος (έχουμε αναφερθεί σ' αυτές αναλυτικά) και ιδιαίτερα εκείνων που αφορούν την ερμηνεία του ως λόγου και ως τελεστή. Η στατιστική ανάλυση έδειξε ότι οι μαθητές της πόλης του Ρεθύμνου αγνοούν σε σημαντικό βαθμό τις βασικές αυτές όψεις του κλάσματος. Ιδιαίτερα για τη γνώση του κλάσματος ως τελεστή η στατιστική ανάλυση έδειξε ότι η χαμηλότερη επίδοση των μαθητών σε όλο το τεστ των κλασμάτων σημειώθηκε στην αντίστοιχη ερώτηση.Το πρόγραμμα SPITI είναι μιά σαφής απάντηση για την ερμηνεία του κλάσματος ως λόγου. Επίσης και το πρόγραμμα L μπορεί να υπηρετήσει τον ίδιο στόχο. Το πρόγραμμα TREKSE είναι μιά καλή προσπάθεια να δείξουμε εκτός των άλλων και τη λειτουργία του κλάσματος ως τελεστή.

δ) Τέλος, ένας οπωσδήποτε σημαντικός παράγων για την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος είναι η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να επιλύουν προβλήματα σε συνεχή και διακριτά πλαίσια. Η στατιστική ανάλυση των στοιχείων της έρευνας έδειξε ότι οι μαθητές δεν κάνουν ισότιμη χρήση συνεχών και διακριτών μέσων για να εξηγήσουν κλασματικές έννοιες. Τα συνεχή μέσα φαίνεται να είναι αμεσότερα στην εποπτεία των μαθητών και μάλλον τα ελέγχουν καλύτερα και ίσως να είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με αυτά. Το πέρασμα από τα συνεχή στα διακριτά μέσα ή το αντίστροφο είναι μιά εξαιρετικά δύσκολη υπόθεση, ένα σοβαρό γνωστικό και φιλοσοφικό πρόβλημα. Ο μικρόκοσμος που κατασκευάσαμε προσπαθεί να σταθεί στο μεταίχμιο των δύο πλαισίων με το πρόγραμμα ASTERI. Ενα αστέρι μπορεί να θεωρηθεί και ως συνεχές και ως διακριτό μέσο. Το πρόγραμμα ASTERI είναι δύσκολο να κατασκευασθεί από τους μαθητές και θα πρέπει να το καταγράψουμε σαν μαύρο κουτί στην ανάπτυξη του λογισμικού (βλ. παρ. 8.9). Ομως υπηρετεί σαφείς γνωστικές σκοπιμότητες που δεν μπορεί υπηρετήσει η παραδοσιακή διδασκαλία. Για παράδειγμα, (βλ. παράγρ. 4.1), θα μπορούσε να προσφέρει ως ένα βαθμό μιά αισθητοποίηση του κλάσματος που είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα, όπως είναι το 5/4. Μιά άλλη ίσως αθέατη όψη του προγράμματος ASTERI είναι ότι καταφέρνει γνωστικά "πλήγματα" στο μέρος- όλου μοντέλο του κλάσματος, το οποίο κυριαρχεί στη σκέψη των μαθητών και το οποίο πιθανά ευθύνεται για την αδυναμία των μαθητών να δούν το κλάσμα σαν αριθμό. Γιατί αν κάποιος "τρέξει" το πρόγραμμα αυτό με εισόδους 20 και 1/4, ζητήσει με άλλα λόγια να μάθει πόσα διακριτά κομμάτια είναι το 1/4 του 20 θα δει στην οθόνη ένα σχήμα που δεν μοιάζει με τεταρτημόριο του κύκλου. Ομως είναι 5 διακριτά κομμάτια που πραγματικά αποτελούν το 1/4 του όλου (20 κομμάτια).



Σχ. Το αποτέλεσμα της εντολής ASTERI 20 1/4

4. Η διεθνής εμπειρία έδειξε ότι τα παιδιά έχουν χαμηλή ικανότητα στο να εκτελούν υπολογισμούς (διαδικαστική γνώση) στα κλάσματα και ελάχιστη εννοιολογική γνώση αυτής της έννοιας. Το ίδιο ακριβώς έδειξε και η εμπειρική έρευνα για τους μαθητές της ευρύτερης πόλης του Ρεθύμνου. Ετσι ο μικρόκοσμος είχε κυρίως περισσότερο εννοιολογικό παρά αλγοριθμικό προσανατολισμό.

5. Εύκολα θα μπορούσε να υποστηρίξει κανείς την άποψη ότι στο πρόσωπο του μικρόκοσμου ο κονστρακτιβισμός μπορεί να βρεί έναν αυθεντικό του εκφραστή. Αν παρακολουθήσει κανείς την εξέλιξη των προγραμμάτων του μικρόκοσμου θα διαπιστώσει ότι ή γνώση των μαθητών κτίζεται βήμα-βήμα και δεν υπάρχει τέλος στη κατασκευαστική διαδικασία της γνώσης. Για παράδειγμα το πρόγραμμα KOYKLA που παριστάνει έναν άνθρωπο εξελίχθηκε σε OIKOGENEIA και το πρόγραμμα SPITI σε GEITONIA με προοπτική να γίνει POLITEIA όπως είναι φανερό.

6. Από τη διεθνή εμπειρία έγινε σαφές ότι οι μαθητές δεν βλέπουν τα κλάσματα ως αριθμούς και τα αποφεύγουν. Ο μικρόκοσμος που κατασκευάσαμε μόνο αν εφαρμοστεί στο πλαίσιο της σχολικής πραγματικότητας θα μπορούσε να μας προσφέρει κάποιου είδους μαρτυρία για την αντιμετώπιση αυτών των φαινομένων καθώς το κλάσμα τίθεται σαν είσοδος στα περισσότερα προγράμματα του μικρόκοσμου.

7. Από τα αποτελέσματα της στατιστικής ανάλυσης είδαμε να αναδύονται γνωστικά πρότυπα και συστηματικά λάθη. Το πρότυπο του μισού πιθανό να οφείλεται στις επιδράσεις της καθημερινής ζωής μέσα κι έξω από το σχολείο και ακόμη στη μεγάλη συχνότητα με την οποία εμφανίζεται στα διδακτικά εγχειρίδια. Εχουμε βάσιμες υποψίες ότι πηγή των συστηματικών λαθών που αναγνωρίστηκαν στα γραπτά των μαθητών, όπως για παράδειγμα η πράξη της αφαίρεσης που εκτέλεσαν στην ερώτηση 10 του ερωτηματολογίου ή η πρόσθεση των αριθμητών και των παρονομαστών στην ερώτηση 12, είναι η μεταφορά κανόνων και διαδικασιών από το καλά γνωστό στους μαθητές αρισθμητικό σύστημα των ακεραίων. Η τεχνική συνιστώσα του μικρόκοσμου πιθανά μπορεί να προσφέρει βοήθεια στην αντιμετώπιση των λαθών που αναφέρθηκαν με γραφική αναπαράσταση της πρόσθεσης και γενικά όλων των πράξεων. Βάση για τα προγράμματα αυτά είναι το πρόγραμμα ASTERI με κατάλληλες τροποποιήσεις.

8. Η άτυπη γνώση των μαθητών για τα κλάσματα είναι ένα σημαντικό ζήτημα που αυτή την ώρα (Mack, Dec 1995), τίθεται επιτακτικά στο διεθνές προσκήνιο της μαθηματικής παιδείας, καθότι πιθανά μπορεί να αποτελέσει μιά επαρκή βάση για την ανάπτυξη των κλασματικών εννοιών και διαδικασιών. Αναμφίβολα η άτυπη γνώση για τα κλάσματα αποτελεί βασικό στοιχείο της μαθητικής συνιστώσας του μικρόκοσμου.

9. Από τα αποτελέσματα της στατιστικής ανάλυσης έγινε σαφές ότι υπάρχει στατιστικώς σημαντική διαφορά ανάμεσα στην επίδοση των αγοριών και των κοριτσιών στα κλάσματα. Τα κορίτσια υπερτερούν των αγοριών. Επίσης διαπιστώθηκε ότι δεν υπάρχει στατιστικώς σημαντική διαφορά ανάμεσα στους μαθητές της Ε' και ΣΤ' του Δημοτικού σε ό,τι αφορά το ίδιο θέμα. Ακόμη βρέθηκε ότι η απόδοση των μαθητών σε σχέση με το σχολείο διαφοροποιείται σημαντικά μόνο κατά γεωγραφική περιοχή. Συγκεκριμένα τα σχολεία μέσα στην πόλη του Ρεθύμνου δε διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους. Επίσης δε διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους και τα σχολεία εκτός της πόλης του Ρεθύμνου. Στατιστικώς σημαντικές διαφορές εμφανίζονται ανάμεσα στα σχολεία εντός της πόλης και εκτός της πόλης του Ρέθυμνου. Τα σχολεία που βρίσκονται μέσα στην πόλη του Ρέθυμνου υπερτερούν .

10. Οπως έχουμε επισημάνει ξανά, ο συμβολισμός αναδεικνύει τη δύναμη των μαθηματικών ιδεών και συμβάλλει αποφασιστικά στην αποκάλυψη του περιεχομένου τους. Ταυτόχρονα όμως αποτελεί ένα σοβαρό εμπόδιο για τους μαθητές. Ο προγραμματισμός έρχεται να συνδράμει στο ζήτημα του συμβολισμού τη μάθηση των μαθηματικών. Διότι προγραμματισμός σημαίνει κώδικας και κώδικας σημαίνει μεταβλητές και χειρισμούς αλγεβρικών σχέσεων και συμβολικών εκφράσεων τις οποίες ο μαθητής αναγκάζεται να εννοιολογικοποιεί. Κατά συνέπεια ο μαθητής καθώς προγραμματίζει αναγκάζεται να λειτουργήσει στο αφηρημένο επίπεδο για να κατασκευάσει αποτελεσματικά προγράμματα. Επομένως είναι ανάγκη προκειμένου να μάθουν κλάσματα οι μαθητές να εισαχθούν νωρίς στην προγραμματιστική διαδικασία γιατί οι ρητοί και κλασματικοί αριθμοί είναι αφηρημένες μαθηματικές οντότητες, ενέχουν την έννοια της μεταβλητής και σχετίζονται περισσότερο με την άλγεβρα παρά με την αριθμητική.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

α. ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abelson H. and diSessa A., (1980). Turtle Geometry, MIT.

Anderson, R. C. (1969). Suggestions from research-fractions. *Arithmetic Teacher,* 16, 131-135.

Armstrong, B. E., Novillis Larson, C., (1995). Students' use of part-whole and direct comparison strategies for comparIng partitioned rectangles.*Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 219.

Ary, T. S. (1987). "The Giant inch and other Logo Programs", Classroom Computer Learning, 7,7, 57-59.

Ball D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: Constructing and using representational contexts in teaching fraction. In Carpenter, T.P., Fennema E., Romberg T.A. (Eds.), "Rational Numbers", LEA, 1993.

Ball, S. (1988). Computers, Concrete Materials and Teaching Fractions. School Science and Mathematics, vol. 88 (6), Oct 1988.

Bauersfield, H., quoted by Lorenz, J. H., (1980). *For Learning Mathematics,* 13, 2.

Behr , M., & Post, T. (1988). Teaching rational number and decimal concepts. In T.R. Post (Ed.), Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods (pp. 190-131). Newton, MA: Allyn and Bacon.

Behr, M. J., Post, T. P., Lesh, R. A., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In R. A. Lesh & M. Landau, (Eds.), Aquisition of Mathematics Concepts and Processes. New York: Academic Press.

Behr, M., Harel, G., Post, T., Lesh, R. (1991). "Units of quantity: a coceptual basis common to additive and multiplicative strustrures", unpublished manuscript.

Behr, M., Harel, G., Post, T., Lesh, R. (1992). Rational number, Ratio, and Proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.

Behr, M., Harel, G., Post, T., Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis-emphasis on the operator construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema, T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers* (pp. 13-47), LEA.

Behr, M., Wachsmuth, I., & Post, T. (1985). Construct a sum: A measure of children's understanding of fraction sise. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 120-131.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. Journal for Research in Mathematics Education, 15(5), 323-341.

Bell, A., Fischbein, E., & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 129-147.

Bergeron, J. C., & Herscovics, N. (1982). A constructivist model of understanging. In *S. Wagner (ed.), Proceedings of the Fourth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Athens: University of Georgia, Department of Mathematics Education, 1982.

Bergeron, J. C., & Herscovics, N. (1990). Psychological aspects of learning early ariumetic. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 31-52). New York: Cambridge University Press.

Bezuk , N. S. & Bieck, M. (1993). Current research on rational numbers and common fractions: Summary and implications for teachers. In D.T. Owens (Ed.), Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics (pp. 118-136), Macmillan, NCTM.

Bigelow, J. C., Davis, G. E., & Hunting, R. P. (1989). Some remarks on the Homology and Dynamics of rational number learning. Paper presented at the research presession of the National Counsil of Teachers of Mathematics Annual Meeting, Orlando, FL.

Blaho, A., Kalas, I., Tomcsanyi, P. (1993). Comenius logo: Environments for Teachers and Environment for Learners. In P. Georgiadis, G. Gyftodimos, Y. Kotsanis, C. Kynigos (Eds.), Proceedings (Supplement) of the Fourth European Logo Conference, University of Athens, Department of Informatics, 28-31 August 1993, Athens, Greece.

Booth, L., (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors* (NFER-Nelson).

Brown, A. L. (1978). Knowing when, where, and how to remember: A problem of metacognition. In Glaser (ed.), Advances in instructional psychology. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Brown, A. L. (1984). Reciprocal teaching: Comprehension- fostering and comprehension- monitiring activities. *Cognition and Instruction*, 1(2), 117-175.
Brown, C. A. (1993). *A critical analysis of teaching rational number*. In Carpenter, T.P.,Fennema E., Romberg T.A. (Eds.),"Rational Numbers", LEA,1993.

Brown, C. A., Carpenter, T. P., Koyba, V. L., Linquist, M. M., Silver, & E. A. Swafford, J. O. (1988a). Secondary school results for the fourth MAEP Mathematics Assessment: Discrete mathematics, data organisation and interpretation, measurement, number and operations. *Mathematics Teacher*, 81, 241-248.

Brown, C. A., Carpenter, T. P., Koyba, V. L., Linquist, M. M., Silver, & E. A. Swafford, J. O. (1988b). Secondary school results for the fourth MAEP Mathematics Assessment: Algebra, geometry, mathematical methoths, and attitudes.*Mathematics Teacher*, 81, 337-347.

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of teaching. *Educational Researcher,* 18(1), 32-42.

Brownell, W. A., & Sims, V. M. (1946). The nanure of understanding. *The forty-fifth yearbook of the National Society for the Study of Education : Part I. The measurement of understanding* (pp. 27-43). Chicago: National Society for the Study of Education.

Bruner J. S. (1966). Toward a Theory of Instruction. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Bruner J. S. (1966). Towards a theory of Instruction. New York: W.W Norton.

Bruner J. S. (1985). Vygotsky: A historical and conceptual perspective. In J. V. Wertch (eds,), Culture, communication, and cognition. Cambridge University Press.

Byers, V. and Erlwanger, S., (1984), "Content and form in Mathematics", *Educational Studies in Mathematics*, 15, 259-275.

Carpenter T. P., & Fennema, E. (1988). Research and cognitively guide instruction. In E. Fennema, T. P. Carpenter, & S. J. Lamon (Eds.), Integrating research on teaching and learning mathematics (pp. 2-17). Madison: Wisconsin Center for Education Research, University of Wisconsin.

Carpenter, T. P. (1986). Conceptual Knowledge as a foundation for procedural Knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural Knowledge: The case of mathematics* (pp. 113-132). Hillsdale, NJ: LEA.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition subtraction concepts. In R. Lesh & Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes pp. 7-44). New York: Academic.

Carpenter, T. P., Coburn, T. G., Reys R. E., & Wilson J. W. (1975). Results of the NAEP mathematics assessment: Elementary school. The Arithmetic Teacher,

Carpenter, T. P., Coburn, T. G., Reys R. E., & Wilson J. W. (1978). Results from the first mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress. Reston, VA: NCTM.

Carpenter, T. P., Corbitt M.K., Kepner, H. S., Lindquist, M.M., Reys R. E., & Reys, R. E. (1980). Results and Implications of the second NAEP mathematics assessment: Elementary school. The Arithmetic Teacher, 10-12, 44-47.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., Chiang, C., & Loef M. (1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: A experimental study. *American Educational Research Journal*, 26(4), 499-531.

Carpenter, T. P., Hiebert, J., & Moser, J. M. (1981). Problem structure and first grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problem. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12, 27-39.

Carraher, D. W. (1993). Lines of thought: a ratio and operator model of rational number. *Educational Studies in Mathematics*, 25, 281-305.

Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schlimann , A.(1987), Written and oral mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(2), 83-97.

Case, R. & Sandieson, R. (1988). A developmental approach to the identification and teaching of central conceptual structures in mathematics and science in middle grades. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 236-259). Hillsdale, NJ: LEA.

Cobb, P. (1987). Information-processing psychology and mathematics education -A constructivist perspective. The *Journal of Mathematical Behavior*, 6(1), 3-40.

Cobb, P. and Wheatley, G.H. (1988). Children's initial understanding of ten. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 10 (3), 1-28.

Cockcroft W.H., (1982). Mathematics Counts, HMSO, London.

Collis, K. F. (1974), *Cognitive Development and Mathematics Learning,* Psychology of Math. Ed. Workshop, Centre for Science and Math. Ed., Chelsea College, University of London.

Confrey, J. (1987). "Misconceptions" across subject matters: Science, mathematics, and programming. In J. D. Novak (Ed.), Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics (Vol. 1, pp. 81-106). Ithaca, NY: Cornell University.

Crick, F. (1988). What mad pursuit. A personal view of scietific discovery. New York: Basic Books.

Davis, G., Hunting, R. P., and Pearn,C. (March 1993). What might a fraction mean to a child and how a teacher know? Journal of Mathematical Behavior, 12, 63-76.

Davis, R. B. (1984). Learning Mathematics. The Cognitive Science Approach to Mathematics Education (Beckenham, Kent: Croom Helm).

Davis, R. B. (1984). *Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education*. Norwood, NJ:Ablex.

De Morgan, A. (1943). Study and difficulties of mathematics (Fourth reprint edition). La Salle, IL: The Open Court Publishing Co.

Devine, D. F. & Kaufmann, J. E. (1974). Mathematics for elementary education. New York: John Wiley & Sons.

Dienes, Z. P. (1964). The Power of Mathematics. Hutchinson Educational Ltd., London 1964.

diSessa, A. (1989). A child's science of motion: Overview and first results. In Proccedings of the Fourth International Conference for Logo and Mathematics Education, Israel Logo Centre, Technion-Israel Institute of Technology, Haifa, pp. 211-231.

Douady, R., (1985). 'The interplay between the different settings, tool-object dialectic in the extension of mathematical ability', *Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, State University of Utrecht, The Netherlands, Vol. II.

Easley, J., (1984). *Problem Solving*, 6, 2, 1-4.

Ellerbruch, L. W., and Payne, J. N. (1978). A teaching sequence for initial fraction concepts through the addition of unlike fractions. In M. Suydam (Ed.), *Developing computational skills*. Reston, Virginia: National Counsil of Teachers of Mathematics, 1978.

Engelmann, S. (1969). Conceptual learning. Belmont, Calif.: Feraon Pub.

Erlwanger, J. (1973). *J. Children's math. Behavior*, 1, 2, 7-26.

Fennema, E. & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 147-164). New York: Macmillan.

Feurzing, W., Papert, S., Bloom, M., Grant, R., Solomon, C., (1969). Programming Languages as a Conceptual Framework for Teaching Mathematics, Report 1889, Bolt Beranek & Newman, Cambridge, Mass.

Filloy, E., Rojano, T., (1987). Concrete Models and Processes of Abstraction : Teaching to Operate the Unknown, *For the Learning of Mathematics*, No 7.

Fraenkel, A. A. and Bar-Hillel, Y. (1958). Foundations of Set Theory. Amsterdam: North Holland.

Fredericou, A. & Folerou, F. (1991). Teachers of elementary school. Athens: Y-Books. (In Greek).

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Boston: D. Reidel.

Gagn_, R. M. (1965). The conditions of learning. New York: Holt, Rinehart, & Winston.

Ganson, R. E., & Kieren, T.E., (1980). Operator and ratio thinking structures with rational numbers - A theoretical and empirical exploration. The Alberta Journal of Educational Reseach. ..pp ??

Ginsburg, H. P. (1982). *Children's arithmetic*. AUSTIN, TX: Pro-Ed.

Ginther, K., Ng, K., & Begle, E. (1976). A survey of student achievement with fractions. SMESG Working Paper No. 20. Stanford University, October, 1976.
Goldenberg, E. P. (1982). *BYTE*, 2, 210-229.

Graeber, A., & Tirosh, D. (1988). Multiplication and division involving decimals. Preservice elementary teachers' performance and beliefs*Journal of Mathematical Behavior*, 7(3), 263-280.

Graeber, A., & Tirosh, D., Glover, R. (1989). Preservice teachers misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 95-102.

Greeno, J. G. (1978). Understanding and procedural Knowledge in mathematics instruction. *Educational Psychologist,* 12(3), 262-283.

Greeno, J. G. (1986). Collaborative teaching and making sense of symbols: Comment on Lampert's "Knowing, doing, and teaching multiplication." Cognition and Instruction, 3(4), 343-347.

Greer, B. (1987). Understanding of arithmetical operations as models of situations. in J. A. Sloboda & D. Rogers (Eds.), *Cognitive processes in mathematics* (pp. 660-680). New York: Oxford University Press.

Greer, B. (1988). Introduction. *Journal of Mathematical Behavior*, 7(3), 193-196.

Groen, G., (1984). Theories of Logo. Proceedings of the Conference of Logo 84, Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Gunderson, A. G. & Gunderson, E. (1957). Fraction concepts held by young children. *Arithmetic Teacher,* 168-174.

Halford, G. S. (1978), "An approach to the definition of cognitive developmental stages in school mathematics", British Journal of Educational Psychology, 48, 298-314.

Hamermas, J_rgen (1968). Erkenntnis und Interesse.

Harel G., & Behr, M. (1988). Structure and hierarchy of missing value proportion problems and their representetions. *The Journal of Mathematics Behavior*, 8, 77-119.

Harel, G., Behr, M., Post, T., & Lesh, R. (1992). The Blocks task and quantitative reasoning skills of 7th grade children in solving the task. *Cognition and Instruction,* 9(1), 45-96.

Harel, I. & Papert, (1990). Software Design as a Learning Environment. Interactive Learning Environments, 1 (1). Norwood, NJ: Ablex.

Harel, I.(1986). Children as Software Designers: An Exploratory Study in Project Headlight. Paper presented at the LOGO-86 International Conference. Cambridge, MA: MIT Media Laboratory.

Harrison, J. & Greer, B. (1993). Children's understanding of fractions in Hong Kong and Northen Ireland. In Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigemastu, & F. Lin (Eds.), Proceedings of the Seventeeth International Conference (vol. III, pp. 146-153). Tsukuba, Japan: University of Tsukuba.

Hart K. M. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 198-219). Hillsdale, NJ: LEA.

Hart, K. M., (1981). Children's Understanding of Mathematics. London; John Murray.

Hart, K. M., (1984). Ratio: Children's Strategies and Errors (Windsor: NFER- Nelson).

Hartung, M. L. (1958). Fractions and related symbolism in elementary school instruction. Elementary School Journal, 58, 377-384.

Harvey, B. (1987). Why Logo ? In Yazdani, M. : New Horizons in Educational Computing, Chichester: Ellis Horword ltd, pp. 21-39.

Harvey, B. (1993). Symbolic Programming vs. Software Engineering -Fun vs. Professionalism- Are These the Same Question? In P. Georgiadis, G. Gyftodimos, Y. Kotsanis, C. Kynigos (Eds.), Proceedings of the Fourth European Logo Conference, University of Athens, Department of Informatics, 28-31 August 1993, Athens, Greece.

Hassett, J. (1984). Psychology Today, (featured articles on computers and education).

Hatano, G. (1988). Social and motivational bases for mathematical understanding. In G. B. Saxe & M. Gearhart (Eds.), *Children's mathematics* (pp. 55-70). San Francisco: Jossey-Bass.

Herscovics, N. and Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra, *Educational Studies in Mathematics*, 27, 59-78, 1994.
Hiebert , J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 333-355.

Hiebert J., & LeFevre, P.(1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural Knowledge : The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: LEA.

Hiebert, J., & Behr, M. J. (1988). Introduction: Capturing the major themes. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 1-18). Hillsdale, NJ: LEA.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P.(1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 65-97). New York: Macmillan.

Hiebert, J., & Tonnessen, L. H. (1978). Development of the fraction concept in two physical contexts: An exploratory investigation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9(5), 374- 378.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1985). A model of Students' decimal computation procedures. *Cognition and Instruction,* 2(3,4), 175-205.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1986). Procedures over concepts: The acquisition of decimal knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and* *procedural Knowledge : The case of mathematics* (pp. 199-225). Hillsdale, NJ: LEA.

Hillel, J., and Samurcay, R., (1985). Analysis of a Logo Environment for Learning the Concept of Procedures with Variable, Project Report, Concordia University, Montreal.

Hoyles C., and Noss, R. (1987b). Children Working in a structured Logo environment: fron doing to understanding. Recherches en Didactique des Math_matiques, Vol. 8, 12, pp. 131-174.

Hoyles, C. ,(1987). Tools for Learning- Insights for the Mathematics Educator from a Logo Programming Environment. For The Learning of Mathematics 7,2, 32-37.

Hoyles, C. (1991). Developing mathematical knowledge through microworlds. In A.J. Bishop, S. Mellin-Olsen and J. Van Dormolen, *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* , Kluwer Academic Publishers.

Hoyles, C.(1982). The pupil's view of mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, 13, 349-372.

Hoyles, C., & Sutherland, R. (1989). Logo Mathematics in the Classroom. London, Routledge.

Hoyles, C., (1985a). Culture and Computers in the Mathematics Classroom, Inaugural Lecture, University of London, Institute of Education.

Hoyles, C., (1986). Scaling a Mountain -A Study of the Use, Discrimination and Generalisation of some Mathematical Concepts in a Logo Environment. European Journal of Psychology of Education, 1, 111-126.

Hoyles, C., Noss, R. (1987a). Synthesizing mathematical conceptions and their formalization through the construction of a Logo-based school mathematics curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 18, (4), 581-595.

Hoyles, C., Noss, R., Sutherland, R. (1991). The Ratio and Proportion Microworld. Final Report of the Microworld Project, Volume III, Institute of Education, University of London.

Hoyles, C., Sutherland, R. (1985). Children Learning Mathematics-Insights from within a LOGO Environment, Proceedings of Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, (30-40). State University of Utrecht, The Netherlands.

Hoyles, C., Sutherland, R., and Evans, J., (1985). The Logo maths Project: A Preliminary Investigation of the Pupil- Centred Approach to the Learning of Logo in the Secondary Mathematics Classroom, 1983-4, University of London, Institute of Education.

Hunting, R. P. (1983). Alan: A case study of knowlegde of units and perfomance with fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(3), 182-197.

Hunting, R. P. (1984). Learning fractions in discrete and continuous quantity contexts. Proceedings of the Eighth International Conference for the Phychology of Mathematics Education.

Hunting, R. P.(1980). "The Role of discrete quantity partition knowledge in the child's constuction of fractional number." Ph. D. diss., University of Georgia. Dissertation Abstracts International 41 (1981): 4380-81A. University Microfilms no. 8107919.

Hunting, R. P.(1981). "The Role of discrete quantity partition knowledge in the child's constuction of fractional number." Ph. D. diss., University of Georgia. Dissertation Abstracts International 41 (1981): 4380-81A. University Microfilms no. 8107919.

Hunting, R. P., & Sharpley, C. F. (1988). Fraction knowledge in preschool children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(2), 175-180.

Jensen R. J. and Wagner, S. (1982), "3 Perspectives on the process uniformity of beginning algebra students", Proc. of the 4th. Annual Meeting of the North American Chapter of the PME., Athens, Georgia.

Kafai, Y., & Harel, I. (1990). Replicating the Instructional Software Design Project : A Preliminary Research Report. In Harel (Ed.), Constructionist Learning: A 5th Anniversary Collection of Papers. Cambridge MA: MIT Media Laboratory.

Kaput, J. (1985). Multiplicative word problems and intensive quantities: A integrated software response (Tech. Rep.). Harvard Graduate School of Education, Educational Technology Center.

Kaput, J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: LEA.

Kaput, J. J. (1987). Toward a theory of symbol use in mathematics. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 159-195). Hillsdale, NJ: LEA.

Karmiloff-Smith (1984). Children's problem solving. In Lamb. M. E., Brown, A. C. and Rogoff, B. (eds.) Advances in developmental psychology Vol. 3, Erlbaum, pp. 39-90.

Karplus et al., (1982). "Reasoning with unknowns in grades 4,6, and 8", Proc. of the 4th Annual Meeting of the North American Chapter of the PME., Athens, Georgia.

Karplus, R., Pulos, S., and Stage, E. (1983). Propotional reasoning in early adolescents. In R. Lesh & Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* pp. 45-90). New York: Academic.

Keranto, T. (1984). Processes and strategies in solving elementary verbal multiplication and division tasks: Their relationship with Piaget abilities, memory capasity skills and rational number. Hameelinna, Finland: Tampere University. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 239 906).

Kerslake, D. (1986). Fractions: Children's strategies and errors. Windsor, England: NFER-NELSON.

Khoury, E., and Zazkis, R. (1994). On fractions and non-standard representations: Pre-service teachers' concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 191-204.

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct- Its elements and mechanisms. In T. E. Kieren (Ed.), Recent research on number learning (pp. 125- 150). Columbus: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. E. (1981). Five faces of mathematical Knowledge building. Edmonton: Department of secondary Education, University of Alberta.

Kieren, T. E. (1988). Personal Knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. J. Behr (Eds.) Number concepts and operations in the middle grades (pp. 162-181). Hillsdale, NJ: LEA.

Kieren, T. E. (1992). Mathematics in a Logo Environment: A Recursive Look at a Complex Phenomenon. In Hoyles, C., & Noss, R. (eds.), Learning Mathematics and Logo, Cambridge, MIT Press.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter, E. Fennema, T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers* (pp. 49-89), LEA.

Kieren, T. E., & Southwell, B. (1979). Rational numbers as operators: The development of this construct in children and adolescents. *Alberta Journal of Educational Research*, 25 (4), 234- 247.

Kieren, T. E., (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), Number and measurment: Papers from a research workshop. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. E., (1978). Informatics and the secondary school mathematics curriculum. In D. C. Jonhson and J. D. Tinsley (eds.), *Informatics and mathematics in secondary schools,* pp. 77-84, IFIP.

Kieren, T. E., Nelson, D. (1978). The Operator Construct of rational Numbers in Childhood and Adolescence - An Exploratoty Study. The *Alberta Journal of Educational Research*, vol. XXIV, No. 1, March, 1978.

Kilpatrick , J.,(1985). "A Retrospective Account of the Past Twenty- five Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving", in Silver, E. (Ed.), Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, 1-15.

Kline, M. (1974). Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math, Vintage Books, New York.

Klopfer, L. E., Champagne, A.B., & Chaiklin, S.D. (1992). The ubiquitous quantities: Explorations that inform the design of instruction on the physical properties of matter. Science Education, 76(6), 597-614.

Krause, E. F. (1986). Mathematics for elementary teachers: A balanced approach. Lexington, MA:D. C. Health & Company.

K_chemann, D., (1981), "Algebra", in Hart, K. (ed.), Children's Understanding of Mathematics: 11-16, John Murray, London.

Lambert, M.(1986). Knowing, doing, and teaching multiplication. *Cognition and Instruction*, 3(4), 305-342.

Lamon, S. J. (1989). Ratio and proportion: Preinstuctional cognitions. Unpublished doctoral dissertation, University of Wisconsin, Madison.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive processes. In T. P. Carpenter, E. Fennema, T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers* (pp. 131-156), LEA.

Latino, J.J. (1955). Take the folly out of fractions. Arithmetic Teacher, 2, 113-118.

Lave, J., Murtaugh, M., & de la Rocha, O. (1984). The dialectic of arithmetic in grocery shopping. In B. Roggoff & J. Lave (Eds.), Everyday cognition (pp. 67-94). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Lawler, R. W. (1981). The progressive construction of mind. Cognitive Science, 5, 1-30.

Lawler, R. W., (1982). *BYTE*, 2, 138-162.

Leinhardt, G. (1988). Getting to know: Tracing students' mathematical Knowledge from intuition to competence. *Educational Psychologist,* 23(2), 119-144.

Lemerise, T. (1993). Piaget, Vygotsky, & Logo. *Computer Teacher*, (April, 1993), pp. 24-28.

Lesh R., Post, T. R., & Behr, M. J. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 93-118). Hillsdale, NJ: LEA.

Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 235-264.

Lesh, R. Mathematical learning disabilities: Considerations for identification, diagnosis, and remediation. In R. Lesh, D. Mierkiewicz, & M. G. Kantowski (Eds.), Applied mathematical problem solving. Columbus, ERIC/SMEAC, 1979. (b)

Lesh, R., Landau, M. and Hamilton E. (1983). Conceptual Models and Applied Mathematical Problem-Solving Research. In R. Lesh & Landau

(Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* pp. 7-44). New York: Academic.

Liebeck, P.(1984). How Children Learn Mathematics, Penguin Books.
Linn, M. C. (1986). Establishing a research base for science education: Challenges, trends, and recommendations (Report of a National Conference). Berkeley, CA: Lawrence Hall of Science.

Lorenz, J.J. (1980). Teacher-student interactions in the mathematics classroom: a review. *For Learning Mathematics,* 1,14-19.

Lunzer, E. A. (1973), Formal Reasoning: A Reappraisal, Psychology of Math. Ed. Workshop, November. Centre for Science and Math. Ed., Chelsea College, University of London.

Mack, N. K. (1987). Learning fractions with understanding: Eight clinacal studies. Unpublished doctoral dissertation, University of Wisconsin, Madison.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(1), 16-32.

Mack, N. K. (1993). Learning rational numbers with understanding: The case of informal knowlegde. In T. P. Carpenter, E. Fennema, T. A. Romberg (Eds.), Rational numbers (pp. 85-105), LEA.

Mack, N. K. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (5), 422-441.

Mainville, W. (1969). Fractions. In J. Baumgart, D. Deal, B. Vogeli, & A. Hallerberg (Eds.), *Historical topics for the mathematics classroom.* Washington, D. C. : National Council of Teachers of Mathematics.

Markovits, Z. and Sowder, J. (1991). Students' understanding of the relationship between fractions and decimals. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 13(1), 3-11.

Marshall, S. P., (1993). Assessment of rational number understanding: A schema-based approach. In T. P. Carpenter, E. Fennema, T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers* (pp. 261-288), LEA.

Mason, J., Burton, L. and Stacey K., (1982). Thinking Mathematically. Addison-Wesley, London.

Maturana, H., and Varela, F. (1980). Autopoiesis and Cognition. Vol 42. Boston University Philosophy of Science Series. Dordrecht: Reidel.

Maturana, H., and Varela, F. (1987). *The tree of knowledge*. Boston & London: The New Science Library, Shambala.

McCloskey, M., (1983). Intuitive Physics. *Scientific American*, 248, 114-122.

McLellan, J. & Dewey, J. (1908). The Psychology of number. New York: D. Appleton.

Mendes, A. J., & Mendes, T. (1990). Technical Aspects of Educational Courseware Development: Problems and some possible solutions Eurit 90. A European Conference on Technology and Education. April 23/27, 1990, Herning, Denmark.

Mendes, T. et al., (1990). Collaborative Educational Software Development: Results from an Experience. Eurit 90. A European Conference on Technology and Education. April 23/27, 1990, Herning, Denmark.

Minsky, M., (1986). The Society of Mind, Simon & Schuster, New York.
Montgomery D. C. (1991). Design and analysis of experiments. Third edition, JOHN WILEY & SONS.

Moonen, J. (1987). "Educational Software Development: The Pedagogical Design", In :Plomp, T., Van Deursen, K. & Moonen, J. (ed.) CAL for Europe: Computer-Assisted Learning for Europe. Amsterdam: North-Hplland.

Nason, R. (1991). PRODIGY: An intelligent computer-based system for development teachers' expertise in the diagnosis and remediatio of common errors patterns in the domain of common fraction. *Interactive Learning International*, Vol. 7, 243-252.

Nason, R. (1993). PRODIGY: Diagnosis and remediation in the domain of common fractions. Computers Education, vol. 20, No. 1 pp. 45-53.

National Research Council (1989). Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education. Washington, DC: National Academy Press.

NICHOLS, E.D. & SWAIN, R.L. (1971). Mathematics for the elementary school teacher. New York: Holt, Rinehart, & Winston.

NICHOLS, E.D., & BEHR,M.J. (1982). Elementary school mathematics and how to teach it. New York, NY: Holt, Rinehart, & Winston.

Nickerson, R. S. (1982). *Understanding understanding.* Draft manuscript. (NIE Contract No. 400-80-0031).

Nik Pa, Nik Azis. (1987). "Children's Fractional Schemes." Ph. D. diss., University of Georgia, 1987.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept, Part I -Differentiation of stages. Educational Studies in Mathematics, 11, 217-254.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept, Part II- Problem-Structure at successive stages; Problem-Solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 331-363.

Noelting, G. (1978). The development of proportional reasoning in the child and adolescent through combination of logic and arithmetic. In E. Cohors- Fresenborg & I. Wachsmuth (Eds.) Proceedings of the second international Conference for the Psychology of mathematics Education. Osnabruck, West Germany: University of Osnabruck.

Noss, R. (1984). Explorations in mathematical thinking: Some implications from Logo classrooms, Proceedings of Logo 84 Conference (Cambridge, Massachusetts: MIT Prees).

Noss, R. (1986). Constructing a Conceptual Framework for Elementary Algebra through Logo Programming, *Educational Studies in Mathematics*, 17, 4, 335-357.

Noss, R. (1992). In defence of Mathematics. Micromath, 8,1, 18-20.

Noss, R., & Hoyles, C. (1992). Looking Back and Looking Forward. In Hoyles, C., & Noss, R. (eds.), Learning Mathematics and Logo, Cambridge, MIT Press.

Noss, R., (1985). *Creating a Mathematical Environment through Programming: A Study of Young Children Learning Logo*, Institute of Education, University of London.

Novak, J. D. (Ed.) (1987). Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Ithaca, NY: Cornell University.

Novillis, C. F. (1976). An analysis of the fraction concept into a hierachy of selected subconcepts and the testing of the hierarchical dependencies. *Journal for Research in Mathematics Education*, 7(3), 131-144.

Novillis-Larson, C. (1980). Locating proper fractions on number lines: Effect of length and equivalence. *School Science and Mathematics*, 53 (5), 423-428.

Ohlsson, S. (1987). Sense and reference in the design of iterative illustrations for rational numbers. In R. W. Lawler & M. Yazdani (Eds.), Artificial intelligence and education (pp. 307-344). Norwood, NJ: Ablex.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts in the middle grades (vol. 2, pp. 53-92). Reston, VA: National Council of teachers of mathematics.

Owens, D. T. (1980). Study of the relationship of area concept and learning concepts by children in grades three and four. In T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning*. Columbus: ERIC/SMEAC.

Papert, S. (1991a). Perestroika and epistemological politics. In Harel & S. Papert (Eds.), Constructionism. Norwood, NJ: Ablex.

Papert, S. (1991b). New images of programming: In search of an educationally powerful concept of technological fluency. A proposal to the National Science Foundation (NSF). MIT Media Lab, Cambridge, MA.

Papert, S. (1980). Mindstorms: Computers, Children and Powerful Ideas. New York: Basic Books.

Payne, J. (1976). "Review of Research on Fractions". In Number and Measurment, edited by Richard Lesh, 145-187. Columbus, Ohio: ERC/SMEAC.

Pea, R. D. and Kurland, D. M., (1984). "On the Cognitive Effects of Learning Computer Programming", New Ideas in Psychology, 2 (2). 137-168.

Peck, D. M., & Jencks, S. M. (1981). Conceptual issues in the teaching and learning of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12(5), 339-348.

Perkins, D. N., (1986). Knowledge as designe. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Peterson, P.(1988). Teachers' and students' cognitional knowledge for classroom teaching and learning. *Educational Researcher,* 17(5), 5-14.

Philippoy, G. & Christou, C. (1994). Prospective elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of fractions. Proceedings of the PME, XVIII, vol. IV, pp. 33-40, 29 July- 3 August 1994, University of Lisbon, Lisbon, portugal.

Piaget, J. (1967). Six psychological studies. New York: Random House.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). The child's conception of geometry. London: Routledge & Kegan Paul.

Pirie, S. and Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 505-528.

Pirie, S. E. B. (1988). Understanding: Instrumental, relational, intuitive, constructed, formalized ... How can we know? For the Learning of Mathematics, 8(3), 2-6.

Polkinghorne, A.R. Young children and fractions. Childhood Education, 1935, 11, 354-358.

Polya, G., (1945). How to Solve It. Princeton University Press, Princeton, NJ.

Post, Cramer, Behr, Lesh, Harel, (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching and assessing of rational numbers concepts. In T. P. Carpenter, E. Fennema, T. A. Romberg (Eds.), Rational numbers (pp. 327-362), LEA.

Post, T. R., Behr, M. J. & Lesh, R. (1986). Research- based observations aboyt children's learning of rational number concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 8(1), 39-49.

Post, T., Harel, G., Behr, M., & Lesh, R. (1988). Intermediate teachers' Knowledge of rational numbers contents. In E. Fennema (Ed.), Integrating research on teaching and learning mathematics (pp. 194-217). Madison, WI: National Center for Research in Mathematical Science Education.

Post, T., Harel, G., Behr, M., & Lesh, R. (1991). Intermediate teachers' Knowledge of rational numbers contents. In E. Fennema, T. P. Carpenter, & S.J. Lamon (Eds.), Integrating research on teaching and learning mathematics (pp. 177-198). Albany, NY: SUNY.

Post, T., Wachsmuth I., & Lesh, R., Behr, M. (1985). "Order and Equivalence of Rtional Numbers: A Cognitive Analysis." *Journal for Research in Mathematics Education*, 18-36.

Postel, H. (1981). "Groβen- oder Operatorkonzept in der Bruchrechnung? ", Mathematikunterricht 4, 16-46.

Putnam, R., Lampert, M., & Peterson, P. (1990). Alternative perspectives on knowing mathematics in elementary schools. *Review of Research in Education,* 16, 57-150.

Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: A survey. *For The Learning of Mathematics*, 1(1), 16-20.

Rappaport, D. (1962). The meaning of fractions. *School Science and Mathematics,* 62, 241-244.

Resnick , L. B. (1986). The development of mathematical intuition. In M. Perlmutter (Ed.), Perspectives on intelectual development: The Minnesota Symposia on Child Psychology (Vol. 19, pp. 159-194). Hilldale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Resnick L. (1991, April). Situations for learning and thinking. Paper presented at the Annual Meeting of the AERA, Chicago, IL.

Resnick L. B., & Ford, W.W. (1981). The psychology of mathematics for instruction. Hillsdale, NJ: LEA.

Resnick M., Ocko, S. (1990). LEGO/Logo: Learning through and about design. In I. Harel (Ed.), Constructionist learning: A 5th anniversary collection of papers. Cambridge, MA:MIT Media Laboratory.

Resnick M., Ocko, S., & Papert, S. (1988). Lego, LOGO, and design. Children's Environments Quarterly, 5(4).

Resnick, L. B. (1976). Task analysis in instructional design: some cases from mathematics, *Cognition and Instruction,* edited by D. Klahr (New Jersey : LEA).

Resnick, L. B., & Omanson, S. F. (1987). Learning to understand arithmetic. In R. Glaser (Ed.), Advances in instructional psychology (vol. 3, pp. 41-95). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Resnick, L. B.,(1983). Mathematics and Science Learning: a new conception. *Science*, 220, p.477-478.

Riess, A. P. (1964). A new approach to the teaching of fractions in the intermediate grades. *School Science and Mathematics,* 54, 111-119.

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.), The development of mathematical thinking (pp. 153-196). New York: Academic.

Roberts, M. P. (1985). A clinical analysis of fourth and fifth grade students understandings about the order and equivalence of fractional numbers. Unpublished master's thesis, University of Minnesota, Minneapolis.

Romberg, T. A., & Carpenter, T. P. (1986). Research on teaching and learning mathematics: Two disciplines of scientific inquiry. In M. Wittrock (Ed.), *The third handbook of research on teaching* (pp. 850-873). New York: Macmillan.

Romberg, T. A., Harvey, J. G., Moser, J.M. & Montgomery, M. E. (1974-1976).

Sackur-Grisvard, C., & Leonard, F. (1985). Intermediate cognitive organizations in the process of learning a mathematical concept: The order of positive decimal numbers. *Cognition and Instruction,* 2(2), 157-174.

Saenz-Ludlow A., (1995). Ann's fraction schemes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 101-132.

Saenz-Ludlow, A. (1990). "Michael: A Case Study of the role of unitizing operations with natural numbers in the conceptualization of fractions". In proceedings of the fourteenth PME conference, edited by G. Booker, P. Cobb, and T. N. de Mendicuti, 51-58. Mexico City: Program Commitee for the international group for the psychology of mathematics education.

Saenz-Ludlow, A. (1994). Michael's fraction schemes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1), 50-85.

Sambo, Abdussalami, A. (1980). Transfer effects of measure concepts on the learning of fractional numbers. Doctoral dissertation, The University of Alberta.

Saxe, G. B. (1988). Candy selling and math learning. *Educational Researcher,* 17(6). 14-21.

Schoenfeld A. H., (1985). "Metacognitive and Epistemological Issues in Mathematical Understanding", in Silver, E. (Ed.), Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, 361-380.

Schwartz, J. L. (1976). Semantic aspects of quantity. Unpublished manuscript, MIT, Cambrifge.

Schwarz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 41-52). Hillsdale, NJ: LEA.

Scribner, S.(1984). Studying working intelligence. In B. Roggof & J. Lave (Eds.), Everyday cognition (pp. 9-40). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Shaughnessy, J. M. (1985). Problem solving derailers: The influence of misconceptions on problem-solving performance. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 399-415). Hillsdale, NJ:Lawrence Erlbaum Associates.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review, 57(1), 1-22.

Siegler, R. S. (1976). Three aspects of cognitive development. *Cognitive Psychology*, 8, 481-520.

Silver, E. A. (1983). Probing Young Adults' Thinking About Rational Numbers. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 5 (3,4), 105-117.

Silver, E.A. (1981). Young adults' thinking about rational numbers. In T. R. Post & M. P. Roberts (Eds.), Proceedings of the Third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 149-159). Minneapolis: University of Minnesota.

Skemp, R.R (1971). The Psychology of Learning Mathematics, London: Penguin Books.

Sowder, J. T. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 182-197). Hillsdale, NJ: LEA.

Sowder, J. T., Crosswhite, F. J., Greeno, J. G., Kilpatric, J., McLeod, D. B., Romberg, T. A., Springer, G., Stigler, J. W., & Swafford, J. O. (1989). *Setting a research agenda*. Reston, VA:NCTM; and Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sowder, L. (1988). Children´s solutions of story problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 7(3), 227-238.

Sowder, T.J. ,Bezuk, N., Sowder L.,K. (1993). Using principles from cognitive psychology to guide rational numer instruction for prospective teachers. In Carpenter, T.P.,Fennema E., Romberg T.A. (Eds.), *Rational Numbers*, LEA,1993.

Steffe , L., Cobb, P., & von Glaserfeld, E. (1988). Construction of arithmetical meanings and strategies. New York, NY: Springer-Verlag.

Steffe, L. (1986, April). Composite units and their constitive operations. Paper presented at Research Presession to the Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Washington, DC.

Steffe, L. (1988). Children's constuction of number sequences and multiplying schemes. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 119-140). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Steffe, L. P., Battista, M. T., Clements, D. H. (1991). The problem of Fractions in the Elementary School, Arithmetic Teacher, May 1991, pp. 22-24.

Steffe, L. P., von Glasersfeld, E., Richards, J., & Cobb, P. (1983). Children's counting types: Philosophy, theoty and application. New York: Praeger.

Streefland, L. (1981c). Subtracting fractions with different denominators, Proceedings of the Fifth International Conference for Psychology of Mathematics Education, vol I, Grenoble 1981c, 88-96.

Streefland, L. (1982c). Subtracting fractions with different denominators, *Educational Studies in Mathematics*, 13, 233-255.

Streefland, L. (1982d). The role of rough estimation in Learning ratio and proportion- an exploratoty research, Proceedings of the Sixth International Conference for Psychology of Mathematics Education, Antwerp, 1982d, 193-200.

Streefland, L. (1984d). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (Towards ... a theory). Part I: Reflections on a teaching experiment, *Educational Studies in Mathematics*, 15, 327-348.

Streefland, L. (1985c). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (Towards ... a theory). Part II: The Outline of the long term learning process, *Educational Studies in Mathematics*, 16, 75-94.

Streefland, L. (1986b). Rational Analysis of Realistic Mathematics Education as a Theoretical Source for Psychology: Fractions as a Paradigm, European Journal of Psychology of Education 1(2), 67-83.

Streefland, L. (;). Reconstructive Learning, Proceedings of the 12th International Conference for Psychology of Mathematics Education, Hungary, Veszprein, vol. I, pp. 75-92.

Streefland, L. (1978). Some Observational Results Concerning The Mental Constitution of the Concept of Fraction, *Educational Studies in Mathematics*, 9, 1978, 51-73.
Streefland, L. (1984). How to teach fractions so as to be useful. Utrecht, Netherlands: OW & OC.

Streefland, L. (1984). Unmasking N- distractors as a source of failures in Learning fractions, Proceedings of the Eighth International Conference for Psychology of Mathematics Education, Sydney, Australia, 16-19 August 1984, PME8.

Streefland, L. (1987). Free production of fraction monographs. In J. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), Psychology of Mathematics Education: PME-XI (Vol. 1. pp. 405-410), Montreal: PME.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education*. A paradigm of developmental Research, Kluwer Academic Publishers.

Streefland, L. (1991). Fractions, an integrated perspective. In Leen Streefland, *Realistic Mathematics Education in Primary School,* Utrecht, 1991, pp. 93- 118.

Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course. A theoretical reflection, *Educational Studies in Mathematics*, 25, 109-135, 1993.

Sutherland, R., (1987). That are the links between variable in logo and variable in algebra? Recherches en Didactique des Mathematiques, vol. 8, 12 pp. 103-130.

Suydam, M. N. Review of recent research related to the concepts of fractions and ratio. In E. Cohors- Fresenborg & Wachsmuth (Eds.), Proceedings of the Second International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Osnabruck: University of Osnabtuck, Department of Mathematics, 1978.

Suydam, M. N., & Dessart, D.J. Skill learning. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathemativs, 1980.

Swenson, E. J. (1964). Teaching arithmetic to children. New York: The Macmillan Co.

Thom, R. (1973). Modern Mathematics: does it exist? In A. G. Howson (ed.), Developments in Mathematics Education: Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education. Cambridge, University Prees, pp. 194-209.

Thomson, C. S., & Rathmell, E. C. (1989). Number sence. Arithmetic Teacher, 36, (6), 2-3.

Tomm, K. (1989, January). Consciousness and intentionaly in the work of Humberto Maturana. Paper presented at the meeting of the faculty of Education, University of Alberta, Edmonton.

Tompkins, P. (1971). The secrets of the great pyramids. New York: Harper & Row.

Tompson, P. (1985). Experience, Problem Solving and Learning Mathematics: Considerations in Developing Mathematics Curricula. In E. A. Silver, (Ed.) Learning and Teaching Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, (189-235), Hillsdale (N.J.): LEA.

Tonnessen, L. H., (1980). "Measurement of the levels of attainment by college mathematics students of the concept "variable", Doctoral Dissertation, University of Wisconsin, Disertation Abstracts Int. 41, 05, 1993A.

Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 401-412.

Troutman, A. P., & Lichtenberg, B. K. (1982). MAthematics: A good beginning. Strategies for teaching children (2hd ed.). Monterey, CA: Books/Cole.

Turkle, S. (1984). The Second Self, Computers and the Human Spirit, Granada.

Tzu-Ta, Yiu (1992). A study of children's understanding of fraction size and its relationship to proportional reasoning. Ph.D, College of Education,University of Illinois at Urbana-Champaign.

Underhill, R. G. (1972). Teaching elementary schools mathematics. Columbus, OH: Charles E. Merrill.

Van den Brink, J., & Streefland, L. (1979). Young children (6-8) Ratio and Proportion. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 403-420.

Van der Mast, C. (1990). Developing Courseware and Developing Highly Interactive Software. Eurit 90. A European Conference on Technology and Education. April 23/27, 1990, Herning, Denmark.

Vance, J. H. (1986). Ordering decimals and fractions: A diagnostis study. Focus on Learning Problem in Mathematics, 8(2), 51-59.

Vergnaud, G. (1983). Multiplivative Structures. In R. Lesh & Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* pp. 128-174). New York: Academic.

Vergnaud, G., & Corte, A., (1986), Introducing Algebra to "Low Level" 8th and 9th Graders, Proceedings of the Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, University of London, Institute of Education.

Vergnaud, G., (1982). "Cognitive and Developmental Psychology in Mathematics Education: Some Theoretical and Methodological Issues", For the Learning of Mathematics, 3(2), 31-41.

Vygotsky, L. S. (1978). Mind in Society: The development of higher psychological processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1986). Thought and Language. (A. Kozulin, Trans. and Ed.). Cambridge: MIT Press. (Original work published 1934).

Wachsmuth I.(1983). Skill Automatisity in Mathematics Instruction: A Response to Gagn_. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 204-209.

Wachsmuth, I., Behr, M. J., & Post, T. R. (1983a). Children's perception of fractions and ratios in grade 5. In R. Hershkowitz (Ed.), Proceedings of the seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education (pp. 164-169). Rehovot, Israel: Weizmann institute of Science. ERIC Document Reproduction service No. ED 241 295).

Wachsmuth, I., Behr, M. J., & Post, T. R. (1983b, April). Children's quantitative notion of rational number. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Canada. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 229 218).

Wagner, S. and Rachlin, S. (1981). "Investigating learning difficulties in algebra", Proc. of the 3rd. Annual Meeting of the North American Chapter of the PME, Minneapolis.

Weckesser, H. (1970). "Die Einf_hrung von Br_chen mit Hilfe von Modellen", Mathematikunterricht , 4, 30-77.

Wilder, R. (1968). Evolution of mathematical concepts. New York: Wiley.

β. *ΕΛΛΗ*ΝΙΚ*Η* ΒΙΒΛΙ*Ο*ΓΡΑΦΙΑ

Εξαρχάκος, Θ. (1993). Εισήγηση στο Β' Πανελλήνιο Συνέδριο Διδακτικής των Μαθηματικών και Πληροφορικής στην Εκπαίδευση. Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Παιδαγωγικό Τμήμα, Ιωάννινα, Οκτώβριος 1993.

Μακράκης, Β., (1996). Θέματα Ανάπτυξης και Αξιολόγησης Εκπαιδευτικού λογισμικού. Εκδόσεις Γρηγόρη (υπό έκδοση, 1996).

Μαρινάκη Κ. Ι.- Τασόπουλου Α. Κ. (1985). Οργάνωση Αρχείων, Data Base, ΑΘΗΝΑ.

Μιχαηλίδης, Π. (1989). Προβληματισμοί από την Εισαγωγή της Πληροφορικής στα Σχολεία. Πρακτικά Ε.Π.Υ. & ΥΠΕΠΘ, Διεθνής συνδιάσκεψη με θέμα: " Η Πληροφορική στην Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση", Αθήνα, 27-28 Νοεμβρίου 1989.

Παπαναστασίου, Κ. (1990). Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Ερευνας, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου, Λευκωσία.

Πόταρη, Δ., Σπηλιωτοπούλου, Β., (1995). Διεπιστημονικά πλαίσια διερεύνησης των αντιλήψεων των μαθητών στα μαθηματικά και στις φυσικές επιστήμες. 12ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας "Τα Μαθηματικά και οι άλλες Επιστήμες". Ηράκλειο Κρήτης, 10-12 Νοέμβρη 1995.

Ρουσόπουλος, Γ. (1991). Κλάσματα και μοντέλα για τη διδασκαλία τους στο Δημοτικό σχολείο. Αδημοσίευτο χειρόγραφο, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ρέθυμνο.

Στεργιοπούλου, Λ., Κυνηγός, Χ., Γυφτοδήμος, Γ., (1995). Νέες διδακτικές προοπτικές στην προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών με ένα ανοικτό προγραμματιστικό περιβάλλον μάθησης. Β' Πανελλήνιο Συνέδριο, "Διδακτική των μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση", Πανεπιστήμιο Κύπρου, Κύπρος, Απρίλης 1995.

Τζανάκης, Κ. (1996). Προφορική επικοινωνία. Πανεπιστήμιο Κρήτης, Παιδαγωγικό Τμήμα Δ. Ε.

Φλουρής, Γ., (1989). Η χρήση ενός διδακτικού μοντέλου για την αύξηση της αποτελεσματικότητας των υπολογιστών. Πρακτικά Γ' Διεθνούς Παιδαγωγικού Συνεδρίου ,με θέμα "Τεχνολογία και Εκπαίδευση", Ορθόδοξη Ακαδημία Κρήτης, 15-18 Οκτωβρίου 1987, Εκδόσεις Παιδαγωγικής Εταιρείας Ελλάδος, Αθήνα 1989.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ:

Φίλε μαθητή μ'αυτό το ερωτηματολόγιο δεν έχω σκοπό να σε βαθμολογήσω. Αλλος είναι ο σκοπός μου! Να φτιάξω ένα πρόγραμμα με τον ηλεκτρονικό υπολογιστή που να βοηθήσει κι εσένα και το δάσκαλό σου να δουλέψετε καλύτερα μεσα στην τάξη τα κλάσματα. Για να το φτιάξω όμως αυτό το πρόγραμμα πρέπει να ξέρω ποιές δυσκολίες έχεις με τα κλάσματα. Συμπλήρωσε λοιπόν με σοβαρότητα το ερωτηματολόγιο διαβάζοντας προσεκτικά την κάθε ερώτηση. Σ' ευχαριστώ πολύ.

Βασίλης Δαφέρμος, μαθηματικός,Περιβόλια,Ρέθυμνο.

==

ΟΝΟΜΑ ΚΑΙ ΕΠΩΝΥΜΟ: ....

ΟΝΟΜΑ ΣΧΟΛΕΙΟΥ: ....

ΤΑΞΗ: ....

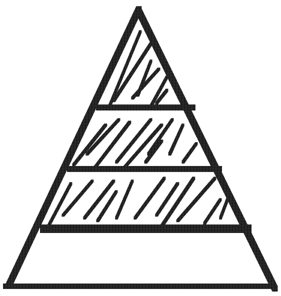
ΗΛΙΚΙΑ: ....

==

1)Πώς θα μπορούσες να εξηγήσεις σε κάποιον που δεν ξέρει τι είναι ένα κλάσμα;

==

2) Το παρακάτω τρίγωνο έχει χωριστεί σε 4 κομματια όχι ίσα. Τι μέρος του τριγώνου έχει μαυριστεί; Βάλε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.



·. $\frac{3}{4}$

,· $\frac{1}{3}$

Á. $\frac{4}{5}$

‰. Î·Ó¤Ó· ·¾Ô ·×Ù¿

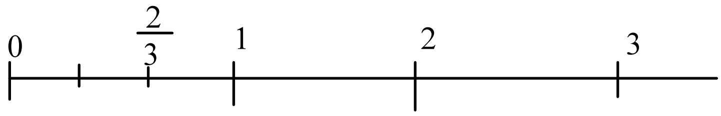
==

3) Τι σημαίνει για σένα το κλάσμα δύο τρίτα; Βάλε σε κύκλο τη σωστή ή τις σωστές απαντήσεις.

α) Σημαίνει μιά διαίρεση του 2 δια 3.

β) Σημαίνει ότι κάνουμε την ακέραια μονάδα 3 ίσα μέρη και παίρνουμε τα 2.

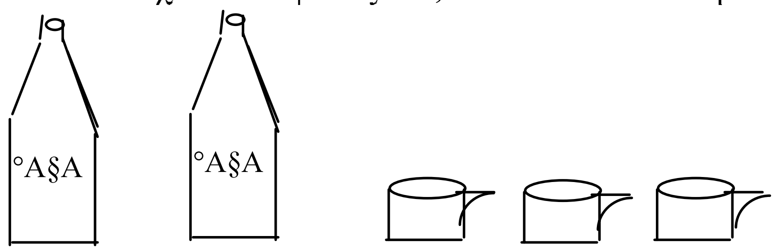
γ) Σημαίνει ότι η αναλογία δύο πληθυσμών είναι 2 προς 3 π.χ. αγόρια προς κορίτσια.
δ) Σημαίνει ότι αν έχουμε μια γραμμή αριθμών χωρίζουμε τη μονάδα μήκους σε 3 ίσα μέρη και παίρνουμε τα 2 ξεκινώντας απο την αρχή. π.χ.



ε) Σημαίνει ότι είναι ένας δεκαδικός αριθμός που τον έχουμε γράψει έτσι επειδή δεν έχουν τελειωμό τα δεκαδικά του ψηφία.
στ) Ολες οι απαντήσεις είναι σωστές.
ζ) Καμμία απο τις απαντήσεις δεν είναι σωστή.

==

4) Δύο μπουκάλια γάλα γεμίζουν ακριβώς τρείς φλυτζάνες. Τι μέρος του μπουκαλιού έχει κάθε φλυτζάνα; Βάλε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.



·. $\frac{5}{2}$

‚. $\frac{1}{3}$

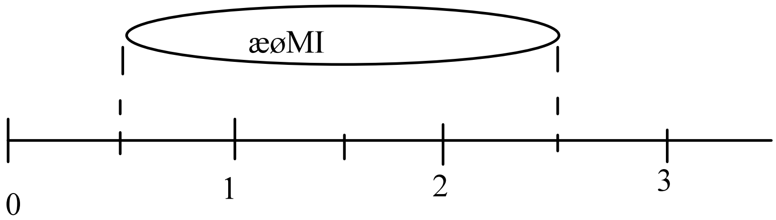
Á. $\frac{3}{2}$

‰. $\frac{2}{3}$

Â.Î·Ó¤Ó· ·¾Ô ·×Ù¿

==

5)Τι μήκος έχει το ψωμί; Βάλε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.



·. $\frac{4}{2}$

‚. $\frac{5}{2}$

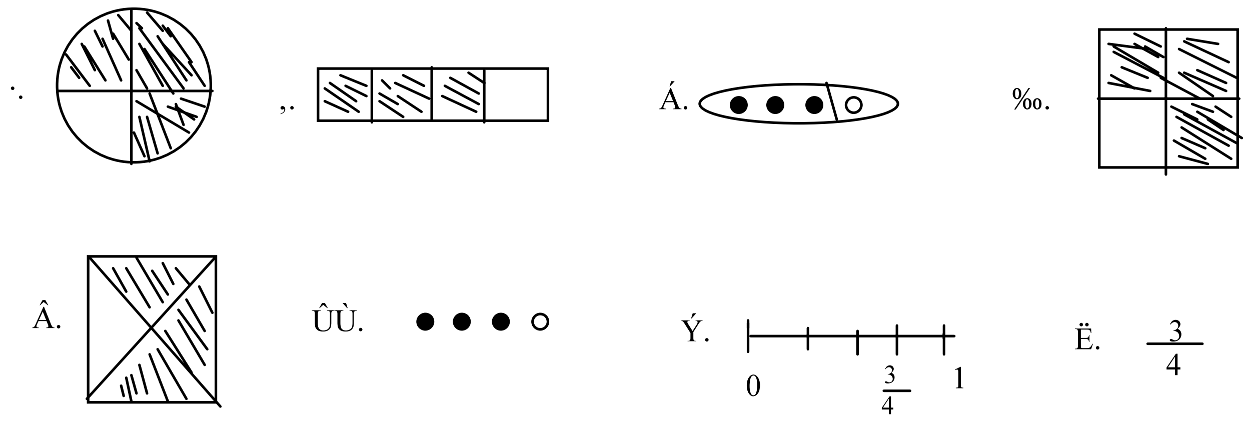
Á. $\frac{6}{2}$

‰. $\frac{3}{2}$

Â.Î·Ó¤Ó· ·¾Ô ·×Ù¿

==

6) Ποιό απο τα παρακάτω σχέδια εξηγεί καλύτερα το κλάσμα τρία τέταρτα; Βάλε σε κύκλο την απάντηση που σου αρέσει.Εδώ δεν υπάρχει σωστό ή λάθος. Μόνο το γούστο σου θέλω να ξέρω!



==
========

7)Γράψε δύο κλάσματα :

α)Εδώ ένα που να είναι μεγαλύτερο απο το 1: ....

β)Εδώ ένα που να είναι μικρότερο απο το 1 : ....

==
========

ΤΕΛΟΣ Α' ΜΕΡΟΥΣ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ (Β' ΜΕΡΟΣ)

==

***Ο*Ν*Ο*ΜΑ ΚΑΙ**
***Ε*ΠΩΝΥΜ*Ο*:**...
***Ο*Ν*Ο*ΜΑ**
ΣΧ*ΟΛΕ*Ι*Ο*Υ:...
ΤΑΞ*Η*:..
***Η*ΛΙΚΙΑ:**...
....

==

8*) Η* Μαρία πήρε τα $\boxed{\frac{2}{3}}$ ενός οικοπέδου*.* *Ο* Γιάννης πήρε το $\boxed{\frac{1}{4}}$ του ίδιου οικοπέδου και ο Κώστας το υπόλοιπο του ίδιου οικοπέδου*.* Τί μερος του οικοπέδου πήρε ο Κώστας;
ΛΥΣ*Η*

==

9*)* Το παρακάτω κουτί έχει μέσα 10 κλάσματα*.* ΝΑ ΒΡ*Ε*ΙΣ:

$\frac{6}{8}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{4}$

α*)* Ποιά απο αυτά είναι ισοδύναμα με το $\boxed{\frac{1}{2}}$;
ΑΠΑΝΤ*Η*Σ*Η*:...........................

β*)* Ποιά απο αυτά είναι ισοδύναμα με το $\boxed{\frac{3}{4}}$;
ΑΠΑΝΤ*Η*Σ*Η*:..........................

γ*)* Ποιά απο αυτά είναι ισοδύναμα με το $\boxed{\frac{1}{3}}$;
ΑΠΑΝΤ*Η*Σ*Η*:...........................

δ*)* Ποιά απο αυτά είναι ισοδύναμα με το $\boxed{\frac{2}{9}}$;
ΑΠΑΝΤ*Η*Σ*Η*:..........................

==

10*) Ο* Νίκος άνοιξε τον κουμπαρά του και ξόδεψε τα $\boxed{\frac{3}{7}}$ απο τα χρήματα που είχε. Τα $\boxed{\frac{2}{3}}$ απο τα χρήματα που ξόδεψε τα έδωσε για να αγοράσει βιβλία. Τι μέρος των χρημάτων του κουμπαρά ξόδεψε για βιβλία;

ΛΥΣ*Η*

==

11*)* Τα 4 κλάσματα που έχει το κουτί είναι ανακατεμένα. Να τα βάλεις με τη σειρά απο το μικρότερο προς το μεγαλύτερο. *(*Σου υπενθυμίζω ότι ένας τρόπος για να το λύσεις είναι να τα κάνεις πρώτα ομώνυμα *....)*

$$\boxed{\frac{3}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{1}{2}}$$

==

12*)* Να κάμεις τις παρακάτω πράξεις:

$\boxed{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=}$

===============================

$\boxed{1-\frac{11}{12}=}$

===============================

$\boxed{\frac{2}{3}\bullet\frac{3}{7}=}$

===============================

$\boxed{3 : \frac{1}{5}=}$

===============================

Τ*ΕΛΟ*Σ