ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ» ΤΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΣΤΗ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΓΕΩΡΓΙΑ Β. ΑΘΑΝΑΣΑΚΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΑΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΟΥΡΟΥΝΙΩΤΗΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ

2015

UNIVERSITY OF CRETE

SCHOOL OF SCIENCES AND ENGINEERING

INTER-DEPARTMENTAL GRADUATE PROGRAM IN

“MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS” OF THE MATHEMATICS AND

APPLIED MATHEMATICS DEPARTEMENTS

MASTER THESIS

DIFFICULTIES IN UNDERSTANDING PROBABILITY

GEORGIA V. ATHANASAKI

SUPERVISOR: CHRISTOS KOUROUNIOTIS

HERAKLION

2015

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών των Τμημάτων Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών της Σχολής Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Κρήτης «Μαθηματικά και Εφαρμογές τους» στη κατεύθυνση «Μαθηματικά στην εκπαίδευση» με επιβλέποντα καθηγητή τον κ. Κουρουνιώτη Χρήστο.

Τη τριμελής επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι καθηγητές:

- Κουρουνιώτης Χρήστος (Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης)
- Παπαδοπούλου Σουζάνα (Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης)
- Τζανάκης Κωνσταντίνος (Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Κρήτης)

Περίληψη

Στη παρούσα εργασία θα μελετηθούν κάποιες από τις πιο γνωστές εσφαλμένες αντιλήψεις στις πιθανότητες. Ο στόχος αυτής της προσπάθειας είναι η καταγραφή αυτών των δυσκολιών και η ανάδειξη τους. Μερικές από τις παρανοήσεις που εξετάζονται είναι η ευρετική της αντιπροσωπευτικότητας, η ευρετική της διαθεσιμότητας, η μεροληψία της ισοπιθανότητας, η πλάνη του συνδυασμού και το φαινόμενο του Falk.

Abstract

The present work reviews some of the most popular difficulties in understanding probability. Some of these difficulties, which examine, are the representativeness heuristic, the availability heuristic, the equiprobability bias, the conjunction fallacy and the Falk phenomenon.

Περιεχόμενα

> Το να εκπαιδεύσεις ένα άτομο σε κάποιους τομείς της γνώσης δεν έχει σα σκοπό να του βάλεις απλώς τις γνώσεις στο μυαλό. Ο κυριότερος στόχος είναι να του διδάξεις να συμμετέχει στη διαδικασία η οποία κάνει δυνατή την απόκτηση γνώσης. Εμείς διδάσκουμε ένα αντικείμενο όχι για να παράγουμε μικρές ζωντανές βιβλιοθήκες στο αντικείμενο αυτό, αλλά περισσότερο για να καταστήσουμε ικανό τον μαθητή να σκέφτεται μαθηματικά, ώστε να μπορεί να παίρνει μέρος στη διαδικασία της παρεχόμενης γνώσης. Γιατί η γνώση είναι η διαδικασία και όχι το προϊόν. (Bruner, J. 1966)

1. Εισαγωγή

Οι πιθανότητες όπως και άλλοι κλάδοι των μαθηματικών, απαιτούν την καλλιέργεια αφηρημένης σκέψης. Η διαφορά με τις πιθανότητες είναι ότι χρειάζονται ένα διαφορετικό τρόπο σκέψης, σε σχέση με αυτόν που καλλιεργείται και χτίζεται στο σχολείο με τα χρόνια, όσον αφορά τα μαθηματικά. Αυτό το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό τους, εξηγεί την ύπαρξη εσφαλμένων αντιλήψεων και μαθησιακών δυσκολιών που αντιμετωπίζουν μαθητές διαφόρων ηλικιών. Ακόμα και κατόπιν σχετικής διδασκαλίας, πολλοί δυσκολεύονται να κατανοήσουν απλές έννοιες των πιθανοτήτων και να αποκτήσουν βασικές δεξιότητες για την επίλυση προβλημάτων. Πολλές λανθασμένες αντιλήψεις στις πιθανότητες δεν είναι απομονωμένα λάθη, αλλά φαίνεται να αποτελούν μέρη ενός τρόπου σκέψης, ο οποίος είναι βαθιά ριζωμένος σε πολλούς ανθρώπους.

Εκφράσεις, οι οποίες περιέχουν έννοιες πιθανοτήτων χρησιμοποιούνται πολύ στην καθημερινή ζωή, συχνά ακούμε “υπάρχει μικρή πιθανότητα βροχής αύριο”, “η εγχείριση του ασθενούς έχει μεγάλη πιθανότητα επιτυχίας”, ή χρησιμοποιούμε λέξεις όπως: μάλλον, ίσως, μπορεί, αναμφίβολα κλπ. Θα πρέπει να υπάρξει προσπάθεια, να γίνει αντιληπτό στους μαθητές ότι οι πιθανότητες σχετίζονται άμεσα με την πραγματικότητα και δεν είναι μόνο σύμβολα και τύποι. Η καλή γνώση τους, είναι χρήσιμη για τη κατανόηση πληροφοριών και τη σωστή λήψη αποφάσεων και πως οι εσφαλμένες αντιλήψεις στο αντικείμενο, έχουν επιρροή σε καθημερινά γεγονότα της ζωής μας, τα οποία χαρακτηρίζονται από το τυχαίο και την αβεβαιότητα.

Σε αυτήν την εργασία θα μελετηθούν κάποιες από τις πιο γνωστές εσφαλμένες αντιλήψεις στις πιθανότητες, στόχος αυτής της προσπάθειας είναι η καταγραφή αυτών των δυσκολιών και η ανάδειξη τους. Μερικές από τις βασικές παρανοήσεις που θα εξεταστούν είναι η ευρετική της αντιπροσωπευτικότητας (representativeness heuristic), η ευρετική της διαθεσιμότητας (availability heuristic), η μεροληψία της ισοπιθανότητας (equiprobability bias), η πλάνη του συνδυασμού (conjunction fallacy) και το φαινόμενο του Falk (Falk phenomenon ή fallacy of the time axis) .

Στη περίπτωση της αντιπροσωπευτικότητας και της διαθεσιμότητας χρησιμοποιείται ο όρος ευρετική. Λέγοντας ευρετικοί (ή ευριστικοί) κανόνες εννοούμε τους εμπειρικούς τρόπους με τους οποίους οι άνθρωποι προσπαθούν να δώσουν μια γρήγορη λύση σε διάφορα προβλήματα. Αυτοί οι κανόνες, αν και υπάρχουν περιπτώσεις που λειτουργούν καλά, επί το πλείστον οδηγούν σε συστηματικά σφάλματα ή γνωστικές προκαταλήψεις. Για παράδειγμα, πολλοί άνθρωποι θεωρούν ότι το ακριβότερο προϊόν είναι και το καλύτερο ποιοτικά ή ότι για μια οικογένεια με έξι παιδιά η ακολουθία ΑΑΑΑΑΑ είναι λιγότερο πιθανή από την ΑΚΚΑΑΚ, μιας και η αναλογία αγοριών Α - κοριτσιών Κ στην δεύτερη περίπτωση, αντιπροσωπεύει καλύτερα την αναλογία του πληθυσμού.

Στο τελευταίο μέρος της παρούσας εργασίας, παρουσιάζονται και αναλύονται τα αποτελέσματα της έρευνας που έγινε με σκοπό να μελετηθεί κατά πόσο το πρόγραμμα σπουδών και ο τρόπος που τα παιδιά της Α Λυκείου μαθαίνουν πιθανότητες, βοηθάει στην αντιμετώπιση των εσφαλμένων αντιλήψεων που αναφέρθηκαν πιο πάνω.

2. Αντιπροσωπευτικότητα

Οι ψυχολόγοι Daniel Kahneman και Amos Tversky, είναι από τους πρώτους που εργάστηκαν στον τομέα των κρίσεων και ουσιαστικά τον καθιέρωσαν σαν πεδίο έρευνας. Σύμφωνα με την εργασία τους *Judgment under uncertainty Heuristics and biases* (1974), σε ερωτήσεις του τύπου "Ποία η πιθανότητα ένα αντικείμενο Α να ανήκει στην κατηγορία Β;", "Ποια η πιθανότητα ένα γεγονός Α να προέρχεται από Β;" οι άνθρωποι απαντούν χρησιμοποιώντας την ευρετική της αντιπροσωπευτικότητας. Με βάση αυτή, η πιθανότητα εκτιμάται από το βαθμό στον οποίο το Α είναι αντιπροσωπευτικό του Β ή αλλιώς κατά πόσο το Α μοιάζει με το Β. Όταν, για παράδειγμα το Α είναι ιδιαίτερα αντιπροσωπευτικό του Β, η πιθανότητα ότι το Α προέρχεται από το Β, θεωρείται υψηλή και εάν το Α δεν είναι παρόμοιο με το Β, η πιθανότητα το Α να προέρχεται από το Β θεωρείται χαμηλή. Πιο απλά θα μπορούσαμε να ορίσουμε την αντιπροσωπευτικότητα ως την τάση των ατόμων να εκτιμούν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου βάση της ομοιότητας του με άλλα ενδεχόμενα του πληθυσμού, από τον οποίο προέρχεται.

Για παράδειγμα έστω ότι μας δίνουν τη παρακάτω περιγραφή για κάποιο άτομο:

Ο Steve είναι ένα ντροπαλό και όχι κοινωνικό άτομο, αλλά πάντα εξυπηρετικός. Δεν ενδιαφέρεται ιδιαίτερα για κοινωνικά και πολιτικά θέματα. Είναι πράος και με αγνή ψυχή. Του αρέσει η τάξη και έχει πάθος με την λεπτομέρεια.

Κατόπιν μας δίνουν μία λίστα με επαγγέλματα (για παράδειγμα, αγρότης, πωλητής, πιλότος, βιβλιοθηκάριος και φυσικός) και μας ζητάνε να αξιολογήσουμε την πιθανότητα ο Steve να ασχολείται με κάποιο από αυτά. Τα άτομα που χρησιμοποιούν τη συγκεκριμένη ευρετική, πιστεύουν ότι ο Steve είναι βιβλιοθηκάριος, εκτιμώντας το πόσο η συγκεκριμένη περιγραφή είναι αντιπροσωπευτική ή όμοια με το στερεότυπο του να κάνει κάποιος το συγκεκριμένο επάγγελμα.

Ένα ακόμα παράδειγμα, από τον Fischbein (1997) σε σχετική του ερεύνα.

Σε ένα τυχερό παιχνίδι κάποιος πρέπει να επιλέξει 6 αριθμούς από τους συνολικά 40 που υπάρχουν. Έχουμε δύο παίκτες τον Α και τον Β. Ο Α παίκτης επιλέγει τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6 και ο Β παίκτης επιλέγει τους αριθμούς 39,1,17,33,8,27. Ποιος παίκτης έχει την μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει;

Ένα μεγάλο ποσοστό των συμμετεχόντων επέλεξε τον παίκτη Β και αυτό γιατί θεώρησε ότι οι αριθμοί σε αυτή την περίπτωση ήταν πιο αντιπροσωπευτικοί. Η σωστή απάντηση είναι ότι και οι δύο παίκτες έχουν ακριβώς την ίδια πιθανότητα να κερδίσουν.

Η προσέγγιση αυτή για την εκτίμηση μιας πιθανότητας, παρ' ότι είναι κοινή, οδηγεί πολλές φορές σε σημαντικά σφάλματα, διότι η αντιπροσωπευτικότητα ή η ομοιότητα δεν είναι παράγοντες που θα πρέπει να επιδρούν στην εκτίμηση μιας πιθανότητας. Ένα ακόμα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το επόμενο[1].

Η πιθανότητα να γεννηθεί ένα αγόρι είναι ½. Ποία από τις παρακάτω αλληλουχίες έχει την μεγαλύτερη πιθανότητα να συμβεί σε ένα ζευγάρι που σκέφτεται να αποκτήσει 6 παιδιά.;

1. *ΑΚΚΑΚΑ*
2. *ΑΑΑΑΑΑ*
3. *Η ίδια πιθανότητα και για τις δύο αλληλουχίες*
   (όπου Α= αγόρι και Κ= κορίτσι)

Πολλά άτομα επιλέγουν την πρώτη απάντηση, επειδή προφανώς πιστεύουν ότι έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να συμβεί μιας και απεικονίζει πιο πιστά την αναλογία του πληθυσμού (½ περίπου άντρες και ½ περίπου γυναίκες) και ως εκ τούτου πιο αντιπροσωπευτική. Εδώ συγχέεται η πιθανότητα εμφάνισης ενός σύνθετου γεγονότος (το οποίο αποτελείται από μια σειρά απλών γεγονότων) με την συχνότητα εμφάνισης των απλών γεγονότων σε αυτό το σύνθετο γεγονός. Η σωστή απάντηση είναι η τρίτη, δηλαδή οι αλληλουχίες έχουν την ίδια πιθανότητα να συμβούν.

$\mathrm{P(AKKAKA)} = \mathrm{P(AAAAAA)} = 1/2^6$ γιατί:
$\mathrm{P(AKKAKA)=P(A)P(K)P(K)P(A)P(K)P(A)}$ και
$\mathrm{P(AAAAAA)=P(A)P(A)P(A)P(A)P(A)P(A)}$

Η κάθε γέννα είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες και τα ενδεχόμενα Α και Κ έχουν την ίδια πιθανότητα, δηλαδή P(A)=P(K)= ½. Η πρώτη απάντηση φαίνεται πιο πιθανή γιατί η συχνότητα εμφάνισης του Α (ή του Κ) στο δείγμα ΑΚΚΑΚΑ είναι 3 και η σχετική συχνότητα 3/6 ίση με την πιθανότητα του γεγονότος {Α} (ή του {Κ}).

Παράγοντες, που επιδρούν στην κρίση των ανθρώπων για τον υπολογισμό μιας πιθανότητας, όσον αφορά τη περίπτωση της αντιπροσωπευτικότητας είναι:

1. Ο υπολογισμός πιθανότητας που βασίζεται σε δοσμένη πληροφορία (base rate fallacy), όπου τα άτομα δείχνουν αδικαιολόγητη εμπιστοσύνη σε προβλέψεις που στηρίζονται σε αβάσιμα δεδομένα εισόδου.

2. Η επιρροή του εύρους του δείγματος (effect of sample size), όπου τα άτομα δεν αντιλαμβάνονται τους νόμους της θεωρίας των μεγάλων αριθμών και λανθασμένα πιστεύουν ότι ο νόμος ισχύει και για ένα δείγμα λίγων παρατηρήσεων ή υποθέτουν ότι ένα μικρό δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού από τον οποίο προέρχεται.

[1] Konold (1991), Cox & Mouw (1992)

3. Εσφαλμένες αντιλήψεις της τυχαιότητας, για παράδειγμα η πεποίθηση ότι οι τάσεις των καλών ή των κακών πραγμάτων δεν είναι τυχαίες αλλά συστηματικές, όπως η πλάνη του παίκτη (gambler's fallacy).

Τους παράγοντες αυτούς θα δούμε αναλυτικά παρακάτω.

2.1 Πιθανότητα που βασίζεται σε δοσμένη πληροφορία

Πολλές φορές η εκτίμηση της πιθανότητας κάποιου γεγονότος επηρεάζεται από τα στερεότυπα που έχουμε για το γεγονός αυτό, με συνέπεια βασικές πληροφορίες, όπως η συχνότητα, να αγνοούνται και να δίδεται βαρύτητα σε άνευ αξίας πληροφορίες. Οι Kahneman και Trevsky (1974) σε έρευνα τους, έδωσαν την παρακάτω περιγραφή ενός ατόμου και ζήτησαν από τους συμμετέχοντες να υπολογίσουν την πιθανότητα το άτομο αυτό να έχει μια συγκεκριμένη απασχόληση.

Ο Jack είναι ένας άντρας 45 ετών. Είναι παντρεμένος και έχει τέσσερα παιδιά. Γενικά είναι συντηρητικός, προσεκτικός και φιλόδοξος. Δεν ενδιαφέρεται για πολιτικά και κοινωνικά θέματα και περνάει τον περισσότερο ελεύθερο χρόνο του απασχολούμενος με τα πολλά χόμπι του, που περιλαμβάνουν μαστορέματα στο σπίτι, ιστιοπλοΐα και σπαζοκεφαλιές με αριθμούς.

Το έργο των συμμετεχόντων ήταν να αποφασίσουν τις πιθανότητες να είναι ο Jack μηχανικός ή δικηγόρος. Τους είπαν ότι η περιγραφή επιλέχτηκε τυχαία ανάμεσα σε 100 περιγραφές. Στους μισούς συμμετέχοντες είπαν ότι από τις περιγραφές οι 70 ήταν μηχανικών και οι 30 ήταν δικηγόρων, ενώ στους άλλους μισούς ότι οι 70 ήταν δικηγόρων και οι 30 μηχανικών. Η πιθανότητα κάποια περιγραφή να ανήκει σε μηχανικό ήταν μεγαλύτερη από ότι σε δικηγόρο στη πρώτη περίπτωση, όπου η πλειοψηφία ήταν μηχανικοί σε σχέση με την δεύτερη περίπτωση όπου οι πλειοψηφία ήταν δικηγόροι.

Και στις δυο περιπτώσεις οι συμμετέχοντες έκριναν ότι ο Jack είναι μηχανικός ανεξάρτητα από το αν οι περισσότερες περιγραφές ήταν δικηγόρων ή μηχανικών. Προφανώς εκτίμησαν την πιθανότητα, η συγκεκριμένη περιγραφή να ανήκει σε μηχανικό, με βάση το βαθμό με τον οποίο αυτή η περιγραφή αντιπροσωπεύει περισσότερο τα στερεότυπα που έχουμε για αυτά τα επαγγέλματα, αγνοώντας την πληροφορία του βασικού ρυθμού συχνότητας (δηλαδή την διάσταση 70:30 στις 100 περιγραφές).

Σε αντίθεση, οι συμμετέχοντες απάντησαν σωστά, για το επάγγελμα του Jack, όταν δεν τους δόθηκε περιγραφή για την προσωπικότητα και τα ενδιαφέροντα του, παρά μόνο η αναλογία των δύο επαγγελμάτων στις συνολικές περιγραφές (δηλαδή 70:30 στη πρώτη περίπτωση και 30:70 στη δεύτερη περίπτωση, μηχανικοί προς δικηγόροι).

Αυτό δείχνει ότι οι άνθρωποι απαντούν διαφορετικά και επηρεάζονται αρνητικά όταν τους δίνεται κάποια άνευ αξίας πληροφορία για την πιθανότητα που πρέπει να υπολογίσουν.

Οι Griffin και Buehler (1999) υιοθέτησαν διάφορες στρατηγικές για να πείσουν τους ανθρώπους να χρησιμοποιούν πληροφορίες βασικού ρυθμού συχνότητας. Για παράδειγμα, χρησιμοποίησαν ένα μεγάλο διαφανές πλαστικό κουτί που περιείχε 100 μπάλες από τις οποίες 70 ήταν άσπρες και 30 ήταν πράσινες, με τις άσπρες να δείχνουν είτε τον αριθμό των δικηγόρων είτε τον αριθμό των μηχανικών. Οι συμμετέχοντες μάντευαν τον σχετικό αριθμό από άσπρες και πράσινες μπάλες (πληροφορία βασικού ρυθμού συχνότητας) και μετά επέλεγαν μια μπάλα στην τύχη με τα μάτια κλειστά. Έπειτα τους δινόταν η περιγραφή του Jack. Τέλος, εκτιμούσαν την πιθανότητα να είναι ο Jack μηχανικός. Η πληροφορία βασικού ρυθμού συχνότητας είχε πολύ μεγαλύτερη επίδραση στις κρίσεις για την συχνότητα απ' όσο στις κρίσεις για την πιθανότητα. Αυτό δείχνει ότι η οργάνωση της πληροφορίας για τη συχνότητα είναι μερικές φορές χρήσιμη για τη βελτίωση της ορθότητας των κρίσεων.

2.2 Επιρροή του εύρους του δείγματος

Σύμφωνα με τους Hope και Kelly (1983), ο κόσμος έχει υπερβολική εμπιστοσύνη στην αξιοπιστία μικρών δειγμάτων. Στη στατιστική, όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του ληφθέντος δείγματος, τόση περισσότερη εμπιστοσύνη υπάρχει στην προσέγγιση μιας παραμέτρου του πληθυσμού, όπως η μέση τιμή και η διασπορά. Όμως πολύς κόσμος έχει την τάση να θεωρεί τα μικρά δείγματα στατιστικής σαν πολύ πιο αξιόπιστες εκτιμήσεις των παραμέτρων του πληθυσμού από ότι πράγματι είναι. Για να κατανοηθεί η περίπτωση αυτής της παρανόησης δίνονται τα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα Α[2]: *Σε ποία περίπτωση η πιθανότητα είναι μεγαλύτερη, το να φέρουμε 2 φορές κορώνα στις 3 ρίψεις ή να φέρουμε 200 φορές κορώνα στις 300 ρίψεις;*

1. *Στη πρώτη περίπτωση είναι μεγαλύτερη.*
2. *Στη δεύτερη περίπτωση είναι μεγαλύτερη.*
3. *Η ίδια και στις δύο περιπτώσεις.*

[2] Fischbein & Schnarch (1997)

Η κύρια παρανόηση σε αυτό το πρόβλημα συμβαίνει στα άτομα που επιλέγουν ως σωστή τη τρίτη απάντηση. Έχουμε πάλι τη σύγχυση μεταξύ της συχνότητας και της πιθανότητας εμφάνισης των γεγονότων. Ενώ η συχνότητα και στις δύο περιπτώσεις είναι $^2/_3 = ^{200}/_{300}$, η πιθανότητα της κάθε περίπτωσης είναι:

$$P(2\ κορώνες\ στις\ 3\ ρήψεις) = \binom{3}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{3-2} = \tfrac{3}{8} = 0.375$$
$$P(200\ κορώνες\ στις\ 300\ ρήψεις) = \binom{300}{200}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{200}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{300-200} \cong 2.041 \cdot 10^{-9}$$

Όπου ½ η πιθανότητα ρίχνοντας το κέρμα να πάρουμε κορώνα, που είναι η ίδια με το να πάρουμε γράμματα, άρα η σωστή απάντηση είναι η πρώτη. Παρατηρούμε ότι στην δεύτερη περίπτωση η πιθανότητα είναι πάρα πολύ μικρή.

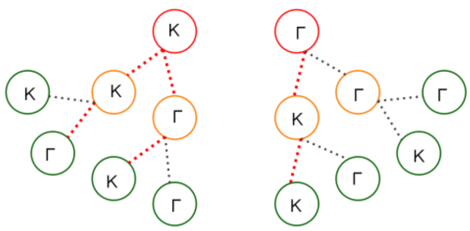
Ένας εύκολος τρόπος να γίνει κατανοητό το προηγούμενο πρόβλημα, είναι να προσδιορίσουμε τον δειγματικό χώρο χρησιμοποιώντας δεντροδιάγραμμα. Για πρακτικούς λόγους, μιας και ο σχεδιασμός δεντροδιαγράμματος για 300 ρήψεις δεν είναι εύκολο να κατασκευαστεί, θα συγκρίνουμε τη πιθανότητα να τύχουμε 2 φορές κορώνα στις 3 ρήψεις, με τη πιθανότητα να τύχουμε 4 φορές κορώνα στις 6 ρήψεις. Όσον αφορά τη συχνότητα του πλήθους από κορώνες στο σύνολο των ρήψεων για κάθε περίπτωση ισχύει ότι $2/3 = 4/6 = 200/300$.

Παρατηρώντας τη παρακάτω εικόνα, βλέπουμε ότι ρίχνοντας ένα κέρμα 3 φορές, μπορούμε να έχουμε 8 διαφορετικές διατάξεις από Κ και Γ. Από αυτές τις 8 διατάξεις οι 3 είναι αυτές που έχουν ακριβώς 2 κορώνες. Άρα η πιθανότητα να ρίξουμε ένα κέρμα 3 φορές και να πάρουμε 2 φορές κορώνα είναι $3/8$.

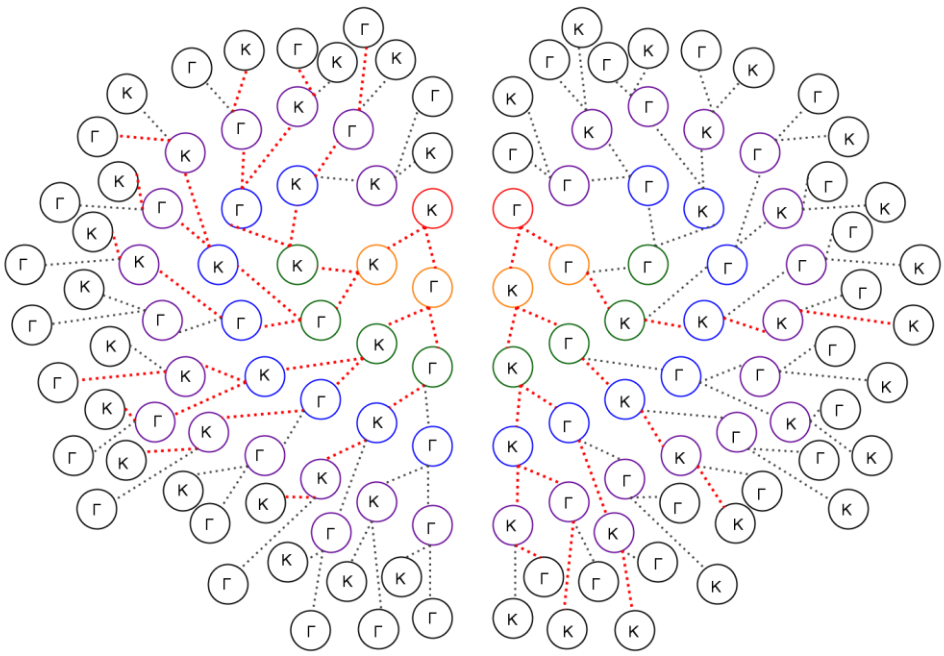
Αντίστοιχα παρατηρώντας την εικόνα στην επόμενη σελίδα, βλέπουμε ότι ρίχνοντας ένα κέρμα 6 φορές, μπορούμε να έχουμε 64 διαφορετικές διατάξεις από Κ και Γ. Από αυτές τις διατάξεις οι 15 είναι αυτές που έχουν ακριβώς 4 κορώνες. Άρα η πιθανότητα να ρίξουμε 6 φορές ένα κέρμα και να πάρουμε 4 φορές κορώνα είναι $15/64$.

Έχουμε λοιπόν ότι:

$$P(2\ κορώνες\ στις\ 3\ ρήψεις) = \frac{3}{8} > \frac{15}{64} = P(4\ κορώνες\ στις\ 6\ ρήψεις)$$



Ρήψεις: 1η 2η 3η



Ρήψεις: 1η 2η 3η 4η 5η 6η

Σκεπτόμενοι κατά τον ίδιο τρόπο καταλαβαίνουμε γιατί η πιθανότητα να πάρουμε 200 φορές κορώνα στις 300 ρήψεις είναι πολύ πιο μικρή από την πιθανότητα να πάρουμε 2 φορές κορώνα στις 3 ρήψεις.

<u>Παράδειγμα Β</u>[3]: *Σε μία πόλη υπάρχουν δύο νοσοκομεία, ένα μικρό στο οποίο γεννιούνται κατά μέσο όρο 15 παιδιά την ημέρα και ένα μεγαλύτερο στο οποίο γεννιούνται κατά μέσο όρο 45 παιδιά την ημέρα. Όπως ξέρουμε η πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι κατά μέσο όρο είναι 50%, όμως το ποσοστό των αγοριών ποικίλει από μέρα σε μέρα. Μερικές μέρες μπορεί να είναι υψηλότερο και μερικές χαμηλότερο από 50%. Για ένα χρόνο κάθε νοσοκομείο κατέγραψε τις μέρες στις οποίες περισσότερο από 60% των παιδιών που γεννήθηκαν ήταν αγόρια. Ποιο νοσοκομείο κατέγραψε περισσότερες τέτοιες μέρες;*

1. *Το μεγαλύτερο νοσοκομείο.*
2. *Το μικρότερο νοσοκομείο.*
3. *Το ίδιο και στα δύο.*

Η σωστή απάντηση είναι η δεύτερη. Υπάρχει περισσότερη μεταβλητότητα στα μικρά δείγματα απ’ ότι στα μεγάλα. Μπορούμε εύκολα να το κατανοήσουμε ρίχνοντας ένα δίκαιο κέρμα και έστω ότι μας ενδιαφέρει η περίπτωση να φέρουμε γράμματα . Σ’ ένα μικρό αριθμό ρίψεων του κέρματος, για παράδειγμα 10 φορές, υπάρχει μεγάλη ποικιλία αποτελεσμάτων καθώς επαναλαμβάνουμε το πείραμα, (δηλαδή, ρίχνουμε 10

[3] Kahneman, Slovic & Tversky (1974), Cox & Mouw (1992)

φορές το κέρμα και καταγράφουμε το πλήθος από γράμματα, αυτή είναι η εκτέλεση του πειράματος μια φορά). Αντίθετα, δείγματα 100 ρίψεων του κέρματος μας δίνουν αποτελέσματα, που τα περισσότερα είναι πολύ πιο κοντά στο αναμενόμενο μέσο όρο 50% (δηλαδή, ρίχνουμε το κέρμα 100 φορές και καταγράφουμε το πλήθος από γράμματα, αύτη είναι η εκτέλεση του πειράματος μία φορά).

Αν αντιστοιχίσουμε την πρώτη περίπτωση ρίψης του κέρματος ως το μικρό νοσοκομείο, την δεύτερη περίπτωση ως το μεγάλο νοσοκομείο, το πλήθος από γράμματα ως το πλήθος των αγοριών που γεννιούνται και τον αριθμό επανάληψης του πειράματος ως τον αριθμό των ημερών που έγινε η καταγραφή. Τότε για το μεγάλο νοσοκομείο τις περισσότερες μέρες το ποσοστό των αγοριών θα είναι κοντά στο μέσο όρο, δηλαδή στο 50%. Αντίθετα για το μικρό νοσοκομείο, θα υπάρχει μεγαλύτερη μεταβλητότητα στα ποσοστά, των συγκεκριμένων γεννήσεων, κατά συνέπεια το πλήθος των ημερών που το ποσοστό δεν είναι κοντά στο μέσο όρο, θα είναι μεγαλύτερο.

Το παραπάνω είναι αποτέλεσμα του νόμου των μεγάλων αριθμών που αποδείχθηκε από τον μαθηματικό Bernoulli, ο οποίος δηλώνει ότι ο μέσος όρος των αποτελεσμάτων που έχουν πραγματοποιηθεί σε ένα μεγάλο πλήθος δοκιμών τείνει στην αναμενόμενη μέση τιμή.

<u>Παράδειγμα Γ[4]:</u> *Υπάρχει επιλογή ένα παιχνίδι να λήξει είτε με τη συμπλήρωση 9 πόντων είτε με την συμπλήρωση 15 πόντων. Έχουμε δύο παίκτες τον Α και τον Β, όπου ο Α είναι καλύτερος από τον Β. Δεδομένου ότι κατά την διάρκεια του παιχνιδιού τηρούνται αυστηρά όλοι οι κανονισμοί του, ποίο βαθμολογικό σύστημα δίνει στον Α παίκτη μια καλύτερη ευκαιρία να κερδίσει;*

1. *Το πρώτο.*
2. *Το δεύτερο.*
3. *Ίσες ευκαιρίες νίκης και με τα δύο βαθμολογικά συστήματα.*

Η σωστή απάντηση είναι η δεύτερη, η λογική είναι παρόμοια με αυτής στο προηγούμενο πρόβλημα. Ο καλύτερος παίχτης, δηλαδή ο Α, θα προτιμήσει το μεγαλύτερο παιχνίδι και αυτό γιατί μια απρόσμενη έκβαση είναι λιγότερο πιθανόν να προκύψει με το μεγαλύτερο βαθμολογικό σύστημα από ότι με το μικρό.

[4] Kahneman & Tversky (1982)

2.3 Εσφαλμένη αντίληψη της τυχαιότητας

Ο κόσμος πιστεύει ότι η πρόβλεψη ενός ανεξάρτητου γεγονότος (ενδεχομένου) δεν μπορεί να ξεκοπεί από την έκβαση παρόμοιων γεγονότων στο παρελθόν. Ο κόσμος τείνει να θεωρεί σαν αλήθεια ότι η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ανεξάρτητου ενδεχομένου επηρεάζεται αιτιοκρατικά από τη συχνότητα προηγούμενων εκβάσεων. Έστω το παρακάτω πρόβλημα[5],

Όταν ρίχνουμε ένα νόμισμα, υπάρχουν δύο δυνατά αποτελέσματα: είτε κορώνα, είτε γράμματα. Κάποιος ρίχνει το νόμισμα 5 φορές και παίρνει και τις πέντε γράμματα. Αν ξαναρίξει το νόμισμα, ποια η πιθανότητα να πάρει γράμματα και την έκτη φορά;

1. *Μικρότερη από την πιθανότητα να πάρει κορώνα.*
2. *Μεγαλύτερη από την πιθανότητα να πάρει κορώνα.*
3. *Ίση με την πιθανότητα να πάρει κορώνα.*

Τα άτομα που επιλέγουν την πρώτη απάντηση, θεωρούν ότι αφού τις πέντε πρώτες φορές πήραμε γράμματα τότε την έκτη φορά είναι πιθανότερο να πάρουμε κορώνα. Αυτή η λανθασμένη αντίληψη ονομάζετε αρνητική επίδραση της πρόσφατης εμπειρίας (negative recency effect) ή πλάνη του παίκτη (gambler' fallacy). Το «πιστεύω» αυτό, βασίζεται στο ότι η εναλλαγή των αποτελεσμάτων αντιπροσωπεύει καλύτερα μια τυχαία ακολουθία. Αντίθετα, το «πιστεύω» ότι την έκτη φορά είναι πιθανότερο να πάρουμε πάλι γράμματα, (δηλαδή τα άτομα που επιλέγουν την δεύτερη απάντηση) βασίζεται στην σιωπηρή παραδοχή ότι οι συνθήκες δεν ήταν δίκαιες (στη περίπτωση μας ότι το κέρμα δεν ήταν δίκαιο) και ορίζεται ως θετική επίδραση της πρόσφατης εμπειρίας (positive recency effect). Επίσης, σε κάθε περίπτωση από τις δύο παραπάνω φαίνεται να μην έχει γίνει πλήρως κατανοητό ότι το αποτέλεσμα κάθε ρίψης είναι ανεξάρτητο από τα άλλα και άρα η σωστή απάντηση είναι η τρίτη.

Επιπλέον, ο κόσμος έχει την τάση να συγχέει τα εξαιρετικά γεγονότα με εκείνα που έχουν ελάχιστη πιθανότητα. Ακριβώς επειδή ένα γεγονός είναι εξαιρετικό, αυτό δεν συνεπάγεται ότι έχει λιγότερη πιθανότητα από λιγότερο χτυπητά γεγονότα. Για να καταλάβουμε την διαφορά των δύο αυτών γεγονότων ας δούμε το παρακάτω παράδειγμα[6],

Τρία άτομα παίζουν χαρτιά, τραβώντας πέντε χαρτιά ο καθένας από μία καλά ανακατωμένη τράπουλα, έχουν τα εξής:

[5] Fischbein & Schnarch (1997)
[6] Hope & Kelly (1983)

A. *Άσσος μπαστούνι, ρήγας μπαστούνι, ντάμα μπαστούνι, βαλές μπαστούνι, 10 μπαστούνι.*
B. *Ρήγα καρό, 8 σπαθί, 4 καρό, 7 κούπα, βαλές μπαστούνι.*
C. *Άσσος κούπα. άσσος μπαστούνι, άσσος σπαθί, άσσος καρό, ντάμα κούπα.*

Για όσους έχουν στοιχειώδεις γνώσεις πόκερ, τα χαρτιά του παίκτη A (royal flush) είναι ο πιο δυνατός συνδυασμός που μπορεί να εμφανιστεί σε μια παρτίδα. Πολλά άτομα πιστεύουν ότι αυτός ο συνδυασμός είναι πιο σπάνιος, ενώ στην πραγματικότητα η πιθανότητα να πάρουμε μια τέτοια πεντάδα είναι ή ίδια με το να πάρουμε μια οποιαδήποτε άλλη πεντάδα από την τράπουλα. Συγκεκριμένα η πιθανότητα για κάθε πεντάδα είναι ίση με $1 \Big/ \binom{52}{5}$.

Υπάρχει σύγχυση μεταξύ της προτίμησης ενός γεγονότος ή της υπέρτερης σημασίας του και της πιθανότητας να συμβεί αυτό το γεγονός. Ο αντικειμενικός σκοπός στα περισσότερα παιχνίδια χαρτιών είναι, να αποκτήσει ο παίκτης μεγάλης αξίας χαρτιά. Παρόλο που η πιθανότητα να έχεις ένα συνδυασμό όπως αυτόν του παίκτη A, είναι η ίδια με το να έχεις πέντε άλλα οποιαδήποτε χαρτιά, όπως αυτά του παίκτη B, οι κανόνες πόκερ δίνουν υπεροχή σε αυτόν τον ειδικό σχηματισμό. Έτσι ο μανιώδης παίκτης του πόκερ θεωρεί πολύ πιο σπάνιο να αποκτήσει τέτοια καλά χαρτιά, εξαιτίας της μεγαλύτερης επιθυμίας του για τέτοια χαρτιά. Πέρα του παραπάνω, οι παίκτες έχουν την εντύπωση ότι τα ανομοιόμορφα χαρτιά είναι πιο πιθανά από τα χαρτιά με κάποια κανονικότητα ή ομοιομορφία και έχουν δίκιο, γιατί υπάρχουν πολύ περισσότεροι τρόποι εμφανίσεως ανομοιόμορφων χαρτιών.

3. Διαθεσιμότητα

Όταν τα άτομα αξιολογούν τη συχνότητα ή την πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός, με βάση την ευκολία με την οποία ανακαλούν στη μνήμη τους ή με βάση την ευκολία με την οποία μπορούν να φανταστούν σχετικές περιπτώσεις παρόμοιων γεγονότων, τότε τα άτομα αυτά χρησιμοποιούν την ευρετική της διαθεσιμότητας (availability heuristic). Είναι ευκολότερο να φέρουμε στο μυαλό μας γεγονότα που είναι πρόσφατα, που μπορεί να τα φανταστεί κανείς εύκολα και που μας έχουν συγκινήσει έντονα, παρά άλλα γεγονότα που δεν έχουν αυτά τα γνωρίσματα. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να έχει σαν αποτέλεσμα μια υπερεκτίμηση της συχνότητας τέτοιων γεγονότων.

Αν κάποιος για παράδειγμα, έχει κερδίσει 3 φορές στο λαχείο σε ένα μικρό χρονικό διάστημα, συνήθως έχει μια διαφορετική εκτίμηση για τη συχνότητα επιτυχίας από έναν άλλο ο οποίος δεν έχει κερδίσει καθόλου. Μετά το άκουσμα μιας είδησης σχετικά με βιασμό, μια κοπέλα θα νιώθει μεγαλύτερη ανασφάλεια να κυκλοφορήσει μόνη της τη νύκτα, αφού θα φαντάζεται ότι η πιθανότητα να συμβεί και σε εκείνη το ίδιο θα είναι πολύ μεγάλη. Κάποιος μπορεί να εκτιμήσει το ποσοστό των διαζυγίων με βάση τα διαζευγμένα ζευγάρια που υπάρχουν στο κοινωνικό του περιβάλλον, αν τα ζευγάρια αυτά τυγχάνει να είναι αρκετά, υπάρχει ο κίνδυνος να θεωρήσει ότι το ποσοστό αυτό είναι μεγαλύτερο από ότι είναι στην πραγματικότητα.

Γενικότερα η συχνότητα της προσωπικής επαφής του ατόμου με τέτοιου είδους γεγονότα μπορεί να επηρεάσει τις εκτιμήσεις του για την πιθανότητα έκβασης τους. Έτσι τα άτομα τα οποία κάνουν χρήση της ‘‘διαθεσιμότητας’’ έχουν κάποιες εγωκεντρικές αντιλήψεις για τη συχνότητα των γεγονότων, οι οποίες βασίζονται επί το πλείστον στις εμπειρίες τους. Οι αντιλήψεις αυτές μπορεί να έχουν κάποια σημασία για το άτομο αλλά αποτελούν καταφανή μεροληψία όταν ‘‘μεταφέρονται’’ σε ένα πληθυσμό. Οι παράγοντες που επιδρούν στην διαθεσιμότητα αναλύονται παρακάτω.

3.1 Ευκολία ανάκτησης περιστατικών

Η ευκολία με την οποία ανακτούμε περιστατικά (bias due to the retrievability of instances), όπως αυτό που μας ζητάνε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα του. Για παράδειγμα, αν κάποιος έχει συγγενείς ή φίλους που παρουσιάζουν μια ασθένεια, τείνει να υπερεκτιμά τη συχνότητα εμφάνισης της νόσου.

Όταν η πιθανότητα ενός γεγονότος κρίνεται από το πλήθος των σχετικών περιπτώσεων που μπορούμε να φέρουμε στο μυαλό μας, τότε ένα γεγονός του οποίου περιπτώσεις είναι εύκολο να ανακτηθούν θα εμφανίζεται πιο πιθανό από ένα γεγονός ισοδύναμης συχνότητας του οποίου περιπτώσεις είναι λιγότερο ανακτήσιμες.

Σε μελέτη τους, οι Tversky και Kahneman (1973), εξετάζουν τη συγκεκριμένη διάσταση της διαθεσιμότητας. Στο πρώτο σκέλος της έρευνας τους, έδωσαν μια λίστα από διάφορα ονόματα στους συμμετέχοντες και κατόπιν τους ζήτησαν να προσπαθήσουν να θυμηθούν όσα περισσότερα ονόματα μπορούσαν. Η λίστα περιείχε 19 ονόματα διάσημων προσώπων και των δύο φύλων (π.χ.Richard Nixon, Elizabeth Taylor) και 20 ονόματα λιγότερο διασήμων προσώπων και των δύο φύλων (π.χ.William Fulbright, Lana Turner). Κατά μέσο όρο οι συμμετέχοντες ανακάλεσαν τα 12,3 από τα 19 γνωστά ονόματα και μονό τα 8,4 από τα 20 άγνωστα. Τα διάσημα ονόματα ήταν γενικότερα ευκολότερο να ανακτηθούν.

Στο δεύτερο σκέλος της έρευνας τους, στους μισούς συμμετέχοντες έδωσαν μια λίστα όπου υπήρχαν 19 ονόματα διάσημων γυναικών και 20 ονόματα λιγότερο διάσημων αντρών και στους άλλους μισούς μια λίστα με 19 ονόματα διάσημων αντρών και 20 ονόματα λιγότερο διάσημων γυναικών. Και στις δύο λίστες, η συχνότητα των δύο φύλων δεν διέφερε πολύ. Στη πρώτη περίπτωση οι συμμετέχοντες έκριναν ότι τα γυναικεία ονόματα ήταν περισσότερα, ενώ στη δεύτερη ότι τα αντρικά ήταν περισσότερα. Από τα 99 άτομα που πήραν μέρος στην έρευνα τα 88 έκριναν εσφαλμένα ότι το φύλο που αντιστοιχούσε στα διάσημα πρόσωπα ήταν πιο συχνό.

Σημαντικό ρόλο στην ανάκτηση των γεγονότων, είναι και ο τρόπος με τον οποίο έχουν καταγραφεί στην μνήμη μας. Για παράδειγμα, για ένα άτομο που έχει δει με τα μάτια του ένα σπίτι να καίγεται, η εκτίμηση του για την πιθανότητα ενός τέτοιου ατυχήματος είναι μεγαλύτερη σε σχέση με την εκτίμηση κάποιου που για την συγκεκριμένη φωτιά έμαθε από μια εφημερίδα. Στην πρώτη περίπτωση, το συγκεκριμένο γεγονός αποτυπώθηκε εντονότερα στην μνήμη του ατόμου και ως εκ τούτου είναι ευκολότερο να ανασυρθεί. Ένα ακόμα παράδειγμα, είναι όταν κάποιος γίνεται μάρτυρας μιας σύγκρουσης αυτοκινήτων, τότε η πιθανότητα ενός τροχαίου δυστυχήματος φαίνεται πολύ μεγάλη, ώστε να αρχίσει να προσέχει περισσότερο όταν οδηγάει, με τον καιρό όμως που η εικόνα του γεγονότος αυτού θα έχει κάπως ξεχαστεί, είναι πιθανό να επιστρέψει στις προηγούμενες οδηγικές του συνήθειες.

3.2 Αποτελεσματικότητα ενός συνόλου αναζήτησης

Η τάση να κρίνουμε τα γεγονότα ως περισσότερο πιθανά γιατί είναι εύκολο να φέρουμε στο νου μια κατηγορία ενός γεγονότος (bias due to the effectiveness of a search set), παίζει επίσης σημαντικό ρόλο. Για παράδειγμα, σε έρευνα τους οι Tverky και Kahneman (1974) ρώτησαν τους συμμετέχοντες:

Αν μια λέξη με τρία ή περισσότερα γράμματα επιλέγεται στην τύχη από ένα αγγλικό κείμενο, τι είναι πιο πιθανό; Η λέξη αύτη να αρχίζει από «r» ή να είναι το «r» το τρίτο γράμμα;

Οι περισσότεροι συμμετέχοντες απάντησαν ότι είναι πιθανότερο να επιλεγεί τυχαία μια λέξη που αρχίζει από «r» (π.χ. road) παρά μια λέξη που έχει για τρίτο γράμμα το «r» (π.χ. car). Στην πραγματικότητα υπάρχουν περισσότερες λέξεις με το «r» ως τρίτο γράμμα. Οι συμμετέχοντες επέλεξαν τη λάθος απάντηση βασιζόμενοι στην ευρετική της διαθεσιμότητας, γιατί οι λέξεις που αρχίζουν από «r», ανασύρονται ευκολότερα στη μνήμη (είναι δηλαδή περισσότερο διαθέσιμες), από ότι οι λέξεις που έχουν για τρίτο γράμμα το «r».

Σε παρόμοια μελέτη τους οι Tversky και Kahneman (1983) έθεσαν την παρακάτω ερώτηση:

Σε τέσσερις σελίδες ενός μυθιστορήματος (περίπου 2000 λέξεις), πόσες λέξεις αναμένεται να υπάρχουν, οι οποίες έχουν την εξής μορφή _ _ _ _ i n g (δηλαδή, λέξεις με εφτά γράμματα που τελειώνουν σε ing); Επιλέξτε ένα από τα παρακάτω:

0 1-2 3-4 5-7 8-10 11-15 16+

Σε επόμενη εκδοχή της ερώτησης ζήτησαν να εκτιμηθεί η συχνότητα των λέξεων της μορφής _ _ _ _ _ n _. Η μέση εκτίμηση ήταν 13.4 για τις ing λέξεις και 4.7 για τις _n_ λέξεις, αυτό μας δείχνει ότι λέξεις της πρώτης περίπτωσης είναι πιο διαθέσιμες από τις λέξεις της δεύτερης, παρόλο που το σύνολο των ing λέξεων βρίσκεται μέσα σε αυτό των _n_. Σε παρόμοια συμπεράσματα κατέληξαν και με την σύγκριση των λέξεων του τύπου _ _ _ _ _ l y και του τύπου _ _ _ _ _ l _, η μέση εκτίμηση ήταν 8.8 και 4.4 αντίστοιχα.

Ένα ακόμα παράδειγμα από την εργασία των Tversky και Kahneman (1974), είναι το επόμενο. Έστω ότι μας ζητάνε να αξιολογήσουμε την συχνότητα με την οποία λέξεις με αφηρημένη έννοια (π.χ. αγάπη, σκέψη) και λέξεις με συγκεκριμένο νόημα (π.χ. πόρτα, νερό) εμφανίζονται σε Αγγλικά κείμενα. Ένας λογικός τρόπος, να απαντήσει κάποιος σε αυτό το ερώτημα, θα ήταν να ψάξει αυτές τις λέξεις σε κείμενα που θα μπορούσαν να βρίσκονται. Φαίνεται ευκολότερο, να σκεφτούμε κείμενα στα οποία αφηρημένες λέξεις υπάρχουν, όπως για παράδειγμα η λέξη ‘‘αγάπη’’, μπορούμε να σκεφτούμε ότι υπάρχει σε πολλά ερωτικά βιβλία. Σε αντίθεση με τις λέξεις που έχουν ένα συγκεκριμένο νόημα, όπως η λέξη ‘‘πόρτα’’, είναι δύσκολο να σκεφτούμε κείμενα στα οποία θα μπορούσε να αναφέρεται. Ως εκ τούτου, οι αφηρημένες λέξεις φαίνεται να είναι πιο συχνές από ότι οι μη-αφηρημένες.

3.3 Ευκολία φαντασίας περιστατικών

Σύμφωνα με τους Tversky και Kahneman πολλές φορές τα άτομα αξιολογούν τη συχνότητα ενός γεγονότος όχι με βάση τις σχετικές περιπτώσεις που βρίσκονται στην μνήμη τους, όπως αναλύσαμε προηγουμένως, αλλά με βάση τις περιπτώσεις που μπορούν να φανταστούν (bias of imaginability). Για παράδειγμα, κάποιος που πρόκειται να ταξιδέψει αεροπορικώς και σαν άτομο φοβάται τις μετακινήσεις με αεροπλάνο, είναι εύκολο να φανταστεί διάφορα ατυχήματα που θα μπορούσαν να συμβούν κατά την διάρκεια της πτήσης, όπως μια βλάβη στην μηχανή, και κατά συνέπεια να θεωρήσει ότι η πιθανότητα να πέσει το αεροπλάνο είναι πολύ μεγάλη. Αντίστοιχα, μπορεί κάποιος να αξιολογήσει την πιθανότητα ότι ένα συγκεκριμένο επιχειρηματικό εγχείρημα θα αποτύχει με το να φαντάζεται τις διάφορες δυσκολίες που μπορεί να συναντήσει.

Παρακάτω δίνονται δύο προβλήματα που χρησιμοποίησαν οι Tversky και Kahneman (1973) σε σχετική έρευνα τους για τη μελέτη της συγκεκριμένης ευρετικής.

<u>Πρόβλημα Α</u>*: Κάποιος πρέπει να συγκροτήσει επιτροπές από μια ομάδα 10 ατόμων. Είναι δυνατόν να συγκροτηθούν:*

1. *Πιο πολλές διαφορετικές επιτροπές από 8 άτομα.*
2. *Πιο πολλές διαφορετικές επιτροπές από 2 άτομα.*
3. *Ίδιος αριθμός επιτροπών (είτε από 8 είτε από 2 άτομα)*

Η πλειονότητα των συμμετεχόντων στην έρευνα έδωσε την απάντηση 2, προφανώς διότι παραδείγματα επιτροπών αποτελούμενες από 2 άτομα κατασκευάζονται ευκολότερα από ότι επιτροπές από 8 άτομα, συγχέοντας την διαίρεση των 10 ατόμων σε 5 ανεξάρτητες δυάδες με τον αριθμό των συνδυασμών (όλων των δυνατών δυάδων από 10 αντικείμενα) και ότι συνδυασμοί από 8 άτομα είναι λιγότερο διακριτοί εξαιτίας της επικάλυψης ατόμων (οποιεσδήποτε δυο οκτάδες, μοιράζονται τουλάχιστον από 6 άτομα). Για να βρούμε την απάντηση, αρκεί να σκεφτούμε ότι για κάθε συνδυασμό 2 ανά 10 αντιστοιχεί και ένας συνδυασμός 8 ανά 10, δηλαδή αρκεί να παρατηρήσουμε ότι στην επιλογή κάθε δυάδας αντιστοιχεί μια οκτάδα (οι υπόλοιποι που δεν έχουν επιλεγεί). Οπότε η σωστή απάντηση είναι το 3. Το πλήθος όλων των δυνατών διαφορετικών επιτροπών σε κάθε περίπτωση δίνεται από τον διωνυμικό συντελεστή $\binom{10}{2} = \binom{10}{8} = \frac{10!}{2!8!} = 45$

<u>Πρόβλημα Β</u>: *Έστω δύο δομές, Α και Β, οι οποίες φαίνονται παρακάτω.*

(A)

x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x

(B)

x	x
x	x
x	x
x	x
x	x
x	x
x	x
x	x
x	x

Ένα μονοπάτι είναι μια διαδρομή όπου συνδέει ένα στοιχείο της πρώτης γραμμής με ένα στοιχείο της τελευταίας γραμμής και περνάει μόνο από ένα στοιχείο σε κάθε γραμμή.

Σε ποία από τις δύο δομές υπάρχουν περισσότερα μονοπάτια;
Πόσα μονοπάτια πιστεύεις ότι υπάρχουν σε κάθε δομή;

Η πλειοψηφία των συμμετεχόντων, 46 από τους 54, απάντησαν ότι στη δομή A υπάρχουν περισσότερα μονοπάτια από ότι στην δομή B. Επίσης, για το πλήθος των μονοπατιών, η μέση εκτίμηση ήταν 40 για την δομή A και 18 για την δομή B. Στην πραγματικότητα, ο αριθμός των μονοπατιών είναι ίδιος και στις δύο δομές, $8^3 = 2^9 = 512$.

Γιατί οι άνθρωποι βλέπουν περισσότερα μονοπάτια στη δομή A από ότι στη δομή B; Σύμφωνα με τους ερευνητές υπάρχουν πολλοί λόγοι που τα μονοπάτια στη δομή A είναι πιο διαθέσιμα από ότι στη δομή B. Πρώτον, τα μονοπάτια (ή διαδρομές) που είναι πιο εύκολο να διακρίνει κάποιος σε κάθε περίπτωση, είναι οι στήλες των δομών. Στην πρώτη δομή υπάρχουν 8 στήλες και στη δεύτερη μόνο 2. Δεύτερον, τα μονοπάτια που διασχίζουν τις γραμμές διαγώνια και όχι κάθετα (π.χ. στη πρώτη δομή, το 3^{ο} στοιχείο της 1^{ης} γραμμής με το 4^{ο} στοιχείο της 2^{ης} γραμμής και με το 1^{ο} της 3^{ης} γραμμής), είναι πιο διακριτά και λιγότερο πολύπλοκα στη δομή A από ότι στην δομή B. Δύο μονοπάτια στην πρώτη δομή, μοιράζονται κατά μέσο όρο περίπου το 1/8 των στοιχείων τους, ενώ δύο μονοπάτια στη δεύτερη δομή, μοιράζονται κατά μέσο όρο το 1/2 των στοιχείων τους. Τέλος, τα μονοπάτια στη δομή A, είναι πιο μικρά και ως εκ τούτου μπορούν να οπτικοποιηθούν ευκολότερα από ότι στη δομή B.

Οι Combs και Slovic (1979) ζήτησαν από ανθρώπους να κρίνουν τη σχετική πιθανότητα διάφορων αιτιών θανάτου. Αιτίες θανάτου που τραβούν τα φώτα της δημοσιότητας (π.χ. δολοφονία) κρίθηκαν πιθανότερες από αυτές που δεν έχουν δημοσιότητα (π.χ. αυτοκτονία), ακόμα κι αν στην πραγματικότητα συμβαίνει το αντίθετο. Η υπερβολική έμφαση των μέσων μαζικής ενημέρωσης στο έγκλημα, στη βία και σε άλλα συγκλονιστικά γεγονότα είναι η κύρια αιτία που κάνει την κρίση μας να χάνει το σωστό δρόμο. Επίσης, η προτίμηση των μέσων μαζικής ενημέρωσης σε ασυνήθιστα φαινόμενα (π.χ.U.F.O) και ο υπερβολικός τρόπος που τα προβάλουν σε πολλές περιπτώσεις, συντελεί ενδεχομένως στην πίστη των ανθρώπων για τη συχνότητα τέτοιων φαινομένων, ακόμη και όταν τα πραγματικά στοιχεία είναι ελάχιστα ή και αρνητικά.

Το να υπολογίσει κάποιος ακριβώς την πιθανότητα ενός γεγονότος στην καθημερινή ζωή (π.χ. σεισμός, τσουνάμι) δεν είναι τόσο εύκολο όπως στα προβλήματα των μαθηματικών. Σημαντικό είναι, όταν μιλάμε για γεγονότα, όπως φυσικά φαινόμενα, να μην υπερεκτιμάμε την συχνότητα τους επηρεαζόμενοι από διάφορους άσχετους παράγοντες, όπως καταστάσεις που μπορούμε να θυμηθούμε ή να φανταστούμε και να ζούμε με το φόβο αυτό, αλλά ούτε να και την υποτιμάμε (την συχνότητα) και μην είμαστε προετοιμασμένοι για τέτοια γεγονότα, όσο σπάνια και αν συμβαίνουν. Δεν θα πρέπει να συγχέεται ο βαθμός του κινδύνου ενός γεγονότος με την πιθανότητα να συμβεί το συγκεκριμένο γεγονός. Για παράδειγμα, ένα τσουνάμι είναι επικίνδυνό φυσικό φαινόμενο, όμως καταστροφικά τσουνάμι δεν γίνονται κάθε μέρα. Αντίστοιχα, όπως υπάρχει η περίπτωση να υπερεκτιμήσουμε την πιθανότητα ενός γεγονότος, πολλές φορές συμβαίνει να την υποτιμάμε, είτε γιατί δεν αξιολογήσαμε σωστά τους κινδύνους, είτε γιατί απλά δεν τους φανταστήκαμε.

3.4 Απατηλή συσχέτιση

Οι Chapman και Chapman (1969) περιέγραψαν μια ενδιαφέρουσα παρανόηση σχετικά με την συχνότητα δύο γεγονότων που συνυπάρχουν και που οφείλεται στην ευρετική της διαθεσιμότητας. Σε έρευνα τους, παρουσίασαν στους συμμετέχοντες διάφορες πληροφορίες για κάποια υποθετικά άτομα, που έπασχαν από κάποια ψυχική ασθένεια. Οι πληροφορίες που τους δόθηκαν για κάθε ασθενή, ήταν μια ιατρική διάγνωση και ένα πορτρέτο. Κατόπιν ζήτησαν από τους συμμετέχοντες να αξιολογήσουν τη συχνότητα με την οποία κάθε ιατρική διάγνωση (όπως παράνοια) συνοδευόταν από διάφορα χαρακτηριστικά του σχεδίου (όπως ιδιόμορφα μάτια). Οι συμμετέχοντες υπερεκτίμησαν σημαντικά τη συχνότητα της συνύπαρξης των φυσικών χαρακτηριστικών που συνοδεύουν κάθε ασθένεια, όπως της παράνοιας και των ιδιόμορφων ματιών. Με απλά λόγια, θεώρησαν ότι τα στοιχεία παράνοια-ιδιόμορφα μάτια συνυπάρχουν, εντοπίζοντας το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό και σε ασθενείς που μεν έπασχαν από παράνοια, αλλά δεν είχαν ιδιόμορφα μάτια. Το φαινόμενο αυτό ονομάστηκε απατηλή συσχέτιση.

Η αξιολόγηση του πόσο συχνά δύο γεγονότα συνυπάρχουν βασίζεται στο πόσο ισχυροί είναι οι δεσμοί ανάμεσα τους. Συνεπώς, γεγονότα με δυνατούς δεσμούς, εκτιμώνται να εμφανίζονται μαζί συχνότερα.

4. Η Μεροληψία της Ισοπιθανότητας

Μεροληψία της ισοπιθανότητας (equiprobability bias), σύμφωνα με την Lecourte (1992), ορίζουμε την πεποίθηση ενός ατόμου, να πιστεύει ότι τα τυχαία ενδεχόμενα ενός πειράματος, είναι ισοπίθανα εκ φύσεως. Αυτό σημαίνει, πως όλα τα ενδεχόμενα, θεωρούνται το ίδιο πιθανά, ακόμα και όταν δεν είναι. Τυπικό παράδειγμα αυτής της πλάνης είναι το εξής:

<u>Παράδειγμα Α1</u>: *Έστω ότι ρίχνουμε δύο ζάρια. Τι είναι πιο πιθανό;*

- ***a.*** *Να πάρουμε ένα 5 και ένα 6.*
- ***b.*** *Να πάρουμε δυο φορές το 6.*
- ***c.*** *Η πιθανότητα είναι η ίδια και στις δύο περιπτώσεις.*

Η μεροληψία εμφανίζεται όταν κάποιο άτομο επιλέγει το c, δηλαδή όταν πιστεύει πως τα ενδεχόμενα a και b είναι ίσα. Η σωστή απάντηση είναι το να πάρουμε ένα 5 και ένα 6, η οποία αντιστοιχεί στα ζευγάρια αποτελεσμάτων (5,6) και (6,5) σε αντίθεση με τη δεύτερη επιλογή που αντιστοιχεί μόνο στο ζευγάρι (6,6), ως εκ τούτου η πιθανότητα στο b είναι μικρότερη.

Το παραπάνω παράδειγμα, όπως και το επόμενο, δόθηκαν από τους Fischebein, Nello και Marino (1991) σε έρευνα τους σχετικά με τους παράγοντες που επιδρούν στην λήψη αποφάσεων παιδιών και ενηλίκων, σχετικά με τις πιθανότητες. Τα παιδιά ήταν μαθητές διαφόρων ηλικιών, με ή χωρίς κάποια προηγούμενη εκπαίδευση όσον αφορά τις πιθανότητες.

Παράδειγμα Β1: *Έστω ότι ρίχνουμε δύο κέρματα. Τι είναι ποίο πιθανό;*

- ***a.*** *Να πάρουμε στο ένα κορώνα και στο άλλο γράμματα.*
- ***b.*** *Να πάρουμε κορώνα και στα δύο*
- ***c.*** *Η πιθανότητα είναι η ίδια και στις δύο περιπτώσεις.*

Αντίστοιχα, όπως και στο παράδειγμα Α1, η παρανόηση εμφανίζεται για κάποιον που επιλέγει το c. Για το a έχουμε τα ζευγάρια (Κ,Γ) και (Γ,Κ) ενώ για το b μόνο το (Κ,Κ).

Στα αποτελέσματα της έρευνα τους, οι παραπάνω βρήκαν ότι μόνο ένα μικρό ποσοστό των παιδιών κατάλαβε πως οι πιθανότητες στα a και b για κάθε πρόβλημα είναι διαφορετικές. Τα περισσότερα παιδιά φαίνεται, να μην έχουν λάβει υπόψη τους, στον ορισμό του μεγέθους του δειγματικού χώρου κάθε παραδείγματος, ότι τα ζευγάρια (5,6) με (6,5) και (Κ,Γ) με (Γ,Κ) είναι διαφορετικά.

Η βασική εξήγηση που δόθηκε από τα παιδιά που επιλέγουν το c, βασίζεται στον ισχυρισμό ότι έχουν να κάνουν με τυχαία γεγονότα και ως εκ τούτου η πιθανότητα όλων των τυχαίων γεγονότων είναι ίδια. Παραδείγματα τέτοιων απαντήσεων που υποδηλώνουν τον ισχυρισμό αυτό, είναι: "Η πιθανότητα είναι η ίδια επειδή κάποιος μπορεί να πάρει (5,6) ή (6,6) ή κανένα από αυτά τα αποτελέσματα". "Η πιθανότητα είναι η ίδια, γιατί το τι θα πάρουμε ρίχνοντας δύο ζάρια αποτελεί έκπληξη". "Η πιθανότητα είναι ίδια, γιατί κάθε ζάρι έχει μόνο ένα 5 και μόνο ένα 6". "Η πιθανότητα είναι η ίδια, γιατί ρίχνοντας τα ζάρια δεν ξέρουμε τι θα μας έρθει". "Η πιθανότητα είναι ίδια, γιατί δεν μπορούμε να ορίσουμε κάτι το οποίο εξαρτάται μόνο από την κίνηση ενός μικρού αντικειμένου όπως ένα ζάρι, το οποίο ρίχνεται από κάθε άτομο με διαφορετικό τρόπο ".

Η μεροληψία της ισοπιθανότητας ήταν το ίδιο έντονη σε όλες τις ηλικίες των παιδιών και η προηγούμενη εκπαίδευση δεν βοήθησε ιδιαίτερα. Αντιθέτως υπήρχαν περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις σε παιδιά που είχαν κάνει κάποια μαθήματα στις πιθανότητες, από ότι αυτά που δεν είχαν κάνει. Ένα παράδειγμα αυτής της περίπτωσης που δόθηκε από τους ερευνητές είναι το παρακάτω.

"Κάθε ζάρι είναι ανεξάρτητο από το άλλο. Η πιθανότητα με το ένα ζάρι να πάρει κάποιος έναν αριθμό είναι 1/6, το ίδιο ισχύει και για το άλλο ζάρι".

Είναι φανερό ότι σε αυτήν την περίπτωση ο μαθητής έχει λάβει μαθήματα σχετικά με πιθανότητες. Χρησιμοποιεί την έννοια της ανεξαρτησίας και το γεγονός ότι κάθε μία από τις έξι πλευρές του κύβου είναι το ίδιο πιθανή. Συνδυάζοντας αυτές τις δύο ιδέες και θεωρώντας τα δύο πιθανά αποτελέσματα 6 και 5 ως ξεχωριστά, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι το ζευγάρι (5,6), χωρίς να μας νοιάζει η σειρά, έχει την ίδια πιθανότητα με το ζευγάρι (6,6).

Συνοψίζοντας, σύμφωνα με τους ερευνητές δύο είναι τα βασικά συμπεράσματα. Όσον αφορά τους πιο μικρούς μαθητές και αυτούς που δεν έχουν διδαχθεί πιθανότητες, τα δύο γεγονότα είναι αποτέλεσμα της τύχης και ως εκ τούτου δεν υπάρχει λόγος κάποιος να περιμένει κάποιο από τα δύο να είναι πιο πιθανό από το άλλο. Όσον αφορά αυτούς που έχουν παρακολουθήσει κάποια μαθήματα, τα ενδεχόμενα 5 και 6 είναι ισοπίθανα και ως εκ τούτου κάθε γεγονός που αντιπροσωπεύει ένα δυαδικό συνδυασμό αυτών, θα πρέπει να έχει την ίδια πιθανότητα με κάποιο άλλο αντίστοιχο του.

Σημαντικό να αναφερθεί επίσης, είναι ότι πολλά από τα παιδιά που επέλεξαν την σωστή απάντηση, δηλαδή το ζευγάρι (6,6) όπως και το ζευγάρι (Κ,Κ) ως λιγότερο πιθανά, το έκαναν για λάθος λόγο. Θεώρησαν ότι τα ιδανικά αποτελέσματα, όπως το να έχουμε δυο φορές την ίδια ένδειξη είναι λιγότερο πιθανά από το να έχουμε διαφορετικές ενδείξεις. Αυτό είναι μια άλλη πλάνη, την οποία ήδη έχουμε μελετήσει, αύτη της αντιπροσωπευτικότητας.

Τα επόμενα δύο παραδείγματα είναι ίδιου τύπου με τα δύο προηγούμενα Α1 και Β1 που αναλύσαμε, αλλά σε πιο γενική μορφή.

<u>Παράδειγμα Α2</u>: *Έστω ότι ρίχνουμε δύο ζάρια. Τι είναι πιο πιθανό να συμβεί;*

- ***a.*** *Να πάρουμε τον ίδιο αριθμό και στα δύο.*
- ***b.*** *Να πάρουμε διαφορετικό αριθμό.*
- ***c.*** *Και στις δύο περιπτώσεις η πιθανότητα είναι η ίδια.*

<u>Παράδειγμα Β2</u>: *Έστω ότι ρίχνουμε δύο κέρματα. Τι είναι πιο πιθανό να συμβεί;*

- ***a.*** *Να πάρουμε την ίδια ένδειξη και στα δύο.*
- ***b.*** *Να πάρουμε διαφορετική ένδειξη.*
- ***c.*** *Και στις δύο περιπτώσεις η πιθανότητα είναι ίδια.*

Σε αυτή την περίπτωση, η σωστή απάντηση, για το πρόβλημα με τα κέρματα, είναι ότι οι πιθανότητες είναι ίσες σε αντίθεση με το αρχικό πρόβλημα Β1. Ενώ για αυτό με τα ζάρια, η πιθανότητα του να πάρουμε τον ίδιο αριθμό είναι μικρότερη από το να πάρουμε διαφορετικούς, όπως και στο Α1.

Κάποιος, λογικά θα περίμενε ότι το ποσοστό των σωστών απαντήσεων θα ήταν ανάλογο με αυτών στα παραδείγματα Α1 και Β1. Όμως, και για τα δύο προβλήματα για κάθε ηλικία και θεωριτικό υπόβαθρο των μαθητών, τα αποτελέσματα ήταν εμφανώς καλύτερα για τη γενική διατύπωση των Α2 και Β2, από ότι αυτήν των Α1 και Β1 που ήταν πιο συγκεκριμένη.

Σύμφωνα με τους ερευνητές, η μόνη εύλογη εξήγηση γι' αυτό είναι ότι πολλά από τα παιδιά που απάντησαν σωστά έχουν την διαισθητική ικανότητα να αξιολογούν συνολικά το μέγεθος του δειγματικού χώρου και τη δομής του. Αυτή η ικανότητα ενεργοποιήθηκε στη περίπτωση της γενικής διατύπωσης του προβλήματος, ενώ στη συγκεκριμένη όχι. Χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι πολλά από τα παιδιά που απάντησαν λανθασμένα στο παράδειγμα Α1, απάντησαν σωστά στο Α2.

Σε ανάλογη έρευνα ο Pratt[7] (2000), έδωσε το παρακάτω πρόβλημα:

Παράδειγμα Γ: *Έστω ότι ρίχνουμε δύο ζάρια. Τι είναι πιο πιθανό να συμβεί;*

a. *Να αθροίσουμε τις ενδείξεις τους και να πάρουμε 2.*
b. *Να αθροίσουμε τις ενδείξεις τους και να πάρουμε 3.*
c. *Και στις δύο περιπτώσεις η πιθανότητα είναι ίδια.*

Ο Pratt βρήκε πως υπήρχαν παιδιά που πίστευαν πως το να πάρουμε άθροισμα 2 ή 3, ήταν εξίσου πιθανό να συμβεί. Κάτι που δεν ισχύει, γιατί στην περίπτωση που θέλουμε άθροισμα 3 αυτό γίνεται με το να φέρουμε τα αποτελέσματα (1,2) ή (2,1), ενώ στην περίπτωση που θέλουμε άθροισμα 2, αυτό γίνεται μόνο με το να φέρουμε (1,1), οπότε η πιθανότητα είναι μεγαλύτερη στην πρώτη περίπτωση.

Σε συνέντευξη που έγινε κατόπιν ένας μαθητής ανέφερε: “τα ζευγάρια (1,2) και (2,1) είναι τα ίδια γιατί δίνουν το ίδιο άθροισμα”. Ο μαθητής φαίνεται να μην δίνει σημασία στην σειρά των ενδείξεων και να αποδίδει μια μη-υπαρκτή ιδιότητα, αυτήν της αντιμεταθετικότητας[8] στον δειγματικό χώρο, υποθέτοντας ότι τα αποτελέσματα (1,2) και (2,1) είναι ίδια, ενώ δεν είναι. Προφανώς, ο μαθητής είχε σκεφτεί διαφορετικό δειγματικό χώρο, από αυτόν που ισχύει πραγματικά γι’ αυτό το πείραμα, δηλαδή:

Σωστός δειγματικός χώρος:

$$\begin{array}{r}(1,1)-(1,2)-(1,3)-(1,4)-(1,5)-(1,6)\\(2,1)-(2,2)-(2,3)-(2,4)-(2,5)-(2,6)\\(3,1)-(3,2)-(3,3)-(3,4)-(3,5)-(3,6)\\(4,1)-(4,2)-(4,3)-(4,4)-(4,5)-(4,6)\\(5,1)-(5,2)-(5,3)-(5,4)-(5,5)-(5,6)\\(6,1)-(6,2)-(6,3)-(6,4)-(6,5)-(6,6)\end{array}$$

Δειγματικός χώρος σύμφωνα με τον μαθητή:

$$\begin{array}{r}(1,1)-(1,2)-(1,3)-(1,4)-(1,5)-(1,6)\\(2,2)-(2,3)-(2,4)-(2,5)-(2,6)\\(3,3)-(3,4)-(3,5)-(3,6)\\(4,4)-(4,5)-(4,6)\\(5,5)-(5,6)\\(6,6)\end{array}$$

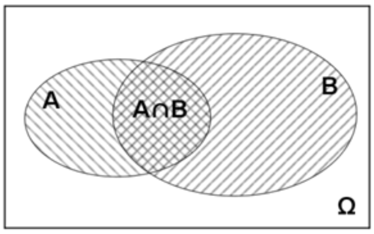
[7] Από το άρθρο των Batanero, C. & Diaz, C (2007). Δες βιβλιογραφία.

[8] Ως **αντιμεταθετική ιδιότητα** χαρακτηρίζουμε στα μαθηματικά, την ιδιότητα μιας πράξης μεταξύ δύο όρων, όπου το αποτέλεσμα δεν αλλάζει, αν αλλάξουμε την σειρά των όρων αυτών. Για παράδειγμα στην πράξη της πρόσθεσης $3+5=5+3$.

5. Η πλάνη του συνδυασμού

Η πλάνη του συνδυασμού (conjuction fallacy) είναι ακόμα μια λανθασμένη αντίληψη των πιθανοτήτων, σύμφωνα με την οποία τα άτομα υποστηρίζουν ότι η πιθανότητα να συμβούν δύο γεγονότα συγχρόνως είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να συμβεί μόνο το ένα. Στην πραγματικότητα ισχύει το αντίθετο. Αν αναπαραστήσουμε δύο γεγονότα με Α και Β τότε η πιθανότητα του συνδυασμού τους $P(A \cap B)$ (η τομή όπως ορίζουμε στα μαθηματικά) δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα του κάθε γεγονότος ξεχωριστά, $P(A)$ ή $P(B)$. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$P(A \cap B) \leq P(A) \text{ και } P(A \cap B) \leq P(B)$$



Διάγραμμα Venn, αναπαράσταση της τομής δύο γεγονότων Α και Β

Σύμφωνα με τους A. Tversky και D. Kahneman (1983), ο συνδυασμός δύο γεγονότων φαίνεται πιο πιθανός, είτε γιατί μπορεί να είναι πιο αντιπροσωπευτικός από το κάθε γεγονός, είτε γιατί παραδείγματα μιας πιο συγκεκριμένης κατηγορίας, όπως είναι η τομή, είναι ευκολότερο να μας έρθουν στο μυαλό από ότι παραδείγματα μιας πιο γενικής κατηγορίας. Αυτό σημαίνει ότι οι ευρετικές της διαθεσιμότητας και ειδικά της αντιπροσωπευτικότητας, σύμφωνα με όσα έχουμε πει στις δύο προηγούμενες ενότητες, συμβάλει στην εμφάνιση της πλάνης του συνδυασμού.

Στο σημείο αυτό για τη κατανόηση και την ανάδειξη της συγκεκριμένης ευρετικής θα παρουσιαστούν διάφορα προβλήματα από το άρθρο *Extensional Versus Intuitive Reasoning: The Conjunction Fallacy in Probability Judgment* των A. Tversky και D. Kahneman, (1983). Μια κατηγορία των προβλημάτων ήταν η περιγραφή κάποιων φανταστικών προσώπων, όπως η παρακάτω:

Η Λίντα είναι 31 ετών, ανύπανδρη, τολμηρή και πολύ ευφυής. Έχει σπουδάσει φιλοσοφία. Ως φοιτήτρια ασχολήθηκε με θέματα κοινωνικών διακρίσεων και δικαιοσύνης, επίσης συμμετείχε σε διαδηλώσεις κατά των πυρηνικών όπλων.

Σε μία πρώτη εκδοχή του προβλήματος ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να επιλέξουν ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι περισσότερο πιθανή για την Λίντα.

- *Η Λίντα είναι ταμίας σε τράπεζα (Τ)*
- *Η Λίντα είναι ταμίας σε τράπεζα* ***και*** *ενεργό μέλος σε μια φεμινιστική οργάνωση.* $(T \cap F)$

Οι ερευνητές υπέβαλαν το παραπάνω ερώτημα σε 142 σπουδαστές γνωστού Αμερικάνικου κολεγίου. Το 85% περίπου επέλεξε για σωστή απάντηση τη δεύτερη πρόταση, παρόλο που το ενδεχόμενο αυτό είναι υποσύνολο του πρώτου.

Μία δεύτερη εκδοχή του προβλήματος, παρουσιάστηκε σε ένα άλλο γκρουπ σπουδαστών από το ίδιο κολέγιο. Δόθηκε στους συμμετέχοντες η ίδια περιγραφή για την Λίντα, οι δύο σχετικές προτάσεις (Τ και $T \cap F$) και κατόπιν τους ζητήθηκε να υποδείξουν ποιο από τα δύο επιχειρήματα που ακολουθούν είναι πιο πειστικό.

Επιχείρημα 1*: Η πρώτη πρόταση είναι πιθανότερη από την δεύτερη, επειδή η πιθανότητα η Λίντα να είναι και ταμίας σε τράπεζα και φεμινίστρια, πρέπει να είναι μικρότερη από την πιθανότητα να είναι μόνο ταμίας σε τράπεζα.*

Επιχείρημα 2*: Η δεύτερη πρόταση είναι πιθανότερη από την πρώτη, επειδή στην Λίντα ταιριάζει περισσότερο να είναι μια ταμίας σε τράπεζα η οποία είναι φεμινίστρια, από ότι της ταιριάζει να είναι μόνο ταμίας σε τράπεζα.*

Η πλειοψηφία των συμμετεχόντων (65%, n=58) επέλεξε το δεύτερο επιχείρημα, δηλαδή εκείνο που δίνει έμφαση στο ταίριασμα της περιγραφής. Η προσπάθεια προτροπής των συμμετεχόντων προς την σωστή απάντηση μέσα από την δεύτερη εκδοχή του προβλήματος, αν και μειώνει το ποσοστό των λανθασμένων απαντήσεων, δεν ελαχιστοποιεί την πλάνη του συνδυασμού που προκαλείται λόγω της αντιπροσωπευτικότητας. Επειδή ο φεμινισμός ταιριάζει στην Λίντα, η παραμικρή αναφορά αυτού του χαρακτηριστικού καθιστά τη δεύτερη πρόταση περισσότερο πιθανή από την πρώτη.

Η ίδια έρευνα εφαρμόστηκε σε 64 φοιτητές κοινωνικών επιστημών που είχαν ολοκληρώσει τις σπουδές τους και που όλοι τους είχαν περάσει διάφορα μαθήματα στατιστικής. Μόνο το 36% σε αύτη την περίπτωση επέλεξε ως πιο πιθανή την δεύτερη πρόταση υποπίπτοντας στην πλάνη του συνδυασμού . Το μορφωτικό επίπεδο προφανώς βοήθησε ως προς τη σωστή κατεύθυνση και τα αποτελέσματα ήταν σαφώς καλύτερα σε αυτή την περίπτωση, όμως όχι αρκετά ικανοποιητικά για άτομα με γνώσεις στατιστικής.

Στην προσπάθεια τους οι A.Tversky και D.Kahneman, να ανακαλύψουν τους παράγοντες που προκαλούν την πλάνη του συνδυασμού και να διερευνήσουν την επίδραση της στον τομέα της προσωπικής αντίληψης των ατόμων σε συνδυασμό με τα κοινωνικά στερεότυπα που υπάρχουν, ασχολήθηκαν με διάφορα ερωτήματα. Μπορεί η εξειδίκευση σε ένα σχετικό θέμα να εμποδίσει την εμφάνιση της συγκεκριμένης ευρετικής; Μπορούν οικονομικά κίνητρα να ωθήσουν τα άτομα προς την σωστή επιλογή;

Παρουσιάζεται παρακάτω ένα ακόμα πρόβλημα από την εργασία των συγκεκριμένων ερευνητών. Σε αυτή την περίπτωση οι συμμετέχοντες είναι ειδικευόμενοι παθολόγοι γιατροί, από τους οποίους ζητείται να αξιολογήσουν κάποια συμπτώματα, σχετικά με ένα ιατρικό περιστατικό. Η παθολογία είναι ένας από τους κλάδους της ιατρικής που απαιτούνται, βεβαίως, υψηλού επιπέδου γνώσεις, αλλά και το ένστικτο παίζει σημαντικό ρόλο στην λήψη αποφάσεων.

Μια γυναίκα 55 ετών διαγνώστηκε με πνευμονική εμβολή. Η διάγνωση έγινε 10 μέρες μετά, με την αφαίρεση της χοληδόχου κύστης.

Κατατάξτε τα παρακάτω συμπτώματα, σύμφωνα με την πιθανότητα τους να είχαν εκδηλωθεί στην συγκεκριμένη ασθενή. Χρησιμοποιείστε 1 για το πιο πιθανό και 6 για το λιγότερο. Φυσικά η ασθενής θα μπορούσε να έχει εκδηλώσει παραπάνω από ένα σύμπτωμα.

a. *Δύσπνοια και μερική παράλυση (A&B)*
b. *Πόνος στην γάμπα*
c. *Πλευρικός πόνος στο θώρακα*
d. *Συγκοπή και ταχυκαρδία*
e. *Μερική παράλυση (B)*
f. *Αιμόπτυση*

Η λίστα των συμπτωμάτων φτιάχτηκε έτσι ώστε να περιλαμβάνει ένα σύμπτωμα Β, το οποίο ήταν μη-αντιπροσωπευτικό της κατάστασης του ασθενή, και το συνδυασμό του συγκεκριμένου με ένα άλλο υψηλά αντιπροσωπευτικό σύμπτωμα Α. Στο παραπάνω παράδειγμα της πνευμονικής εμβολής, η δύσπνοια είναι ένα πολύ τυπικό σύμπτωμα, αντίθετα η μερική παράλυση είναι ένα πολύ ασυνήθιστο. Τα αποτελέσματα του πειράματος ήταν παρόμοια με αυτά στην περίπτωση του προβλήματος με την Λίντα. Η παραβίαση του κανόνα της τομής ήταν κατά μέσο όρο 91%. Αποδείχθηκε ότι εξειδίκευση δεν εκτοπίζει την ευρετική της αντιπροσωπευτικότητας και δεν αποτρέπει την εμφάνιση της πλάνης του συνδυασμού.

Έως τώρα έχουμε περιγράψει την παραβίαση του κανόνα της τομής ως πλάνη. Πότε όμως μπορούμε να πούμε ότι η λανθασμένη κρίση ενός ατόμου, για ένα γεγονός, οφείλεται σε πλάνη και ποία η διαφορά με το να πούμε ότι οφείλεται σε παρανόηση; Σύμφωνα με τους ερευνητές μια τέτοια κρίση μπορεί να οφείλεται σε πλάνη, όταν οι περισσότεροι άνθρωποι που την έχουν, είναι διατεθειμένοι μετά από κατάλληλη επεξήγηση, να αποδεχτούν μια από τις επόμενες προτάσεις: α) ότι έκαναν ένα μη τετριμμένο λάθος, το οποίο πιθανόν να έχουν ξανακάνει σε παρόμοια προβλήματα. β) ότι το λάθος τους ήταν εννοιολογικό και όχι απλώς λεκτικό ή συντακτικό και γ) ότι θα έπρεπε να γνωρίζουν τη σωστή απάντηση ή τον τρόπο να την βρουν.

Από την άλλη, στην περίπτωση της παρανόησης, η λανθασμένη κρίση, μπορεί να οφείλεται σε αποτυχία επικοινωνίας, δηλαδή ο ερωτηθέντας να έχει αντιληφθεί εσφαλμένα την ερώτηση ή ο ερευνητής να έχει παρερμηνεύσει την απάντηση. Άτομα τα οποία έχουν σφάλει εξαιτίας μιας παρανόησης, είναι πιθανόν να αρνηθούν τις παραπάνω προτάσεις (α, β και γ) και να ισχυριστούν (όπως οι μαθητές συχνά μετά από μια εξέταση) ότι αυτοί ήξεραν ανέκαθεν τη σωστή απάντηση και ότι το λάθος τους, αν υπάρχει, ήταν λεκτικό ή συντακτικό περισσότερο από εννοιολογικό. Πιο απλά, ότι ήξεραν την απάντηση αλλά δεν κατάλαβαν την ερώτηση.

Θα μπορούσε η πλάνη του συνδυασμού να μην είναι πραγματικά μια πλάνη, αλλά να οφείλεται σε παρανόηση της έννοιας της πιθανότητας; Για την έρευνα αυτής της υπόθεσης, δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα. Από τους συμμετέχοντες δεν ζητείται να επιλέξουν το πιο πιθανό γεγονός και σκοπίμως, λέξεις σχετικά με πιθανότητα δεν αναφέρονται πουθενά. Τους ζητείται να στοιχηματίσουν σε μια από τις δοσμένες επιλογές του προβλήματος.

Έστω ένα συνηθισμένο ζάρι. Βάφουμε τις 4 από τις 6 πλευρές του με πράσινο και τις άλλες δύο που μένουν με κόκκινο. Πρόκειται να ρίξουμε το συγκεκριμένο ζάρι 20 φορές. Για κάθε ρίψη θα σημειώνεται το χρώμα που θα εμφανίζεται, R για το κόκκινο και G για το πράσινο. Θα θέλαμε να επιλέξεις μία από τις τρεις περιπτώσεις που υπάρχουν παρακάτω. Αν αυτή που επέλεξες εμφανιστεί ανάμεσα στις 20 φορές που θα ρίξουμε το ζάρι, θα κερδίσεις 25$. Σε ποία θα στοιχημάτιζες;

1. *RGRRR*
2. *GRGRRR*
3. *GRRRRR*

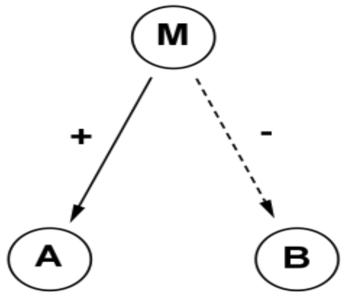
Παρατηρούμε ότι η ακολουθία 1 περιέχεται στην ακολουθία 2 αν βγάλουμε το πρώτο G. Ως εκ τούτου, σύμφωνα με τον κανόνα για την τομή, η ακολουθία 1 είναι πιο πιθανή από την 2. Παρατηρούμε επίσης ότι και οι τρεις ακολουθίες είναι μη-αντιπροσωπευτικές της ρίψης του συγκεκριμένου ζαριού, επειδή περιέχουν περισσότερα R, από ότι G.

Τα αποτελέσματα έδειξαν, ότι το 65% των συμμετεχόντων στοιχημάτισε στην ακολουθία 2. Παρόμοια αποτελέσματα προέκυψαν και στην περίπτωση που η ακολουθία 2 αντικαταστάθηκε με RGRRRG. Τα αποτελέσματα αυτά μας δείχνουν, ότι τα άτομα αξιολόγησαν την κάθε ακολουθία, με βάση την αναλογία των R και G που έχει. Η ακολουθία 2, φαίνεται (ενώ δεν είναι) να είναι καλύτερη από την 1, μιας και έχει καλύτερη αναλογία και από τα δύο χρώματα, δηλαδή η αναλογία G/R στην ακολουθία 1 είναι 1/4 = 0.25 και στη ακολουθία 2, σε κάθε περίπτωση, είναι 2/5 = 0.4.

Σύμφωνα με τους ερευνητές, είναι φανερό από αυτά τα αποτελέσματα, ότι λάθη σχετικά με τον κανόνα της τομής, δεν οφείλονται σε παρανόηση της λέξης πιθανότητα. Τα άτομα χρησιμοποίησαν την ευρετική της αντιπροσωπευτικότητας ακόμα και όταν λέξεις σχετικές με πιθανότητα απουσίαζαν. Επιπλέον, ούτε το οικονομικό κίνητρο βοήθησε προς την σωστή επιλογή. Σε συζητήσεις που έγιναν με τους ερωτηθέντες μετά από τις σχετικές έρευνες, υποστήριξαν αυτό το συμπέρασμα, δηλαδή ότι οι παραβιάσεις του κανόνα της τομής, οφείλεται καθαρά σε πλάνη και όχι σε παρανόηση των ερωτήσεων.

Το πρόβλημα της Λίντα που συζητήσαμε παραπάνω (αντίστοιχα μπορούμε να σκεφτούμε και για τα υπόλοιπα προβλήματα) περιλαμβάνει τρία στοιχεία: ένα αιτιακό[9] μοντέλο Μ (η προσωπικότητα της Λίντα), ένα βασικό γεγονός Β (η Λίντα είναι ταμίας), το οποίο είναι μη αντιπροσωπευτικό του μοντέλου Μ και ένα επιπλέον γεγονός Α (η Λίντα είναι φεμινίστρια), το οποίο είναι υψηλά αντιπροσωπευτικό του Μ. Σε αυτά τα προβλήματα, το μοντέλο Μ είναι θετικά συνδεδεμένο με το γεγονός Α και αρνητικά με το Β. Αυτή η δομή ονομάζεται *Μ → Α παράδειγμα*. Οι ερευνητές βρήκαν, ότι όταν η περιγραφή για την προσωπικότητα της Λίντα δεν δινόταν και πως το μόνο που αναφερόταν για αυτήν, ήταν η ηλικία της, δηλαδή ότι ήταν μια 31 χρονών γυναίκα, τότε σχεδόν όλοι οι συμμετέχοντες απαντούσαν σωστά, κατατάσσοντας τον συνδυασμό των γεγονότων "ταμίας σε τράπεζα και φεμινίστρια" λιγότερο πιθανό από το κάθε γεγονός χωριστά. Ως εκ τούτου το σφάλμα στο αρχικό πρόβλημα, που περιλάμβανε την περιγραφή της προσωπικότητας, οφειλόταν στη σχέση μεταξύ του Μ και του Α, και όχι στη σχέση μεταξύ των Α και Β.

Σχηματική αναπαράσταση του *Μ → Α* παραδείγματος.



Το συνεχόμενο και το διακεκομμένο βελάκι δείχνουν τη θετική και την αρνητική σχέση αντίστοιχα, ανάμεσα στο μοντέλο Μ, το βασικό γεγονός Β και το επιπλέον γεγονός Α.

Στο πρόβλημα της Λίντας, σύμφωνα με τα κοινωνικά στερεότυπα που υπάρχουν, τα γεγονότα, να είναι ταμίας σε τράπεζα και να είναι φεμινίστρια, είναι ελαφρώς ασυμβίβαστα[10]. Τι συμβαίνει όταν τα επιμέρους γεγονότα μιας τομής είναι υψηλά ασυμβίβαστα; Έστω το παρακάτω πρόβλημα:

[9] **αιτιακός**: αυτός που χαρακτηρίζεται από αιτιότητα.
Αιτιότητα: η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην αιτία και στο αποτέλεσμά της. Στην περίπτωση του προβλήματος της Λίντα, η σχέση του μοντέλου Μ με τα γεγονότα Α και Β.
[10] Δύο γεγονότα Α και Β ονομάζονται **ασυμβίβαστα** ή ξένα όταν η πραγματοποίηση του ενός γεγονότος αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου (Α, Β ασυμβίβαστα ⇔ $A \cap B = \varnothing$).

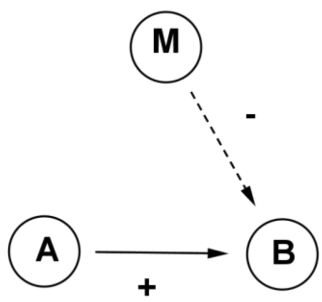
Ο Μπιλ είναι 34 ετών. Είναι έξυπνος, αλλά χωρίς φαντασία, ψυχαναγκαστικός και γενικά υποτονικός. Στο σχολείο ήταν πολύ καλός στα μαθηματικά, αλλά όχι στα κοινωνικά και ανθρωπιστικά μαθήματα. Κατατάξτε με βάση την πιθανότητα τους τα παρακάτω.

- *Ο Μπιλ βαριέται τη μουσική.*
- *Ο Μπιλ παίζει τζαζ στον ελεύθερο του χρόνο.*
- *Ο Μπιλ βαριέται τη μουσική και παίζει τζαζ στον ελεύθερο του χρόνο.*

Ο συνδυασμός “Ο Μπιλ βαριέται την μουσική και στον ελεύθερο του χρόνο παίζει τζαζ”, αποτελείται από δύο γεγονότα, που ουσιαστικά το ένα αναιρεί το άλλο. Σε αυτή την περίπτωση η τομή κρίθηκε λιγότερο πιθανή από το κάθε γεγονός χωριστά, και ως εκ τούτου η πλάνη του συνδυασμού ήταν μικρότερη.

Λάθη στην αξιολόγηση της τομής μπορούν να προκύψουν και από την άμεση σύνδεση που υπάρχει ανάμεσα στα γεγονότα Α και Β. Σε αυτό το σημείο θα δούμε την περίπτωση όπου το γεγονός Α δεν είναι αντιπροσωπευτικό του μοντέλου Μ, όμως δίνει ένα εύλογο λόγο ή ένα κίνητρο για την ύπαρξη του Β, δηλαδή το Α ενισχύει την εμφάνιση του Β. Αυτή η δομή ονομάζεται *Α → Β παράδειγμα.*

Σχηματική αναπαράσταση του *Α → Β* παραδείγματος.



Το συνεχόμενο και το διακεκομμένο βελάκι δείχνουν τη θετική και την αρνητική σχέση αντίστοιχα, ανάμεσα στο μοντέλο Μ, το βασικό γεγονός Β και το επιπλέον γεγονός Α.

Για την κατανόηση αυτής της περίπτωσης, του *Α → Β* παραδείγματος, δίνεται το παρακάτω πρόβλημα, το οποίο παρουσιάστηκε σε 115 σπουδαστές αμερικανικών κολλεγίων.

Μια έρευνα για την υγεία διεξήχθη στην Βρετανία. Η έρευνα έγινε σε αντιπροσωπευτικό δείγμα ενηλίκων ανδρών, από όλες τις ηλικίες και τα επαγγέλματα. Ο κύριος F. περιλαμβάνονταν στο δείγμα. Επιλέχθηκε στην τύχη από την λίστα με όλους τους συμμετέχοντες.

Ποια από τις παρακάτω καταστάσεις είναι πιο πιθανή για τον κύριο F.; (επέλεξε ένα από τα δύο)

- *Ο κύριος F. έχει υποστεί καρδιακή προσβολή.*
- *Ο κύριος F. έχει υποστεί καρδιακή προσβολή και είναι άνω των 55 ετών.*

Σε αυτό το πρόβλημα το βασικό γεγονός Β είναι "ο κύριος F. έχει υποστεί καρδιακή προσβολή" και το πρόσθετο γεγονός Α είναι ότι "είναι πάνω από 55 ετών". Το 58% των σπουδαστών εκτίμησε λανθασμένα, ότι η πιθανότητα στην δεύτερη περίπτωση ήταν μεγαλύτερη από ότι στην πρώτη. Στο παράδειγμα αυτό οι δύο μεταβλητές, δηλαδή η ηλικία του ατόμου και οι επιπτώσεις από καρδιακή προσβολή πιθανόν να είναι στενά συνδεδεμένες στο μυαλό τους. Μπορεί να βλέπουν την ηλικία σαν μια αιτία για καρδιακή προσβολή ή ακόμη λόγω προσωπικών τους εμπειριών, πολλά άτομα αυτής της ηλικίας να έχουν υποστεί καρδιακή προσβολή. Τα άτομα αυτά είτε χρησιμοποιούν την διαθεσιμότητα ως ευρετική στρατηγική είτε βασίζονται σε κάποιο τυχαίο μηχανισμό για να κάνουν εκτιμήσεις, όπως για παράδειγμα, να ερμηνεύουν τον όρο "έχουν υποστεί καρδιακή προσβολή" και "είναι άνω των 55 ετών" ως "έχουν υποστεί καρδιακή προσβολή" δεδομένου ότι "είναι άνω των 55 ετών" (Shaughnessy, 1993).

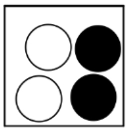
Η δεσμευμένη πιθανότητα (ή πιθανότητα υπό συνθήκη) είναι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα γεγονός Α *δεδομένου* ότι έχει πραγματοποιηθεί ένα γεγονός Β, η πιθανότητα αυτή συμβολίζεται $P(A/B)$ και ισχύει ότι $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Από αυτόν τον τύπο καταλαβαίνουμε ότι η δεσμευμένη πιθανότητα δεν είναι γενικά ίση με την πιθανότητα να πραγματοποιηθούν και τα δύο γεγονότα, δηλαδή με την πιθανότητα της τομής $P(A \cap B)$.

6. Το φαινόμενο του Falk

Σε αυτήν την ενότητα θα μιλήσουμε για το φαινόμενο του Falk, ή όπως λέγεται αλλιώς, η πλάνη του άξονα του χρόνου (the time-axis fallacy).

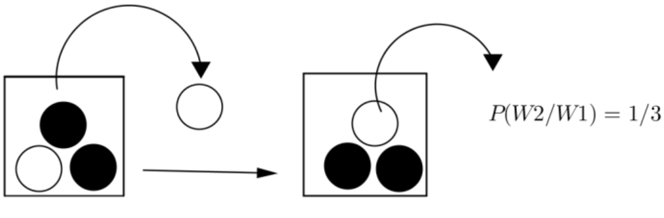
Πρόβλημα: *Ένα δοχείο περιέχει δύο λευκούς και δύο μαύρους βόλους. Επιλέγουμε στην τύχη δύο βόλους, τον ένα μετά τον άλλο χωρίς επανατοποθέτηση.*

a. *Αν ο πρώτος βόλος είναι λευκός, ποια είναι η πιθανότητα να είναι και ο δεύτερος λευκός;*
b. *Αν ο δεύτερος βόλος είναι λευκός, ποία είναι η πιθανότητα να είναι και ο πρώτος λευκός;*



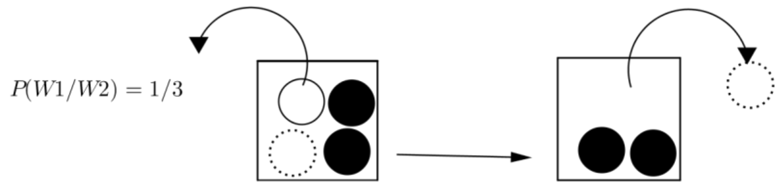
Το προηγούμενο πρόβλημα δόθηκε από τον Falk[11] σε έρευνα του το 1979. Ο Falk βρήκε πως οι περισσότεροι μαθητές αν και απάντησαν με ευκολία το πρώτο ερώτημα, δυσκολεύτηκαν αρκετά με το δεύτερο. Οι μαθητές ισχυρίστηκαν πως ο δεύτερος βόλος δεν είχε τραβηχτεί τη στιγμή που τραβήξαμε το πρώτο βόλο, ως εκ τούτου το αποτέλεσμα του τραβήγματος του δεύτερου βόλου δεν θα μπορούσε να επηρεάσει την επιλογή του πρώτου, οπότε η απάντηση τους στο δεύτερο ερώτημα ήταν 2/4 = 1/2.

Η πιθανότητα να πάρουμε την δεύτερη φορά λευκό βόλο, δεδομένου ότι πήραμε και την πρώτη φορά λευκό, εύκολα βλέπουμε ότι είναι $P(W_2/W_1) = 1/3$.



Στο δεύτερο ερώτημα, η πληροφορία ότι βόλος που τραβήχτηκε την δεύτερη φορά ήταν λευκός μείωσε τον δειγματικό χώρο για το πρώτο τράβηγμα. Ουσιαστικά, στο δοχείο είναι σαν να υπάρχουν μόνο ένας λευκός και δύο μαύροι για το πρώτο τράβηγμα. Ως εκ τούτου η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(W_1/W_2) = 1/3$. (Δες σχήμα στην επόμενη σελίδα)

[11] Από το άρθρο των Batanero, C. & Sanchez, E. (2005). Δες βιβλιογραφία.



Για τους Fischbein και Schnarch (1997), η παρανόηση του άξονα του χρόνου οφείλεται στην αρχή της αιτιότητας, όπου η προηγούμενη πράξη μπορεί να καθορίσει την επόμενη, όχι το αντίθετο. Η δύναμη αυτής της αρχής κάνει τα άτομα να αμελούν ένα βασικό κομμάτι της πληροφόρησης του προβλήματος: Ότι ο βόλος που πήραμε τη δεύτερη φορά ήταν λευκός.

Αιτιότητα είναι η σχέση μεταξύ αιτίας και αποτελέσματος. Σύμφωνα με την αρχή της αιτιότητας κάθε γεγονός έχει την αιτία του και οι ίδιες αιτίες, κάτω από τις ίδιες συνθήκες παράγουν τα ίδια αποτελέσματα. Για παράδειγμα το πάτημα ενός διακόπτη είναι το αίτιο και το άναμμα της λάμπας είναι το αποτέλεσμα. Βασικό συστατικό της αιτιότητας είναι η έννοια του χρόνου, δηλαδή η διαδοχή αιτίας και αποτελέσματος.

Οι Gras και Totohasina[12] (1995), όρισαν τρεις διαφορετικούς τύπους παρανοήσεων σχετικά με τις δεσμευμένες πιθανότητες σε έρευνα τους, όπου πήραν μέρος 75 μαθητές ηλικίας 17 έως 18 χρόνων:

- Τη χρονολογική αντίληψη, όπου οι μαθητές ερμηνεύουν τη δεσμευμένη πιθανότητα P(A/B) ως μια χρονική σχέση, δηλαδή το δεδομένο γεγονός B θα πρέπει πάντα να προηγείται του A.
- Την αιτιακή αντίληψη, όπου οι μαθητές ερμηνεύουν τη δεσμευμένη πιθανότητα P(A/B) ως μια έμμεση αιτιακή σχέση, δηλαδή το δεδομένο γεγονός B είναι η αιτία και το A είναι το αποτέλεσμα.
- Την πληθυκή αντίληψη, όπου οι μαθητές ερμηνεύουν τη δεσμευμένη πιθανότητα P(A/B) ως το λόγο $\frac{πλήθος(A\cap B)}{πλήθος(B)}$.

Η τελευταία αντίληψη είναι σωστή στην περίπτωση ενός πεπερασμένου ισοπίθανου δειγματικού χώρου. Ωστόσο, όταν έχουμε να κάνουμε με ένα συνεχές δειγματικό χώρο ή όταν οι πιθανότητες για απλά γεγονότα δεν είναι ίσες, τότε αυτή η σχέση οδηγεί σε λάθος. Κάποιοι άλλοι μαθητές επίσης, ερμηνεύουν την δεσμευμένη πιθανότητα ως το λόγο $\frac{πλήθος(A)}{πλήθος(B)}$, ο οποίος είναι πάντα λάθος.

Προκειμένου να εκτιμηθεί το ποσοστό των μαθητών σε αυτές τις παρανοήσεις, οι Gras και Totohasina έδωσαν τα παρακάτω 2 προβλήματα σε 70 μαθητές (ηλικίας 17-18) και σε 102 φοιτητές (ηλικίας 18-19). Η αξιολόγηση έγινε αφότου οι μαθητές

[12] Από το άρθρο των Batanero, C. & Sanchez, E. (2005). Δες βιβλιογραφία.

είχαν πάρει μέρος σε ένα πειραματικό πρόγραμμα διδασκαλίας για τις δεσμευμένες πιθανότητες, κατά τη διάρκεια του οποίου, παρουσιάστηκαν στους μαθητές, δέντρο-διαγράμματα, διαγράμματα του Venn και αλλά διδακτικά εργαλεία με σκοπό τη διευκόλυνση τους στην επίλυση προβλημάτων.

<u>Πρόβλημα 1</u>: Προκειμένου να υπολογίσουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα P(A/B) θα πρέπει το γεγονός B να συμβεί πριν το γεγονός A;

Ναι___ Όχι___ Δεν ξέρω___

<u>Πρόβλημα 2</u>: Προκειμένου να υπολογίσουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα P(A/B) θα πρέπει να υποθέσουμε ότι το γεγονός B είναι η αιτία και το γεγονός A είναι το αποτέλεσμα ή συνέπεια του B;

Ναι___ Όχι___ Δεν ξέρω___

Οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι το 63% των μαθητών έδωσε καταφατική απάντηση στο Πρόβλημα 1 και το 28% έδωσε καταφατική απάντηση στο Πρόβλημα 2. Η στατιστική ανάλυση έδειξε ότι αυτές οι δύο παρανοήσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Συμπέραναν ότι η προέλευση της χρονολογικής και της αιτιακής παρανόησης είναι γνωστική, ενώ η πληθυκή αντίληψη προέρχεται κατά την διδασκαλία. Όλες αυτές οι παρανοήσεις μπορούν να μετατραπούν σε εμπόδια και να αποκρύψουν τον αντιστρέψιμο χαρακτήρα της δεσμευμένης πιθανότητας.

7. Προσέγγιση αποτελέσματος

O Konold (1991) επικέντρωσε το ενδιαφέρον του στο πως οι άνθρωποι ερμηνεύουν μια ερώτηση σχετικά με την τιμή της πιθανότητας ενός γεγονότος και όχι τόσο στο πως καταλήγουν σε συμπεράσματα σχετικά με την πιθανότητα του γεγονότος. Μέσα από συζητήσεις του με μαθητές παρατήρησε ότι για πολλούς, ερωτήσεις που έχουν να κάνουν με τυχαιότητα, ερμηνεύονται με τρόπους όχι και τόσο σωστούς.

Σύμφωνα με αυτήν την εναλλακτική ερμηνεία, ο Konold όρισε την “προσέγγιση του αποτελέσματος” (outcome approach). Σε αυτή την περίπτωση ο στόχος του ατόμου δεν είναι η αξιολόγηση της πιθανότητας ενός ενδεχομένου σε ένα πείραμα τύχης, αλλά να προβλέψει επιτυχώς το αποτέλεσμα που θα εμφανιστεί εκτελώντας το πείραμα. Δεδομένου αυτού του σκεπτικού, μια ερώτηση που σαφώς ζητάει την πιθανότητα ενός αποτελέσματος, ερμηνεύεται ως ερώτηση για αν το συγκεκριμένο αποτέλεσμα θα εμφανιστεί στην επόμενη δοκιμή του πειράματος. Έστω το επόμενο πρόβλημα που δόθηκε από τον Konold σε σχετική του έρευνα.

Πρόβλημα: *(α) Τι σημαίνει όταν μια πρόβλεψη καιρού λέει ότι για αύριο υπάρχει 70% πιθανότητα βροχής;*
(β) Έστω ότι έχουμε πρόβλεψη για τον αυριανό καιρό που λέει 70% πιθανότητα βροχής και στην πραγματικότητα δεν βρέχει. Τι συμπεράσματα θα βγάζατε σχετικά με την πρόβλεψη;

Όσον αφορά το πρώτο ερώτημα, πολλοί μαθητές που πήραν μέρος στην έρευνα, απάντησαν ότι κατά αυτή την πρόβλεψη, αντιλαμβάνονται ότι θα βρέξει. Για το δεύτερο ερώτημα απάντησαν ότι η πρόβλεψη του μετεωρολόγου ήταν λανθασμένη. Σύμφωνα με αυτό το σκεπτικό, οι πιθανότητες αξιολογούνται στα πλαίσια της εγκυρότητας τους με τις τιμές 0%, 50% και 100%. Αν η πιθανότητα είναι κοντά στο 0%, θεωρούν το γεγονός αδύνατο. Αν η πιθανότητα είναι κοντά στο 100% θεωρούν το γεγονός σίγουρο. Μόνο όταν η πιθανότητα είναι κοντά στο 50% θεωρούν το γεγονός ως τυχαίο.

Σε μια άλλη άσκηση ο Konold, έδωσε στους μαθητές ένα ακανόνιστου σχήματος ζάρι και τους ρώτησε ποια από τις έξι έδρες του είχε μεγαλύτερη πιθανότητα να τύχει. Πολλοί από τους μαθητές φάνηκε να ερμηνεύουν την ερώτηση σα να τους ζητήθηκε να προβλέψουν το αποτέλεσμα μιας ρίψης και εν συνεχεία να αξιολογήσουν τη πρόβλεψη τους ως σωστή ή λάθος ανάλογα με το αποτέλεσμα του ζαριού. Με άλλα λόγια, υπήρξαν μαθητές που ενώ είχαν ενώ επιλέξει ως πιο πιθανή μια συγκεκριμένη πλευρά του ζαριού, κατόπιν αφού έριξαν το ζάρι και είδαν ότι ήρθε κάτι άλλο, θεώρησαν την επιλογή τους λανθασμένη. Εν ολίγοις, σύμφωνα με τους συγκεκριμένους μαθητές, σε κάθε ρίψη ενός ζαριού, η πιο πιθανή πλευρά είναι αυτή που θα σου τύχει.

Το αξιοσημείωτο σύμφωνα με το Konold, ήταν ότι ακόμα και μετά από μερικές ρίψεις του ζαριού, όπου υπήρχαν εναλλαγές των αποτελεσμάτων, αρκετοί μαθητές συνέχιζαν να κρίνουν την απάντηση τους σύμφωνα με το αποτέλεσμα της κάθε ρίψης που εκτελούσαν.

8. Απίθανα, Πιθανά και Βέβαια Ενδεχόμενα

Πρόβλημα: *Έστω ότι έχουμε ένα δοχείο το οποίο περιέχει αριθμημένους βόλους από το 1 έως το 90. Χωρίς να βλέπουμε επιλέγουμε κάποιον. Χαρακτηρίστε ως Απίθανο, Πιθανό ή Βέβαιο κάθε ένα από τα παρακάτω αποτελέσματα.*

- ***a.*** *Να φέρουμε ένα περιττό αριθμό.*
- ***b.*** *Να φέρουμε έναν αριθμό μικρότερο του 91.*
- ***c.*** *Να φέρουμε τον αριθμό 100.*

d. *Να φέρουμε έναν αριθμό μεγαλύτερο του 0.*
e. *Να φέρουμε τον αριθμό 31.*

Το παραπάνω πρόβλημα δόθηκε από τους E. Fishbein, M. S. Nello και M. S. Marino (1991), σε μαθητές διαφόρων ηλικιών, με και χωρίς προηγούμενη εκπαίδευση στις πιθανότητες, με σκοπό να ερευνήσουν το πώς αντιλαμβάνονται τις μαθηματικές έννοιες απίθανο, πιθανό και βέβαιο ενδεχόμενο.

Πιθανό ενδεχόμενο (ή γεγονός) ενός πειράματος τύχης, λέγεται το σύνολο που έχει για στοιχεία του ένα ή περισσότερα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος. Απίθανο ενδεχόμενο είναι αυτό που δεν πραγματοποιείται ποτέ και ταυτίζεται με το κενό σύνολο $\varnothing$. Βέβαιο ενδεχόμενο είναι αυτό που πραγματοποιείται πάντοτε (δηλαδή σε κάθε εκτέλεση του πειράματος) και ταυτίζεται με τον δειγματικό χώρο Ω.

Ο δειγματικός χώρος του παραπάνω προβλήματος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 88, 89, 90\}$ και τα δοσμένα αποτελέσματα αντιστοιχούν στα εξής ενδεχόμενα:

$A = \{1, 3, 5, \ldots, 85, 87, 89\}$	Πιθανό
$B = \{1, 2, 3, \ldots, 88, 89, 90\} = \Omega$	Βέβαιο
$\Gamma = \varnothing$	Απίθανο
$\Delta = \{1, 2, 3, \ldots, 88, 89, 90\} = \Omega$	Βέβαιο
$E = \{31\}$	Πιθανό

Σύμφωνα με τους ερευνητές και τα ευρήματα τους, δεν θα πρέπει να θεωρούμε δεδομένο ότι τα παιδιά καταλαβαίνουν αμέσως και από την φύση τους, το νόημα των όρων απίθανο, πιθανό και βέβαιο. Η κατανόηση τους είναι πιο πολύπλοκη. Πολλά παιδιά συγχέουν την έννοια του απίθανου με αυτή του σπάνιου. Για παράδειγμα ένα από τα παιδιά της έρευνας έδωσε την εξής απάντηση όσον αφορά το προηγούμενο πρόβλημα: "Το να πάρουμε 31 είναι απίθανο γιατί ανάμεσα στο 1 και το 90 υπάρχει μόνο ένα 31. Επίσης υπάρχουν παιδιά που συγχέουν την έννοια του πολύ συχνού με αυτήν του βέβαιου. Χαρακτηριστική απάντηση σε αύτη την περίπτωση ήταν η εξής: "Το να πάρουμε ένα περιττό αριθμό είναι βέβαιο, γιατί από το 1 έως το 90 υπάρχουν πολλοί περιττοί αριθμοί".

Ακόμα πολλά παιδιά έχουν την τάση να υποκαθιστούν νοήματα μαθηματικών εννοιών με συμπεράσματα από προσωπικές τους εμπειρίες. Για παράδειγμα στην ίδια έρευνα, κάποιο παιδί είπε: "Αν ένα γεγονός είναι σπάνιο, σύμφωνα με την εμπειρία μου δεν θα συμβεί ποτέ".

9. Η ίδια μαθηματική δομή σε διαφορετικές καταστάσεις

Οι Fischbein, Nello και Marino (1991), εντόπισαν ακόμα μια δυσκολία των μαθητών σε προβλήματα πιθανοτήτων. Στην έρευνα τους βρήκαν πως υπήρχαν παιδιά που δεν μπορούσαν να αναγνωρίσουν την ίδια μαθηματική δομή σε διαφορετικά προβλήματα. Οι ερευνητές ζήτησαν από μαθητές διαφόρων ηλικιών με ή χωρίς κάποιο υπόβαθρο στις πιθανότητες να επιλέξουν από τις δύο προτάσεις που ακολουθούν, αυτή που πιστεύουν ως πιο πιθανή.

Πρόταση1*: Να πάρουμε τρεις φορές την ένδειξη 5, αν ρίξουμε το ίδιο ζάρι τρεις φορές.*
Πρόταση2*: Να πάρουμε τρείς φορές την ένδειξη 5, αν ρίξουμε τρία ζάρια συγχρόνως.*

Οι ερευνητές βρήκαν πως μόνο το 50% περίπου των μικρών μαθητών, κατάλαβαν επιτυχώς ότι οι προτάσεις έχουν ίσες πιθανότητες. Από τα μεγαλύτερα παιδιά απάντησαν σωστά το 60% αυτών που δεν είχαν προηγούμενη εκπαίδευση και το 70% αυτών που είχαν. Παρατηρούμε πως η αντίληψη των μαθητών βελτιώνεται καθώς μεγαλώνουν και πως η διδασκαλία βοηθάει.

Τα παιδιά που απάντησαν λάθος, υπέρ της πρώτης πρότασης, το έκαναν κατά κύριο λόγο γιατί θεωρούσαν πως με το να ρίχνουν το ζάρι κάθε φορά, η διαδικασία θα ήταν περισσότερο υπό έλεγχο, ώστε να έχουν το επιθυμητό αποτέλεσμα. Τα παιδιά που επέλεξαν τη δεύτερη πρόταση, ισχυρίστηκαν πως με το να ρίξουν τρία ζάρια συγχρόνως είναι πιο εύκολο να έχουν τα τρία 5, γιατί και τα τρία ζάρια πέφτουν με την ίδια δύναμη. Αυτό που βλέπουμε και στις δύο περιπτώσεις λανθασμένων απαντήσεων, είναι ότι οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται από τα παιδιά δεν έχουν καμία σχέση έννοιες μαθηματικών, αλλά περισσότερο εκφράζουν προσωπικές τους απόψεις.

Σύμφωνα με τους ερευνητές τα παιδιά που δεν αναγνωρίζουν την ίδια μαθηματική δομή σε πρακτικά διαφορετικές καταστάσεις, δεν έχουν κατανοήσει ότι στα μαθηματικά οι καταστάσεις περιγράφονται ιδανικά και πως απόψεις όπως ο τρόπος ή η δύναμη που ρίχνει κάποιος ένα ζάρι δεν έχουν χώρο στην λύση του προβλήματος.

Η πιθανότητες, όπως και όλοι οι κλάδοι των μαθηματικών αναφέρονται σε αφηρημένες, ιδανικά και αυστηρά ορισμένες έννοιες. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να βλέπουν τη διαδικασία της μάθησης και της κατανόησης ως αμοιβαία διαδικασία επικοινωνίας ανάμεσα στη σχετική κατάσταση που περιγράφεται σε ένα πρόβλημα και τις μαθηματικές έννοιες που απαιτούνται.

10. Έρευνα: Η επίδραση της διδασκαλίας σε ευρετικές και παρανοήσεις πιθανοτήτων

Στόχος της έρευνας είναι να μελετηθεί κατά πόσο το πρόγραμμά σπουδών και ο τρόπος που τα παιδιά της Ά Λυκείου διδάσκονται πιθανότητες, βοηθάει στην αντιμετώπιση των ευρετικών και των δυσκολιών που σχετίζονται με το συγκεκριμένο τομέα των μαθηματικών. Οι παρανοήσεις που μελετήθηκαν είναι αυτές της αντιπροσωπευτικότητας, της διαθεσιμότητας, της ισοπιθανότητας, του συνδυασμού και το φαινόμενο του Falk.

Στην έρευνα πήραν μέρος 70 παιδιά ηλικίας 15 έως 16 ετών, όλα μαθητές της Α Γενικού Λυκείου, σε σχολείο του Ηρακλείου Κρήτης. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τον Οκτώβριο του 2012. Κανένα από τα παιδιά δεν είχε διδαχθεί προηγουμένως πιθανότητες, τουλάχιστον σε σχολικό περιβάλλον, παρόλο που στην τάξη της Γ΄ γυμνασίου υπάρχει σχετικό κεφάλαιο, το οποίο αν και είναι στην διδακτέα ύλη που θα πρέπει να καλυφθεί έως το τέλος της σχολικής χρονιάς, συνήθως δεν διδάσκεται τελικά ή δεν δίνεται επαρκής σημασία, λόγω έλλειψης χρόνου.

Όσον αφορά την ύλη της Α΄ Λυκείου, τα παιδιά διδάσκονται πιθανότητες από το βιβλίο «Άλγεβρα και στοιχεία των πιθανοτήτων» του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου. Οι πιθανότητες αποτελούν το πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου. Πριν από αυτό υπάρχει ένα εισαγωγικό κεφάλαιο όπου τα παιδιά βλέπουν την έννοια του συνόλου και τις σχέσεις και πράξεις που υπάρχουν μεταξύ των συνόλων. Για το εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο προτείνεται να διατεθούν δύο διδακτικές ώρες. Στο κεφάλαιο των πιθανοτήτων υπάρχουν οι εξής παράγραφοι: "1.1 Δειγματικός Χώρος-Ενδεχόμενα" και "1.2 Έννοια της Πιθανότητας".

Συνολικά και για τις δύο παραγράφους προτείνεται να αφιερωθούν 6 διδακτικές ώρες. Σύμφωνα με το Υπουργείο Παιδείας, με την ολοκλήρωση της συγκεκριμένης ύλης, όσον αφορά την παράγραφο 1.1, οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να αναγνωρίζουν ένα πείραμα τύχης, να προσδιορίζουν και να αναπαριστούν τον δειγματικό χώρο ενός πειράματος, να μεταφράζουν σχέσεις μεταξύ ενδεχομένων από τη φυσική γλώσσα στη γλώσσα των συνόλων και αντίστροφα. Στην παράγραφο 1.2, οι μαθητές μαθαίνουν τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας[13] και τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων[14].

---

[13] Ο κλασικός ορισμός πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α είναι:
$P(A) = πλήθος\ ευνοϊκών\ περιπτώσεων / πλήθος\ δυνατών\ περιπτώσεων$

[14] Οι κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων, όπως αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο είναι οι εξής:
1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, Α & Β ασυμβίβαστα μεταξύ τους.
2. $P(A') = 1 - P(A)$, Α & Α' συμπληρωματικά.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, Α & Β δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω.
4. Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$
5. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$, Α & Β δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω.

Στα παιδιά δόθηκαν δύο ερωτηματολόγια με την μορφή test, ένα πριν τη διδασκαλία των πιθανοτήτων (pretest) και ένα μετά (posttest). Τα προβλήματα που επιλέχτηκαν, είναι προβλήματα που έχουμε αναλύσει εκτενώς σε προηγούμενες ενότητες. Τα test δόθηκαν στους μαθητές διαφορετική μέρα και ώρα, μιας και ήταν χωρισμένοι σε τρία διαφορετικά τμήματα και το μάθημα της Άλγεβρας γινόταν από διαφορετικό καθηγητή σε κάθε τμήμα. Επίσης, ζητήθηκε από τους διδάσκοντες να μην αναφέρουν στα παιδιά πως τα test δίνονται στα πλαίσια εξωσχολικής έρευνας και ότι στη πραγματικότητα δεν θα βαθμολογηθούν γι' αυτά, ούτως ώστε να δοθεί η απαραίτητη προσοχή από μέρους τους.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να τονίσω πως το ζητούμενο της έρευνας δεν είναι να εξεταστεί κατά πόσο τα παιδιά χρησιμοποίησαν σωστά όσα διδάχτηκαν. Σωστές θεωρήθηκαν και οι απαντήσεις που αφορούσαν απλά λογικά επιχειρήματα, χωρίς χρήση μαθηματικών τύπων και εννοιών απαραίτητα. Αυτό που εξετάστηκε ανάμεσα στο pretest και το posttest, είναι κατά πόσο τα παιδιά μέσω της σχολικής διαδικασίας, ανέπτυξαν μια ευρύτερη αντίληψη σε θέματα πιθανοτήτων που σχετίζονται με την καθημερινότητα κυρίως. Επίσης θα ήθελα να τονίσω, ότι στη παρούσα έρευνα για κανένα λόγο δεν κρίνεται η δουλεία των διδασκόντων όσον αφορά τα αποτελέσματα των τεστ. Αυτό θα ήταν άδικο, δεδομένων των σημαντικών περιορισμών της ερευνητικής διαδικασίας που ακολουθήθηκε.

10.1 Αποτελέσματα

Οι πίνακες που παραθέτονται παρακάτω, δείχνουν τα αποτελέσματα της έρευνας. Στον πίνακα 1 βλέπουμε συγκριτικά τα αποτελέσματα από τα δύο test. Στην 2η και 3η στήλη, αυτού του πίνακα, βλέπουμε τον αριθμό των μαθητών που απάντησαν λανθασμένα, λόγω κάποιας παρανόησης, από αυτές που μελετήθηκαν. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της ισοπιθανότητας (equiprobability bias), είχαμε 13 μαθητές στο πρώτο test και 25 στο δεύτερο. Τα νούμερα, σε αυτές τις στήλες, έχουν προέλθει από τους πίνακες 2 και 3, όπου διακρίνονται με έντονη γραφή. Στις δύο τελευταίες στήλες βλέπουμε τα αποτελέσματα με μορφή ποσοστού επί %.

Πίνακας 1: Pretest vs Posttest

Misconception	Pretest	Posttest	Pretest (%)	Posttest (%)
1. Representativeness[15]	23 22	22	32.14	31.43
2. Negative and Positive Recency Effects	9	6	12.85	8.57
3. Equiprobability Bias	13	26	18.57	37.13
4. The Conjunction Fallacy	38	39	54.29	55.71
5. The Heuristic of Availability	29	29	41.43	41.43
6. The Effect of the Time Axis (The Falk Phenomenon)	13	11	18.57	15.71

Στους πίνακες 2 και 3 που ακολουθούν, βλέπουμε αναλυτικά τα προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν σε κάθε test. Το «Σ» αντιπροσωπεύει το πλήθος των σωστών απαντήσεων, το «Σ*» το πλήθος των σωστών απαντήσεων με σωστή αιτιολόγηση και το «Ε» το πλήθος των λανθασμένων απαντήσεων, που οφειλόταν στην παρανόηση που εξεταζόταν στο κάθε πρόβλημα. Το θαυμαστικό «!» υποδεικνύει την επιλογή που φανερώνει την ευρετική-παρανόηση στο πρόβλημα, ενώ το μικρό «σ» τη σωστή επιλογή. Η διάκριση σε Σ και Σ* έγινε γιατί σε αρκετές περιπτώσεις τα παιδιά επέλεγαν τη σωστή απάντηση για λάθος λόγους.

[15] Στο pretest για την περίπτωση της representativeness είχαμε δύο προβλήματα. Το 32.14% είναι ο μέσος όρος των ποσοστών τους.

Πίνακας 2: Pretest

PRETEST			
Προβλήματα	Απαντήσεις		
A1. Representativeness	Σ	Σ*	Ε
Σε ένα τυχερό παιχνίδι κάποιος πρέπει να επιλέξει 6 αριθμούς από τους συνολικά 40 που υπάρχουν. Έχουμε δύο παίκτες τον Α και τον Β. Ο Α παίκτης επιλέγει τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6 και ο Β παίχτης επιλέγει τους αριθμούς 39, 1, 17, 33, 8, 27. Ποιος παίκτης έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει; a. Ο παίκτης Α. b. Ο παίκτης Β. (**!**) c. Οι παίκτες Α και Β έχουν την ίδια πιθανότητα. (σ)	38	35	**23**
A2. Representativeness	Σ	Σ*	Ε
Ποια από τις παρακάτω ακολουθίες είναι λιγότερο πιθανό να προκύψει ρίχνοντας ένα κέρμα 5 φορές στη σειρά; a. ΚΚΚΓΓ b. ΓΚΚΓΚ c. ΚΚΚΚΚ (**!**) d. ΚΓΚΓΚ e. Και οι τέσσερις ακολουθίες είναι το ίδιο πιθανές. (σ)	42	33	**22**
A3. Negative and Positive Recency Effects (Representativeness)	Σ	Σ*	Ε
Ρίχνουμε ένα κέρμα και παίρνουμε κορώνα πέντε φορές συνεχόμενα, ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε γράμματα στην επόμενη ρίψη; a. Μεγαλύτερη από 50%. (**!** Positive) b. Ίση με 50%. (σ) c. Μικρότερη από 50%. (**!** Negative)	61	46	**9**
A4. Equiprobability Bias	Σ	Σ*	Ε
Υποθέτουμε ότι κάποιος ρίχνει δύο ζάρια ταυτόχρονα. Ποίο από τα παρακάτω είναι πιο πιθανό να συμβεί; a. Να πάρουμε ένα 5 και ένα 6. (σ) b. Να πάρουμε το 6 δύο φορές. c. Και τα δύο έχουν την ίδια πιθανότητα. (**!**) d. Είναι αδύνατο να απαντήσουμε.	2	1	**13**

(Σ) σωστές απαντήσεις, (Σ*) σωστές απαντήσεις-σωστή αιτιολόγηση, (Ε) λάθος απαντήσεις που οφείλονται σε παρανόηση, πλήθος μαθητών 70

Πίνακας 3: Pretest – συνέχεια

A5. The Conjunction Fallacy	Σ	Σ*	Ε
Ο Γιώργος ονειρεύεται να γίνει γιατρός. Του αρέσει να βοηθάει τους ανθρώπους. Όταν ήταν στο γυμνάσιο προσέφερε εθελοντική εργασία στον Ερυθρό Σταυρό. Τελείωσε με επιτυχία το σχολείο και υπηρέτησε στο στρατό ως βοηθός γιατρού. Αφού απολύθηκε από το στρατό, ο Γιώργος γράφτηκε στο πανεπιστήμιο. Τι σου φαίνεται πιθανότερό; a. Ο Γιώργος να είναι φοιτητής ιατρικής. (**!**) b. Ο Γιώργος να είναι φοιτητής. (σ)	29	25	**38**
A6. The Heuristic of Availability	Σ	Σ*	Ε
Κάποιος πρέπει να συγκροτήσει επιτροπές από μια ομάδα 10 ατόμων. Είναι δυνατόν να συγκροτηθούν: a. Πιο πολλές διαφορετικές επιτροπές από 8 άτομα. b. Πιο πολλές διαφορετικές επιτροπές από 2 άτομα. (**!**) c. Ο ίδιος αριθμός επιτροπών (είτε από 8, είτε από 2 άτομα). (σ)	22	7	**27**
A7. The Effect of the Time Axis (The Falk Phenomenon)	Σ	Σ*	Ε
Ο Παύλος και η Όλγα έχουν από ένα κουτί που το καθένα περιέχει δύο μαύρους και δύο λευκούς βόλους. A. Ο Παύλος βγάζει ένα βόλο από το κουτί του και βλέπει ότι είναι λευκός. Χωρίς να ξαναβάλει το πρώτο βόλο μέσα στο κουτί, βγάζει ένα δεύτερο. Η πιθανότητα ο δεύτερος βόλος να είναι λευκός είναι μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη από τη πιθανότητα να είναι μαύρος; a. Μικρότερη (σ) b. Ίση c. Μεγαλύτερη	50	48	**-**
B. Η Όλγα βγάζει ένα βόλο από το κουτί της και τον αφήνει απέξω χωρίς να δει το χρώμα του. Κατόπιν βγάζει και ένα δεύτερο βόλο και βλέπει ότι είναι λευκός. Η πιθανότητα και ο πρώτος βόλος να ήταν λευκός είναι μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη από την πιθανότητα να ήταν μαύρος; a. Μικρότερη (σ) b. Ίση (**!**) c. Μεγαλύτερη	22	14	**14**
Συνοψίζοντας για τα Α και Β[17]: a. Α σωστό, Β σωστό b. Α σωστό, Β λάθος (**!**) c. Α λάθος, Β λάθος d. Διαφορετικά		14 **13** 21 22	

[17] Σε αυτό το σημείο, για κάθε περίπτωση, ως σωστές μετρήθηκαν οι απαντήσεις που είχαν και σωστή αιτιολόγηση. Για τη b περίπτωση, ως λάθος μετρήθηκαν μόνο οι απαντήσεις που υπήρξε το φαινόμενο του Falk. Για την c περίπτωση, ως λάθος μετρήθηκαν και οι λάθος απαντήσεις αλλά και οι σωστές με λάθος αιτιολόγηση.

(Σ) σωστές απαντήσεις, (Σ*) σωστές απαντήσεις-σωστή αιτιολόγηση, (Ε) λάθος απαντήσεις που οφείλονται σε παρανόηση, πλήθος μαθητών 70

Πίνακας 3: Posttest

POSTTEST			
Προβλήματα	Απαντήσεις		
B1. Representativeness	Σ	Σ*	Ε
Ρίχνουμε ένα ζάρι πέντε φορές, ποιο από τα παρακάτω αποτελέσματα είναι πιο πιθανό να προκύψει; a. 3 5 1 6 2 b. 4 2 6 1 5 c. 2 2 2 2 2 d. Τα a και b είναι το ίδιο πιθανά. (!) e. Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα είναι το ίδιο πιθανά. (σ)	42	35	**22**
B2. Negative and Positive Recency Effects (Representativeness)	Σ	Σ*	Ε
Όταν ρίχνουμε ένα κέρμα, δύο είναι τα πιθανά αποτελέσματα: κορώνα ή γράμματα. Ρίχνουμε το κέρμα τρεις φορές και τις τρείς είναι κορώνα. Αν ρίξουμε το κέρμα ξανά, η πιθανότητα να είναι για τέταρτη φορά κορώνα είναι: a. Μικρότερη από το να φέρουμε γράμματα. (! Negative) b. Ίση με το να φέρουμε γράμματα. (σ) c. Μεγαλύτερη με το να φέρουμε γράμματα. (! Positive)	56	51	**6**
B3. Equiprobability Bias	Σ	Σ*	Ε
Υποθέτουμε ότι κάποιος ρίχνει δύο ζάρια ταυτόχρονα. Ποίο από τα παρακάτω είναι πιο πιθανό να συμβεί; a. Το άθροισμα των ενδείξεων τους να είναι 2. b. Το άθροισμα των ενδείξεων να τους να είναι 3. (σ) c. Και τα δύο έχουν την ίδια πιθανότητα. (!) d. Είναι αδύνατο να απαντήσουμε.	14	12	**26**
B4. The Conjunction Fallacy	Σ	Σ*	Ε
Η Ελένη είναι 31 ετών, ειλικρινής και σπούδασε φιλοσοφία. Ως φοιτήτρια ενδιαφερόταν ιδιαίτερα για θέματα κοινωνικού ρατσισμού και κοινωνικής δικαιοσύνης. Ποίο από τα παρακάτω σου φαίνεται πιο πιθανό; a. Η Ελένη να είναι τραπεζική υπάλληλος. (σ) b. Η Ελένη να είναι τραπεζική υπάλληλος και ενεργό μέλος σε μια φεμινιστική οργάνωση. (!)	18	13	**39**
B5. The Heuristic of Availability	Σ	Σ*	Ε
Κάποιος πρέπει να συγκροτήσει επιτροπές από μια ομάδα 12 ατόμων. Είναι δυνατόν να συγκροτηθούν: a. Πιο πολλές διαφορετικές επιτροπές από 8 άτομα. b. Πιο πολλές διαφορετικές επιτροπές από 4 άτομα. (!) c. Ο ίδιος αριθμός επιτροπών (είτε από 8, είτε από 4 άτομα). (σ)	14	4	**29**

(Σ) σωστές απαντήσεις, (Σ*) σωστές απαντήσεις-σωστή αιτιολόγηση, (Ε) λάθος απαντήσεις που οφείλονται σε παρανόηση, πλήθος μαθητών 70

Πίνακας 3: Posttest - συνέχεια

B6. The Effect of the Time Axis (The Falk Phenomenon)	Σ	Σ*	Ε
Ο Δημήτρης και η Γεωργία έχουν από ένα κουτί που το καθένα περιέχει τρεις μαύρους και τρεις λευκούς βόλους. A. Ο Δημήτρης βγάζει ένα βόλο από το κουτί του και βλέπει ότι είναι λευκός. Χωρίς να ξαναβάλει το πρώτο βόλο μέσα στο κουτί, βγάζει ένα δεύτερο. Η πιθανότητα ο δεύτερος βόλος να είναι λευκός είναι μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη από την πιθανότητα να είναι μαύρος; a. Μικρότερη (σ) b. Ίση c. Μεγαλύτερη	45	43	**-**
B. Η Γεωργία βγάζει ένα βόλο από το κουτί της και τον αφήνει απέξω χωρίς να δει το χρώμα του. Κατόπιν βγάζει και ένα δεύτερο βόλο και βλέπει ότι είναι λευκός. Η πιθανότητα και ο πρώτος βόλος να ήταν λευκός είναι μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη από την πιθανότητα να ήταν μαύρος; a. Μικρότερη (σ) b. Ίση (**!**) c. Μεγαλύτερη	28	11	**16**
Συνοψίζοντας για τα Α και Β[19] a. Α σωστό, Β σωστό b. Α σωστό, Β λάθος (**!**) c. Α λάθος, Β λάθος d. Διαφορετικά		11 **11** 18 30	

Στον επόμενο πίνακα βλέπουμε από τα παιδιά που πήραν μέρος πόσα ήταν αυτά που απάντησαν σωστά και στα δύο test (ΣΣ), αυτά που απάντησαν σωστά στο πρώτο και στο λάθος δεύτερο (ΣΛ), αυτά που απάντησαν λάθος στο πρώτο και σωστά στο δεύτερο (ΛΣ) και αυτά που απάντησαν λάθος και στα δύο test (ΛΛ).

Σε αυτό το πίνακα, για την αντιπροσωπευτικότητα έχουμε δύο σειρές αποτελεσμάτων και αυτό γιατί όπως έχει αναφερθεί στο πρώτο test αυτής της περίπτωσης δοθήκαν δύο προβλήματα. Η πρώτη σειρά μας δείχνει τα αποτελέσματα του προβλήματος Α1 με το Β1 και η δεύτερη τα αποτελέσματα του Α2 με το Β1.

[19] Σε αυτό το σημείο, για κάθε περίπτωση, ως σωστές μετρήθηκαν οι απαντήσεις που είχαν και σωστή αιτιολόγηση. Για τη b περίπτωση, ως λάθος μετρήθηκαν μόνο οι απαντήσεις που υπήρξε το φαινόμενο του Falk. Για την c περίπτωση, ως λάθος μετρήθηκαν και οι λάθος απαντήσεις αλλά και οι σωστές με λάθος αιτιολόγηση.

(Σ) σωστές απαντήσεις, (Σ*) σωστές απαντήσεις-σωστή αιτιολόγηση, (Ε) λάθος απαντήσεις που οφείλονται σε παρανόηση, πλήθος μαθητών 70

Επίσης, στη περίπτωση του φαινομένου του Falk, για κάθε περίπτωση (ΣΣ, ΣΛ, ΛΣ, ΛΛ) έχουν μετρηθεί οι απαντήσεις που αφορούν το σκέλος Β από τα προβλήματα Α7 και Β6.

MISCONCEPTION	ΣΣ	ΣΛ	ΛΣ	ΛΛ
1. Representativeness	22	13	13	22
	23	10	12	25
2. Negative and Positive Recency Effects	38	8	13	11
3. Equiprobability Bias	1	0	11	58
4. The Conjunction Fallacy	10	15	3	42
5. The Heuristic of Availability	2	5	2	61
6. The Effect of the Time Axis (The Falk Phenomenon)	3	11	8	48

10.2 Ανάλυση αποτελεσμάτων

1. Representativeness (προβλήματα Α1-Α2 & Β1)

Στην περίπτωση της αντιπροσωπευτικότητας σύμφωνα με τα αποτελέσματα[20] του πίνακα 1, 32.14% στο pretest και 31.43% στο posttest, δεν υπάρχει ουσιαστική βελτίωση. Στο posttest υπήρξαν 35 μαθητές που απάντησαν σωστά (Σ*) στο πρόβλημα Β1, από τους οποίους οι 19 είχαν απαντήσει λάθος σε ένα από τα δύο προβλήματα Α1 και Α2 του pretest. Αυτό όμως δεν μπορεί να θεωρηθεί με σιγουριά ως βελτίωση, γιατί από την άλλη είχαμε 14 μαθητές που ενώ απάντησαν σωστά (Σ*) σε ένα από τα Α1 και Α2, απάντησαν λάθος στο Β1.

Στο posttest υπήρχαν παιδιά που η διδασκαλία είχε κάποια επίδραση στον τρόπο σκέψης τους, μόνο που δεν είχαν καταλάβει σωστά τις έννοιες που είχαν διδαχθεί, με αποτέλεσμα να τις χρησιμοποιούν λάθος. Έννοιες όπως αυτήν του δειγματικού χώρου, της πιθανότητας και του απλού-σύνθετου γεγονότος. Ενδεικτικά δίνονται οι παρακάτω απαντήσεις.

[20] Υπενθυμίζεται ότι τα αποτελέσματα του πίνακα 1 έχουν υπολογιστεί με βάση τις λάθος απαντήσεις που υπήρχε ευρετική.

1. Ρίχνουμε ένα ζάρι πέντε φορές, ποιο από τα παρακάτω αποτελέσματα είναι πιο πιθανό να προκύψει;
   - **a.** 3 5 1 6 2
   - **b.** 4 2 6 1 5
   - **c.** 2 2 2 2 2
   - **d** Τα a και b είναι το ίδιο πιθανά.
   - **e** Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα είναι το ίδιο πιθανά.

   Αιτιολόγησε την απάντηση σου.

   $P(a)=\frac{5}{6}$ και $P(b)=\frac{5}{6}$ αλλά $P(c)=\frac{1}{6}$

1. Ρίχνουμε ένα ζάρι πέντε φορές, ποιο από τα παρακάτω αποτελέσματα είναι πιο πιθανό να προκύψει;
   - **a.** 3 5 1 6 2
   - **b.** 4 2 6 1 5
   - **c.** 2 2 2 2 2
   - **d.** Τα a και b είναι το ίδιο πιθανά.
   - **e.** Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα είναι το ίδιο πιθανά.

   Αιτιολόγησε την απάντηση σου.

   Γιατί η πιθανότητα του c είναι η μικρότερη ενώ τα άλλα 2 είναι το ίδιο πιθανά γιατί ο δειγματικός χώρος είναι μεγαλύτερος

1. Ρίχνουμε ένα ζάρι πέντε φορές, ποιο από τα παρακάτω αποτελέσματα είναι πιο πιθανό να προκύψει;
   - **a.** 3 5 1 6 2
   - **b.** 4 2 6 1 5
   - **c.** 2 2 2 2 2
   - **d.** Τα a και b είναι το ίδιο πιθανά.
   - **e.** Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα είναι το ίδιο πιθανά.

   Αιτιολόγησε την απάντηση σου.

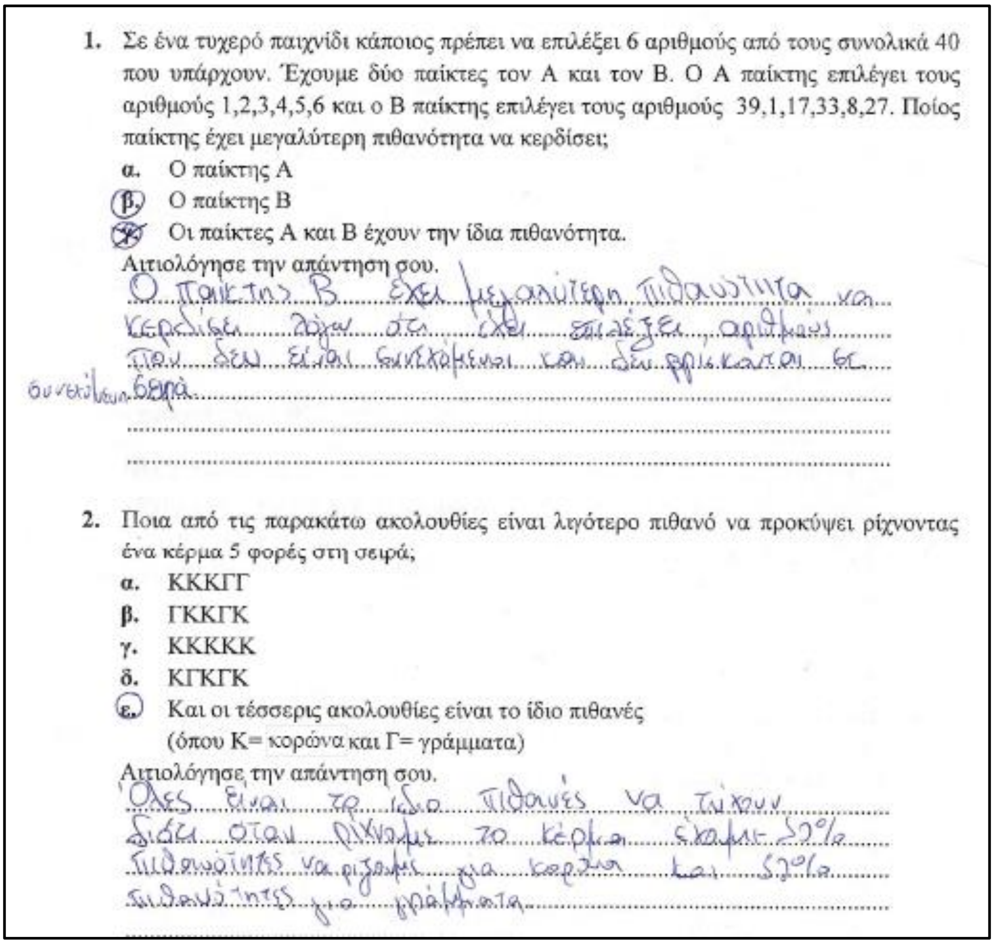
   Τα a και b είναι το ίδιο πιθανά διότι $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ άρα $A\cap B=\{1,2,5,6\}$.

1. Ρίχνουμε ένα ζάρι πέντε φορές, ποίο από τα παρακάτω αποτελέσματα είναι πιο πιθανό να προκύψει;
   - **a.** 3 5 1 6 2
   - **b.** 4 2 6 1 5
   - **c.** 2 2 2 2 2
   - **d.** Τα a και b είναι το ίδιο πιθανά.
   - **e.** Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα είναι το ίδιο πιθανά.

   Αιτιολόγησε την απάντηση σου.

   επειδή κ' $N(A)=\{5\}$ κ' $N(B)=\{5\}$

Όσον αφορά το pretest[21], ενδιαφέρον είναι ότι από τους 70 μαθητές που πήραν μέρος στην έρευνα, 35 απάντησαν σωστά μόνο στο πρόβλημα Α1 (επιλογή 6 αριθμών από το 1 έως το 40), 33 μαθητές στο μόνο πρόβλημα Α2 (ρίψη κέρματος) και 20 απάντησαν συγχρόνως και στα δύο. Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε πως το ίδιο άτομο, μπορεί να εμφανίζει μια συγκεκριμένη ευρετική σε μια κατάσταση ενώ σε μια άλλη κατάσταση όχι. Εξαρτάται από τις προσωπικές του εμπειρίες και την αντίληψη που έχει, η οποία μπορεί να είναι καλύτερη σε κάποιες περιπτώσεις και σε άλλες όχι. Παρακάτω, δίνεται σχετικό παράδειγμα.



1. Σε ένα τυχερό παιχνίδι κάποιος πρέπει να επιλέξει 6 αριθμούς από τους συνολικά 40 που υπάρχουν. Έχουμε δύο παίκτες τον Α και τον Β. Ο Α παίκτης επιλέγει τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6 και ο Β παίκτης επιλέγει τους αριθμούς 39,1,17,33,8,27. Ποίος παίκτης έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει;
   α. Ο παίκτης Α
   β. Ο παίκτης Β
   γ. Οι παίκτες Α και Β έχουν την ίδια πιθανότητα.

   Αιτιολόγησε την απάντηση σου.
   Ο παίκτης Β έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει λόγω ότι έχει επιλέξει αριθμούς που δεν είναι συνεχόμενοι και δεν βρίσκονται σε συνεχόμενη σειρά.

2. Ποια από τις παρακάτω ακολουθίες είναι λιγότερο πιθανό να προκύψει ρίχνοντας ένα κέρμα 5 φορές στη σειρά;
   α. ΚΚΚΓΓ
   β. ΓΚΚΓΚ
   γ. ΚΚΚΚΚ
   δ. ΚΓΚΓΚ
   ε. Και οι τέσσερις ακολουθίες είναι το ίδιο πιθανές
   (όπου Κ= κορώνα και Γ= γράμματα)

   Αιτιολόγησε την απάντηση σου.
   Όλες είναι το ίδιο πιθανές να τύχουν διότι όταν ρίχνουμε το κέρμα έχουμε 50% πιθανότητες να ρίξουμε για κορώνα και 50% πιθανότητες για γράμματα.

Στο πρόβλημα Α2, υπήρξαν μαθητές που απάντησαν σωστά για λάθος λόγους. Όπως για παράδειγμα, η δύναμη ή ο τρόπος με τον οποίο κάποιος ρίχνει ένα κέρμα, ή το πόσες φορές θα στριφογυρίσει καθώς πέφτει, θεωρούνται παράγοντες που επιδρούν στο αποτέλεσμα που θα έρθει. Ακολουθεί παράδειγμα στην επόμενη σελίδα.

[21] Σημειώνεται, πως μόνο στην περίπτωση της αντιπροσωπευτικότητας δόθηκαν δύο προβλήματα και αυτό συνέβη μόνο στο πρώτο test.

2. Ποια από τις παρακάτω ακολουθίες είναι λιγότερο πιθανό να προκύψει ρίχνοντας ένα κέρμα 5 φορές στη σειρά;
α. ΚΚΚΓΓ
β. ΓΚΚΓΚ
γ. ΚΚΚΚΚ
δ. ΚΓΚΓΚ
ε. Και οι τέσσερις ακολουθίες είναι το ίδιο πιθανές
(όπου Κ= κορώνα και Γ= γράμματα)
Αιτιολόγησε την απ

Γιατί είναι ανάλογο με τη δύναμη που ρίχνουμε ώστε να γυρίσει το κέρμα.

2. Negative and Positive Recency Effects (προβλήματα Α3 & Β2)

Η επίπτωση της λανθασμένης αντίληψης της πρόσφατης εμπειρίας είναι μικρότερη σε σχέση με τις υπόλοιπες λανθασμένες αντιλήψεις που μελετήθηκαν στην παρούσα έρευνα. Στο pretest υπήρξαν 9 μαθητές και στο posttest 6 μαθητές. Γενικότερα είχαμε 38 μαθητές που απάντησαν σωστά (Σ*) και στα δύο test και 13 μαθητές που απάντησαν λάθος στο pretest ενώ σωστά (Σ*) στο posttest. Αν και όπως προαναφέρθηκε, η εμφάνιση της συγκεκριμένης παρανόησης δεν ήταν έντονη, με τα μαθήματα στις πιθανότητες, φαίνεται να υπάρχει μια σχετική βελτίωση. Παρακάτω δίνονται δύο παραδείγματα, το πρώτο για την θετική επίδραση της πρόσφατης εμπειρίας και το δεύτερο για την αρνητική (πλάνη του παίκτη).

2. Όταν ρίχνουμε ένα κέρμα, δύο είναι τα πιθανά αποτελέσματα: κορώνα ή γράμματα. Ρίχνουμε το κέρμα τρεις φορές και τις τρεις είναι κορώνα. Αν ρίξουμε το κέρμα ξανά, η πιθανότητα να είναι για τέταρτη φορά κορώνα είναι:
a. Μικρότερη από το να φέρουμε γράμματα.
b. Ίση με το να φέρουμε γράμματα.
c. Μεγαλύτερη με το να φέρουμε γράμματα.
Αιτιολόγησε την απάντηση σου.

Η πιθανότητα να φέρουμε πάλι κορόνα είναι μεγαλύτερη με το να φέρουμε γράμματα γιατί είναι πολύ πιο πιθανό να ξανατύχει κορόνα όπως τις άλλες φορές.

3. Ρίχνουμε ένα κέρμα και παίρνουμε κορώνα πέντε φορές συνεχόμενα, ποία είναι η πιθανότητα να πάρουμε γράμματα στην επόμενη ρίψη;
α. Μεγαλύτερη από 50%
β. 50%
γ. Μικρότερη από 50%
Αιτιολόγησε την απάντηση σου.

Καιρός είναι να τύχουν γράμματα

3. Equiprobability Bias (προβλήματα Α4 & Β3)

Για την περίπτωση της ισοπιθανότητας στο pretest είχαμε 1 σωστή (Σ*) απάντηση και από τις 69 συνολικά λάθος απαντήσεις, η παρανόηση εμφανιζόταν στις 13. Στο posttest αναμενόταν τα αποτελέσματα να ήταν πολύ καλύτερα, μιας και στο σχολικό βιβλίο υπάρχει λυμένη παρόμοια άσκηση. Στην πραγματικότητα όμως, οι σωστές απαντήσεις στο posttest ήταν 14, δηλαδή λίγο περισσότερες από το pretest και η ευρετική της ισοπιθανότητας αυξήθηκε από 13 σε 25. Παρακάτω παραθέτεται η άσκηση του βιβλίου. Παρατηρούμε ότι για την επίλυση της, χρησιμοποιείται πίνακας «διπλής εισόδου».

1.2 ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ 35

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ρίχνουμε δύο "αμερόληπτα" ζάρια. Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρουμε ως αποτέλεσμα δύο διαδοχικούς αριθμούς.

ΛΥΣΗ

- Για να βρούμε το δειγματικό χώρο του πειράματος, χρησιμοποιούμε έναν πίνακα "διπλής εισόδου", όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

1ο \ 2ο	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Από τον πίνακα αυτόν έχουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω έχει 36 ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα, δηλαδή $N(\Omega)=36$.

- Το ενδεχόμενο Α: "να φέρουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς", είναι το

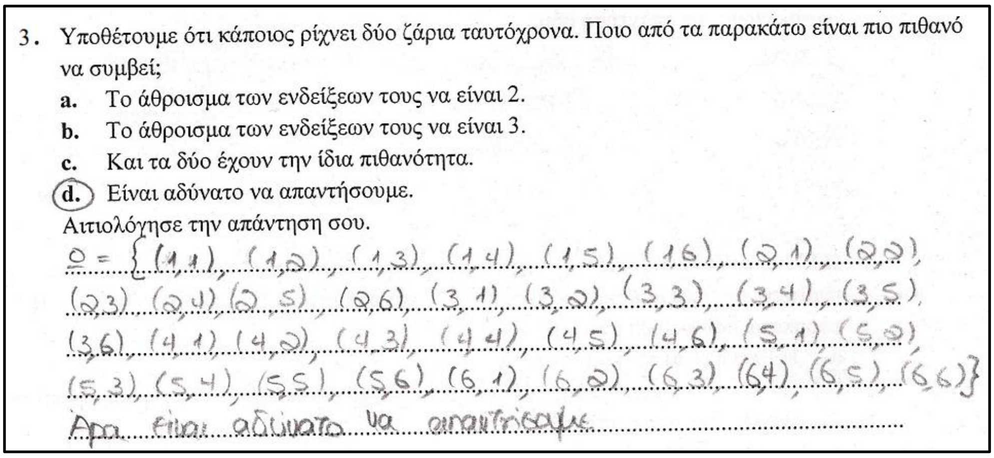
$$A=\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5)\}$$

δηλαδή $N(A)=10$

- Επομένως, $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$.

Άρα, η πιθανότητα να φέρουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς είναι $\dfrac{5}{18}\approx 0{,}28$ ή, στη γλώσσα των ποσοστών, περίπου 28%.

Από τα παιδιά που πήραν μέρος στην έρευνα μόνο τα 8 προσπάθησαν να χρησιμοποιήσουν πίνακα «διπλής εισόδου» για να απαντήσουν στο πρόβλημα Β3 και από αυτά τα 6 τον χρησιμοποίησαν σωστά. Πολλές φορές οι μαθητές είναι σε θέση να χρησιμοποιούν σωστά διάφορες διαδικασίες και τύπους που μαθαίνουν για την επίλυση μιας άσκησης και όντως να καταφέρνουν να την λύσουν επιτυχώς. Αυτό όμως, δεν σημαίνει ότι έχουν κατανοήσει ουσιαστικά τη θεωρία και τις έννοιες που θα έπρεπε. Αυτό που έχουν στο μυαλό τους βλέποντας μία άσκηση, κυρίως διαδικαστική, είναι μια μεθοδολογία που πρέπει να εφαρμόσουν, χωρίς κάποια ουσιώδης κατανόηση, γι' αυτό και όταν αλλάζουν λίγο τα δεδομένα ή το ζητούμενο της άσκησης αποτυγχάνουν να την λύσουν. Παρακάτω βλέπουμε το γραπτό ενός μαθητή που ενώ έχει βρει σωστά τον δειγματικό χώρο του προβλήματος έχει επιλέξει λάθος απάντηση.



3. Υποθέτουμε ότι κάποιος ρίχνει δύο ζάρια ταυτόχρονα. Ποιο από τα παρακάτω είναι πιο πιθανό να συμβεί;

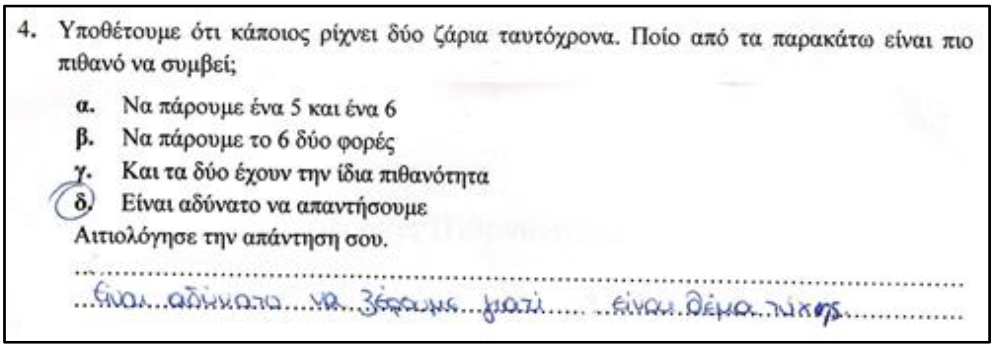
a. Το άθροισμα των ενδείξεων τους να είναι 2.
b. Το άθροισμα των ενδείξεων τους να είναι 3.
c. Και τα δύο έχουν την ίδια πιθανότητα.
d. Είναι αδύνατο να απαντήσουμε.

Αιτιολόγησε την απάντηση σου.

Ω = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

Άρα είναι αδύνατο να απαντήσαμε

Στο Α4 πρόβλημα του pretest, 51 μαθητές επέλεξαν το δ, δηλαδή την επιλογή "είναι αδύνατο να απαντήσουμε" και 13 μαθητές το γ, την επιλογή που υποδεικνύει την παρανόηση που εξετάζουμε. Αντίστοιχα, στο Β3 πρόβλημα του posttest, το δ το επέλεξαν μόνο 22 μαθητές και το γ 26. Εκτιμάται πως αν δεν υπήρχε η επιλογή δ, ο αριθμός των απαντήσεων με την συγκεκριμένη παρανόηση θα ήταν μεγαλύτερος και για τα δύο test. Τα παιδιά που επέλεξαν το δ, φαίνεται να θεωρούν ότι η πιθανότητα ενός τυχαίου γεγονότος είναι κάτι που δεν μπορεί να μετρηθεί με κάποιο τρόπο, ούτε και να συγκριθεί με την πιθανότητα ενός άλλου γεγονότος.



4. Υποθέτουμε ότι κάποιος ρίχνει δύο ζάρια ταυτόχρονα. Ποίο από τα παρακάτω είναι πιο πιθανό να συμβεί;

α. Να πάρουμε ένα 5 και ένα 6
β. Να πάρουμε το 6 δύο φορές
γ. Και τα δύο έχουν την ίδια πιθανότητα
δ. Είναι αδύνατο να απαντήσουμε

Αιτιολόγησε την απάντηση σου.

είναι αδύνατο να ξέρουμε γιατί είναι θέμα τύχης

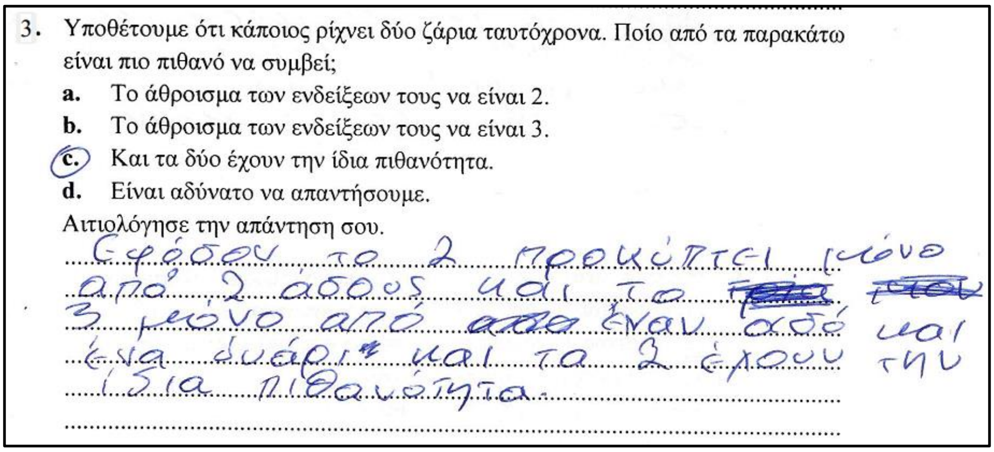
Τα παιδιά που επέλεξαν το γ, ότι και τα δύο γεγονότα έχουν την ίδια πιθανότητα, όπως είπαμε είναι αυτά που υποπίπτουν στην ευρετική της ισοπιθανότητας, θεωρούν πως όλα τα αποτελέσματα ενός πειράματος έχουν την ίδια πιθανότητα να συμβούν. Δεν διακρίνουν ότι ανάμεσα στα τυχαία γεγονότα ενός πειράματος, κάποια είναι περισσότερο πιθανά και κάποια λιγότερο. Ακολουθεί παράδειγμα στην επόμενη σελίδα.

3. Υποθέτουμε ότι κάποιος ρίχνει δύο ζάρια ταυτόχρονα. Ποίο από τα παρακάτω είναι πιο πιθανό να συμβεί;
   a. Το άθροισμα των ενδείξεων τους να είναι 2.
   b. Το άθροισμα των ενδείξεων τους να είναι 3.
   c. Και τα δύο έχουν την ίδια πιθανότητα.
   d. Είναι αδύνατο να απαντήσουμε.
   Αιτιολόγησε την απάντηση σου.
   Και τα δύο έχουν την ίδια πιθανότητα επειδή δεν γνωρίζουμε από πριν τα αποτελέσματα που θα φέρουν τα ζάρια. Είναι εντελώς θέμα τύχης.

Όπως είναι γνωστό, ρίχνοντας ένα ζάρι, τα πιθανά ενδεχόμενα είναι οι αριθμοί από το 1 έως το 6. Κάθε ένα από αυτάτα έχει πιθανότητα 1/6. Ως εκ τούτου τα ενδεχόμενα 5 και 6 είναι ισοπίθανα, άρα και όλα τα ενδεχόμενα που είναι συνδυασμός αυτών, έχουν επίσης την ίδια πιθανότητα. Αυτός είναι ακόμα ένας λάθος ισχυρισμός από κάποιους μαθητές. Παράδειγμα βλέπουμε παρακάτω.

4. Υποθέτουμε ότι κάποιος ρίχνει δύο ζάρια ταυτόχρονα. Ποίο από τα παρακάτω είναι πιο πιθανό να συμβεί;
   α. Να πάρουμε ένα 5 και ένα 6
   β. Να πάρουμε το 6 δύο φορές
   γ. Και τα δύο έχουν την ίδια πιθανότητα
   δ. Είναι αδύνατο να απαντήσουμε
   Αιτιολόγησε την απάντηση σου.
   Η πιθανότητα για κάθε ζάρι να τύχει κάποιο 1,2,3,4,5,6 είναι 1/6 σε κάθε περίπτωση.

Κάποια άλλα παιδιά, όπως στο επόμενο παράδειγμα, φαίνεται να μην δίνουν σημασία στη σειρά των ενδείξεων και να αποδίδουν μια μη-υπαρκτή ιδιότητα, αυτήν της αντιμεταθετικότητας στον δειγματικό χώρο, υποθέτοντας ότι τα αποτελέσματα (1,2) και (2,1) είναι ίδια.



3. Υποθέτουμε ότι κάποιος ρίχνει δύο ζάρια ταυτόχρονα. Ποίο από τα παρακάτω είναι πιο πιθανό να συμβεί;

a. Το άθροισμα των ενδείξεων τους να είναι 2.
b. Το άθροισμα των ενδείξεων τους να είναι 3.
c. Και τα δύο έχουν την ίδια πιθανότητα.
d. Είναι αδύνατο να απαντήσουμε.

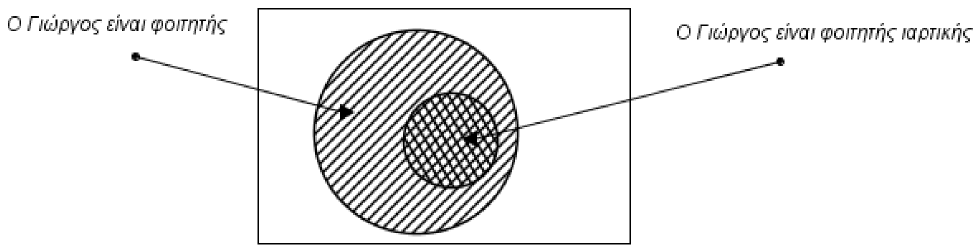
Αιτιολόγησε την απάντηση σου.

Εφόσον το 2 προκύπτει μόνο
από 2 άσσους και το ~~που~~ ~~που~~
3 μόνο από ~~άσσο~~ έναν άσσό και
ένα δυάρι* και τα 2 έχουν την
ίδια πιθανότητα.

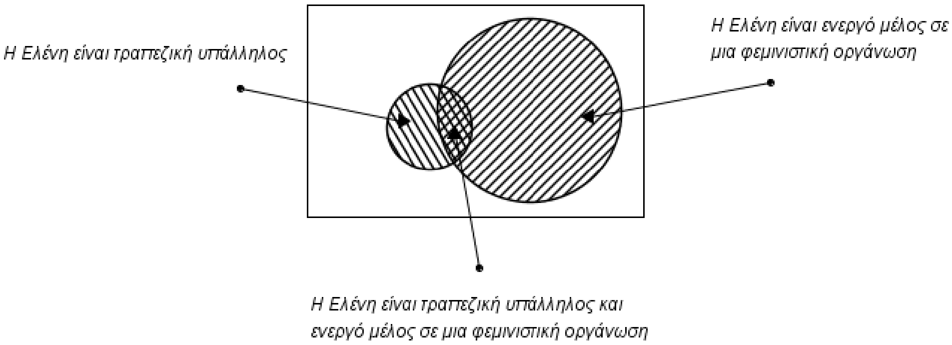
4. The Conjunction Fallacy (προβλήματα Α5 & Β4)

Η λανθασμένη αντίληψη της πλάνης του συνδυασμού ήταν πιο έντονη από όλες τις παρανοήσεις που μελετήθηκαν στην παρούσα εργασία. Στο pretest είχαμε 38 απαντήσεις που εμφανίστηκε αύτη η παρανόηση, από τις 45 συνολικά λανθασμένες που δόθηκαν και στο posttest 39 απαντήσεις από τις 57. Είναι σαφές πως η διδασκαλία δεν είχε κάποια θετική επίδραση.

Τα πιο πολλά παιδιά, σε κάθε πρόβλημα, έδωσαν έμφαση στην περιγραφή και απάντησαν με βάση του τι ταιριάζει περισσότερο στον Γιώργο και την Ελένη. Μόνο 25 από τους 70 μαθητές στο pretest, διέκριναν ότι το ενδεχόμενο ο Γιώργος να είναι φοιτητής ιατρικής είναι υποσύνολο του ενδεχομένου να είναι φοιτητής.



Αντίστοιχα, για το πρόβλημα με την Ελένη στο posttest, μόνο 13 από τους 70 μαθητές διέκριναν πως το γεγονός η Ελένη να είναι τραπεζική υπάλληλος και το γεγονός να είναι φεμινίστρια, έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να συμβαίνουν χωριστά από το να συμβαίνει η τομή τους, δηλαδή και τα δύο συγχρόνως.



Παρακάτω δίνονται δύο παραδείγματα από τις απαντήσεις που έδωσαν τα παιδιά, ένα από κάθε test.

5. Ο Γιώργος ονειρεύεται να γίνει γιατρός. Του αρέσει να βοηθάει ανθρώπους . Όταν ήταν στο γυμνάσιο προσέφερε εθελοντική εργασία στον Ερυθρό Σταυρό. Τελείωσε με επιτυχία το σχολείο και υπηρέτησε στο στρατό ως βοηθός γιατρού. Αφού απολύθηκε από το στρατό, ο Γιώργος γράφτηκε στο πανεπιστήμιο. Τι σου φαίνεται πιθανότερο;

α. Ο Γιώργος να είναι φοιτητής ιατρικής

β. Ο Γιώργος να είναι φοιτητής

Αιτιολόγησε την απάντηση σου.

Γιατί έχει εμπειρία στο επάγγελμα και έχει κλίση στην ιατρική.

4. Η Ελένη είναι 31 ετών, ειλικρινής και σπούδασε φιλοσοφία. Ως φοιτήτρια ενδιαφερόταν ιδιαίτερα για θέματα κοινωνικού ρατσισμού και κοινωνικής δικαιοσύνης. Ποιο από τα παρακάτω σου φαίνεται πιο πιθανό;

a. Η Ελένη είναι τραπεζική υπάλληλος.

b. Η Ελένη είναι τραπεζική υπάλληλος και ενεργό μέλος σε μια φεμινιστική οργάνωση.

Αιτιολόγησε την απάντηση σου.

Αφού την ενδιέφερε ο κοινωνικός ρατσισμός και η κοινωνική δικαιοσύνη μου φαίνεται λογικό παράλληλα με την εργασία της να ανήκει σε μια φεμινιστική οργάνωση.

5. The Heuristic of Availability (προβλήματα Α6 & Β5)

Για τη διαθεσιμότητα, στο pretest είχαμε σύνολο 48 λανθασμένες απαντήσεις από τις οποίες 29 οφείλονταν στην ευρετική της διαθεσιμότητας. Αντίστοιχα, στο posttest από τις 56 λανθασμένες απαντήσεις, οι 30 οφείλονταν σε αυτή την ευρετική. Οπότε συμπεραίνουμε ότι η διδασκαλία δεν βοήθησε.

Οι περισσότεροι μαθητές φαίνεται να αντιλαμβάνονται το ζητούμενο του προβλήματος ‘‘πόσες διαφορετικές επιτροπές μπορούν να συγκροτηθούν από μια ομάδα 10 ατόμων" ως "σε πόσες διαφορετικές ομάδες μπορούν να χωριστούν 10 άτομα". Στη περίπτωση που το πρόβλημα ζήταγε να χωρίσουν, όντως η σωστή απάντηση θα ήταν η β επιλογή. Όμως, στην πραγματικότητα, αυτό που ζητείται είναι οι διαφορετικοί συνδυασμοί που μπορεί να υπάρξουν με 2 ή με 8 άτομα όταν έχουμε συνολικά 10 άτομα. Αυτό που αρκεί κάποιος να σκεφτεί είναι ότι για κάθε δυάδα που επιλέγουμε αντιστοιχεί μια οκτάδα που δεν έχουμε επιλέξει, οπότε η σωστή απάντηση είναι το γ.

6. Κάποιος πρέπει να συγκροτήσει επιτροπές από μια ομάδα 10 ατόμων. Είναι δυνατόν να συγκροτηθούν:

α. Πιο πολλές διαφορετικές επιτροπές από 8 άτομα.
β. Πιο πολλές διαφορετικές επιτροπές από 2 άτομα.
γ. Ο ίδιος αριθμός επιτροπών (είτε από 8 είτε από 2 άτομα).

Αιτιολόγησε την απάντηση σου.
Εαν οι επιτροπές είναι ανα δύο (2) ατομα τοτε θα είναι 5 επιτροπές ενώ αν ηταν από 8 θα ηταν μία με περίσευμα 2 ατόμων

Πέρα του ότι τα αποτελέσματα του δεύτερου test είναι αισθητά πιο χαμηλά από του πρώτου, παρατηρείται επίσης, ότι και στα δυο test υπάρχει μια έντονη διαφορά ανάμεσα στις σωστές απαντήσεις (Σ) και στις σωστές απαντήσεις με σωστή αιτιολόγηση (Σ*). Για το pretest είχαμε 22 (Σ) και 7 (Σ*). Αντίστοιχα, για το posttest είχαμε 14 (Σ) και 4 (Σ*). Γενικότερα, όχι μόνο στη περίπτωση της διαθεσιμότητας, αλλά για κάθε πρόβλημα που δίνεται σε κάποιο μαθητή, καλό είναι να του ζητάμε να αιτιολογήσει την απάντηση του. Πολλές φορές πίσω από μια φαινομενικά σωστή απάντηση υπάρχει λάθος συλλογισμός.

6. Κάποιος πρέπει να συγκροτήσει επιτροπές από μια ομάδα 10 ατόμων. Είναι δυνατόν να συγκροτηθούν:

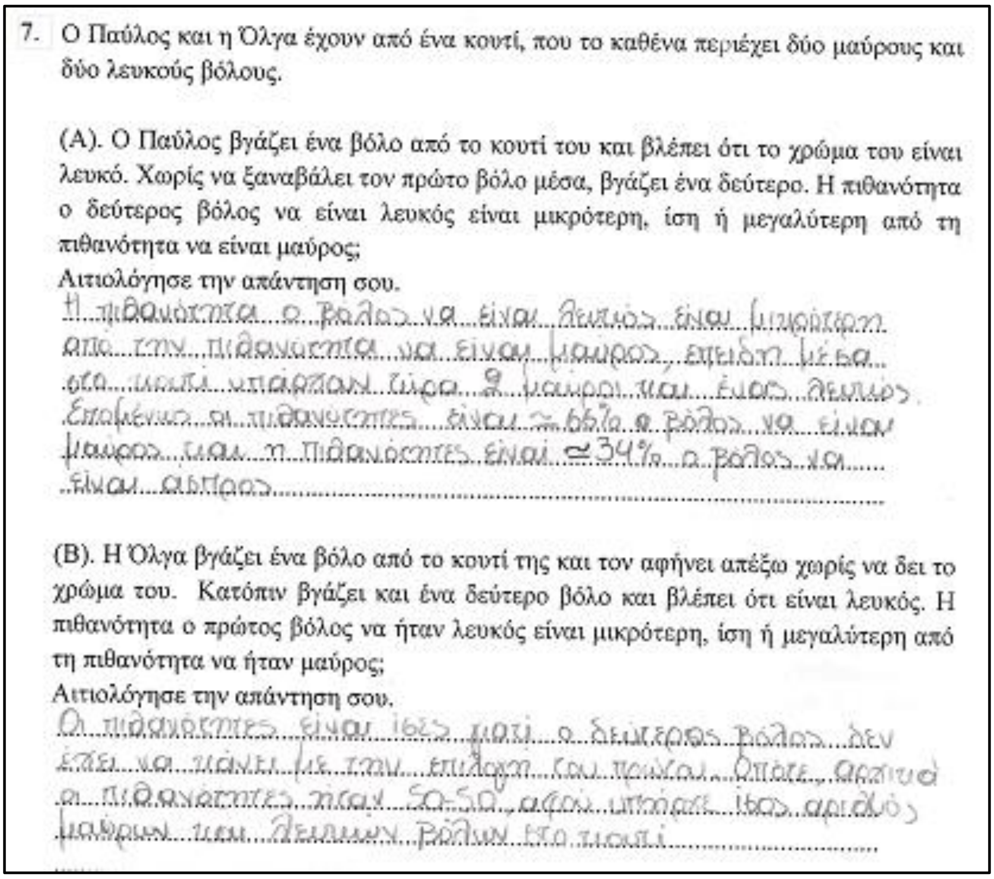
α. Πιο πολλές διαφορετικές επιτροπές από 8 άτομα.
β. Πιο πολλές διαφορετικές επιτροπές από 2 άτομα.
γ. Ο ίδιος αριθμός επιτροπών (είτε από 8 είτε από 2 άτομα).

Αιτιολόγησε την απάντηση σου.
είναι δυνατον καθώς και οι 3 αριθμοί διαιρούνται με το 2.

6. The Falk Phenomenon (προβλήματα Α7 & Β6)

Βλέποντας τα αποτελέσματα, ούτε και σε αυτή την περίπτωση η διδασκαλία φαίνεται να έχει κάποια επίδραση. Πιο συγκεκριμένα, στο pretest για το πρόβλημα Β, 35 μαθητές επέλεξαν το β, η πιθανότητα ο πρώτος βόλος την πρώτη φορά να ήταν λευκός είναι ίση με το να ήταν μαύρος. Από τις αιτιολογήσεις που δόθηκαν, 14 μαθητές έγραψαν πως το να πάρουμε λευκό ή μαύρο βόλο την πρώτη φορά είναι το ίδιο πιθανό, μιας και ο αριθμός των βόλων και στα δύο χρώματα είναι ο ίδιος. Αντίστοιχα, στο posttest από τους 29 μαθητές που επέλεξαν το β, 16 αιτιολόγησαν με αυτό τον τρόπο. Επίσης, στο pretest οι 14 μαθητές που απάντησαν σωστά στο πρόβλημα Β, είχαν απαντήσει σωστά και στο Α, ενώ 32 απάντησαν σωστά στο Α και λάθος στο Β. Στο posttest, 11 απάντησαν σωστά και στο Α και στο Β, ενώ 34 μαθητές σωστά μόνο στο Α.

Όσον αφορά τη σωστή απάντηση, αυτό που αναμενόταν από τα παιδιά να σκεφτούν, σύμφωνα με όσα διδάχθηκαν, είναι πως αφού γνωρίζουμε ότι ο δεύτερος βόλος είναι λευκός, θα μπορούσαμε να ορίσουμε το σύνολο των επιλογών για το πρώτο ως εξής {ΜΑ, ΜΑ, ΑΑ}, οπότε η πιθανότητα την πρώτη φορά να είχαμε λευκό είναι μικρότερη. Παρακάτω δίδεται ένα παράδειγμα από κάποιο μαθητή που απάντησε σωστά στο Α σκέλος του Α7 προβλήματος και στο Β σκέλος υπέπεσε στην συγκεκριμένη πλάνη.



7. Ο Παύλος και η Όλγα έχουν από ένα κουτί, που το καθένα περιέχει δύο μαύρους και δύο λευκούς βόλους.

(Α). Ο Παύλος βγάζει ένα βόλο από το κουτί του και βλέπει ότι το χρώμα του είναι λευκό. Χωρίς να ξαναβάλει τον πρώτο βόλο μέσα, βγάζει ένα δεύτερο. Η πιθανότητα ο δεύτερος βόλος να είναι λευκός είναι μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη από τη πιθανότητα να είναι μαύρος;
Αιτιολόγησε την απάντηση σου.
Η πιθανότητα ο βόλος να είναι λευκός είναι μικρότερη από την πιθανότητα να είναι μαύρος, επειδή μέσα στο κουτί υπάρχουν τώρα 2 μαύροι και ένας λευκός. Επομένως οι πιθανότητες είναι ≃66% ο βόλος να είναι μαύρος και η πιθανότητες είναι ≃34% ο βόλος να είναι άσπρος

(Β). Η Όλγα βγάζει ένα βόλο από το κουτί της και τον αφήνει απέξω χωρίς να δει το χρώμα του. Κατόπιν βγάζει και ένα δεύτερο βόλο και βλέπει ότι είναι λευκός. Η πιθανότητα ο πρώτος βόλος να ήταν λευκός είναι μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη από τη πιθανότητα να ήταν μαύρος;
Αιτιολόγησε την απάντηση σου.
Οι πιθανότητες είναι ίσες γιατί ο δεύτερος βόλος δεν έχει να κάνει με την επιλογή του πρώτου. Οπότε αρχικά οι πιθανότητες ήταν 50-50 αφού υπήρχε ίσος αριθμός μαύρων και λευκών βόλων στο κουτί

11. Συμπεράσματα – Προτάσεις

Στις προηγούμενες σελίδες έγινε προσπάθεια να καταγραφούν οι εννοιολογικές δυσκολίες και οι εσφαλμένες αντιλήψεις που παρατηρούνται στις πιθανότητες. Στο παρακάτω πίνακα βλέπουμε συνοπτικά – συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα από τους πίνακες 2 και 3.

Πίνακας 4: Συγκεντρωτικός

MISCONCEPTION	PRETEST			POSTTEST		
	Σ	Σ*	Ε	Σ	Σ*	Ε
1. Representativeness	38	35	23	42	35	22
	42	33	22			
2. Negative and Positive Recency Effects	61	46	9	56	51	6
3. Equiprobability Bias	2	1	13	14	12	26
4. The Conjunction Fallacy	29	25	38	18	13	39
5. The Heuristic of Availability	22	7	27	14	4	29
6. The Effect of the Time Axis (The Falk Phenomenon)	22	14	14	28	11	16

Βλέποντας τα αποτελέσματα και με βάση όσα αναφέρθηκαν στην ενότητα 10.2, καταλήγουμε στα εξής: Για την αντιπροσωπευτικότητα δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά από το ένα τεστ στο άλλο. Στην περίπτωση της επιρροής της πρόσφατης εμπειρίας έχουμε μια ελαφριά βελτίωση. Για την ισοπιθανότητα, είχαμε περισσότερες σωστές απαντήσεις στο δεύτερο τεστ, αλλά αύξηση της συγκεκριμένης παρανόησης (από 13 σε 26). Για την πλάνη του συνδυασμού, μείωση των σωστών απαντήσεων και καμία σημαντική βελτίωση όσον αφορά τη παρανόηση. Τέλος, για τη διαθεσιμότητα και το φαινόμενο του Falk τα αποτελέσματα στο πρώτο τεστ ήταν λίγο καλύτερα από αυτά στο δεύτερο.

Πολλοί από τους μαθητές, φάνηκε ότι δεν είχαν κατανοήσει επαρκώς απλές έννοιες των πιθανοτήτων, όπως για παράδειγμα αυτήν του δειγματικού χώρου και του ορισμού της πιθανότητας. Σε πολλές περιπτώσεις, αναπαρήγαν κάποια διαδικασία επίλυσης, χωρίς όμως στη πραγματικότητα να έχουν κατανοήσει τη θεωρία που βρίσκεται πίσω από αυτή τη διαδικασία.

Επίσης, παρατηρήθηκε δυσκολία στην κατανόηση, ειδικά στη περίπτωση των προβλημάτων της διαθεσιμότητας και του φαινομένου του Falk. Η αδυναμία ορισμένων μαθητών τόσο στην κατανόηση όσο και στην περιγραφή καταστάσεων που αφορούν προβλήματα πιθανοτήτων, οδηγεί σε γλωσσικές παρερμηνείες, που με την σειρά τους οδηγούν συνήθως σε λανθασμένες αναπαραστάσεις του προβλήματος που πρέπει να επιλύσουν, με αποτέλεσμα να μη τα καταφέρνουν ή να καταλήγουν σε λάθος συμπεράσματα. Οι πιθανότητες απαιτούν ένα διαφορετικό τρόπο σκέψης, σε σχέση με τα υπόλοιπα μαθηματικά του σχολείου. Μαθαίνοντας πιθανότητες, οι μαθητές θα πρέπει να αναπτύξουν νέες διαισθητικές ικανότητες.

Μη ξεχνάμε πως ακόμα και άτομα με καλή γνώση του αντικειμένου μπορεί να οδηγηθούν στη μη συνειδητή χρήση μεθόδων, όπως της διαθεσιμότητας και της αντιπροσω-πευτικότητας, ή να υποπέσουν σε κάποια πλάνη όπως αυτές που περιγράφτηκαν νωρίτερα για την εκτίμηση της πιθανότητας ενός τυχαίου γεγονότος. Φαίνεται πως αυτές οι μέθοδοι είναι βαθιά ριζωμένες και σε πολλές περιπτώσεις εφαρμόζονται αυτόματα. Έχουν επίσης παρομοιαστεί με οπτικές οφθαλμαπάτες, όπου ακόμα και αν κάποιος ξέρει καλά, η κατάσταση να μη μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτή.

Οι καθηγητές των μαθηματικών θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τη γνώση αυτών των συνηθισμένων λαθών και τις ερμηνείες τους, ώστε να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα το συγκεκριμένο αντικείμενο και να βελτιώσουν την μαθηματική τους σκέψη. Σύμφωνα με τον Garfield (1995), η αποτελεσματική διδασκαλία χτίζεται με βάση τις δυσκολίες και τις εσφαλμένες αντιλήψεις των μαθητών, οι οποίοι όταν μαθαίνουν κάτι καινούργιο, κατασκευάζουν τα δικά τους νοήματα συνδέοντας την νέα πληροφορία με αυτά που ήδη ξέρουν και που πιστεύουν ότι είναι σωστά. Οι καθηγητές θα πρέπει να χρησιμοποιούν προβλήματα με τέτοιου είδους δυσκολίες, όπως αυτές που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την εργασία, δίνοντας έτσι την ευκαιρία στους μαθητές να εκφράσουν τις απόψεις τους ακόμα και στην περίπτωση που αυτές είναι λάθος. Επίσης οι μαθητές είναι σημαντικό να έχουν ενεργό ρόλο στην διαδικασία της μάθησης, θα πρέπει να ενθαρρύνονται στο να εκφράζουν το σκεπτικό τους, να τους δίνεται η ευκαιρία να διορθώνουν μόνοι το λάθος τους και να αναλύουν τις αιτίες που το προκάλεσαν.

Χρήσιμο να αναφερθεί επίσης, είναι ότι, πολλοί μαθητές έχουν αναπτύξει ένα είδος μαθηματικής φοβίας για τις πιθανότητες, ίσως γιατί τους παρουσιάστηκαν με ένα αρκετά αφηρημένο τρόπο, ο οποίος απαιτεί ένα πιο προχωρημένο στάδιο σκέψης. Ίσως, η εισαγωγή των πιθανοτήτων σε μικρότερες τάξεις, ξεκινώντας με πολύ απλά προβλήματα και όσο μεγαλώνει η τάξη να περνάν σε πιο σύνθετες έννοιες, να βοηθούσε τους μαθητές σχετικά με την τυχαιότητα, δίνοντας τους έτσι περισσότερο χρόνο και να τις καταλάβουν αλλά και να τις αφομοιώσουν.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

1. Batanero, C. & Diaz, C. (2007). The meaning and understanding of the mathematics: The case of probability. Philosophical dimensions in mathematics educations. Springer US, pp.107-127.
2. Batanero, C. & Sanchez, E. (2005). What is the nature of high school students' conceptions and misconceptions about probability? Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning. Springer US, pp. 241-266.
3. Bruner, J. (1966). The Process of Education: Towards a theory of instruction. Harvard U.P., Cambrige Ma. pp.72. http://infed.org/mobi/jerome-bruner-and-the-process-of-education/
4. Chapman, L., & Chapman, J., (1969). Illusory as an obstacle to the use of valid psychodiagnostic signs. Journal of Abnormal Psychology, vol. 74, No. 3, pp. 271-280.
5. Combs, B. & Slovic, P. (1979). Causes of death: Biased newspaper coverage and biases judgment. Journalism Quarterly, vol. 56, pp. 837-843.
6. Cox, C., & Mouw, J. (1992). Disruption of the representativeness heuristic: Can we be perturbed into using correct probabilistic reasoning? Educational Academic Studies in Mathematics, vol. 23, pp. 163-178. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
7. Falk, R. (1979). Revision of probability and the time axis. In Proceedings of the third International Conference for the Psychology of Mathematics Education, pp.64-66. Warwick, UK: Organising Committee.
8. Fischbein, E., Nello, M. & Marino, M. (1991). Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. Educational Studies in Mathematics 22, pp. 523-549. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
9. Fischbein, E. & Schnarch D. (1997). The evolution with age of probabilistic, Intuitively Based Misconceptions. Journal for Research in Mathematics Educations, Vol. 28, No. 1, pp. 96-105.
10. Garfield, J., (1995). How students learn Statistics. International Statistical Review, 63, 1, pp. 25-34.
11. Gras, R., & Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle [Chronology and causality, conceptions sources of epistemological obstacles in the notion of conditional probability]. Recherches en Didactique des Mathematiques, 15(1), pp. 49-55.
12. Griffin, D., & Buehler, R. (1999). Frequency, probability, and prediction: Easy solutions to cognitive illusions? Cognitive Psychology 38, pp. 48-78.
13. Kahneman, D., Slovic, P. & Tversky, A. (1974). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. Cambridge University Press.

14. Kahneman, D., Tversky, A. (1982). On the study of statistical intuitions. Elsevier Sequoia S.A., Lausanne. Printed it The Netherlands, pp. 123-141.
15. Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. Radical Constructivism in Mathematics Education, pp. 139-156. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
16. Lecoutre, M., (1992). Cognitive models and problem spaces in purely random situations. Educational Studies in Mathematics 23, pp. 557-568. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherland.
17. Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. Journal for Research in Mathematics Education, 31, pp. 602-625.
18. Tversky, A. & Kahneman, D. (1973). Availability: A Heuristic for Judging Frequency and Probability. Cognitive Psychology 5, pp. 207-232.
19. Tversky, A. & Kahneman, D. (1983). Extensional Versus Intuitive Reasoning: The conjunction Fallacy in Probability Judgment. Psychological Review, vol. 90, No. 4.

Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία

1. Hope, J. & Kelly I. (1983) Κοινές Δυσκολίες στο λογισμό των πιθανοτήτων. Ευκλείδης Γ (1984), τεύχος 5, σελίδες 70-80. Απόδοση στα ελληνικά από τους Μώλο, Σ. & Στεφανίδη, Ι.

Παράρτημα

A. PRETEST

Τμήμα:..
Όνομα:..
Επώνυμο:......................................
Ημερομηνία:.................................

1. Σε ένα τυχερό παιχνίδι κάποιος πρέπει να επιλέξει 6 αριθμούς από τους συνολικά 40 που υπάρχουν. Έχουμε δύο παίκτες τον Α και τον Β. Ο Α παίκτης επιλέγει τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6 και ο Β παίκτης επιλέγει τους αριθμούς 39,1,17,33,8,27. Ποίος παίκτης έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει;

a. Ο παίκτης Α
b. Ο παίκτης Β
c. Οι παίκτες Α και Β έχουν την ίδια πιθανότητα.

Αιτιολόγησε την απάντηση σου.
....
....
....

2. Ποια από τις παρακάτω ακολουθίες είναι λιγότερο πιθανό να προκύψει ρίχνοντας ένα κέρμα 5 φορές στη σειρά;

a. ΚΚΚΓΓ
b. ΓΚΚΓΚ
c. ΚΚΚΚΚ
d. ΚΓΚΓΚ
e. Και τέσσερις ακολουθίες είναι το ίδιο πιθανές
(όπου Κ= κορώνα και Γ= γράμματα)

Αιτιολόγησε την απάντηση σου.
....
....
....

3. Ρίχνουμε ένα κέρμα και παίρνουμε κορώνα πέντε φορές συνεχόμενα, ποία είναι η πιθανότητα να πάρουμε γράμματα στην επόμενη ρίψη;

a. Μεγαλύτερη από 50%
b. 50%
c. Μικρότερη από 50%

Αιτιολόγησε την απάντηση σου.
....
....
....

4. Υποθέτουμε ότι κάποιος ρίχνει δύο ζάρια ταυτόχρονα. Ποίο από τα παρακάτω είναι πιο πιθανό να συμβεί;

a. Να πάρουμε ένα 5 και ένα 6
b. Να πάρουμε το 6 δύο φορές
c. Και τα δύο έχουν την ίδια πιθανότητα
d. Είναι αδύνατο να απαντήσουμε

Αιτιολόγησε την απάντηση σου.

....
....
....

5. Ο Γιώργος ονειρεύεται να γίνει γιατρός. Του αρέσει να βοηθάει ανθρώπους . Όταν ήταν στο γυμνάσιο προσέφερε εθελοντική εργασία στον Ερυθρό Σταυρό. Τελείωσε με επιτυχία το σχολείο και υπηρέτησε στο στρατό ως βοηθός γιατρού. Αφού απολύθηκε από το στρατό, ο Γιώργος γράφτηκε στο πανεπιστήμιο. Τι σου φαίνεται πιθανότερο;

a. Ο Γιώργος να είναι φοιτητής ιατρικής
b. Ο Γιώργος να είναι φοιτητής

Αιτιολόγησε την απάντηση σου.

....
....
....

6. Κάποιος πρέπει να συγκροτήσει επιτροπές από μια ομάδα 10 ατόμων. Είναι δυνατόν να συγκροτηθούν:

a. Πιο πολλές διαφορετικές επιτροπές από 8 άτομα.
b. Πιο πολλές διαφορετικές επιτροπές από 2 άτομα.
c. Ο ίδιος αριθμός επιτροπών (είτε από 8 είτε από 2 άτομα).

Αιτιολόγησε την απάντηση σου.

....
....
....

7. Ο Παύλος και η Όλγα έχουν από ένα κουτί, που το καθένα περιέχει δύο μαύρους και δύο λευκούς βόλους.

(Α). Ο Παύλος βγάζει ένα βόλο από το κουτί του και βλέπει ότι το χρώμα του είναι λευκό. Χωρίς να ξαναβάλει τον πρώτο βόλο μέσα, βγάζει ένα δεύτερο. Η πιθανότητα ο δεύτερος βόλος να είναι λευκός είναι μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη από τη πιθανότητα να είναι μαύρος;
Αιτιολόγησε την απάντηση σου.

....
....
....

(Β). Η Όλγα βγάζει ένα βόλο από το κουτί της και τον αφήνει απέξω χωρίς να δει το χρώμα του. Κατόπιν βγάζει και ένα δεύτερο βόλο και βλέπει ότι είναι λευκός. Η πιθανότητα ο πρώτος βόλος να ήταν λευκός είναι μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη από τη πιθανότητα να ήταν μαύρος;
Αιτιολόγησε την απάντηση σου.

....
....
....

B. POSTTEST

Τμήμα: ....
Όνομα: ....
Επώνυμο: ....
Ημερομηνία: ....

1. Ρίχνουμε ένα ζάρι πέντε φορές, ποιο από τα παρακάτω αποτελέσματα είναι πιο πιθανό να προκύψει;

a. 3 5 1 6 2
b. 4 2 6 1 5
c. 2 2 2 2 2
d. Τα a και b είναι το ίδιο πιθανά.
e. Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα είναι το ίδιο πιθανά.

Αιτιολόγησε την απάντηση σου.
....
....
....

2. Όταν ρίχνουμε ένα κέρμα, δύο είναι τα πιθανά αποτελέσματα: κορώνα ή γράμματα. Ρίχνουμε το κέρμα τρεις φορές και τις τρεις είναι κορώνα. Αν ρίξουμε το κέρμα ξανά, η πιθανότητα να είναι για τέταρτη φορά κορώνα είναι:

a. Μικρότερη από το να φέρουμε γράμματα.
b. Ίση με το να φέρουμε γράμματα.
c. Μεγαλύτερη με το να φέρουμε γράμματα.

Αιτιολόγησε την απάντηση σου.
....
....
....

3. Υποθέτουμε ότι κάποιος ρίχνει δύο ζάρια ταυτόχρονα. Ποιο από τα παρακάτω είναι πιο πιθανό να συμβεί;

a. Το άθροισμα των ενδείξεων τους να είναι 2.
b. Το άθροισμα των ενδείξεων τους να είναι 3.
c. Και τα δύο έχουν την ίδια πιθανότητα.
d. Είναι αδύνατο να απαντήσουμε.

Αιτιολόγησε την απάντηση σου.
....
....
....

4. Η Ελένη είναι 31 ετών, ειλικρινής και σπούδασε φιλοσοφία. Ως φοιτήτρια ενδιαφερόταν ιδιαίτερα για θέματα κοινωνικού ρατσισμού και κοινωνικής δικαιοσύνης. Ποιο από τα παρακάτω σου φαίνεται ποιο πιθανό;

a. Η Ελένη είναι τραπεζική υπάλληλος.
b. Η Ελένη είναι τραπεζική υπάλληλος και ενεργό μέλος σε μια φεμινιστική οργάνωση.

Αιτιολόγησε την απάντηση σου.
....
....
....

5. Κάποιος πρέπει να συγκροτήσει επιτροπές από μια ομάδα 12 ατόμων. Είναι δυνατόν να συγκροτηθούν:

a. Πιο πολλές διαφορετικές επιτροπές από 8 άτομα.

b. Πιο πολλές διαφορετικές επιτροπές από 4 άτομα.

c. Ο ίδιος αριθμός επιτροπών (είτε από 8 είτε από 4 άτομα).

Αιτιολόγησε την απάντηση σου.

....
....
....

6. Ο Δημήτρης και η Γεωργία έχουν από ένα κουτί, που το καθένα περιέχει τρεις μαύρους και δύο λευκούς βόλους.

(Α). Ο Δημήτρης βγάζει ένα βόλο από το κουτί του και βλέπει ότι το χρώμα του είναι λευκό. Χωρίς να ξαναβάλει τον πρώτο βόλο μέσα, βγάζει ένα δεύτερο. Η πιθανότητα ο δεύτερος βόλος να είναι λευκός είναι μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη από τη πιθανότητα να είναι μαύρος; Αιτιολόγησε την απάντηση σου.

....
....
....

(Β). Η Γεωργία βγάζει ένα βόλο από το κουτί της και τον αφήνει απέξω χωρίς να δει το χρώμα του. Κατόπιν βγάζει και ένα δεύτερο βόλο και βλέπει ότι είναι λευκός. Η πιθανότητα ο πρώτος βόλος να ήταν λευκός είναι μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη από τη πιθανότητα να ήταν μαύρος; Αιτιολόγησε την απάντηση σου.

....
....
....