Πανεπιστήμιο Κρήτης

University of Crete

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Σχολή Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Μαθηματικά και Εφαρμογές τους»

Μεταπτυχιακή εργασία

ΤΟ ΓΡΑΜΜΑ ΩΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΣΤΗ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ. ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ.

Φλώρα Καστανίδη του Θεοδοσίου

Επιβλέπων καθηγητής

Χρήστος Κουρουνιώτης

Ηράκλειο, Σεπτέμβριος 2011

University of Crete

Faculty of Sciences and Engineering

Interdepartmental Program of Postgraduate Study
"Mathematics and their Applications"

Master thesis

THE LETTER AS VARIABLE IN SECOND GRADE OF HIGH SCHOOL. UNDERSTANDING AND SOLVING A PROBLEM.

Kastanidi T. flora

Supervisor
Christos Kourouniotis

Heraklion, September 2011

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία πραγματοποιήθηκε στο τμήμα μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης, στα πλαίσια του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών σπουδών << Μαθηματικά και Εφαρμογές τους >>, στην κατεύθυνση << Μαθηματικά για την Εκπαίδευση >>, το Σεπτέμβριο του 2011

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι:

Κουρουνιώτης Χρήστος (επιβλέπων καθηγητής)

Μαμωνά Ιωάννα

Πάμφιλος Πάρις

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας, κύριο Χρήστο Κουρουνιώτη, ο οποίος σε όλη τη διάρκεια της εκπόνησης, με τις καίριες επισημάνσεις και την πολύτιμη υποστήριξη του με καθοδήγησε σημαντικά στο να αποκτήσει η εργασία την τελική της μορφή. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την κυρία Μαμώνα Ιωάννα και τον κύριο Πάμφιλο Πάρι που μου έκαναν την τιμή να συμμετάσχουν στην τριμελή επιτροπή αξιολόγησης της εργασίας μου. Τέλος θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου, Θεοδόση και Γεωργία και στον αδελφό μου Αλέξανδρο, για τη στήριξη και τη συμπαράσταση που έδειξαν όλα αυτά τα χρόνια των σπουδών μου.

Σεπτέμβριος 2011

Καστανίδη Φλώρα

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται αρχικά η μελέτη του επιπέδου κατανόησης της έννοιας της μεταβλητής από μαθητές της Β΄ γυμνασίου. Σύμφωνα με το σχολικό εγχειρίδιο, η μεταβλητή είναι το γράμμα χ που παριστάνει έναν οποιονδήποτε αριθμό. Υπάρχουν έξι διαφορετικές ερμηνείες που δίνουν τα παιδιά στα γράμματα. Πραγματοποιήθηκε μια έρευνα, το πρώτο μέρος της οποίας αφορούσε αυτόν το σκοπό και προέκυψε ότι η μεγαλύτερη δυσκολία των παιδιών αφορά την έννοια του γράμματος ως έναν συγκεκριμένο αλλά άγνωστο αριθμό, αλλά και ως μεταβλητή, έτσι ώστε να αντιπροσωπεύει ένα σύνολο όχι συγκεκριμένων τιμών. Χωρίσαμε τα παιδιά σε τρία επίπεδα κατανόησης της έννοιας της μεταβλητής και προέκυψε ότι τα περισσότερα παιδιά ανήκουν στο μεσαίο επίπεδο. Έπειτα επιχειρείται η μελέτη της κατανόησης ενός προβλήματος από τους ίδιους μαθητές. Υπάρχουν τέσσερις ενέργειες που πρέπει να είναι ικανός ο μαθητής να πράξει όταν έχει κατανοήσει μια έννοια και στην ουσία ένα πρόβλημα. Από την έρευνα που πραγματοποιήσαμε προέκυψε ότι οι περισσότεροι μαθητές δεν είναι σε θέση να επεκτείνουν ένα πρόβλημα σε νέες καταστάσεις, είτε αυτό αφορά την κατασκευή ισοδύναμων εξισώσεων, είτε την διαμέλιση ενός προβλήματος σε μικρότερα ώστε να οδηγηθούν στην λύση. Στο τέλος της παρούσας εργασίας επιχειρείται η συσχέτιση των αποτελεσμάτων των δυο φυλλαδίων που δόθηκαν στα παιδιά, κάθε ένα από τα οποία μελετούσε τους δυο στόχους που αναφέραμε. Προέκυψε ότι από τους 10 μαθητές που ανήκουν στο χαμηλό επίπεδο κατανόησης της έννοιας του γράμματος, μόνο ένας απάντησε ορθά και στα τρία προβλήματα του δεύτερου φυλλαδίου. Από τους 22 μαθητές που ανήκουν στο μεσαίο επίπεδο μόνο οι τέσσερις απάντησαν σωστά και στα τρία προβλήματα ενώ από τους εννέα μαθητές που ανήκουν στο υψηλό επίπεδο, οι πέντε, δηλαδή οι περισσότεροι απάντησαν ορθά και στα τρία.

Λέξεις κλειδιά: γράμμα, εξισώσεις, κατανόηση προβλήματος, κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής, μεταβλητή

Abstract

This paper attempts first to study the level of understanding the concept of variable by students in second grade of high school. According to the textbook, the variable is the letter x that represents any number. There are six different interpretations that children give to the letters. A survey was carried out, the first part of which is related to that purpose, showed that the biggest children's difficulty concerns the concept of the letter as a specific but unknown number and the concept of the letter as a variable, so that it represents a whole rather than specific values. We divided the children into three levels of understanding the concept of variable and showed that most children are in the middle level. After attempts to study the understanding of a problem from the same students. There are four steps that the student should be able to do when he has grasped a concept and in fact a problem. From the survey we conducted it is revealed that most students are not able to expand a problem in new situations, whether it involves the construction of equivalent equations, or dissecting a problem into smaller ones to lead to the solution. At the end of this paper we attempt to relate the results of the two sheets that were given to children, each of the above studied the two goals mentioned above. Showed that out of 10 students belonging to the low level of understanding of the concept of the letter, only one answered correctly to the three problems of the second sheet. Of the 22 students who belong to the middle level only four responded correctly to all three problems, while from the nine students who belong to the high level five of them, the majority answered correctly to all three.

Keywords: letter, equation, understanding a problem, understanding the concept of variable, variable

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

Η έννοια της εξίσωσης όπως και η έννοια του αγνώστου, στο Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα εισάγονται στη ΣΤ΄ δημοτικού. Σε αυτήν την τάξη όπως και στην Α΄ γυμνασίου τα παιδιά διδάσκονται να επιλύουν απλές εξισώσεις πρώτου βαθμού, κάνοντας επαλήθευση των τεσσάρων πράξεων, της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού, της αφαίρεσης και της διαίρεσης. Στην Β΄ γυμνασίου, διδάσκεται ο τυπικός αλγόριθμος επίλυσης των εξισώσεων και γίνεται η εισαγωγή της έννοιας της μεταβλητής. Ως ορισμός της μεταβλητής δίνεται ο εξής : το γράμμα χ που παριστάνει έναν οποιοδήποτε αριθμό, λέγεται μεταβλητή. Στην παρούσα εργασία στην οποία ασχολούμαστε με μαθητές της Β΄ γυμνασίου, όταν αναφερόμαστε στην έννοια της μεταβλητής, στην ουσία αναφερόμαστε στην έννοια του γράμματος. Σύμφωνα με τη Wagner (1984), πολλές φορές όταν λέμε μεταβλητή, εννοούμε κυρίως τα γράμματα ή σύμβολα και αυτό γίνεται διότι τα γράμματα μπορούν να παριστάνουν περισσότερους από έναν αριθμούς ταυτόχρονα, όπως για παράδειγμα το n όταν $0<n<20$.

Στο επίπεδο το οποίο και μελετάμε, γίνεται και η εισαγωγή των προβλημάτων, για τη λύση των οποίων χρησιμοποιούνται εξισώσεις. Μέχρι τότε τα παιδιά έλυναν προβλήματα χρησιμοποιώντας τη λογική ή απλές μαθηματικές πράξεις και διαδικασίες. Στη Β΄ γυμνασίου διδάσκεται ο τρόπος με τον οποίο πρέπει να διαβάζουν ένα πρόβλημα, να καταγράφουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα, να δημιουργούν την εξίσωση με την οποία επιλύεται το πρόβλημα και αφού τη λύσουν να γίνει έλεγχος της λύσης.

Στην εργασία αυτή μελετάμε αρχικά το επίπεδο κατανόησης της έννοιας της μεταβλητής από μαθητές της Β΄ γυμνασίου και στη συνέχεια το επίπεδο κατανόησης ενός προβλήματος. Όσον αφορά την έννοια της μεταβλητής, σύμφωνα με τον Kuchemann (1981) υπάρχουν έξι διαφορετικές ερμηνείες που δίνουν τα παιδιά στα γράμματα.

1. Το γράμμα έχει μια αριθμητική τιμή από ένα σύνολο
2. Το γράμμα δε χρησιμοποιείται ευθέως και μπορεί να αγνοηθεί η τιμή του, χωρίς να είναι απαραίτητος ο υπολογισμός του
3. Χρησιμοποιείται σα συντομογραφία για ένα αντικείμενο ή σαν ένα αντικείμενο
4. Χρησιμοποιείται σαν ένας συγκεκριμένος αλλά άγνωστος αριθμός

5. Χρησιμοποιείται σαν ένας γενικός αριθμός που μπορεί να πάρει περισσότερες από μια τιμές
6. Χρησιμοποιείται σα μεταβλητή, έτσι ώστε να αντιπροσωπεύει ένα σύνολο όχι συγκεκριμένων τιμών .

Για το σκοπό αυτό δόθηκε στα παιδιά ένα φυλλάδιο με 7 ερωτήσεις, όπου στην κάθε μια το γράμμα έχει μια από τις έξι ερμηνείες που αναφέρθηκαν. Σε δυο ερωτήσεις από τις επτά, το γράμμα είχε την ίδια έννοια και παρατηρήθηκε ότι ενώ η μια απαντήθηκε σωστά από αρκετούς μαθητές, στην άλλη υπήρχε μεγάλη δυσκολία. Όσον αφορά το επίπεδο κατανόησης ενός προβλήματος, σύμφωνα με τους Buxkemper & Hartfiel (2003), όταν ένας μαθητής έχει κατανοήσει ένα πρόβλημα, τότε θα πρέπει να μπορεί να το <u>μεταφράσει</u>, να το <u>επεκτείνει</u> σε νέες καταστάσεις, να <u>κρίνει</u> αν κάτι είναι σωστό ή να κάνει συγκρίσεις ή αντιπαραβολές για να βγάζει συμπεράσματα χρησιμοποιώντας αυτό που έχει κατανοήσει και να αντιληφθεί την κεντρική του <u>ιδέα</u>, τον τρόπο δηλαδή με τον οποίο λειτουργεί ή να μπορεί να το χρησιμοποιεί για να συνθέσει κάτι ευρύτερο και να γνωρίζει γιατί και αυτό λειτουργεί. Για το σκοπό αυτό δόθηκε στους μαθητές ένα δεύτερο φυλλάδιο με τρία προβλήματα στα οποία εξετάζονται αυτές οι ενέργειες.

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας, γίνεται η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σύμφωνα με την οποία οδηγηθήκαμε στη δημιουργία και στην ανάλυση των φυλλαδίων. Παρουσιάζονται απόψεις που αφορούν την έννοια της εξίσωσης. Γίνεται αναφορά στον τρόπο με τον οποίο εισάγονται και διδάσκονται στο σχολείο. Παρουσιάζονται οι διαδικασίες επίλυσης που χρησιμοποιούν ως επί το πλείστον οι μαθητές καθώς και οι δυσκολίες και τα λάθη τους. Παρατηρείτε ότι οι περισσότερες δυσκολίες και λάθη των παιδιών, αφορούν την έννοια του ίσον ως ισοδυναμία. Παρουσιάζονται επίσης κάποιες διδακτικές προσεγγίσεις για τη διδασκαλία των εξισώσεων και χαρακτηριστική είναι η προσέγγιση των Farmaki et al (2005), σύμφωνα με τους οποίους προτείνεται να γίνεται η διδασκαλία των εξισώσεων μετά την διδασκαλία των συναρτήσεων. Στην πέμπτη ενότητα αυτού του κεφαλαίου, γίνεται αναφορά στην έννοια της κατανόησης. Στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές κατανοούν κάτι που τους δίνετε και οι ενέργειες που ακολουθούν όταν έχουν κατανοήσει μια έννοια. Στην τελευταία παράγραφο του κεφαλαίου γίνεται αναφορά στην έννοια της μεταβλητής – γράμματος. Παρουσιάζονται οι ερμηνείες που δίνουν οι μαθητές στα γράμματα καθώς και ομοιότητες και διαφορές των γραμμάτων με λέξεις και γραμμάτων με αριθμούς

Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο εκτελέσαμε την έρευνα, τα μέσα συλλογής δεδομένων καθώς και οι συνεντεύξεις που πήραμε από συγκεκριμένη ομάδα μαθητριών για να μελετήσουμε σε βάθος της απαντήσεις που έδωσαν στα δυο φυλλάδια. Τέλος παρουσιάζεται το πρωτόκολλο ανάλυσης των δεδομένων.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των φυλλαδίων και των συνεντεύξεων. Η ανάλυση έγινε για κάθε φυλλάδιο και για κάθε μια ερώτηση ξεχωριστά. Υπάρχουν αποσπάσματα από τις απαντήσεις και τις συνεντεύξεις κάποιον μαθητών με στόχο να παρουσιάσουμε και να μελετήσουμε κάποιες από τις δυσκολίες τους. Υπάρχουν και περιπτώσεις όπου στα αποσπάσματα δεν παρουσιάζεται κάποια δυσκολία, αλλά ο τρόπος σκέψης των παιδιών διέφερε από τους άλλους και θελήσαμε να το μελετήσουμε σε βάθος.

Στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα για κάθε φυλλάδιο ξεχωριστά και έπειτα γίνετε συσχέτιση των δυο. Χωρίσαμε τους μαθητές σε τρία επίπεδα κατανόησης της έννοιας του γράμματος και συγκρίναμε κάθε επίπεδο με τα αποτελέσματα του δεύτερου φυλλαδίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Περίληψη

Στην πρώτη ενότητα αυτού του κεφαλαίου, γίνεται αναφορά στην έννοια της εξίσωσης. Παρουσιάζονται οι εξισώσεις που διδάσκονται οι μαθητές στην Α' Γυμνασίου καθώς και ο τρόπος επίλυσής τους. Τέλος γίνεται αναφορά σε τρείς κεντρικές αντιλήψεις που έχουν οι μαθητές για την εξίσωση. Κάποιοι θεωρούν τις εξισώσεις αλγόριθμους μέσω των οποίων καταλήγουν στο ζητούμενο αποτέλεσμα, κάποιοι άλλοι θεωρούν ότι οι εξισώσεις είναι ένας τρόπος περιγραφής πράξεων που οδηγούν σε κάποιο αποτέλεσμα και τέλος κάποιοι μαθητές έχουν την αντίληψη ότι η εξίσωση αποτελεί μια περιγραφή βασικών σχέσεων.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου παρουσιάζονται οι διαδικασίες επίλυσης εξισώσεων που χρησιμοποιούν ως επί το πλείστον οι μαθητές. Μερικές από αυτές είναι, 'η χρήση γνωστών πράξεων', 'τεχνικές μέτρησης' και 'δοκιμαστική αντικατάσταση'. Επίσης οι δυο πιο συχνές στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές όταν επιλύουν μια εξίσωση, φαίνεται να είναι οι εξής: 'κάνω την ίδια πράξη και στα δυο μέλη' και 'όταν αλλάζω μεριά, αλλάζω πρόσημο'. Όσον αφορά την κατάστρωση εξίσωσης από πρόβλημα, οι μαθητές συνήθως χρησιμοποιούν τη στρατηγική της μετάφρασης ή αντικαθιστούν τιμές στις εξισώσεις που έχουν κατασκευάσει, για να ελέγξουν αν είναι σωστές ή όχι.

Στην τρίτη ενότητα του κεφαλαίου, γίνεται αναφορά σε διάφορες διδακτικές προσεγγίσεις μαθηματικών αλγορίθμων γενικά και συγκεκριμένα της επίλυσης εξισώσεων. Μια από αυτές είναι, να διδάσκονται αρχικά οι μετασχηματισμοί εξισώσεων, χωρίς να διδάσκεται η σειρά τους ώστε να ανακαλύψουν οι μαθητές μόνοι τους τον τυπικό αλγόριθμο, χρησιμοποιώντας αυτούς τους μετασχηματισμούς. Μια άλλη προσέγγιση είναι η χρήση του μοντέλου της ζυγαριάς, το οποίο αναπαριστά μόνο θετικές ποσότητες, καθώς επίσης και η διδασκαλία της επίλυσης εξισώσεων μέσω της έννοιας της συνάρτησης.

Στην τέταρτη ενότητα του κεφαλαίου παρουσιάζονται οι πιο συχνές δυσκολίες και λάθη των μαθητών κατά την επίλυση εξισώσεων. Η πιο βασική δυσκολία, αφορά την έννοια του ίσον και για αυτόν το λόγο παρουσιάζονται σχετικές έρευνες που έγιναν σε μαθητές. Τα πιο συχνά λάθη των μαθητών αφορούν, την ισοδυναμία των αλγεβρικών μετασχηματισμών στα δυο μέλη της εξίσωσης, τη γραφή μιας νέας εξίσωσης (δηλαδή κακή μεταφορά) καθώς και λάθη που αφορούν τις πράξεις.

Στην πέμπτη ενότητα του κεφαλαίου γίνεται αναφορά στην έννοια της κατανόησης. Παρουσιάζονται διαφορετικές απόψεις που αφορούν την κατανόηση μιας έννοιας από τους μαθητές, καθώς επίσης και ο διαχωρισμός σε ‘εννοιολογική’ και ‘διαδικαστική’ κατανόηση. Φαίνεται ότι όταν ένας μαθητής έχει κατανοήσει κάτι, τότε θα πρέπει να μπορεί να το προσλαμβάνει και να το αποδίδει σε διαφορετικές μορφές από αυτήν που του δόθηκε αρχικά (ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ), να μπορεί να το επεκτείνει σε νέες καταστάσεις (ΕΠΕΚΤΑΣΗ), να έχει την ικανότητα να κρίνει αν κάτι είναι σωστό ή όχι (ΚΡΙΣΗ) και τέλος να είναι ικανός να αντιληφθεί τη κεντρική του ιδέα (ΙΔΕΑ).

Στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου, γίνεται αναφορά στην έννοια της μεταβλητής. Σύμφωνα με την Wagner (1984), όταν λέμε μεταβλητή, συνήθως εννοούμε τα γράμματα διότι αυτά μπορούν να παριστάνουν, περισσότερους από έναν αριθμούς ταυτόχρονα. Συνολικά φαίνεται να υπάρχουν 6 διαφορετικές ερμηνείες που δίνουν οι μαθητές στα γράμματα, όταν αυτά παρουσιάζονται σε αλγεβρικές παραστάσεις. Στο τέλος της ενότητας αυτής παρουσιάζονται κάποιες ομοιότητες και διαφορές των γραμμάτων και των αριθμών καθώς επίσης και των γραμμάτων και λέξεων.

1.1 Η έννοια της εξίσωσης

Μια από τις βασικότερες έννοιες της Άλγεβρας είναι εκείνη της εξίσωσης. Οι εξισώσεις αποτελούν μέρος του προγράμματος σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης όλων των χωρών παγκοσμίως. Κανένα άλλο αντικείμενο των μαθηματικών δεν διδάσκεται τόσο όσο αυτές στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και αυτό διότι η εξίσωση είναι η «ουσία», με την έννοια ότι αποτελεί το κοινό στοιχείο μιας οικογένειας προβλημάτων. Στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου δίνεται ο παρακάτω ορισμός της έννοιας της εξίσωσης : ‘‘Εξίσωση με έναν άγνωστο, είναι μια ισότητα που περιέχει αριθμούς και ένα γράμμα (άγνωστο)’’ (Παράρτημα Γ). Ορισμός της εξίσωσης δίνεται και στο βιβλίο της Β’ Γυμνασίου (Παράρτημα Δ). Σύμφωνα με τον Oksuz (2007), εξίσωση είναι μια σχέση που εκφράζει την ιδέα ότι οι δυο παραστάσεις έχουν την ίδια τιμή και σύμφωνα με την Vlassis (2002), είναι μια μαθηματική παράσταση που εκφράζει την ισοδυναμία των παραστάσεων που βρίσκονται εκατέρωθεν του συμβόλου της ισότητας. Εάν θέλουμε να δώσουμε λοιπόν τον ορισμό της εξίσωσης, θα πούμε ότι είναι μια μαθηματική δήλωση που βεβαιώνει την ισότητα δυο εκφράσεων. Βέβαια υπάρχει και η αδύνατη μορφή μιας εξίσωσης, όπου σε αυτή την περίπτωση οι εκφράσεις που βρίσκονται εκατέρωθεν του συμβόλου της ισότητας, δε μπορούν να είναι ίσες.

Εξισώσεις πρώτου βαθμού

Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα οι εξισώσεις εισάγονται από το δημοτικό. Στη ΣΤ΄ δημοτικού, όπως και στην Α΄ γυμνασίου τα παιδιά διδάσκονται να λύνουν τις εξισώσεις της μορφής : $a+x=b$, $x-a=b$, $a-x=b$, $ax=b$, $a:x=b$ και $x:a=b$. Όπως φαίνεται στο παράρτημα Γ, δίνονται αμέσως οι λύσεις αυτών των εξισώσεων, οι οποίες είναι οι εξής: $x=b-a$, $x=b+a$, $x=a-b$, $x=b:a$, $x=a:b$ και $x=ab$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι στην πραγματικότητα, η μέθοδος που διδάσκονται τα παιδιά για να επιλύσουν αυτές τις εξισώσεις, είναι η επαλήθευση των τεσσάρων πράξεων, πρόσθεση, αφαίρεση, διαίρεση και πολλαπλασιασμός.

Τα αρχικά γράμματα της αλφαβήτου α, β, γ, χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν τις σταθερές, ενώ τα γράμματα x,y,z, από το τέλος του λατινικού αλφαβήτου, χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν τις μεταβλητές μιας εξίσωσης. Τέλος το σύμβολο της ισότητας δηλώνει την ισοδυναμία των εκφράσεων που βρίσκονται εκατέρωθεν αυτού.

Στην Α΄ γυμνασίου εισάγονται οι έννοιες, αόριστη εξίσωση ή ταυτότητα και αδύνατη εξίσωση (παράρτημα Γ). Τα παιδιά καλούνται σε κάποιες ασκήσεις να εξετάσουν αν μια τιμή είναι λύση μιας εξίσωσης, καθώς επίσης να δημιουργήσουν εξίσωση από ένα πρόβλημα. Στην Β΄ γυμνασίου γίνεται μια εκτενής περιγραφή της επίλυσης των πρωτοβάθμιων εξισώσεων. Τα βήματα της επίλυσης είναι τα εξής:

1. Απαλοιφή παρονομαστών
2. Κάνουμε πράξεις
3. Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους
4. Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων
5. Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου

Τα γράμματα α,β,γ λαμβάνουν τώρα τιμές στους ρητούς, ή ακόμα και στους πραγματικούς ενώ τα προηγούμενα χρόνια λάμβαναν τιμές από τους φυσικούς αριθμούς.

Οι μαθητές γυμνασίου έχουν σχηματίσει την αντίληψη ότι οι εξισώσεις είναι αλγόριθμοι υπολογισμού. Οι ερευνητές Stacey & Mac Gregor (1997), παρατηρούν τρεις κεντρικές αντιλήψεις που έχουν σχηματίσει οι μαθητές για την εξίσωση. Κάποιοι θεωρούν τις εξισώσεις αλγόριθμους μέσω των οποίων καταλήγουν στο ζητούμενο αποτέλεσμα, δηλαδή θεωρούν ότι εξίσωση είναι η διαδικασία που ακολουθούμε για να βρούμε τον άγνωστο, άλλοι πιστεύουν ότι οι εξισώσεις είναι ένας τρόπος περιγραφής πράξεων που οδηγούν σε κάποιο αποτέλεσμα όπως για παράδειγμα η εξίσωση $x+25=32$, περιγράφει το άθροισμα ενός αριθμού x με το 25 και υπάρχουν και κάποιοι μαθητές που έχουν την αντίληψη ότι η εξίσωση αποτελεί μια περιγραφή βασικών σχέσεων όπως για παράδειγμα το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς α : $E=\alpha^2$.

1.2 Διαδικασίες επίλυσης εξισώσεων Α΄ βαθμού

Παρά το γεγονός ότι η εξίσωση είναι ένας αλγόριθμος και έχει την τυπική μέθοδο επίλυσης της, το κάθε παιδί ακολουθεί το δικό του τρόπο. Έχουν γίνει πολλές έρευνες για να εξετάσουν τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές όταν εισάγονται στην άλγεβρα, καθώς επίσης και τις μεθόδους που χρησιμοποιούν κατά την επίλυση εξισώσεων α' βαθμού. Το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα, που γίνεται με την εισαγωγή της έννοιας τις εξίσωσης, είναι μια δύσκολη φάση για τους μαθητές. Σύμφωνα με το Λεμονίδη (1996), για να περάσει από τη στοιχειώδη αριθμητική στην άλγεβρα, ο μαθητής θα πρέπει να αντικαταστήσει την άμεση επίλυση και χειρισμό των προβλημάτων που δίνονται στη φυσική γλώσσα, με τη χρησιμοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων που βασίζονται σε συγκεκριμένους κανόνες. Σύμφωνα με την Kieran (1992) οι μαθητές από την ηλικία των 10 έως και 14 ετών, συχνά επιλύουν τις εξισώσεις με μεθόδους που δε διδάσκονται στο σχολείο.

Σύμφωνα με την Kieran (1992) οι πιο συχνές στρατηγικές επίλυσης εξισώσεων που χρησιμοποιούν οι μαθητές καθώς είναι επηρεασμένοι από την καθημερινή τους εμπειρία ή την πρώιμη αριθμητική τους γνώση, είναι οι εξής:

Στρατηγικές επίλυσης	**Παράδειγμα**	**Τρόπος σκέψης**
Χρήση γνωστών πράξεων	χ+7= 12	Γνωρίζω ότι 5+7=12.Άρα χ=5
Τεχνικές μέτρησης	χ+8=11	Μετράω από το 8 μέχρι το 11. Άρα χ=3
Δουλεύω προς τα πίσω	5χ+2=17	Το αποτέλεσμα είναι 17, άρα αν μειωθεί κατά 2 θα γίνει 15, το οποίο προκύπτει αν το 5 πολλαπλασιαστεί με το 3. Άρα χ=3
Cover-up	3χ+5=8χ	Αφού 3χ+5χ=8χ, άρα 5χ=5 Οπότε χ=1
Δοκιμαστική αντικατάσταση	3χ+2=11	Αντικαθιστώ στο χ διάφορες τιμές μέχρι να διαπιστώσω ότι η χ=3 επαληθεύει την εξίσωση

Πίνακας 1

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, οι μαθητές επιλύουν τις εξισώσεις με μεθόδους που δε διδάσκονται στο σχολείο. Η Petitto (1979) τονίζει ότι η αποκλειστική χρήση των 3 τελευταίων μεθόδων δε βοηθά το μαθητή να γενικεύει τα συμπεράσματα του. Τονίζει επίσης ότι αν ο μαθητής χρησιμοποιεί μόνο αυτές τις μεθόδους, δε συνειδητοποιεί το ρόλο του συμβόλου της ισότητας ως προς την ισοδυναμία. Σύμφωνα με το Bruner (1972), οι στρατηγικές αυτές λειτουργούν ως ένας «ενισχυτής των διεργασιών της σκέψης» των μαθηματικών και της λογικής. Σύμφωνα με την Kieran (1988) οι μαθητές που χρησιμοποιούν τη στρατηγική της δοκιμής πραγματικών αριθμών, είναι πιο πιθανό στο μέλλον να κατανοήσουν τον ρόλο της ισοδυναμίας του συμβόλου της ισότητας.

Όταν οι μαθητές εισάγονται στο γυμνάσιο έρχονται αντιμέτωποι με τις πρώτες έννοιες της άλγεβρας καθώς επίσης και με τις εξισώσεις που έχουν λύσεις μη ακέραιους αριθμούς. Επεξεργάζονται έτσι τις εξισώσεις διαφορετικά. Οι δύο πιο συχνές στρατηγικές είναι οι εξής:

1. Κάνω την ίδια πράξη και στα δυο μέλη
2. Όταν αλλάζω μεριά, αλλάζω πρόσημο

Παρά το γεγονός ότι οι δυο αυτοί τρόποι είναι όμοιοι, σύμφωνα με την Kieran (1988,1989), οι μαθητές που έρχονται αντιμέτωποι για πρώτη φορά με την άλγεβρα, αντιλαμβάνονται ως διαφορετικούς αυτούς τους δυο τρόπους. Ένας μαθητής που χρησιμοποιεί τη στρατηγική «κάνω την ίδια πράξη και στα δυο μέλη» κατανοεί γρηγορότερα το ρόλο της ισοδυναμίας του συμβόλου της ισότητας. Σε αντίθεση, οι μαθητές που αλλάζουν μεριά στους όρους της εξίσωσης, αλλάζοντας το πρόσημο τους, δεν αντιμετωπίζουν την εξίσωση σαν ένα μαθηματικό αντικείμενο, αλλά απλά εφαρμόζουν τυφλά την μέθοδο αυτή την οποία έχουν διδαχθεί στο σχολείο (Kieran, 1992).

Ο Λεμονίδης (1996), (αναφορά: Kieran, 1990), προσδιορίζει τρεις τρόπους με τους οποίους οι μαθητές προσεγγίζουν την επίλυση εξισώσεων:

1. Με το διαισθητικό τρόπο
2. Με τη δοκιμαστική αντικατάσταση
3. Με την τυπική μέθοδο

Όπως φαίνεται, ο διαισθητικός τρόπος αναφέρεται στις τέσσερις πρώτες στρατηγικές του πίνακα 1, όπου σύμφωνα με το Λεμονίδη (1996), οι μαθητές αναλύουν τις αριθμητικές σχέσεις που υπάρχουν στην εξίσωση, χωρίς να χρησιμοποιούν τα βήματα του τυπικού αλγορίθμου, με σκοπό να προσδιορίσουν την τιμή του αγνώστου. Η τυπική μέθοδος είναι ο αλγόριθμος που διδάσκεται στο σχολείο για την επίλυση εξισώσεων, δηλαδή κατάλληλοι αλγεβρικοί μετασχηματισμοί στα δυο μέλη της εξίσωσης, που οδηγούν σε ισοδύναμες σχέσεις μέχρι να απομονωθεί και να βρεθεί η τιμή του αγνώστου. Όπως είναι κατανοητό σε αυτή τη μέθοδο, ανήκουν οι στρατηγικές «κάνω την ίδια πράξη και στα δυο μέλη» και «όταν αλλάζω μεριά, αλλάζω πρόσημο».

Κατάστρωση εξίσωσης από πρόβλημα

Στο σχολικό βιβλίο της Α΄ και Β΄ γυμνασίου υπάρχουν αρκετές ασκήσεις στις οποίες οι μαθητές καλούνται να μεταφράσουν ένα λεκτικό πρόβλημα, καταστρώνοντας μια εξίσωση την οποία και πρέπει να επιλύσουν. Σύμφωνα με τους Buxkemper & Hartfiel (2003) όταν κάποιος έχει κατανοήσει ένα πρόβλημα τότε θα πρέπει να μπορεί να το προσλαμβάνει και να το αποδίδει σε διαφορετικές μορφές από αυτήν που παρουσιάστηκε αρχικά, δηλαδή να μπορεί να το μεταφράσει. Στην έρευνα των Δραμαλίδη και Σακονίδη (2006) που εστιάζεται στις διαδικασίες αναπαράστασης που χρησιμοποιούν οι μαθητές όταν επιλύουν ένα πρόβλημα με εξισώσεις, εντοπίζουν δυο κυρίαρχες προσεγγίσεις. Στην πρώτη προσέγγιση, το πρόβλημα «μεταφράζεται» φράση προς φράση σε αλγεβρική μορφή και η δεύτερη αφορά τη χρησιμοποίηση ενός μαθηματικού τύπου ή κανόνα. Όσον αφορά την πρώτη προσέγγιση, οι ερευνητές τονίζουν ότι ο σχηματισμός των αντίστοιχων εξισώσεων απαιτεί σημασιολογική γνώση, όμως συχνά οι μαθητές βασίζονται μόνο στη γλωσσική σύνταξη του προβλήματος. Πιο συχνά οι μαθητές χρησιμοποιούν τη στρατηγική της «μετάφρασης» ή αντικαθιστούν τιμές στις εξισώσεις που έχουν κατασκευάσει για να ελέγξουν αν είναι σωστές ή όχι. Σε οποιαδήποτε περίπτωση σύμφωνα με την Kieran (1992), οι περισσότεροι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών ενός προβλήματος και τονίζει ότι αν διαφοροποιηθεί λίγο το σενάριο του προβλήματος, τότε είναι πολύ πιθανό οι μαθητές να κατασκευάσουν λάθος εξίσωση.

Στην έρευνα του Λεμονίδη (1996), δόθηκε σε 146 μαθητές της Β’ και σε 139 μαθητές της Γ΄ γυμνασίου το εξής πρόβλημα : «Ο Πέτρος παίζει μπίλιες με τους φίλους του. Το πρωί κέρδισε 14 και το βράδυ έχασε 31 μπίλιες, οπότε του έμειναν 23. Πόσες μπίλιες είχε από την αρχή? ». Οι μαθητές απάντησαν με δυο τρόπους, πρώτον με κατάστρωση εξίσωσης από τα δεδομένα του προβλήματος και δεύτερον εκτέλεσαν αριθμητικές δοκιμές με σκοπό να βρουν τη λύση. Στην Β΄ τάξη το 46,5% των μαθητών δοκίμασαν να απαντήσουν με αριθμητικές δοκιμές και από αυτούς 16% απάντησαν σωστά και το 25,5% με την εξίσωση όπου το 23% αυτών απάντησε ορθά. Στη Γ΄ τάξη το 49,5% δοκίμασαν να απαντήσουν με εξίσωση και από αυτούς το 36% απάντησαν σωστά, ενώ το 33% δοκίμασαν να απαντήσουν με την αριθμητική μέθοδο και το 14,5% αυτών έπραξε σωστά.

1.3 Διδακτικές προσεγγίσεις

Οι εξισώσεις στο επίπεδο μου μελετάμε έχουν το δικό τους αλγόριθμο επίλυσης και όπως αναφέρθηκε προηγουμένως υπάρχουν μαθητές που θεωρούν τις εξισώσεις αλγόριθμους υπολογισμού. Έχουν γίνει αρκετές έρευνες που σχετίζονται με τη διδασκαλία των μαθηματικών αλγορίθμων και της εξίσωσης ειδικότερα, κάποιες από τις οποίες αναλύουμε παρακάτω.

Στην έρευνα των Mingus & Grassl (1998) τονίζεται ότι όταν οι μαθητές ανακαλύπτουν μόνοι τους μαθηματικούς αλγόριθμους, τότε χρησιμοποιούν την αλγοριθμική σκέψη, η οποία επισημαίνουν ότι δε θα γινόταν διαφορετικά αντιληπτή. Αυτή η διαδικασία ενθαρρύνει τα παιδιά διότι νιώθουν πως δημιουργούν μαθηματικά που είναι «δικά τους μαθηματικά». Δεν είναι κάτι που διδάσκονται και εφαρμόζουν τυποποιημένα χωρίς να έχουν επαρκή γνώση για το αντικείμενο αυτό.

Στην έρευνα των Pirie & Martin (1997), διδάχθηκαν οι εξισώσεις σε μαθητές χαμηλής επίδοσης, χρησιμοποιώντας αριθμόκουτα. Τα αριθμόκουτα είναι κουτιά τα οποία πρέπει να συμπληρώσουν οι μαθητές με κάποιους αριθμούς ώστε να ισχύουν ισότητες. Ένα παράδειγμα αυτής της μεθόδου είναι το εξής: $25+\square+3=\square+48$. Οι μαθητές δεν έρχονται αντιμέτωποι με τις μεταβλητές, μια έννοια που προκαλεί σύγχυση σε αρκετά παιδιά. Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας τους, συμπέραναν ότι με αυτή την προσέγγιση οι μαθητές κατανόησαν τι σημαίνει εξίσωση, χωρίς να υποδεικνύονται κανόνες ή αλγόριθμοι από το δάσκαλο. Ανακάλυψαν δηλαδή μόνοι τους κανόνες και αλγορίθμους αναζητώντας τους «κρυφούς αριθμούς».

Οι Star et al (2005) δίδαξαν τους μετασχηματισμούς που χρησιμοποιούνται κατά την επίλυση εξισώσεων, σε παιδιά που δε γνώριζαν τον τυπικό αλγόριθμο. Η κύρια ανησυχία τους ήταν κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να ανακαλύψουν συνειδητά τον τυπικό αλγόριθμο. Στόχος της έρευνας ήταν, να μελετήσει την ανάπτυξη της γνώσης των μαθητών πάνω στους τυπικούς αλγορίθμους στην άλγεβρα. Δόθηκαν στα παιδιά εξισώσεις τις οποίες έπρεπε να επιλύσουν χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς που διδάχθηκαν και προέκυψε ότι το 41% των μαθητών χρησιμοποίησε τον τυπικό αλγόριθμο στο τελικό δοκίμιο. Η μεγαλύτερη δυσκολία που υπήρχε στους μαθητές που δεν ανακάλυψαν τον τυπικό αλγόριθμο ήταν ότι δεν κατανόησαν πλήρως ποιους όρους έπρεπε να μεταφέρουν στο άλλο μέρος με αποτέλεσμα να μεταφέρουν έναν όρο στο ένα μέλος και στη συνέχεια να τον μεταφέρουν πάλι στο αρχικό μέλος.

Στην έρευνα της Vlassis (2002), έγινε χρήση του μοντέλου της ζυγαριάς για την κατανόηση της διαδικασίας επίλυσης εξισώσεων πρώτου βαθμού. Χρησιμοποίησαν ζυγαριές στις οποίες τοποθετούσαν μπαλόνια που αντιπροσώπευαν τις ποσότητες που έβαζαν στη ζυγαριά. Τα αποτελέσματα της έρευνας ήταν ότι το μοντέλο της ζυγαριάς βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν και να αντιληφθούν την έννοια του συμβόλου της ισότητας ως ισοδυναμία ανάμεσα στα δυο μέλη μιας εξίσωσης. Προέκυψε όμως επίσης ότι δεν βοηθά τους μαθητές να αντιληφθούν τη μεταβλητή ως άγνωστο. Το μοντέλο της ζυγαριάς της έρευνας δεν υποστήριζε αρνητικές ποσότητες με αποτέλεσμα οι μαθητές που κλήθηκαν να λύσουν εξισώσεις μετά το μοντέλο αυτό και στην πραγματικότητα ήρθαν αντιμέτωποι με αλγεβρικούς μετασχηματισμούς, εκτελούσαν μηχανικά τον τυπικό αλγόριθμο και έκαναν λάθη. Δηλαδή δεν βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν την επίλυση εξισώσεων με αρνητικούς αριθμούς.

Το πρόβλημα αυτό θα μπορούσε να διορθωθεί με τη χρήση μπαλονιών και για αρνητικές ποσότητες. Όμως εξακολουθούν να υπάρχουν προβλήματα όπως τονίζουν οι Lima & Tall (2008), ακόμα και σε εξισώσεις που φαίνεται να έχουν θετικές όλες τις ποσότητες. Ως παράδειγμα δίνουν την εξίσωση $2χ+3=2+χ$ η οποία φαίνεται εύκολο να αναπαρασταθεί με το μοντέλο της ζυγαριάς, όμως με αλγεβρικούς μετασχηματισμούς καταλήγει στην $χ+1=0$, η οποία φαίνεται αδύνατο να αναπαρασταθεί με το μοντέλο της ζυγαριάς.

Στην έρευνα των Boulton-Lewis et al (1997) παρουσίασαν τη χρήση χειραπτικού υλικού κατά τη διδασκαλία των εξισώσεων πρώτου βαθμού. Χρησιμοποίησαν δυο κύπελλα διαφορετικών χρωμάτων και δυο μάρκες διαφορετικών χρωμάτων. Με τα κύπελλα αναπαριστούν το χ και το –χ και με τις μάρκες το 1 και το -1. Η έρευνα έγινε σε μαθητές της Β΄ γυμνασίου με καλές επιδόσεις, σε ένα σχολείο στο οποίο εφαρμόζονται πρωτοποριακές διδασκαλίες. Το συμπέρασμα που προέκυψε από τις συνεντεύξεις που πήραν από τους μαθητές ήταν ότι τα παιδιά δε χρησιμοποίησαν αυτή τη μέθοδο όταν έπρεπε να επιλύσουν κάποιο πρόβλημα. Η συμπεριφορά αυτή δικαιολογείται από τους ερευνητές διότι οι μαθητές πρέπει να επεξεργαστούν πολλά πράγματα την ίδια στιγμή, για να λύσουν μια εξίσωση. Πρέπει να συνδυάσουν γνώσεις για σύμβολα, αριθμούς και μεταβλητές, για κανόνες της αριθμητικής για απλές πράξεις, για τη μαθηματική έννοια του ίσον και τέλος για τη μαθηματική σημασία και τους κανόνες των πράξεων με μεταβλητές. Συμπεραίνουν λοιπόν ότι αν όλα τα παραπάνω δεν έχουν κατανοηθεί πλήρως από τους μαθητές, τότε αποτελούν μια πολύπλοκη και δύσκολη διαδικασία. Αν λοιπόν προστεθεί και η χρήση χειραπτικού υλικού, τότε οι μαθητές επιβαρύνονται ακόμα περισσότερο.

Τέλος στην έρευνα των Farmaki et al (2005) προτείνεται να γίνεται η διδασκαλία των εξισώσεων μετά τη διδασκαλία των συναρτήσεων. Το Ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα προτείνει το αντίστροφο. Οι εξισώσεις στο Ελληνικό σχολείο εισάγονται στη ΣΤ΄ δημοτικού ενώ οι συναρτήσεις στη Β΄ γυμνασίου. Η έρευνα αυτή πραγματοποιήθηκε σε τμήμα της Β΄ γυμνασίου και περιελάμβανε 26 μαθήματα των 45 λεπτών το κάθε ένα, 4 μαθήματα την εβδομάδα. Τα μαθήματα αυτά αντικατέστησαν τις ώρες διδασκαλίας των εξισώσεων και ένα μέρος από το κεφάλαιο των συναρτήσεων. Αρχικά εξήγησαν στα παιδιά το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, τους έμαθαν να φτιάχνουν πίνακα τιμών και να σχεδιάζουν το γράφημα μιας συνάρτησης. Έδωσαν μεγάλη έμφαση στη γραφική αναπαράσταση ενός προβλήματος, όπου το χ είχε τη μορφή μεταβλητής, παρά απλά μιας άγνωστης ποσότητας. Στο τελευταίο μέρος της ερευνάς τους, δίδαξαν στους μαθητές την τυπική επίλυση των εξισώσεων.

Στο τέλος της έρευνας έδωσαν στα παιδιά ένα πρόβλημα που αναφέρεται στον τρόπο υπολογισμού του κομίστρου ενός ταξί : 0,80 Ε πάγιο και 0,30 Ε για κάθε χιλιόμετρο. Αρχικά ζητήθηκε από τους μαθητές να συμπληρώσουν έναν πίνακα τιμών, να εκφράσουν τη συνάρτηση που συνδέει τα δυο ποσά χ και y (όπου χ η απόσταση σε χιλιόμετρα και όπου y το κόστος) και να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση. Τέλος ζητήθηκε από τους μαθητές να βρουν πόσο απέχει το σπίτι ενός ατόμου από μια συγκεκριμένη τοποθεσία, αν για τη διαδρομή αυτή πλήρωσε 3,5 Ε. Στόχος της τελευταίας ερώτησης ήταν να συνδέσουν την έννοια της συνάρτησης με την έννοια της εξίσωσης. Για να απαντηθεί αυτό το ερώτημα, χρησιμοποιήθηκαν διάφορες στρατηγικές: με βάση τον πίνακα τιμών, με βάση τη γραφική παράσταση, με επίλυση της εξίσωσης συμβολικά. Τα παιδιά με βάση τις παραπάνω στρατηγικές, για να απαντήσουν στο τελευταίο ερώτημα:

1. Έδωσαν τη συγκεκριμένη τιμή στην εξαρτημένη μεταβλητή y στον πίνακα τιμών και έψαχναν την αντίστοιχη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής

2. Χρησιμοποίησαν το γράφημα της y=αχ+β και έψαχναν την τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής χ, όταν η εξαρτημένη μεταβλητή y είχε συγκεκριμένη τιμή
3. Έλυσαν την εξίσωση 3,5=0,30χ+ 0,80

Οι ερευνητές συμπέραναν ότι η προσέγγισή τους ενθαρρύνει τους μαθητές να συνδέουν διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης μεταξύ τους και να συνδέουν κάθε τέτοια αναπαράσταση με την επίλυση εξίσωσης. Παρατήρησαν ότι αυτή η διαδικασία ήταν θεμελιώδης για την ανάπτυξη της εννοιολογικής γνώσης. Παρατηρήθηκε όμως και μια γνωστική δυσκολία σε αυτήν την προσέγγιση, η παρουσία δυο μεταβλητών χ και y δημιούργησε δυσκολίες σε κάποιους μαθητές. Τα παιδιά έβλεπαν δυο αγνώστους, δεν ήταν εύκολο για αυτά να δουν το y ως διαφορετικό τρόπο γραφής μιας παράστασης που περιέχει το χ.

1.4 Δυσκολίες και λάθη των μαθητών

Δυσκολίες μαθητών

Πολλές έρευνες έχουν γίνει για να εξετάσουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όταν εισάγονται στην Άλγεβρα. Η εισαγωγή αυτή στο Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα γίνεται στην Α’ και περισσότερο στη Β’ Γυμνασίου, όπου οι μαθητές αντιμετωπίζουν για πρώτη φορά την έννοια του αγνώστου και της εξίσωσης. Μέχρι εκείνη την ηλικία τα παιδιά μαθαίνουν να επιλύουν απλές εξισώσεις της μορφής a+x=b, x-a=b, a-x=b, ax=b, a:x=b και x:a=b, όπου στην ουσία για να βρουν τη λύση έκαναν την επαλήθευση των τεσσάρων πράξεων. Δεν μάθαιναν τον τυπικό αλγόριθμο επίλυσης των εξισώσεων παρά μόνο τις έλυναν ‘αριθμητικά’, δηλαδή έκαναν δοκιμές για να βρουν την απάντηση. Οπότε καταλαβαίνουμε ότι το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα όσον αφορά τις εξισώσεις, αποτελεί μια κρίσιμη φάση για τους περισσότερους μαθητές.

Σύμφωνα με τους Δραμαλίδη και Σακονίδη (2006), οι δυσκολίες των μαθητών συνδέονται με μια σειρά από χαρακτηριστικά γνωρίσματα των συμβόλων :

α) το επίπεδο αφαίρεσης των ιδεών που αναπαριστούν

β) την πυκνότητα του νοήματος που μεταφέρουν

γ) την εξάρτηση της σημασίας τους από τα σύμβολα με τα οποία γειτονεύουν

δ) την έμφαση που δίνεται κατά τη διδασκαλία στο χειρισμό τους, χωρίς εστίαση στις αλγεβρικές ιδέες που αναπαριστούν

Μία από τις βασικότερες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την επίλυση των εξισώσεων αφορά τη σημασία του ‘‘=’’. Από την εμπειρία τους στην αριθμητική, οι μαθητές θεωρούν ότι το ‘‘=’’ σημαίνει ‘να δώσεις μια απάντηση’, δηλαδή ‘να κάνεις κάτι’ και να βρεις έναν αριθμό. Όταν λοιπόν εισάγονται στην άλγεβρα έρχονται αντιμέτωποι με την ‘κανονική’ σημασία του ίσον, δηλαδή την ισοδυναμία. Δυστυχώς οι ρυθμοί με τους οποίους τα παιδιά διδάσκονται τις εξισώσεις είναι πολύ γρήγοροι, με αποτέλεσμα να μην κατανοούν πλήρως τις αλγεβρικές ιδέες που αναπαριστούν τα σύμβολα και ειδικά το ίσον.

Σύμφωνα με τον Λεμονίδη (1996), (αναφορά: Cortes A., Vergnaud G. και Kavafian N., 1990), το σύμβολο '=' μπορεί να λαμβάνει τις παρακάτω διαφορετικές σημασίες :

1. **Δίνει ένα αποτέλεσμα :** όπως αναφέρθηκε προηγουμένως είναι η πρώτη σημασία που δίνουν οι μαθητές στο ''=''. Όταν λοιπόν πρέπει να χειριστούν εκφράσεις όπως για παράδειγμα $3+\chi = 5+2\chi$ ή ακόμα και πιο απλές όπως $6+2 = 3+5$, δυσκολεύονται να τις χειριστούν διότι το '=' έχει την σημασία της ισοδυναμίας . Παρατήρησαν επίσης ότι τα παιδιά επηρεάζονται από τους υπολογιστές τσέπης όπου πατώντας το πλήκτρο ''='' εμφανίζεται το αποτέλεσμα των πράξεων που εκτελούσαν προηγουμένως. Η επίπτωση αυτής της αντίληψης είναι η λάθος γραφή της επίλυσης μιας εξίσωσης, όπως για παράδειγμα, $2\chi+8 = \chi-5 = \chi = -13$

2. **Ισοδυναμία :** το σύμβολο ''='' στις εξισώσεις, σημαίνει πως, ότι βρίσκεται στο αριστερό μέλος είναι ισοδύναμο με αυτό που βρίσκεται στο δεξί μέλος για κάποια κατάλληλη τιμή του αγνώστου ή των αγνώστων.

3. **Ταυτότητα:** Πολλές φορές το σύμβολο ''='' έχει τη σημασία της ταυτότητας, όπως για παράδειγμα $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$.

4. **Προσδιορισμός:** σε πολλές περιπτώσεις το ''='' έχει τη σημασία του προσδιορισμού ή του ορισμού για κάτι που βρίσκεται στα αριστερά του. Παράδειγμα στη συνάρτηση $f(x)=4\chi^2+5\chi+2$, το ''='' προσδιορίζει την αναλυτική έκφραση της συνάρτησης f(x).

Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ γυμνασίου, στο κεφάλαιο των εξισώσεων, υπάρχει μια εφαρμογή που περιγράφει αναλυτικά τα βήματα με τα οποία επιλύεται η εξίσωση $3\chi+200=\chi+600$. Επισημαίνεται στους μαθητές ότι, αφαιρούμε και από τα δυο μέλη της εξίσωσης το 200 για να φύγει από το πρώτο μέλος, στο οποίο θέλουμε να μείνουν τα χ και συνεχίζεται με τον ίδιο τρόπο (παράρτημα Δ). Αμέσως μετά την εφαρμογή υπάρχει η πρόταση: η διαδικασία που εκτελέσαμε προσθέτοντας ή αφαιρώντας και στα δυο μέλη τον ίδιο αριθμό για να «απομονώσουμε» το χ στο πρώτο μέλος της εξίσωσης, μπορεί να γίνει πιο γρήγορα με τη βοήθεια του εξής παρακάτω κανόνα: ‘‘Σε μια εξίσωση μπορούμε να μεταφέρουμε όρους από το ένα μέλος στο άλλο, αλλάζοντας το πρόσημό τους. ’’

Επειδή ο χρόνος που διδάσκεται το μάθημα αυτό είναι πολύ λίγος ώστε να γίνει κατανοητή από τους μαθητές η εφαρμογή, δηλαδή πως, ότι κάνω στο ένα μέλος, κάνω και στο άλλο, έχει ως αποτέλεσμα τα παιδιά να απομνημονεύουν τον κανόνα ‘‘όταν αλλάζω μεριά αλλάζω πρόσημο’’ και να μη δίνουν σημασία στην έννοια του ίσον. Είναι εξαιρετικά σημαντικό να κατανοήσουν οι μαθητές την ισοδυναμία που εκφράζει το ίσον για να γίνουν ικανοί λύτες εξισώσεων. Πρέπει σύμφωνα με την Kieran (1981), να κατανοήσουν ότι: το ‘‘=’’ ως σύμβολο σημαίνει την ισοδυναμία των παραστάσεων που βρίσκονται εκατέρωθεν αυτού και ότι κάθε εξίσωση μπορεί να αντικατασταθεί από μια ισοδύναμη εξίσωση.

Στην έρευνα του Βερύκιου (2003)$_2$, δόθηκε ένα φυλλάδιο προβλημάτων σε 167 μαθητές της Β΄ και Γ΄ γυμνασίου από δυο διαφορετικά σχολεία ενός μέσου προαστίου της Αθήνας. Στόχος της έρευνας ήταν η μελέτη της κατανόησης της άλγεβρας από μαθητές γυμνασίου. Χαρακτηριστική ήταν η ερώτηση 3 του πρώτου προβλήματος:

«Ποια από τις ακόλουθες εξισώσεις έχει την ίδια λύση με την εξίσωση 6(x-4)=10;»

Α) 6x-4=10

Β) x-4=4

Γ) 3x-12=5

Δ) 3x-6=5».

Στόχος της ερώτησης αυτής ήταν να μελετήσουν αν οι μαθητές μπορούν να λύνουν απλές γραμμικές εξισώσεις καθώς επίσης αν κατανοούν την ισοδυναμία μεταξύ δυο εξισώσεων. Οι περισσότεροι μαθητές που απάντησαν σωστά, έλυσαν σχεδόν όλες τις εξισώσεις ενώ ελάχιστοι απάντησαν με βάση κάποια ιδιότητα σύμφωνα με την οποία οι δυο εξισώσεις 6(x-4)=10 και 3x-12=5 είναι ισοδύναμες.

Στην έρευνα των Steinberg, Sleeman & Ktorza (1991), δόθηκαν σε 98 μαθητές της Β΄ και Γ΄ γυμνασίου ζεύγη εξισώσεων. Οι μαθητές έπρεπε να εξετάσουν εάν οι εξισώσεις σε κάθε ζεύγος είναι ισοδύναμες και να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους. Οι αιτιολογήσεις τους κατατάχθηκαν σε τρεις κατηγορίες:

a) Σωστές αιτιολογήσεις, όπου οι μαθητές έλυσαν τις εξισώσεις και συμπέραναν αν είναι ισοδύναμες.
b) Σωστές αιτιολογήσεις, όπου οι μαθητές συμπέραναν αν οι εξισώσεις είναι ισοδύναμες βασισμένοι σε κάποιο μετασχηματισμό των εξισώσεων
c) Λάθος αιτιολογήσεις.

Οι μαθητές που οι αιτιολογήσεις τους ανήκουν στην δεύτερη κατηγορία είχαν ψηλότερο ποσοστό σωστών απαντήσεων από αυτούς που οι αιτιολογήσεις τους ανήκουν στην πρώτη κατηγορία ενώ τα παιδιά που οι αιτιολογήσεις τους ανήκουν στην τρίτη κατηγορία είχαν πολύ χαμηλότερο ποσοστό επιτυχίας από τις άλλες δυο.

Οι Σακονίδης & Δραμαλίδης (2006), εξέτασαν την επίδοση των μαθητών ηλικίας 13-15 ετών σε θέματα σχολικής άλγεβρας. Στην έρευνα συμμετείχαν 329 μαθητές των τριών τάξεων του γυμνασίου που φοιτούσαν σε σχολικές μονάδες του Ν. Έβρου. Δόθηκαν στα παιδιά 21 έργα, χαρακτηριστικά θα δούμε τα έργα 5 και 6

Έργο 5: Αν $\alpha+\beta=43$, τότε $\alpha+\beta+2=$ …
Αν $\nu-246=762$, τότε $\nu-247=$ …
Αν $e+f=8$, τότε $e+f+g=$ …

Έργο 6: Τι μπορείς να πεις για το a, αν $a+5=8$ ……
Τι μπορείς να πεις για το b, αν $b+2$ είναι ίσο με $2b$ ……

Στο έργο 5 απάντησαν σωστά το 25,5%, 55,3% και 70,7% των μαθητών της Α΄, Β΄, Γ΄ γυμνασίου αντίστοιχα ενώ στο έργο 6 τα αντίστοιχα ποσοστά για τις 3 τάξεις ήταν 11,8%, 42,7% και 44%. Στις ερωτήσεις του τεστ που περιλάμβαναν περισσότερα από ένα ερωτήματα, οι ερευνητές θεώρησαν σωστή την απάντηση όταν είχαν απαντηθεί σωστά τα 2/3 των μερών της ερώτησης.

Στην αριθμητική εκτός από το ‘‘=’’, ένα άλλο κοινό σύμβολο είναι το ‘‘+’’. Σύμφωνα με τον Λεμονίδη (1996), στην αριθμητική το σύμβολο ‘‘+’’ χρησιμοποιείται συνήθως διαδικαστικά, δηλαδή εκτελείται μια πράξη. Στην άλγεβρα τα παιδιά πρέπει να αντιμετωπίσουν το ‘‘+’’ πρώτον ως ένα σύμβολο που δείχνει το αποτέλεσμα της πρόσθεσης και δεύτερον ως τη λειτουργία της πράξης της πρόσθεσης.

Στην έρευνα του ο Λεμονίδης (1996), μελέτησε εκτός των άλλων και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την επίλυση εξισώσεων α’ βαθμού. Παρατηρήθηκαν οι παρακάτω δυσκολίες:

I. Επιμεριστική ιδιότητα (παρένθεση)

   Το 37,5% των μαθητών της Β΄ γυμνασίου ξέρει να εφαρμόζει την επιμεριστική ιδιότητα. Είναι μικρό ποσοστό σε σχέση με τους μαθητές της Γ΄ γυμνασίου που το 73,5% αυτών την εκτέλεσε σωστά. Το πιο συχνό λάθος που παρατηρήθηκε ήταν το εξής: 5+3(x+6)=8(x+6)=8x+48

II. Αλλαγή πρόσημου – αρνητικοί αριθμοί

   Σε αυτήν την κατηγορία παρατηρήθηκαν τα περισσότερα λάθη. Το 11% της Γ΄ γυμνασίου και το 8 % της Β΄ έκαναν το εξής λάθος -3χ=35 συνεπάγεται -3χ/-3= 35/3. Μια άλλη εξίσου σημαντική δυσκολία ήταν το άθροισμα δυο μονωνύμων του χ όπου το ένα ήταν αρνητικό . Το 6 % της Γ΄ τάξης και το 9 % της Β΄ τάξης έδωσαν την εξής απάντηση 2χ-5χ=3χ (κάποιοι απάντησαν 7χ).

III. Ρητός συντελεστής και κλασματική μορφή

   Δόθηκε στους μαθητές η εξίσωση $\frac{4}{3}\chi = 1$ την οποία και έπρεπε να επιλύσουν. Το ποσοστό επιτυχίας ήταν 23% για τη Β΄ τάξη και 47,5% για τη Γ΄. Η δυσκολία των μαθητών της Β΄ τάξης , σύμφωνα με τους ερευνητές οφείλεται στην έλλειψη, πιθανώς, ευχέρειας στην αλγοριθμική επίλυση των εξισώσεων. Οι περισσότεροι από αυτούς έλυσαν την εξίσωση διαισθητικά. Όσον αφορά την κλασματική μορφή, οι μαθητές της Β΄ τάξης χρησιμοποίησαν περισσότερο τη διαισθητική μέθοδο παρά την εφαρμογή του τυπικού αλγορίθμου. Η δυσκολία που αντιμετώπισαν όμως, τους οδήγησε να αναζητήσουν με δοκιμές τον άγνωστο. Μια διαδικασία η οποία είναι αρκετά χρονοβόρα και δεν είναι εύκολο να εφαρμοστεί σε πολύπλοκες κλασματικές εξισώσεις

IV. Αδύνατη και αόριστη μορφή εξίσωσης

Η δυσκολία των μαθητών εδώ ήταν κυρίως η αναγνώριση και ο χαρακτηρισμός αυτών των μορφών. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα, για παράδειγμα στην εξίσωση 0χ=3, να διαιρέσουν με το 0 και να βρουν ότι χ=3. Στην αόριστη μορφή 0χ=0 έδιναν συνήθως την απάντηση χ=0.

Τέλος ο Βερύκιος (2003)$_1$, στην ερευνά του τονίζει ότι για να λυθεί μια εξίσωση, είναι απαραίτητο ο μαθητής να γνωρίζει

a. την έννοια της μεταβλητής,
b. την έννοια της αλγεβρικής παράστασης και την απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων,
c. την έννοια της ισότητας και τις ιδιότητες της.

Πρέπει επίσης να έχει κατανοήσει τις πράξεις μεταξύ ρητών και τις ιδιότητες τους. Αυτό δηλαδή που απαιτείται από το μαθητή ώστε να γίνει ικανός λύτης εξισώσεων, είναι να χειρίζεται αφηρημένα μαθηματικά αντικείμενα και να γνωρίζει ταυτόχρονα τις ιδιότητες τους.

Λάθη των μαθητών

Είδαμε προηγουμένως τις δυσκολίες των μαθητών κατά την επίλυση εξισώσεων αλλά και ειδικά στον χειρισμό αλγεβρικών συμβόλων. Αυτές οι δυσκολίες οδηγούν τις περισσότερες φορές σε λάθη από τους μαθητές. Στην έρευνα του Λεμονίδη (1996), (αναφορά: A. Cortes, 1994), ταξινομήθηκαν τα λάθη των μαθητών κατά την επίλυση εξισώσεων πρώτου βαθμού, σύμφωνα με τις μαθηματικές ιδιότητες που παραβιάζονται, ως εξής:

Λάθη	**Κατηγορίες**		**Παράδειγμα**
Λάθη που αφορούν την έννοια του αγνώστου	–		Οι μαθητές σταματούν την επίλυση στο –χ=35, όπου το –χ θεωρείται ως άγνωστος.
Λάθη στην ισοδυναμία των αλγεβρικών μετασχηματισμών στα δυο μέλη της εξίσωσης	1) Μετασχηματισμοί μόνο στο ένα μέλος της εξίσωσης		9χ+23=5χ+17 9χ+23=5χ-5χ+17
	2)Εκτέλεση διαφορετικών μετασχηματισμών στα δυο μέλη		4χ+32=13 4χ+32-32=32-13
Λάθη επιλογής των αριθμητικών πράξεων που προηγούνται	1)	Μη σεβασμό της προτεραιότητας του πολ/σμου και της διαίρεσης επί της πρόσθεσης και αφαίρεσης	Το αχ χρησιμοποιείται ως α+χ
		Ο συντελεστής του αγνώστου προστίθεται με έναν αριθμητικό όρο	3χ-40=95→ -37χ=95
		Όρος που βρίσκεται μέσα σε παρενθέσεις,αντιμετωπίζεται ως ανεξάρτητος όρος	5(3χ+13)+29=48 → 5(3χ+13-13)+29=48-13
		Σε έναν προσθετικό μετασχηματισμό δεν πραγματοποιείται ο μηδενισμός των άγνωστων όρων	5χ-5χ+14=7χ-5χ →χ+14=2χ.
	2)Μη σεβασμό της προτεραιότητας της πρόσθεσης και της αφαίρεσης επί του πολ/σμού και της διαίρεσης		5(3χ+13)+29=48 →5x3χ+13+29=48.
Λάθη στη γραφή μιας νέας εξίσωσης – κακή μεταφορά	2)Λάθος ξαναγράψιμο ή παράληψη ενός όρου ή ενός αριθμητικού αποτελέσματος		χ+15-15-3χ=-40+6→-3χ=-34 ή χ+15-15-3χ=-40+6 → χ-3χ=-40.
	2)παράληψη του αρνητικού πρόσημου στη νέα εξίσωση		7-7-2χ=40-13 →2χ=27 ή 3χ/3=-18/3 → χ=6
	3) προσθήκη ενός αρνητικού πρόσημου στη νέα εξίσωση		-3χ=15 → χ=-15/-3
Λάθη στους αριθμητικούς υπολογισμούς	1)	Στην πρόσθεση προσημασμένων αριθμών, το –Α-Β γίνεται –(Α-Β) ή Α+Β και το Α-Β γίνεται Α+Β	-5χ-3χ=-2χ -45-13=-32 68-17=85
		Στον πολ/σμο και τη διαίρεση προσημασμένων αριθμών γίνονται λάθη στους κανόνες των πρόσημων	-3χ/-3=-χ ή -2(-5χ+3)=10χ+6
	2)Λάθη στο νοερό υπολογισμό ενός αριθμητικού αποτελέσματος		-77/-7=-10

1.5 Η κατανόηση ως δράση και είδη κατανόησης

Η κατανόηση είναι μια έννοια που έχει μελετηθεί από αρκετούς ερευνητές ως προς τη σημασία της αλλά και ως προς την επίτευξη της. Στην έρευνα της, η Porteous (ανακτήθηκε από το διαδίκτυο 14/04/2010) δίνει τις εξής σημασίες της κατανόησης:

a) Κατανοώ κάτι που μου δίνεται να πιστέψω. Παράδειγμα: κατάλαβα ότι το τρένο φεύγει στις 7.

b) Κατανόηση ως ‘‘σιωπηρή συμφωνία’’

c) Κατανόηση ως ‘‘εμπάθεια’’. Παράδειγμα: κατάλαβα γιατί το έκανες αυτό.

d) Κατανόηση σαν ‘‘συμπύκνωση’’. Για παράδειγμα όταν κατανοώ τι σημαίνει μια πρόταση σε μια άλλη γλώσσα, συνδυάζω τις γνώσεις μου για κάθε μια λέξη.

Σύμφωνα με τους Bloome et al (1956) όταν ένας μαθητής έχει κατανοήσει μια έννοια, τότε πρέπει:

a) Να είναι ικανός να αναγνωρίζει και να επαναφέρει πληροφορίες από τη μνήμη του (ΓΝΩΣΗ)

b) Να είναι ικανός να δίνει κατά γράμμα την έννοια της πληροφορίας (COMPREHENSION)

c) Να είναι ικανός να εφαρμόζει τις πληροφορίες σε νέες καταστάσεις (ΕΦΑΡΜΟΓΗ)

d) Να είναι ικανός να αποσυνδέει την πληροφορία, να αναγνωρίζει συγκεκριμένα τμήματά της καθώς και τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται. (ΑΝΑΛΥΣΗ)

e) Να είναι ικανός να συνδέει πληροφορίες για να δημιουργήσει νέες (ΣΥΝΘΕΣΗ)

f) Να είναι ικανός να αξιολογεί ποιο κομμάτι της πληροφορίας είναι απαραίτητο σε μια συγκεκριμένη κατάσταση (ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ)

Οι Buxkemper & Hartfiel (2003), παρατήρησαν ότι οι ενέργειες που ταξινόμησε ο Bloom δεν εφαρμόζονται καλά στα μαθηματικά. Επισημαίνουν ότι η ανάλυση και η σύνθεση γίνονται συχνά μαζί και αυτές μαζί με την αξιολόγηση (evaluation) συχνά χρησιμοποιούνται στην εφαρμογή. Ταξινομούν άλλες ενέργειες που πρέπει να κάνει ένας μαθητής όταν έχει κατανοήσει κάτι:

a) Να είναι ικανός να το προσλαμβάνει και να το αποδίδει σε διαφορετικές μορφές από αυτήν που παρουσιάστηκε αρχικά (**ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ**)

b) Να είναι ικανός να το επεκτείνει σε νέες καταστάσεις (**ΕΠΕΚΤΑΣΗ**)

c) Να είναι ικανός να κρίνει αν κάτι είναι σωστό ή να κάνει συγκρίσεις ή αντιπαραβολές για να βγάζει συμπεράσματα χρησιμοποιώντας αυτό που έχει κατανοήσει. (**ΚΡΙΣΗ**)

d) Να είναι ικανός να αντιληφθεί την κεντρική του ιδέα, τον τρόπο δηλαδή με τον οποίο λειτουργεί ή να μπορεί να το χρησιμοποιεί για να συνθέσει κάτι ευρύτερο και να γνωρίζει γιατί και αυτό λειτουργεί. (**ΙΔΕΑ**)

Στο άρθρο της Sierpinska (1990), αναφέρονται διάφορες απόψεις για το τι είναι κατανόηση. Είναι μια μέθοδος μελέτης (Carr et al, 1986). Είναι το αποτέλεσμα της μάθησης (Celia Hayles, 1987). Είναι η προϋπόθεση της μάθησης (Rosnick, 1980 & Hejng, 1988).

Σύμφωνα με την Sierpinska (1990), η κατανόηση μπορεί να θεωρηθεί μια δράση αλλά και μια διαδικασία. Έχει συμβεί σχεδόν σε όλους μας να προσπαθούμε να λύσουμε ένα πρόβλημα για αρκετές ώρες ή μέρες χωρίς επιτυχία. Κάποια στιγμή όμως ξαφνικά, που δε σκεφτόμασταν συνειδητά το πρόβλημα, έρχεται στο μυαλό μας η λύση. Εάν αναλογιστούμε αυτήν τη μακρά περίοδο πρώτα της συνειδητής και μετά της ασυνείδητης νοητικής λειτουργίας, τότε βλέπουμε την κατανόηση σαν μια διαδικασία. Εάν αναλογιστούμε τη στιγμή εκείνη που ξαφνικά έρχεται στο μυαλό μας η λύση, τότε θεωρούμε την κατανόηση, ως μια δράση (Sierpinska, 1990). Η ερευνήτρια ξεχωρίζει 4 κατηγορίες δράσεων της κατανόησης:

a) **Αναγνώριση** των αντικειμένων που περιλαμβάνει η έννοια που πρέπει να κατανοήσουν

b) **Διαχωρισμός** μεταξύ δυο αντικειμένων, ιδιοτήτων, ιδεών, που πριν ήταν μπερδεμένα στο μυαλό

c) Γενίκευση, δηλαδή να μπορώ να επεκτείνω τη γνώση μου για μια έννοια και σε άλλες εφαρμογές

d) **Σύνθεση,** δηλαδή να μπορεί κάποιος να αντιλαμβάνεται τις σχέσεις μεταξύ δυο ή περισσότερων ιδιοτήτων, γεγονότων, αντικειμένων και να μπορεί να τα οργανώνει

Η ερευνήτρια προχώρησε σε αυτό το διαχωρισμό συνθέτοντας τους διαχωρισμούς των Locke, Dewey και Hoyle. Σύμφωνα με τον Locke υπάρχουν 4 δράσεις: α) αναγνώριση ιδεών και διαχωρισμός μεταξύ ιδεών, β)εύρεση σχέσεων μεταξύ των ιδεών, γ)ανακάλυψη ιδιοτήτων μιας σύνθετης ιδέας και δ) εύρεση σχέσεων με την πραγματικότητα. Σύμφωνα με τον Dewey υπάρχουν επίσης 4 δράσεις. Αναπτύσσει αυτές τις δράσεις με ένα παράδειγμα για το πώς ένα παιδί ανακαλύπτει την έννοια του σκύλου. Αρχικά <u>αναγνωρίζει</u> ένα σκύλο που έχει δει, έχει ακούσει ή ακουμπήσει. Στη συνέχεια προσπαθεί να <u>μεταφέρει</u> την εμπειρία του με το αντικείμενο, επάνω σε άλλα αντικείμενα προβλέποντας ορισμένους χαρακτηριστικούς τρόπους συμπεριφοράς, όπως ‘‘οι γάτες γίνονται μικρά σκυλιά’’ ή ‘‘τα άλογα είναι μεγάλα σκυλιά’’. Μετά <u>διαχωρίζει</u> τα χαρακτηριστικά και μη-χαρακτηριστικά των σκύλων. Τέλος <u>συνθέτει</u> αυτά τα χαρακτηριστικά. Τέλος ο Hoyle δίνει ένα μοντέλο για τη μάθηση των μαθηματικών: α) χρήση – μια έννοια χρησιμοποιείται σαν εργαλείο για να πετύχουμε το στόχο μας, β) διαχωρισμός – τα κομμάτια της δομής μιας έννοιας, χρησιμοποιούνται σαν εργαλεία, γ) γενίκευση - οι εφαρμογές της συγκεκριμένης έννοιας, χρησιμοποιούνται σαν εργαλεία, δ) σύνθεση – τα μέρη μιας εφαρμογής της έννοιας συνδυάζονται μεταξύ τους.

Ο Skemp (1976), στο άρθρο του διαχωρίζει την κατανόηση σε εννοιολογική και διαδικαστική. Με την εννοιολογική κατανόηση ‘‘ξέρω τι κάνω και γιατί’’ και με τη διαδικαστική ‘‘ ακολουθώ κανόνες χωρίς νόημα’’. Δίνει παραδείγματα κανόνων που είτε υπάρχουν στα σχολικά βιβλία, είτε επισημαίνονται στα παιδιά από τον καθηγητή τους, όπως ‘‘όταν αλλάζω μεριά τους όρους μιας εξίσωσης, αλλάζω το πρόσημό τους’’, ‘‘όταν διαιρώ δυο κλάσματα, αντιστρέφω το δεύτερο κλάσμα και πολλαπλασιάζω’’, ‘‘ο δανεισμός στην αφαίρεση’’, οι οποίοι είναι πολύ πιθανόν να οδηγήσουν σε διαδικαστική κατανόηση. Όταν λοιπόν ένα παιδί λύνει μια εξίσωση και αλλάζει το πρόσημο των όρων όταν αλλάζει μεριά, θεωρεί ότι αφού το έχει κάνει σωστά, το έχει καταλάβει. Δεν είναι όμως σε θέση να εξηγήσει γιατί γίνεται αυτό. Για τον ερευνητή αρχικά η διαδικαστική δεν ήταν είδος κατανόησης, όμως η τόσο συχνή ύπαρξη αυτής, τον έκανε να αναθεωρήσει. Παρατήρησε ότι υπάρχουν πάρα πολλοί καλοί καθηγητές που διδάσκουν ‘‘διαδικαστικά’’, βρήκε λοιπόν κάποια πλεονεκτήματα, μερικά από τα οποία είναι τα εξής:

1. Τα διαδικαστικά μαθηματικά, όπως για παράδειγμα οι κανόνες που αναφέρθηκαν προηγουμένως, είναι πιο εύκολο να κατανοηθούν και πολύ περισσότερο να εφαρμοστούν
2. Εμπλέκεται λιγότερη γνώση. Κάποιος βρίσκει τη σωστή απάντηση πιο γρήγορα και πιο αξιόπιστα. Εδώ τονίζει ότι ακόμα και τα ‘‘εννοιολογικά μαθηματικά ’’, χρησιμοποιούν ‘‘διαδικαστική σκέψη’’
3. Οι ανταμοιβές είναι πιο άμεσες και πιο εμφανείς. Ο καθηγητής παίρνει στα χέρια του γραπτά με πολλές σωστές απαντήσεις και με αυτήν την επιτυχία, τα παιδιά έχουν μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση

Βέβαια δεν θα μπορούσε να μην αναφέρει και τα πλεονεκτήματα της διδασκαλίας ‘‘εννοιολογικών μαθηματικών’’ που οδηγούν βέβαια σε ‘‘εννοιολογική κατανόηση’’:

1. Ένα παιδί που κατανοεί εννοιολογικά, μπορεί να προσαρμόσει ευκολότερα τις έννοιες που έχει μάθει, σε νέα προβλήματα που πρέπει να χειριστεί
2. Μπορεί πιο εύκολα να θυμηθεί τους κανόνες και τις έννοιες που έχει μάθει
3. Η δομή μιας έννοιας στο μυαλό τους έχει καλύτερη ποιότητα

Αυτό που πρέπει να τονίσουμε είναι ότι η επιτυχία ή η αποτυχία των μαθητών, έχει άμεση σχέση με το είδος της κατανόησης που αποσκοπεί ο καθηγητής αλλά και τα παιδιά. Εάν οι μαθητές στοχεύουν στη διαδικαστική κατανόηση ενώ ο καθηγητής στην εννοιολογική, τότε μόνο θετικά έχει να προσφέρει στα παιδιά αυτός ο συνδυασμός, το αντίθετο όμως δημιουργεί πολλά προβλήματα. Όταν το παιδί προσπαθεί να κατανοήσει μια έννοια εννοιολογικά, όπως για παράδειγμα γιατί το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι αβ και ο καθηγητής απλά λέει τον τύπο χωρίς επεξήγηση και χωρίς απόδειξη, καταλαβαίνουμε τι μπορεί να προκαλέσει αυτή η συμπεριφορά, στον τρόπο με τον οποίο το παιδί βλέπει και μαθαίνει τα μαθηματικά.

.

1.6 Η έννοια της μεταβλητής

Η έννοια της μεταβλητής στο Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, εισάγεται στην Α΄ γυμνασίου. Παρά το γεγονός αυτό αποτελεί σημαντική δυσκολία για τους μαθητές, όχι μόνο στο επίπεδο του γυμνασίου αλλά και του λυκείου. Αρκετοί ερευνητές μελέτησαν πως κατανοούν οι μαθητές την έννοια της μεταβλητής. Πολλές φορές όταν λέμε μεταβλητή ονομάζουμε κυρίως τα γράμματα ή σύμβολα. Σύμφωνα με τη Wagner (1984), αυτό γίνεται διότι τα γράμματα μπορούν να παριστάνουν περισσότερους από έναν αριθμούς ταυτόχρονα, όπως για παράδειγμα το n όταν $0<n<20$. Μια από τις πιο σημαντικές έρευνες είναι αυτή του Kuchemann (1981) στην οποία ο ερευνητής ξεχώρισε έξη διαφορετικές ερμηνείες που δίνουν τα παιδιά στα γράμματα τα οποία παρουσιάζονται σε αλγεβρικές παραστάσεις :

1. Το γράμμα έχει μια αριθμητική τιμή από ένα σύνολο
2. Το γράμμα δε χρησιμοποιείται ευθέως και μπορεί να αγνοηθεί η τιμή του, χωρίς να είναι απαραίτητος ο υπολογισμός του
3. Χρησιμοποιείται σα συντομογραφία για ένα αντικείμενο ή σαν ένα αντικείμενο
4. Χρησιμοποιείται σαν ένας συγκεκριμένος αλλά άγνωστος αριθμός
5. Χρησιμοποιείται σαν ένας γενικός αριθμός που μπορεί να πάρει περισσότερες από μια τιμές
6. Χρησιμοποιείται σαν μεταβλητή, έτσι ώστε να αντιπροσωπεύει ένα σύνολο όχι συγκεκριμένων τιμών .

Ο Kuchemann παρατήρησε ότι τα παιδιά 13,14 και 15 ετών δε μπόρεσαν να χειριστούν με ευκολία τα ερωτήματα που απαιτούν την κατανόηση των τριών τελευταίων ερμηνειών.

Με βάση την έρευνα του Kuchemann, οι Βερύκιος και Κλαουδάτος (1999), θέλοντας να μελετήσουν το ίδιο θέμα μοίρασαν σε μαθητές Γ΄ γυμνασίου ένα φυλλάδιο με έξι ερωτήσεις όπου το γράμμα είχε μια από τις έξι διαφορετικές ερμηνείες που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Τα αποτελέσματα της έρευνας αποκάλυψαν ότι το 44% των μαθητών δεν απάντησε σωστά σε δυο τουλάχιστον από τις 3 ερωτήσεις που αφορούσαν τις τρεις τελευταίες ερμηνείες. Μάλιστα στο ερώτημα που αφορούσε την τέταρτη ερμηνεία παρουσιάστηκε η μεγαλύτερη αποτυχία η οποία έφτασε το 73%. Παρατηρούμε λοιπόν ότι και στις δυο έρευνες που αναφέραμε οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν το γράμμα όταν αυτό έχει μία από τις τρεις τελευταίες ερμηνείες.

Οι Βερύκιος και Κλαουδάτος προχώρησαν την ερευνά τους, χώρισαν τρία στάδια για την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής: το στάδιο των συγκεκριμένων ενεργειών ή πρώιμο στάδιο των τυπικών διεργασιών, το στάδιο της κατανόησης της έννοιας της μεταβλητής με διακριτό τρόπο και το στάδιο της κατανόησης της έννοιας της μεταβλητής με συνεχή τρόπο. Χώρισαν επίσης τους μαθητές σε τρείς ομάδες: την ομάδα χαμηλής επίδοσης, την ομάδα μέτριας επίδοσης και την ομάδα υψηλής επίδοσης. Πήραν συνέντευξη από 3 μαθήτριες και τα αποτελέσματα ήταν ότι η μαθήτρια που βρίσκεται στο πρώτο στάδιο κατανόησης δηλαδή εκείνο των συγκεκριμένων ενεργειών, ανήκει στην ομάδα χαμηλής επίδοσης, η μαθήτρια που βρίσκεται στο δεύτερο στάδιο κατανόησης ανήκει στην ομάδα μαθητών μέτριας επίδοσης και τέλος η μαθήτρια που βρίσκεται στο στάδιο κατανόησης της έννοιας της μεταβλητής με συνεχή τρόπο, ανήκει στην ομάδα υψηλής επίδοσης.

Στην έρευνα του Βερύκιου $(2003)_1$, (αναφορά: Cathcart et al, 2000) αναφέρονται 5 τρόποι με τους οποίους μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι μεταβλητές:

1. Στις εξισώσεις ως άγνωστοι αριθμοί, παράδειγμα 3+χ=8

2. Για να δηλώσουν ιδιότητες ή γενικεύσεις, παράδειγμα α+0=0 ή α1=α

3. Για να περιγραφούν συναρτήσεις ή ακολουθίες, παράδειγμα 2,5,8,3ν-1

4. Στους τύπους για να εκφράσουν σχέσεις, παράδειγμα $E_{\text{τετραγώνου}}=\alpha^2$ όπου α η πλευρά του τετραγώνου.

5. Στα προγράμματα υπολογιστών για να υποδειχθούν θέσεις αποθήκευσης, παράδειγμα A=A+1

Σύμφωνα με τους ερευνητές οι μαθητές αρκετές φορές παρερμηνεύουν την έννοια της μεταβλητής όταν τη διδάσκονται αρχικά. Βέβαια αυτές οι παρερμηνείες γίνονται και από μαθητές που ασχολούνται με τη μεταβλητή αρκετά χρόνια και αυτός είναι και ένας από τους λόγους που δυσκολεύονται στην άλγεβρα και γενικά στα μαθηματικά. Ο Βερύκιος $(2003)_1$, δίνει το παρακάτω παράδειγμα μιας τέτοιας παρερμηνείας : οι μαθητές στο δημοτικό μαθαίνουν ότι το 8μ σημαίνει συνήθως 8 μέτρα, αυτό έχει ως αποτέλεσμα κάποιοι μαθητές συχνά να θεωρούν ότι το 8ψ πρέπει να σημαίνει 8 ψάρια ή 8 ψωμιά. Ένα άλλο παράδειγμα είναι το εξής : οι μαθητές γνωρίζουν ότι το 8χ σημαίνει 8 επί χ, έτσι μερικοί από αυτούς αντί να γράψουν 8 επί 5, γράφουν 85. Το τελευταίο λάθος παρατηρείται αρκετά συχνά στις δυο πρώτες τάξης του γυμνασίου όπου τα παιδιά για πρώτη φορά παρατηρούν ότι σε εκφράσεις όπως 8χ ή 3(χ+6) δεν υπάρχει σημειωμένο το σύμβολο της πράξης του πολλαπλασιασμού. Ο Λεμονίδης (1996), στην έρευνα του παρατηρεί ότι αυτή η παρερμηνεία είναι αποτέλεσμα των σημαντικών διαφορών μεταξύ άλγεβρας και αριθμητικής. Ένας μαθητής λοιπόν της Α΄ γυμνασίου που εισάγεται στην άλγεβρα, πρέπει να αναγνωρίσει ότι το 8μ για παράδειγμα, μπορεί να σημαίνει 8 φορές των αριθμό των μέτρων και όχι απλά 8 μέτρα. Τονίζει ότι η αλλαγή αυτή στη σημασία των γραμμάτων δημιουργεί στους μαθητές το πρόβλημα της ‘‘έλλειψης αριθμητικής αναφοράς’’.

Ένα ακόμη παράδειγμα δίνει η Wagner (1984): ‘‘ Το θέμα του μαθήματος ήταν προβλήματα διατυπώσεως με ‘διαδοχικούς’ ακεραίους. Ο καθηγητής προσπαθώντας να προετοιμάσει τους μαθητές για το συμβολισμό χ, χ+1,…, άρχισε με ένα αριθμητικό παράδειγμα. Ρώτησε ‘ ποιος είναι ο επόμενος διαδοχικός ακέραιος του 17;’ κάποιος απάντησε ‘το 18’. Ξέροντας ότι το μυαλό των μαθητών δεν θα πήγαινε στο να προσθέσουν το 1, ο δάσκαλος έξυπνα ρώτησε : ‘ τι πρέπει να κάνουμε στο 17 για να πάμε στο 18;’. ‘Να προσθέσουμε 1’, ήρθε η απάντηση. ‘Ωραία’ ενθάρρυνε ο δάσκαλος. ‘Τώρα ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε το χ για να παραστήσουμε έναν άγνωστο ακέραιο. Πώς μπορούμε να γράψουμε τον αμέσως επόμενο ακέραιο του χ; που σημαίνει πως μπορούμε να παραστήσουμε τον αριθμό που παίρνουμε όταν προσθέσουμε 1 στο χ;’. Χωρίς δισταγμό η απάντηση ήταν ‘y’.’’ Σύμφωνα με την ερευνήτρια τα παιδιά συχνά συγχέουν τη γραμμική διάταξη των ακεραίων με τη διάταξη στο αλφάβητο και αυτό έχει ως αποτέλεσμα, ακόμα και οι μαθητές που έχουν εξοικειωθεί με τα γράμματα, να μπερδεύονται όταν έχουν να αντιμετωπίσουν μια νέα κατάσταση.

Σύμφωνα με τους Βερύκιο και Κλαουδάτο (1999), οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής οφείλονται στο γεγονός ότι στην ηλικία, στην οποία τα παιδιά εισάγονται σε αυτή την έννοια, βρίσκονται στο στάδιο των συγκεκριμένων ενεργειών ή αλλιώς το πρώιμο στάδιο των τυπικών διεργασιών. Δηλαδή οι μαθητές της Α΄ γυμνασίου που εισάγονται στην έννοια της μεταβλητής, μέχρι εκείνη την ηλικία, έβλεπαν τα μαθηματικά ως κάτι συγκεκριμένο, χειρίζονταν αριθμούς, έκαναν πράξεις χωρίς να είναι τίποτα αφηρημένο όπως είναι στην άλγεβρα.

Δυο παράγοντες που κάνουν τα γράμματα εύκολα στη χρήση αλλά δύσκολα στην κατανόηση, σύμφωνα με την Wagner (1984) είναι :

1) Οι συμβολισμοί με γράμματα είναι όπως οι αριθμητικοί, μόνο που είναι διαφορετικοί

2) Οι συμβολισμοί με γράμματα είναι όπως οι λέξεις, μόνο που είναι διαφορετικοί

Επεξηγεί αυτούς τους παράγοντες, τονίζοντας τις ομοιότητες και τις διαφορές των : ‘γραμμάτων και αριθμών’ και ‘γραμμάτων και λέξεων’. Κάποιες από τις ομοιότητες και διαφορές είναι οι παρακάτω.

Γράμματα – Αριθμοί

<table>
<tr><th></th><th>Γράμματα</th><th>Αριθμοί</th></tr>
<tr><td>Ομοιότητες</td><td colspan="2">a) Έχουν και τα δυο τη δική τους διάταξη
b) Υπάρχουν γράμματα όπως το π και το e που είναι αριθμοί
c) Εμφανίζονται μαζί σε μαθηματικές εκφράσεις
d) Στις εξισώσεις το γράμμα λειτουργεί ως αριθμός μέχρι να υπολογίσουμε ποιός αριθμός λείπει για να τον γράψουμε</td></tr>
<tr><td>Διαφορές</td><td>a) Παριστάνει ταυτόχρονα πολλούς αριθμούς
b) Στα γράμματα που το ένα είναι δίπλα στο άλλο, είναι συμφωνημένο να εννοούμε πολλαπλασιασμό
c) Το πρόσημο – μπροστά από γράμματα δεν σημαίνει πάντα αρνητικό αριθμό (αντίστοιχα το +)</td><td>a) Παριστάνει ένα μοναδικό αριθμό
b) Οι αριθμοί που είναι ο ένας δίπλα στον άλλο, ορίζουν άλλο αριθμό
c) Το πρόσημο – μπροστά από αριθμό σημαίνει πάντα αρνητικό αριθμό (αντίστοιχα το +)</td></tr>
</table>

Γράμματα – Λέξεις

<table>
<tr><th></th><th>Γράμματα</th><th>Λέξεις</th></tr>
<tr><td>Ομοιότητες</td><td colspan="2">a) Και τα δυο μπορούν να αντικατασταθούν σε μια πρόταση ή σχέση για να πάρουμε αληθείς ή ψευδείς προτάσεις
Παράδειγμα: το γράμμα χ στην εξίσωση $χ^2+2χ=3$, μπορεί να αντικατασταθεί με αριθμούς για να πάρουμε αληθείς ή ψευδείς μαθηματικές προτάσεις
Η λέξη ‘τάδε’ στην πρόταση ‘ο τάδε διδάσκει μαθηματικά’, μπορεί να αντικατασταθεί με τα ονόματα διαφόρων ανθρώπων για να πάρουμε αληθή ή ψευδή πρόταση
b) Τα γράμματα συχνά επιλέγονται για να υποδηλώσουν συντμήσεις λέξεων
c) Και τα δυο σημαίνουν διαφορετικά πράγματα σε διαφορετικά συμφραζόμενα
Παράδειγμα: η λέξει ‘τρέχω’ και το γράμμα χ έχουν έννοιες που κάθε φορά εξαρτώνται από τα συμφραζόμενα.</td></tr>
<tr><td>Διαφορές</td><td>a) Η τιμή του πρέπει να είναι ίδια σε όλη την έκταση ενός κειμένου ή μιας ενότητας
Παράδειγμα: στην εξίσωση
$3(χ+2)+5=17-2χ$

b) Δεν έχουν περιορισμένο σύνολο εννοιών</td><td>a) Η ίδια λέξη μπο εῥ να έχει διαφορετική σημασία σε μια πρόταση όταν εμφανίζεται για δεύτερη φορά
Παράδειγμα: ‘‘το άθροισμα περιττού και άρτιου είναι πάντα περιττός.’’ Ο πρώτος περιττός είναι προσθετέος και ο άλλος το άθροισμα.

b) Έχουν περιορισμένο σύνολο εννοιών</td></tr>
</table>

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

Μεθοδολογία

Η παρούσα έρευνα είχε δυο σκοπούς, πρώτον να μελετήσει το βαθμό κατανόησης της έννοιας του γράμματος από μαθητές της Β΄ Γυμνασίου και δεύτερον να μελετήσει το κατά πόσο οι μαθητές κατανοούν ένα πρόβλημα αλλά και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν κατά την επίλυση του. Πιο αναλυτικά, η παρούσα μελέτη εξετάζει τις επιδόσεις των μαθητών αυτών σε δυο φυλλάδια. Το πρώτο φυλλάδιο περιλαμβάνει 7 ερωτήσεις και έχει ως στόχο να μας βοηθήσει να απαντήσουμε στο πρώτο ερευνητικό μας ερώτημα και το δεύτερο περιέχει 3 προβλήματα από τις απαντήσεις των οποίων θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στο δεύτερο ερευνητικό μας ερώτημα.

Οι απαντήσεις των μαθητών αξιολογήθηκαν και στη συνέχεια διενεργήθηκαν συνεντεύξεις με επιλεγμένο υποσύνολο του δείγματος, με σκοπό να εμβαθύνουμε στον τρόπο σκέψης των μαθητών και να εντοπίσουμε τις αδυναμίες τους. Οι συνεντεύξεις μαγνητοφωνήθηκαν και μαζί με τα γραπτά των μαθητών αποτέλεσαν το ερευνητικό υλικό της μελέτης.

2.1 Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 41 μαθητές της Β΄ τάξης Γυμνασίου, 17 αγόρια και 24 κορίτσια, από δύο διαφορετικά τμήματα. Το πρώτο τμήμα είχε 20 και το δεύτερο 21 μαθητές. Τα δυο τμήματα είχαν την ίδια διδάσκουσα στα μαθηματικά η οποία και μας πρότεινε αυτά τα δυο τμήματα διότι οι επιδόσεις τους στα μαθηματικά ήταν παρόμοιες. Στο ένα τμήμα υπήρχαν και τρία παιδιά με πρόβλημα δυσλεξίας τα οποία κατά την διάρκεια της εκτέλεσης της έρευνας παρακολουθούσαν άλλο μάθημα στο τμήμα ένταξης του σχολείου.

2.2 Επιλογή μεθόδου

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στις αρχές Μαΐου 2010 σε ένα Γυμνάσιο του Ηρακλείου. Περιελάμβανε δυο φάσεις. Στην πρώτη φάση, τα παιδιά κλήθηκαν να απαντήσουν σε δυο φυλλάδια με προβλήματα και στη δεύτερη φάση, επιλέχθηκε συγκεκριμένη ομάδα μαθητών για να συμμετάσχουν στις συνεντεύξεις. Τα δοκίμια δόθηκαν ξεχωριστά το ένα από το άλλο και σε κάθε τμήμα χωριστά. Προτού αρχίσουν να λύνουν τα προβλήματα, διευκρινίσαμε στους μαθητές το σκοπό της έρευνας και τους ζητήσαμε να γράψουν τα ονόματά τους στα φυλλάδια διότι έτσι θα μπορούσαμε να εντοπίσουμε τους μαθητές που οι απαντήσεις τους παρουσίαζαν ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον. Διευκρινίσαμε επίσης ότι τα στοιχεία τους θα χρησιμοποιούνταν μόνο για την συγκεκριμένη έρευνα και ότι τα φυλλάδια δεν είχαν στόχο την αξιολόγηση τους.

2.3 Μέσα συλλογής δεδομένων

Όπως προαναφέραμε δόθηκαν στα παιδιά δυο φυλλάδια με προβλήματα. Το πρώτο περιείχε 7 ερωτήσεις και το δεύτερο τρία προβλήματα. Το πρώτο φυλλάδιο βασίστηκε στην έρευνα του Kuchemann (1982), περιείχε 7 ερωτήσεις, όπου το γράμμα σε κάθε μια είχε μια από τις 6 ερμηνείες που δίνουν τα παιδιά στα ‘‘γράμματα’’ (Παράρτημα Α). Πιο συγκεκριμένα στην ερώτηση:

1. Το α έχει μια αριθμητική τιμή από ένα σύνολο

2. Το α και το β, δε χρησιμοποιούνται ευθέως και μπορεί να αγνοηθεί η τιμή τους, χωρίς να είναι απαραίτητος ο υπολογισμός τους

3. Το χ χρησιμοποιείται σα συντομογραφία για ένα αντικείμενο

4. Το γ χρησιμοποιείται ως ένας συγκεκριμένος αλλά άγνωστος αριθμός

5. Το ν χρησιμοποιείται ως ένας συγκεκριμένος αλλά άγνωστος αριθμός

6. Το β και το δ χρησιμοποιούνται σα γενικευμένοι αριθμοί, δηλαδή μπορούν να πάρουν διάφορες τιμές

7. Το α χρησιμοποιείται σα μεταβλητή, έτσι ώστε να αντιπροσωπεύει ένα σύνολο όχι συγκεκριμένων τιμών

Το δεύτερο φυλλάδιο βασίστηκε σε προβλήματα από το άρθρο *Understanding* των Buxkemper και Hartfiel (2003) (Παράρτημα Α). Εδώ οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν σε τρία προβλήματα, παρόμοια με προβλήματα του σχολικού βιβλίου.

Στο πρώτο πρόβλημα οι μαθητές καλούνται να φτιάξουν μια εξίσωση. Ο στόχος του προβλήματος είναι να ελέγξουμε κατά πόσον οι μαθητές κατανοούν το λεκτικό πρόβλημα και είναι σε θέση να το εκφράζουν με διαφορετικό τρόπο (δηλαδή να το μεταφράσουν και να δημιουργήσουν μια εξίσωση). Στο δεύτερο πρόβλημα οι μαθητές καλούνταν να λύσουν μια εξίσωση, περιγράφοντας αναλυτικά το κάθε βήμα και να κρίνουν την ορθότητα ή όχι της λύσης. Στόχος του προβλήματος ήταν να εξετάσουμε τα λάθη των μαθητών, τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν κατά την επίλυση μιας εξίσωσης καθώς επίσης και να εξετάσουμε κατά πόσο οι μαθητές είναι ικανοί να επεκτείνουν την εξίσωση σε νέες καταστάσεις, δηλαδή να δημιουργήσουν μια ισοδύναμη εξίσωση με αλγεβρικούς χειρισμούς, ώστε να βρουν τη λύση. Με το τελευταίο ερώτημα του συγκεκριμένου προβλήματος, θελήσαμε να εξετάσουμε κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να ξεχωρίσουν την αδύνατη μορφή μιας εξίσωσης. Τέλος, το τρίτο πρόβλημα είναι ένα γεωμετρικό πρόβλημα στο οποίο οι μαθητές καλούνται να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο θα υπολογίσουν το εμβαδόν ενός τετραγώνου. Το πρόβλημα αυτό έχει δυο στόχους. Ο πρώτος στόχος είναι να εξεταστεί αν οι μαθητές είναι ικανοί να αντιληφθούν την κεντρική ιδέα του προβλήματος και δεύτερον αν είναι ικανοί να επεκτείνουν κάτι σε νέες καταστάσεις.

2.4 Διαδικασία εκτέλεσης της έρευνας

Για την πρώτη φάση της έρευνας χρειάστηκαν δυο διδακτικές ώρες για το κάθε τμήμα. Πιο συγκεκριμένα, μια διδακτική ώρα για το κάθε φυλλάδιο σε κάθε τμήμα. Αρχικά δόθηκε στο πρώτο τμήμα το πρώτο φυλλάδιο με τα 7 ερωτήματα, τα οποία και εξηγήσαμε στους μαθητές. Αφού λύθηκαν οι απορίες τους, άρχισαν να απαντούν στα ερωτήματα. Περαιτέρω βοήθεια δε δόθηκε, παρά μόνο επαναλαμβάναμε τις ίδιες εξηγήσεις σε όποιο παιδί ήθελε. Η ίδια διαδικασία ακολουθήθηκε και στο δεύτερο τμήμα. Την επόμενη ημέρα δόθηκε στα παιδιά το δεύτερο φυλλάδιο με τα τρία προβλήματα. Αφού εξηγήσαμε τα προβλήματα, άρχισαν να τα επιλύουν.

Σε κάποιες περιπτώσεις μαθητών που ζήτησαν περισσότερες διευκρινήσεις, αυτές δε δόθηκαν διότι θα επηρέαζαν την επίδοση τους. Η διαδικασία αυτή ακολουθήθηκε και στα δυο τμήματα.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια του σχολικού ωραρίου και οι μαθητές δεν είχαν ενημερωθεί για τη διεξαγωγή της. Αρχικά τονίσαμε στους μαθητές το σκοπό της έρευνας και τους ζητήσαμε να γράψουν τα στοιχεία τους, διότι μόνο με αυτόν τον τρόπο θα μπορούσαμε να εντοπίσουμε ποιο από το πρώτο και δεύτερο φυλλάδιο, ανήκουν στον ίδιο μαθητή ή μαθήτρια και δεύτερον διότι έτσι θα εντοπίζαμε τους μαθητές που οι απαντήσεις τους παρουσίαζαν ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον. Η διδάσκουσα με την ερευνήτρια παρέμειναν στην αίθουσα μέχρι το πέρας της διδακτικής ώρας.

2.5 Συνεντεύξεις

Οι συνεντεύξεις αποτελούν τη δεύτερη φάση της έρευνας. Πραγματοποιήθηκαν σε δύο μέρες, στα μέσα Μαΐου 2010. Αρχικά συνεννοηθήκαμε με τη διευθύντρια του σχολείου και τις ίδιες τις μαθήτριες και καταλήξαμε να γίνουν στο τέλος του σχολικού ωραρίου. Την πρώτη μέρα πήραμε συνέντευξη από 2 μαθήτριες και την επόμενη μέρα από 3. Οι μαθήτριες επιλέχθηκαν έπειτα από την διόρθωση και των δυο φυλλαδίων, όπου παρατηρήσαμε ότι οι απαντήσεις τους παρουσίαζαν κάποιες δυσκολίες που αφορούσαν την διαδικασία επίλυσης και την κατανόηση των ερωτημάτων. Σε κάποιες μαθήτριες παρατηρήσαμε ότι οι απαντήσεις τους σε μερικά ερωτήματα παρουσίαζαν έναν τρόπο σκέψης που θέλαμε να ερευνήσουμε περισσότερο.

Στη συνέχεια ακολουθούν δυο πίνακες στους οποίους περιγράφονται οι επιδόσεις των μαθητριών που συμμετείχαν στο ποιοτικό μέρος της έρευνας για κάθε φυλλάδιο ξεχωριστά (για την ερμηνεία των χαρακτηρισμών των απαντήσεων, δες το Παράρτημα Β).

Φυλλάδιο 1

	Ερώτηση 1 (κατηγορία)	**Ερώτηση 2 (κατηγορία)**	**Ερώτηση 3 (κατηγορία)**	**Ερώτηση 4 (κατηγορία)**	**Ερώτηση 5 (κατηγορία)**	**Ερώτηση 6 (κατηγορία)**	**Ερώτηση 7 (κατηγορία)**
Μαθήτρια 1	Σωστή απάντηση (1.2)	Σωστή απάντηση (2.2)	Σωστή απάντηση (3.2)	Λάθος απάντηση (4.5)	Λάθος απάντηση (5.3)	Σωστή απάντηση (6.2)	Λάθος απάντηση (7.8)
Μαθήτρια 2	Σωστή απάντηση (1.2)	Σωστή απάντηση (2.2)	Σωστή απάντηση (3.2)	Σωστή απάντηση (4.2)	Λάθος απάντηση (5.3)	Σωστή απάντηση (6.2)	Λάθος απάντηση (7.6)
Μαθήτρια 3	Σωστή απάντηση (1.2)	Σωστή απάντηση (2.2)	Σωστή απάντηση (3.1)	Λάθος απάντηση (4.5)	Λάθος απάντηση (5.3)	Σωστή απάντηση (6.2)	Σωστή απάντηση (7.2)
Μαθήτρια 4	Σωστή απάντηση (1.2)	Σωστή απάντηση (2.2)	Σωστή απάντηση (3.2)	Σωστή απάντηση (4.2)	Λάθος απάντηση (5.4)	Σωστή απάντηση (6.2)	Μερικώς σωστή απάντηση (7.3)
Μαθήτρια 5	Σωστή απάντηση (1.2)	Μερικώς σωστή απάντηση (2.3)	Σωστή απάντηση (3.2)	Λάθος απάντηση (4.4)	Λάθος απάντηση (5.3)	Λάθος απάντηση (6.4)	Λάθος απάντηση (7.8)

Φυλλάδιο 2

	Πρόβλημα 1 (κατηγορία)	**Πρόβλημα 2 (κατηγορία)**	**Πρόβλημα 3 (κατηγορία)**
Μαθήτρια 1	Σωστή απάντηση (1.1)	Σωστή απάντηση (2.1)	Μερικώς ορθή απάντηση (3.5)
Μαθήτρια 2	Σωστή απάντηση (1.1)	Λάθος απάντηση (2.5)	Λάθος απάντηση (3.8)
Μαθήτρια 3	Σωστή απάντηση (1.1)	Λάθος απάντηση (2.5)	Μερικώς ορθή απάντηση (3.7)
Μαθήτρια 4	Σωστή απάντηση (1.1)	Σωστή απάντηση (2.1)	Σωστή απάντηση (3.1)
Μαθήτρια 5	Σωστή απάντηση (1.1)	Λάθος απάντηση (2.4)	Σωστή απάντηση (3.1)

2.6 Σχεδιασμός και επιλογή των ερωτήσεων

Για να απαντήσουμε στα ερευνητικά μας ερωτήματα, σχεδιάσαμε και επιλέξαμε 7 ερωτήσεις στις οποίες κλήθηκαν να απαντήσουν οι μαθήτριες (Παράρτημα Α). Με την πρώτη ερώτηση ζητήθηκε από τις μαθήτριες να εξηγήσουν το πρόβλημα και να διακρίνουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα. Στη δεύτερη ερώτηση ζητήσαμε από τις μαθήτριες να εξηγήσουν τη λύση που εφάρμοσαν. Στην τρίτη ερώτηση ζητήσαμε από τις μαθήτριες να κρίνουν αν η λύση τους είναι σωστή και αν υπάρχουν περιθώρια βελτίωσής της. Με την τέταρτη ερώτηση θέλαμε να εξετάσουμε αν οι μαθήτριες χρησιμοποίησαν όλα τα δεδομένα και τους περιορισμούς του προβλήματος. Στην πέμπτη ερώτηση, ζητήσαμε από τις μαθήτριες να μας περιγράψουν ποιος ήταν ο τρόπος σκέψης τους και γιατί εφάρμοσαν τη συγκεκριμένη μέθοδο. Με την έκτη ερώτηση, ζητήθηκε από τις μαθήτριες, εάν μπορούν να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα με διαφορετικό τρόπο και τέλος, με την έβδομη ερώτηση θελήσαμε να εξετάσουμε εάν οι μαθήτριες έκαναν ανασκόπηση της μεθόδου που εφάρμοσαν για να βρουν τη λύση. Οι ερωτήσεις τέθηκαν σε όλους τους μαθητές με την ίδια σειρά, όμως οι συνεντεύξεις εμπλουτίστηκαν και με επιπλέον ερωτήσεις, ανάλογα με τις απαντήσεις της κάθε μαθήτριας.

2.7 Διεξαγωγή συνεντεύξεων

Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν στο τέλος του σχολικού ωραρίου. Η μία πραγματοποιήθηκε σε μια αίθουσα διδασκαλίας και οι υπόλοιπες τέσσερις στην αίθουσα των υπολογιστών. Κατά μέσο όρο η κάθε συνέντευξη διήρκησε 20 λεπτά. Για τις συνεντεύξεις χρησιμοποιήθηκε φορητό ψηφιακό μικρόφωνο, έτσι ώστε να καταγράψουμε όλη την ατμόσφαιρα της διαδικασίας. Προτού τεθούν οι ερωτήσεις, αφιερώσαμε 2 λεπτά για να δημιουργήσουμε μια άνετη και φιλική ατμόσφαιρα και για ακόμα μια φορά υπενθυμίσαμε στις μαθήτριες τον σκοπό της έρευνας και τονίσαμε ότι οι απαντήσεις τους θα χρησιμοποιηθούν μόνο για την έρευνα αυτή. Τέλος προσπαθήσαμε να κάνουμε τις ερωτήσεις με ουδέτερο τρόπο ώστε να μην καθοδηγούνται οι απαντήσεις των παιδιών.

2.8 Πρωτόκολλο ανάλυσης δεδομένων

Τα δεδομένα που αναλύθηκαν για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων ήταν οι απαντήσεις των μαθητών στα έργα των δυο δοκιμίων. Στην ενότητα αυτή επεξηγείται το πρωτόκολλο ανάλυσης των δεδομένων, ξεχωριστά για κάθε ερώτηση.

Φύλλο εργασίας 1

Πρωτόκολλο ανάλυσης των απαντήσεων στην ερώτηση 1 του πρώτου φύλλου εργασίας

Οι απαντήσεις των μαθητών στην πρώτη ερώτηση κατατάχθηκαν στις εξής κατηγορίες:

1.1 σωστή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση

1.2 σωστή απάντηση με αιτιολόγηση

Στην ερώτηση 1 όλες οι απαντήσεις των παιδιών ήταν σωστές

Πρωτόκολλο ανάλυσης των απαντήσεων στην ερώτηση 2 του πρώτου φύλλου εργασίας

Οι απαντήσεις των μαθητών στη δεύτερη ερώτηση κατατάχθηκαν στις εξής κατηγορίες:

2.1 σωστή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση: όταν ο μαθητής έδινε την απάντηση 9 αμέσως

2.2 σωστή απάντηση με αιτιολόγηση: όταν ο μαθητής εξηγούσε ότι η απάντηση είναι αυτή διότι πρέπει να προσθέσω και στα δυο μέλη το 7 για να διατηρηθεί η ισότητα ή όταν αντικαθιστούσε τον αριθμό 7 και έβρισκε το άθροισμα

2.3 μερικώς ορθή απάντηση: όταν έδινε συγκεκριμένους αριθμούς στα α και β ώστε το άθροισμα τους να είναι 7 και στη συνέχεια έβρισκε την απάντηση

2.4 λανθασμένη απάντηση: οποιαδήποτε άλλη απάντηση

Πρωτόκολλο ανάλυσης των απαντήσεων στην ερώτηση 3 του πρώτου φύλλου εργασίας

Οι απαντήσεις των μαθητών στην τρίτη ερώτηση κατατάχθηκαν στις εξής κατηγορίες:

3.1 σωστή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση: όταν ο μαθητής έδινε την απάντηση Π=4χ ή Π= χ+χ+χ+χ

3.2 σωστή απάντηση με αιτιολόγηση: όταν ο μαθητής επεξηγούσε γιατί είναι αυτή η περίμετρος

3.3 μερικώς ορθή απάντηση: όταν έγραφε ότι Π= χχχχ άρα Π=4χ

3.4 λανθασμένη απάντηση: όταν ο μαθητής έδινε την απάντηση $\Pi=\chi^2$ ή οποιαδήποτε άλλη απάντηση

<u>Πρωτόκολλο ανάλυσης των απαντήσεων στην ερώτηση 4 του πρώτου φύλλου εργασίας</u>

Οι απαντήσεις των μαθητών στην τέταρτη ερώτηση κατατάχθηκαν στις εξής κατηγορίες:

4.1 σωστή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση: όταν ο μαθητής έδινε την απάντηση 8+γ αμέσως

4.2 σωστή απάντηση με αιτιολόγηση: όταν ο μαθητής εξηγούσε ότι η απάντηση είναι αυτή διότι πρέπει να προσθέσω και στα δυο μέλη το γ για να διατηρηθεί η ισότητα ή όταν έγραφε ότι δεν μπορώ να βρω αριθμητικό αποτέλεσμα παρά μόνο 8+γ ή όταν έβρισκε την απάντηση επεξηγώντας ότι αντικαθιστά το α+β με 8 στο άθροισμα α+β+γ

4.3 Μερικώς ορθή απάντηση: όταν ο μαθητής έγραφε ότι δεν μπορεί να βρει το άθροισμα διότι δε γνωρίζει το γ

4.4 Λανθασμένη απάντηση: όταν ο μαθητής έδινε συγκεκριμένους αριθμούς στα α,β,γ και έβρισκε το άθροισμα

4.5 λανθασμένη απάντηση: οποιαδήποτε άλλη απάντηση

<u>Πρωτόκολλο ανάλυσης των απαντήσεων στην ερώτηση 5 του πρώτου φύλλου εργασίας</u>

Οι απαντήσεις των μαθητών στη πέμπτη ερώτηση κατατάχθηκαν στις εξής κατηγορίες:

5.1 Σωστή απάντηση: όταν ο μαθητής έγραφε αμέσως την απάντηση 3ν+5 ή όταν έγραφε την απάντηση εξηγώντας ότι δεν μπορεί να βρει αριθμητικό αποτέλεσμα διότι δε γνωρίζει το ν

5.2 Μερικώς ορθή απάντηση: όταν ο μαθητής έγραφε ότι δεν μπορεί να βρει το άθροισμα διότι δε γνωρίζει την τιμή του ν

5.3 Λανθασμένη απάντηση: όταν ο μαθητή έβρισκε το ν λύνοντας την εξίσωση 3ν+5=0

5.4 λανθασμένη απάντηση: οποιαδήποτε άλλη απάντηση

5.5 καμία απάντηση: όταν ο μαθητής δεν έδινε απάντηση στο ερώτημα

<u>Πρωτόκολλο ανάλυσης των απαντήσεων στην ερώτηση 6 του πρώτου φύλλου εργασίας</u>

Οι απαντήσεις των μαθητών στην έκτη ερώτηση κατατάχθηκαν στις εξής κατηγορίες:

6.1 σωστή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση: όταν ο μαθητής απαντούσε ότι είναι μερικές φορές αληθής

6.2 σωστή απάντηση με αιτιολόγηση: όταν απαντούσε ότι θα είναι αληθής μόνον όταν $\beta=\delta$, διαφορετικά δε θα είναι ποτέ αληθής.

6.3 λανθασμένη απάντηση: όταν ο μαθητής απαντούσε ότι δε θα είναι ποτέ αληθής με την αιτιολογία ότι το β είναι διαφορετικό από το δ ή και χωρίς αιτιολόγηση

6.4 λανθασμένη απάντηση: όταν έδινε την απάντηση πάντα αληθής με ή χωρίς αιτιολόγηση

6.5 καμία απάντηση: όταν ο μαθητής δεν έδωσε απάντηση στο ερώτημα

<u>Πρωτόκολλο ανάλυσης των απαντήσεων στην ερώτηση 7 του πρώτου φύλλου εργασίας</u>

Οι απαντήσεις των μαθητών στην έβδομη ερώτηση κατατάχθηκαν στις εξής κατηγορίες:

7.1 σωστή απάντηση χωρίς δοκιμές: όταν ο μαθητής έδινε την πλήρη απάντηση ‘‘$2\alpha<\alpha+2$ όταν $\alpha<2$, $2\alpha=\alpha+2$ όταν $\alpha=2$ και $2\alpha>\alpha+2$ όταν $\alpha>2$’’ χωρίς να εκτελέσει δοκιμές.

7.2 σωστή απάντηση με δοκιμές: όταν ο μαθητής έδινε τη σωστή απάντηση εκτελώντας πρώτα δοκιμές

7.3 Μερικώς ορθή απάντηση: όταν ο μαθητής έβγαζε σωστά συμπεράσματα για όλες τις τιμές του α εκτός από την τιμή 2.

7.4 μερικώς ορθή απάντηση: όταν ο μαθητής έβγαζε συμπεράσματα για συγκεκριμένους αριθμούς ή όταν έκανε σωστές δοκιμές μέχρι την τιμή $\alpha=5$

7.5 Λανθασμένη απάντηση: όταν ο μαθητής έγραφε ότι $2\alpha>\alpha+2$ επειδή είναι πολλαπλασιασμός ή ότι $2\alpha<\alpha+2$ και οποιαδήποτε άλλη απάντηση

7.6 λανθασμένη απάντηση: όταν έγραφε ότι το $\alpha + 2$ είναι μεγαλύτερο, με ή χωρίς αιτιολόγηση

7.7λανθασμένη απάντηση: όταν έγραφε ότι $2\alpha = \alpha +2$

7.8 λανθασμένη απάντηση: οποιαδήποτε άλλη απάντηση

Φύλλο εργασίας 2

<u>Πρωτόκολλο ανάλυσης των απαντήσεων στο πρόβλημα 1 του δεύτερου φύλλου εργασίας</u>

Οι απαντήσεις των μαθητών στο πρώτο πρόβλημα κατατάχθηκαν στις εξής κατηγορίες:

1.1 σωστή απάντηση: όταν ο μαθητής έγραφε σωστά την εξίσωση που περιγράφει το πρόβλημα

1.2 λανθασμένη απάντηση: όταν ο μαθητής έδινε ως απάντηση την εξίσωση 2x + 5 = 5y – 4

1.3 λανθασμένη απάντηση: οποιαδήποτε άλλη απάντηση

<u>Πρωτόκολλο ανάλυσης των απαντήσεων στο πρόβλημα 2 του δεύτερου φύλλου εργασίας</u>

Οι απαντήσεις των μαθητών στο δεύτερο πρόβλημα κατατάχθηκαν στις εξής κατηγορίες:

2.1 σωστή απάντηση: οι απαντήσεις που έχουν σωστή επίλυση της εξίσωσης, σωστή περιγραφή των βημάτων της λύσης και σωστό συμπέρασμα.

2.2 σωστή απάντηση χωρίς περιγραφή: όταν ο μαθητής έλυνε σωστά την εξίσωση, έβγαζε σωστό συμπέρασμα ό **τ** δεν υπάρχει λύση, αλλά η περιγραφή των βημάτων της λύσης δεν ήταν ολοκληρωμένη ή δεν υπήρχε

2.3 μερικώς ορθή απάντηση: οι απαντήσεις που έχουν κάποιο λάθος στη περιγραφή των βημάτων αλλά η επίλυση της εξίσωσης και το συμπέρασμα είναι σωστά. Επίσης μη πλήρεις θα θεωρηθούν απαντήσεις που είχαν λάθος στην επίλυση της εξίσωσης και κατέληγαν σε αποτέλεσμα της μορφής 0χ=α, αλλά το συμπέρασμα ήταν σωστό.

2.4 λανθασμένη απάντηση: όταν ο μαθητής δεν έδινε πλήρη απάντηση

2.5 *λανθασμένη απάντηση:* όταν ο μαθητής έκανε λάθος πράξεις κατά την επίλυση της εξίσωσης και κατέληγε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει λύση

2.6 *λανθασμένη απάντηση:* οποιαδήποτε άλλη απάντηση

<u>Πρωτόκολλο ανάλυσης των απαντήσεων στο πρόβλημα 3 του δεύτερου φύλλου εργασίας</u>

Οι απαντήσεις των μαθητών στο τρίτο πρόβλημα κατατάχθηκαν στις εξής κατηγορίες:

3.1 σωστή απάντηση: η ορθή αριθμητική λύση του προβλήματος αλλά και ορθή περιγραφική λύση των μαθητών.

3.2 σωστή απάντηση: όταν ο μαθητής έδινε μόνο την περιγραφική ορθή λύση στο πρόβλημα

3.3 σωστή απάντηση: όταν ο μαθητής έδινε μόνο την αριθμητική ορθή λύση στο πρόβλημα

3.4 *μερικώς ορθή απάντηση*: οι απαντήσεις που έχουν σωστή περιγραφή, σωστή εφαρμογή των Πυθαγορείων Θεωρημάτων αλλά λάθος τύπο εμβαδού

3.5 *μερικώς ορθή απάντηση:* οι απαντήσεις που έχουν κάποιο αριθμητικό λάθος αλλά ο τρόπος σκέψης είναι σωστός.

3.6 *μερικώς ορθή απάντηση:* οι απαντήσεις που έχουν σωστή περιγραφή αλλά λάθος πράξεις και λάθος τύπο εμβαδού

3.7 *μερικώς ορθή απάντηση:* οι απαντήσεις που έχουν κάποιο λάθος στην εφαρμογή των Πυθαγορείων Θεωρημάτων

3.8 Λανθασμένη απάντηση: οι απαντήσεις που εφαρμόζουν Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ και οποιαδήποτε άλλη απάντηση.

3.9 *καμία απάντηση:* όταν ο μαθητής δεν έδινε απάντηση στο πρόβλημα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Εισαγωγή

Τα ερευνητικά αποτελέσματα προέκυψαν από την ανάλυση των απαντήσεων όσων μαθητών ήταν παρόντες και στα δύο δοκίμια, δηλαδή 41 μαθητών (17 αγόρια και 24 κορίτσια). Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων γίνεται σε ξεχωριστή ενότητα για κάθε φυλλάδιο και σε ξεχωριστή υποενότητα για κάθε ερώτημα. Στο ξεκίνημα κάθε υποενότητας παρουσιάζεται η ερώτηση ή το πρόβλημα στο οποίο κλήθηκαν να απαντήσουν οι μαθητές καθώς και ο στόχος του κάθε προβλήματος . Στη συνέχεια παρουσιάζεται σε διάγραμμα η συχνότητα των σωστών, μερικώς ορθών και λάθος απαντήσεων. Σε κάποιες ερωτήσεις παρουσιάζονται ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών που είχαν ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον καθώς και αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις με αυτούς τους μαθητές. Τέλος όπου κρίθηκε σκόπιμο, δίνονται σε πίνακα οι απαντήσεις των παιδιών και οι συχνότητες τους ώστε να γίνει αντιληπτή η δυσκολία που είχαν σε αυτήν την ερώτηση καθώς και ο λόγος για τον οποίο απάντησαν λάθος κάποιοι από αυτούς.

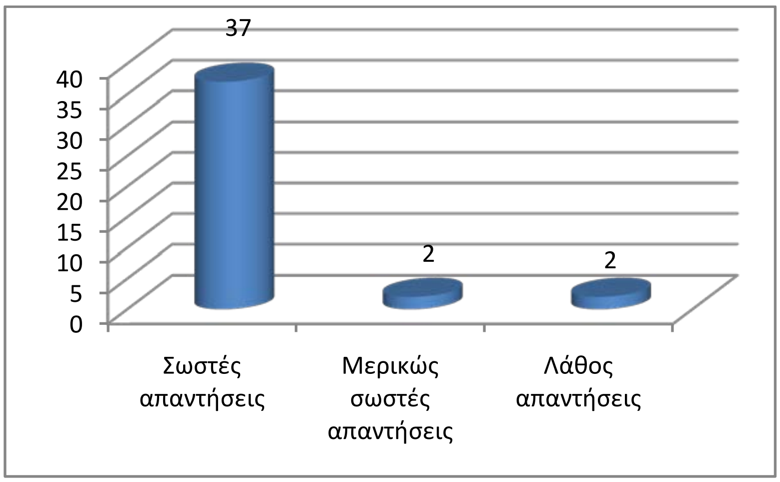
3.1 Πρώτο φύλλο εργασίας- κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής

Ερώτηση 1

Στην πρώτη ερώτηση του πρώτου φύλλου εργασίας τα παιδιά κλήθηκαν να απαντήσουν στο εξής: ‘‘ *αν α+5= 12, τότε α=;*’’. Στόχος της συγκεκριμένης ερώτησης είναι να δούμε κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν το γράμμα έχοντας μια συγκεκριμένη τιμή. Όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά στο ερώτημα αυτό. Υπάρχουν 5 απαντήσεις που ανήκουν στην κατηγορία 1.1 δηλαδή απαντήσεις που δεν είχαν αιτιολόγηση και δινόταν αμέσως η απάντηση α=7. Στην κατηγορία 1.2 υπάρχουν 26 απαντήσεις: στις 2, οι μαθητές βρήκαν το α κάνοντας δοκιμή, στις 33 οι μαθητές έλυσαν αναλυτικά την εξίσωση α+5=7 ενώ σε μια ο μαθητής έλυσε την εξίσωση και στη συνέχεια έκανε την επαλήθευση.

Ερώτηση 2

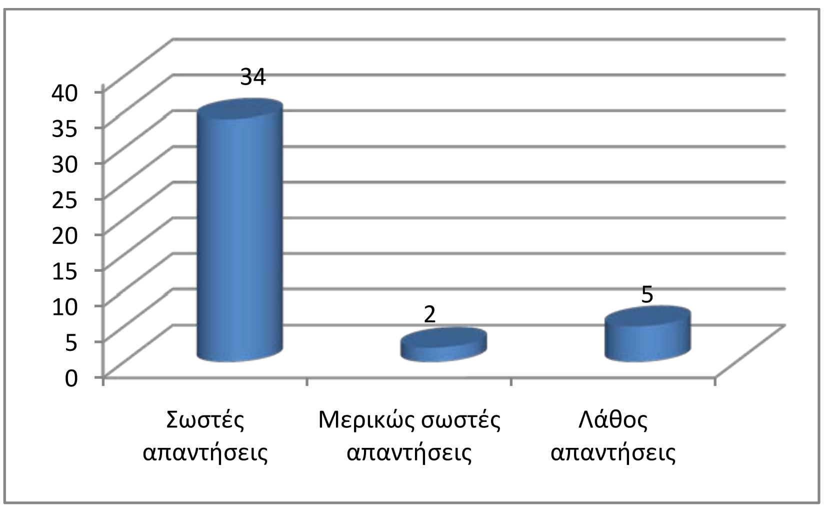
Εδώ τα παιδιά κλήθηκαν να απαντήσουν στην ερώτηση ‘‘*αν α+β=7, τότε α+β+2=;*’’. Στόχος αυτής της ερώτησης είναι να μελετήσουμε κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν το γράμμα ως κάτι που μπορεί να αγνοηθεί η τιμή του. Τα αποτελέσματα των απαντήσεων δίνονται από το παρακάτω διάγραμμα:



Όπως παρατηρούμε περίπου το 90% των μαθητών απάντησε σωστά. Οι περισσότεροι μαθητές λοιπόν αγνόησαν τα γράμματα και έδωσαν βάση μόνο στο άθροισμά τους δηλαδή τον αριθμό 7. Στην ερώτηση αυτή υπάρχουν 9 απαντήσεις που ανήκουν στην κατηγορία 2.1, 28 απαντήσεις που ανήκουν στην κατηγορία 2.2, 2 απαντήσεις που ανήκουν στην κατηγορία 2.3 και 2 απαντήσεις που ανήκουν στην κατηγορία 2.4. Οι μαθητές που έδωσαν την απάντηση 2.1, έγραψαν χωρίς αιτιολόγηση ότι το άθροισμα ισούται με 9. Οι μαθητές που έδωσαν την απάντηση 2.2 αιτιολόγησαν την απάντηση τους με 2 τρόπους. Οι 18 από αυτούς αντικατέστησαν με 7 το άθροισμα α+β ενώ οι 10 έγραψαν ότι πρέπει να προσθέσουν και στα δυο μέλη τον αριθμό 2 για να διατηρηθεί η ισότητα. Οι δυο μαθητές που έδωσαν μερικώς ορθή απάντηση (απάντηση 2.3), βρήκαν το σωστό αποτέλεσμα αλλά έδωσαν συγκεκριμένες τιμές στα α και β. Δεν μπόρεσαν δηλαδή να αγνοήσουν τα γράμματα και πίστευαν ότι έπρεπε να τους δώσουν μια τιμή για να απαντήσουν ορθά στο ερώτημα. Τέλος τα δυο παιδιά που απάντησαν λάθος (απάντηση 2.4) έδωσαν τιμές στα α και β ώστε το άθροισμα α+β+2 να δίνει αποτέλεσμα 7. Εδώ οι μαθητές όχι μόνο δεν μπόρεσαν να αγνοήσουν τα γράμματα αλλά και οι τιμές που τους έδωσαν δεν επαλήθευαν την ισότητα α+β=7.

<u>Ερώτηση 3</u>

Σε αυτή την ερώτηση τα παιδιά κλήθηκαν να δώσουν απάντηση στο πρόβλημα ‘‘ *αν χ η πλευρά ενός τετραγώνου, τότε η περίμετρος του Π=;*’’. Στόχος είναι να μελετήσουμε κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν ότι το γράμμα χρησιμοποιείται σα συντομογραφία για ένα αντικείμενο ή πιο συγκεκριμένα σαν ένα αντικείμενο. Όπως φαίνεται από το διάγραμμα που ακολουθεί, το 83% των μαθητών απάντησε σωστά, το 5% έδωσε μερικώς ορθή απάντηση ενώ το 12% απάντησε λάθος.



Σε αυτό το ερώτημα έχουμε : Κατηγορία 3.1 - 17 απαντήσεις

Κατηγορία 3.2 – 17 απαντήσεις

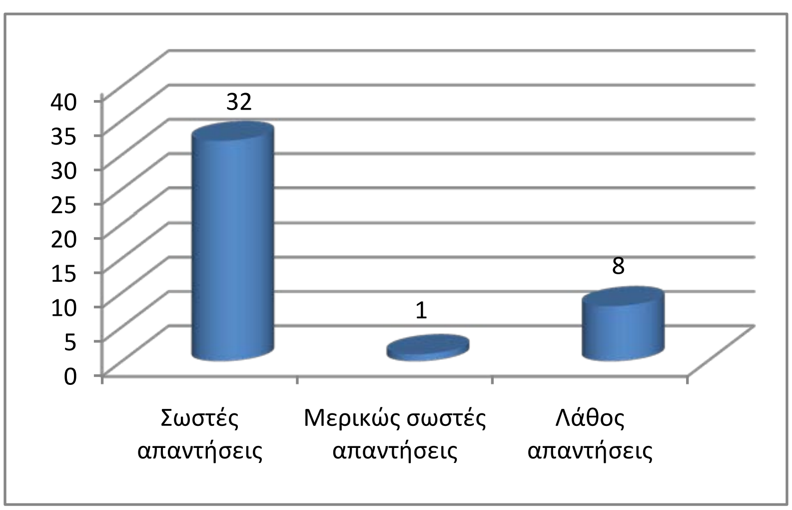
Κατηγορία 3.3 – 2 απαντήσεις

Κατηγορία 3.4 – 5 απαντήσεις

Στην κατηγορία 3.1, οι μαθητές έδωσαν αμέσως τη σωστή απάντηση Π=4x. Στην κατηγορία 3.2, οι μαθητές έδωσαν τη σωστή απάντηση επεξηγώντας ότι η περίμετρος του τετραγώνου είναι αυτή, διότι το τετράγωνο έχει 4 πλευρές ίσες. Στην κατηγορία 3.3 ανήκουν οι μαθητές που έδωσαν μερικώς ορθή απάντηση. Οι μαθητές αυτοί έκαναν το εξής ίδιο λάθος : ‘‘Π= xxxx δηλαδή Π=4x’’. Στην κατηγορία 3.4 ανήκουν οι μαθητές που απάντησαν λάθος στο ερώτημα. Παρά το γεγονός ότι υπήρχαν λάθος απαντήσεις, μόνο η μια είχε σχέση με την αντίληψη του μαθητή για το γράμμα. Ο μαθητής αυτός έδωσε συγκεκριμένη τιμή στο χ αλλά η απάντηση του δεν είχε μια λογική σειρά και δεν απάντησε σωστά το ερώτημα. Οι υπόλοιπες 4 απαντήσεις δεν είχαν σχέση με το αν οι μαθητές μπόρεσαν να κατανοήσουν το γράμμα σαν ένα αντικείμενο. Το λάθος που έκαναν οι συγκεκριμένοι μαθητές αφορούσε την έννοια της περιμέτρου. Δηλαδή αντί να βρουν την περίμετρο, έβρισκαν το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς χ και η απάντηση τους ήταν Π=χχ ή Π= χ^2 .

Ερώτηση 4

Σε αυτήν την ερώτηση, τα παιδιά κλήθηκαν να απαντήσουν στο εξής ‘‘ *αν α+β=8 τότε α+β+γ=;*’’. Στόχος είναι να μελετήσουμε το κατά πόσο οι μαθητές έχουν την ικανότητα να αντιληφθούν το γράμμα γ σαν ένα συγκεκριμένο αλλά άγνωστο αριθμό. Όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα το 78% των μαθητών απάντησε σωστά, το 2% έδωσε μερικώς ορθή απάντηση και το 20% απάντησε λάθος



Οι απαντήσεις κατατάσσονται ως εξής: Κατηγορία 4.1 – 23 απαντήσεις

Κατηγορία 4.2 – 9 απαντήσεις

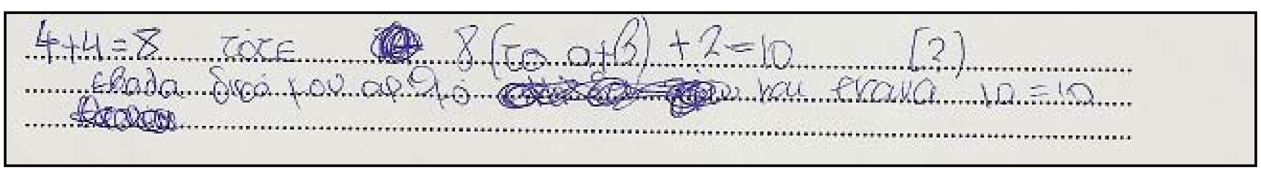
Κατηγορία 4.3 – 1 απάντηση

Κατηγορία 4.4 – 4 απαντήσεις

Κατηγορία 4.5 – 4 απαντήσεις

Στην κατηγορία 4.1, οι μαθητές έδωσαν τη σωστή απάντηση 8 + γ χωρίς αιτιολόγηση. Στην κατηγορία 4.2, οι μαθητές έδωσαν τη σωστή απάντηση αιτιολογώντας την με 3 τρόπους. Πέντε μαθητές αντικατέστησαν το άθροισμα α + β με τον αριθμό 8, 3 μαθητές έγραψαν ότι για να διατηρηθεί η ισότητα πρέπει να προσθέσω και στα δυο μέλη το γ ενώ 1 μαθητής έγραψε ότι δεν μπορεί να βρει αριθμητικό αποτέλεσμα παρά μόνο 8 + γ. Στην κατηγορία 4.3 ανήκει ο μαθητής που έδωσε μερικώς ορθή απάντηση και έγραψε ότι δεν μπορεί να βρει το άθροισμα διότι δεν έχει δοθεί η τιμή του γράμματος γ. Στην κατηγορία 4.4 ανήκουν οι μαθητές που έδωσαν λανθασμένη απάντηση και συγκεκριμένα έδωσαν τιμές στα α, β, γ για να βρουν κάποιο αριθμητικό αποτέλεσμα. Τέλος στην κατηγορία 4.5 ανήκουν οι μαθητές που έδωσαν τη λανθασμένη απάντηση 8γ και οποιαδήποτε άλλη απάντηση.

Απάντηση μαθήτριας που ανήκει στην κατηγορία 4.4


4+4=8 τότε 8 (το α+β) +2=10 [2)
έβαλα δικό του αριθμό και έκανα 10=10

1ο Απόσπασμα: διάλογος με τη μαθήτρια που έδωσε την παραπάνω απάντηση

Ε: θα ήθελα να μου πεις ποια είναι τα δεδομένα και ποια τα ζητούμενα στο πρόβλημα.

Μ: Αν α+β=8, τότε α+β+γ ίσον πόσο.

Ε: ωραία, θα ήθελα να μου εξηγήσεις την απάντηση που έδωσες.

Μ: Λοιπόν, 4+4=8, έβαλα τυχαίο αριθμό. Το 8 που είναι το α+β συν 2 μας κάνει 10. Το γ το έβαλα ίσο με 2. Δεν… (παύση). Δεν ήξερα πώς να το κάνω

Ε: θα μπορούσες να δώσεις άλλη λύση στο πρόβλημα χωρίς να δώσεις τιμές στα α, β, γ ?

Μ: α+β+γ ίσον… (παύση). Δεν ξέρω. Δηλαδή με ρωτάτε πως θα το έκανα χωρίς αριθμούς ?

Ε: ναι

Μ: να βρω το ερωτηματικό με γράμματα ?

Ε: να βρεις αυτό που σου ζητάει χρησιμοποιώντας μόνο τα δεδομένα που έχεις, δηλαδή ότι α+β=8

Μ: εεε… το ερωτηματικό θα μπορούσε να είναι το 10.

Ε: πιστεύεις ότι η λύση σου είναι σωστή?

Μ: πιστεύω ότι είναι σωστή αλλά δεν είμαι σίγουρη για τους αριθμούς που έβαλα μόνη μου. Εε… δεν ξέρω.

Από το παραπάνω απόσπασμα παρατηρούμε ότι η μαθήτρια δε μπόρεσε να κατανοήσει το γράμμα γ σαν ένα συγκεκριμένο αλλά άγνωστο αντικείμενο και έτσι του έδωσε συγκεκριμένη τιμή. Επίσης παρατηρούμε ότι δε μπόρεσε να αγνοήσει τα γράμματα α και β παρά το γεγονός ότι δινόταν το άθροισμα αυτών το οποίο και μπορούσε να αντικαταστήσει απευθείας. Το πιο σημαντικό συμπέρασμα που βγήκε από αυτό το απόσπασμα είναι ότι η μαθήτρια θεωρούσε ότι το ‘‘=’’ πρέπει αναγκαστικά να δίνει ένα αριθμητικό αποτέλεσμα. Ακόμα και μετά από την παρότρυνση της ερευνήτριας, να βρει το άθροισμα χωρίς να αντικαταστήσει τα γράμματα με αριθμούς, απάντησε ότι θα μπορούσαμε να πούμε ότι το άθροισμα α+β+γ είναι ίσο με 10.

Ερώτηση 5

Η ερώτηση στην οποία κλήθηκαν να απαντήσουν οι μαθητές ήταν η εξής : ‘‘*Να βρεθεί το άθροισμα 3ν+5;*’’. Στόχος αυτής της ερώτησης είναι ο ίδιος με αυτόν της ερώτησης 4, δηλαδή να μελετήσουμε το κατά πόσο οι μαθητές έχουν την ικανότητα να αντιληφθούν το γράμμα ν σαν έναν συγκεκριμένο αλλά άγνωστο αριθμό. Οι επιδόσεις των μαθητών όπως παρουσιάζονται στο ακόλουθο διάγραμμα ήταν οι εξής : 10 μαθητές (24 %) απάντησαν σωστά, 4 μαθητές (10 %)

έδωσαν μερικώς ορθή απάντηση, 22 μαθητές (54%) απάντησαν λάθος και 5 μαθητές (12%) δεν έδωσαν καμία απάντηση.

Στη ερώτηση αυτή έχουμε 5 κατηγορίες απαντήσεων: Κατηγορία 5.1 – 10 απαντήσεις

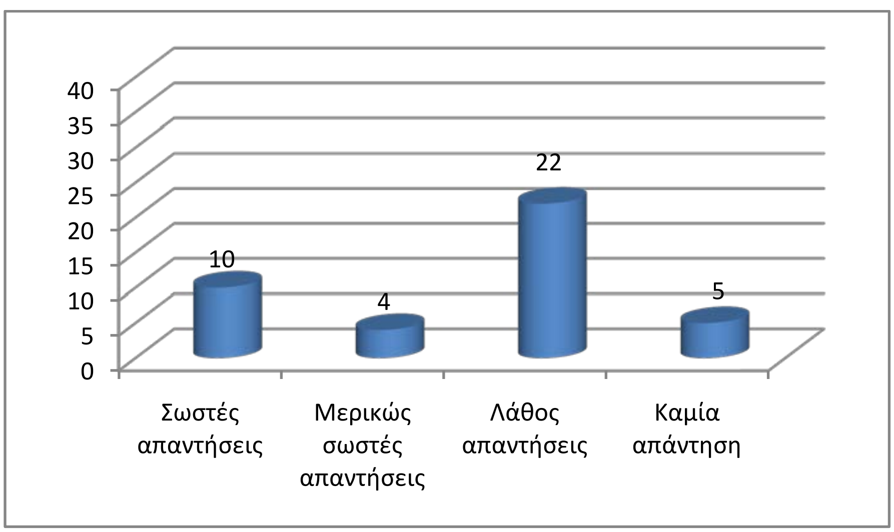
Κατηγορία 5.2 – 4 απαντήσεις

Κατηγορία 5.3 – 8 απαντήσεις

Κατηγορία 5.4 – 14 απαντήσεις

Κατηγορία 5.5 – 5 απαντήσεις

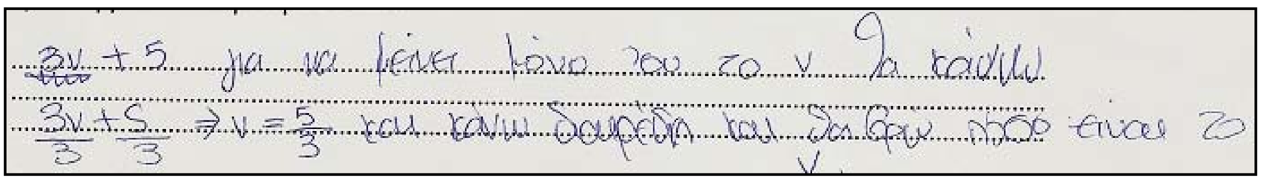
Στην κατηγορία 5.1 ανήκουν οι σωστές απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση. Στην κατηγορία 5.2 ανήκουν οι μαθητές που έδωσαν μερικώς ορθή απάντηση, γράφοντας ότι δεν μπορούν να βρουν το άθροισμα διότι δε γνωρίζουν την τιμή του ν. στην κατηγορία 5.3, ανήκουν οι μαθητές που έδωσαν λανθασμένη απάντηση και συγκεκριμένα προσπάθησαν να βρουν την τιμή του ν λύνοντας την εξίσωση 3ν + 5 = 0 ή διαιρώντας με το 3 την παράσταση 3ν + 5 για να μείνει μόνο του το ν. Στην κατηγορία 5.4, ανήκουν 7 μαθητές που έδωσαν τη λανθασμένη απάντηση 8ν, 1 μαθητής που έδωσε την λανθασμένη απάντηση 15ν, 1 μαθητής που έδωσε στο ν μια συγκεκριμένη τιμή για να βρει το άθροισμα και η απάντηση του αξιολογήθηκε ως λανθασμένη και οι μαθητές που έδωσαν οποιαδήποτε άλλη λάθος απάντηση. Τέλος στην κατηγορία 5.5 ανήκουν οι μαθητές που δεν έδωσαν καμία απάντηση.



Στη συνέχεια υπάρχουν τέσσερα αποσπάσματα από το διάλογο που είχαμε με τις μαθήτριες κατά την διάρκεια των συνεντεύξεων. Η πρώτη, η δεύτερη και η τέταρτη απάντηση ανήκουν στην κατηγορία 5.3, ενώ η τρίτη στην κατηγορία 5.4. Στο πρώτο απόσπασμα, η μαθήτρια δεν κατάφερε μετά από τη συζήτηση να κατανοήσει το λάθος που έκανε, ενώ στα υπόλοιπα, αυτό έγινε επιτυχώς.

2ο απόσπασμα: διάλογος με μια μαθήτρια που έδωσε την παρακάτω απάντηση

(η απάντηση αυτή αξιολογήθηκε ως λανθασμένη διότι η μαθήτρια προσπάθησε να βρει το ν)


$3ν + 5$ για να μείνει μόνο του το ν θα κάνω
$\frac{3ν}{3} + \frac{5}{3} \Rightarrow ν = \frac{5}{3}$ και κάνω διαίρεση και θα βρω πόσο είναι το ν

Ε: θα ήθελα να μου πεις αν καταλαβαίνεις τι σου ζητάει το πρόβλημα

Μ: ναι, μου ζητάει να βρω το άθροισμα 3ν συν 5

Ε: εξήγησέ μου τη λύση που εφάρμοσες

Μ: ήθελα να μείνει μόνο του το ν και έβαλα από κάτω το 3 και βρήκα ν=5/3

Ε: έχεις βρει το άθροισμα?

Μ: ε… πρέπει να κάνω τη διαίρεση 5 δια 3 αλλά βγαίνει δύσκολος αριθμός

Ε: το πρόβλημα σου ζητάει να βρεις το ν?

Μ: βασικά δεν είχα καταλάβει ακριβώς τι ζητάει απλά σκέφτηκα ότι μπορεί να ζητάει το ν

Ε: πιστεύεις ότι η λύση που μου έδωσες είναι σωστή?

Μ: πιστεύω πως είναι λάθος

Ε: θα μπορούσες να μου δώσεις τώρα μια άλλη απάντηση?

Μ: ε… 3ν… (παύση). Ζητάει να βρεθεί το άθροισμα, δηλαδή… (παύση)… Το συν σημαίνει να προστεθούν αυτοί οι δύο αριθμοί. Όμως το 3ν είναι 3 επί κάποιον αριθμό… (παύση)... Για να *βρω το ν κάνω τη διαδικασία που έγραψα, οπότε μετά θα μπορούσα να συνεχίσω και να πω ότι 3 επί αυτό που βρήκα για το ν συν 5*

Ε: τη διαδικασία που εφάρμοσες για να βρεις το ν, δηλαδή τη διαίρεση με το συντελεστή του αγνώστου, πότε την εφαρμόζουμε?

Μ: όταν θέλουμε να βρούμε το χ

Ε: δηλαδή σε μια εξίσωση ή γενικά όταν έχουμε έναν άγνωστο διαιρούμε με τον συντελεστή του και μένει μόνος του?

Μ: σε μια εξίσωση

Ε:εδώ υπάρχει εξίσωση?

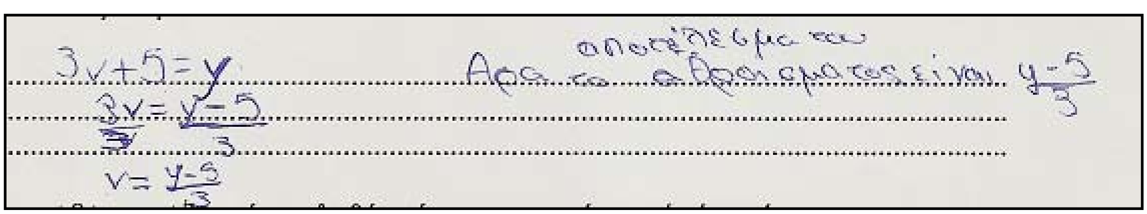
Μ: (παύση) ... εξίσωση? (παύση)… δεν είναι εξίσωση

Ε: όπως μου είπες πριν, πιστεύεις λοιπόν ότι η λύση που μου έδωσες είναι λάθος

Μ: όχι εντάξει, αν το συνεχίσω… (παύση)… δεν ξέρω, μπορεί να είναι και σωστό

Από το παραπάνω απόσπασμα παρατηρούμε ότι η μαθήτρια δε μπόρεσε να αντιληφθεί το ν σαν ένα συγκεκριμένο αλλά άγνωστο αριθμό. Προσπάθησε να βρει την τιμή του γράμματος ν και παρά τη συζήτηση με την ερευνήτρια, για την ορθή εφαρμογή του κανόνα ‘‘διαιρώ με τον συντελεστή του αγνώστου’’ θεώρησε ότι έπραξε σωστά και εφάρμοσε τον κανόνα. Τέλος παρά την αρχική αντίληψη της μαθήτριας ότι η απάντηση της ήταν λανθασμένη, στο τέλος μετά από την συζήτηση με την ερευνήτρια, πίστευε ότι αν συνέχιζε τη σκέψη της αντικαθιστώντας την τιμή που βρήκε για το ν, θα έβρισκε σωστά το άθροισμα που ζητάει το ερώτημα.

<u>3ο απόσπασμα: διάλογος με μια μαθήτρια που έδωσε την απάντηση που ακολουθεί</u> (η απάντηση αυτή αξιολογήθηκε ως λανθασμένη διότι η μαθήτρια προσπάθησε να βρει το ν)

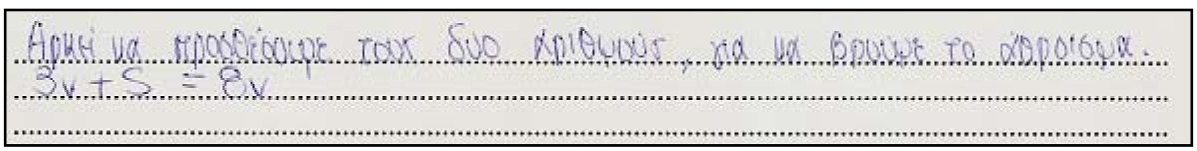


Ε: θα ήθελα να μου εξηγήσεις τη λύση που εφάρμοσες

Μ: πρώτα γράφω την εξίσωση 3ν+5=y. Το y δεν το ξέρουμε ακόμα. Οπότε εε … εδώ πέρα βασικά βρίσκω το ν εγώ, αλλά θα μπορούσαμε να το κάνουμε και αλλιώς. Να το γράψουμε 3ν+5

Παρατηρούμε λοιπόν εδώ, ότι η μαθήτρια ενώ αρχικά θεώρησε ότι το ‘‘+’’ έπρεπε να δώσει κάποιο αποτέλεσμα το οποίο ονόμασε y, στην συνέχεια με κάποιες πράξεις βρήκε το ν και απάντησε ότι αυτή είναι η λύση του προβλήματος. Σημαντικό είναι το γεγονός ότι στην συνέντευξη όπου είδε ξανά την απάντηση της, κατάλαβε πολύ γρήγορα ότι είναι λανθασμένη και στο τέλος απάντησε σωστά. Να σημειώσουμε εδώ ότι η ερευνήτρια δεν ενημέρωνε τις μαθήτριες για την ορθότητα ή όχι της απάντησης τους πριν την ολοκλήρωση της συνέντευξης.

<u>4ο απόσπασμα: διάλογος με μια μαθήτρια που έδωσε την παρακάτω απάντηση</u> (η απάντηση αυτή αξιολογήθηκε ως λανθασμένη διότι η μαθήτρια απάντησε 8ν)



Ε: μπορείς να μου εξηγήσεις τι ζητάει το πρόβλημα?

Μ: ναι… αυτό το πρόβλημα δεν το είχα καταλάβει

Ε: τι ακριβώς δεν έχεις καταλάβει?

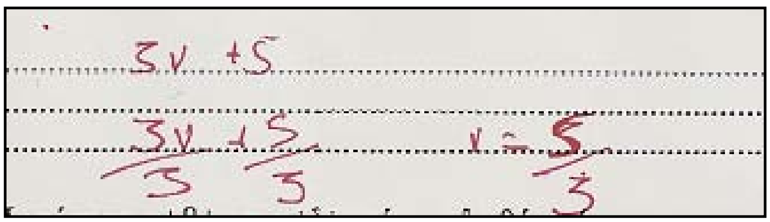
Μ: λέει να βρεθεί το άθροισμα 3ν και 5. Εγώ το σκέφτηκα 3ν + 5 όταν το είδα αλλά ξέρω επίσης ότι δεν γίνεται να προσθέσουμε μια μεταβλητή με έναν αριθμό. Αλλά δεν ήξερα πώς να το κάνω οπότε πρόσθεσα το 3 και το 5 και βρήκα 8ν

Ε: οπότε γνωρίζεις ότι δε γίνεται αυτό αλλά τα πρόσθεσες επειδή δεν είχες τι άλλο να κάνεις ?

Μ: ναι

Παρατηρούμε από το παραπάνω απόσπασμα ότι η μαθήτρια ενώ είχε σκεφτεί αρχικά σωστά το πρόβλημα, στη συνέχεια προχώρησε σε λανθασμένες πράξεις. Πίστευε ότι πρέπει να βρει με κάποιο τρόπο ένα άθροισμα, δηλαδή να ‘‘φύγει’’ το + και έτσι έγραψε αυτήν την απάντηση, παρά το γεγονός ότι γνώριζε πως η διαδικασία αυτή είναι λανθασμένη. Σε αυτήν την περίπτωση το λάθος της μαθήτριας δε σχετίζεται με την έννοια της μεταβλητής ως ένα συγκεκριμένο αλλά άγνωστο αριθμό. Σχετίζεται με την κατανόηση των πράξεων μεταξύ μονωνύμων και με την έννοια της πρόσθεσης.

<u>5ο απόσπασμα: διάλογος με τη μαθήτρια που έδωσε την παρακάτω απάντηση</u> (η απάντηση αξιολογήθηκε ως λανθασμένη, διότι η μαθήτρια προσπάθησε να βρει το ν)



Ε: μπορείς να μου εξηγήσεις τι ζητάει το πρόβλημα?

Μ: ζητάει αν υπάρχει άθροισμα ανάμεσα στο 3ν και στο 5

Ε: θα ήθελες να μου εξηγήσεις τη λύση που εφάρμοσες?

Μ: διαίρεσα τους δύο παράγοντες με το 3 για να μείνει μόνος του ο άγνωστος. Θεώρησα ότι αυτή ήταν η λύση.

Ε: τη διαδικασία ‘‘διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου’’ πότε την εφαρμόζουμε?

Μ: εε... στις εξισώσεις.

Ε: ωραία, εδώ έχουμε κάποια εξίσωση?

Μ: όχι. Μετά που το ξανασκέφτηκα κατάλαβα ότι δε χρειαζόταν να διαιρέσω με το 3.

Ε: μπορείς να μου δώσεις τώρα κάποια άλλη απάντηση?

Μ: ναι. Βασικά δεν μπορεί να προχωρήσει άλλο.

Ε: οπότε ποια απάντηση θα μου έδινες?

Μ: 3ν + 5

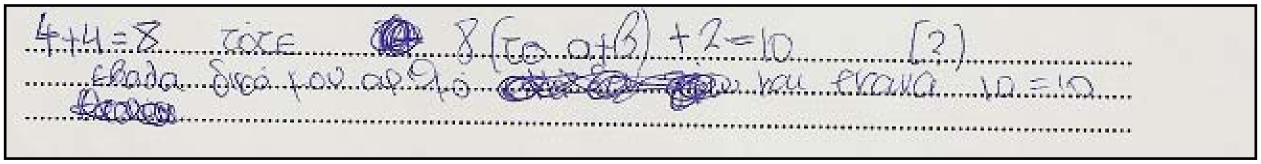
Και σε αυτή τη περίπτωση η πρώτη σκέψη της μαθήτριας ήταν να διαιρέσει με το 3 για να μείνει μόνο του το γράμμα ν. θεώρησε ότι έχει εξίσωση και βρήκε το ν το οποίο παρουσίασε και ως απάντηση στο ερώτημα. Μετά από τη συζήτηση με την ερευνήτρια κατανόησε το λάθος της και έδωσε τη σωστή απάντηση. Σημαντικό είναι ότι ενώ το ερώτημα δε ζητούσε το ν, η μαθήτρια θεώρησε ότι αυτή ήταν η λύση, γεγονός που σημαίνει ότι δε μπόρεσε να κατανοήσει το γράμμα σαν έναν συγκεκριμένο αλλά άγνωστο αριθμό.

Σύγκριση αποτελεσμάτων των ερωτήσεων 4 και 5

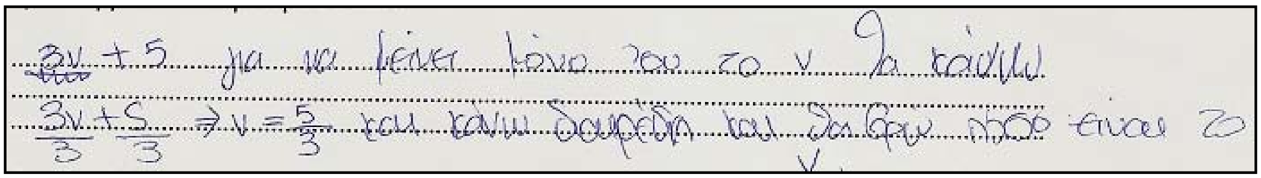
Όπως προαναφέρθηκε, οι ερωτήσεις 4 και 5 είχαν τον ίδιο σκοπό δηλαδή να μελετηθεί το κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν το γράμμα σαν έναν συγκεκριμένο αλλά άγνωστο αριθμό. Από τις απαντήσεις που πήραμε σε αυτές τις ερωτήσεις, παρατηρήσαμε ότι ενώ στην ερώτηση 4 είχαμε 32 σωστές απαντήσεις και 8 μόνο λάθος, στην ερώτηση 5 οι σωστές απαντήσεις ήταν μόνο 10 ενώ οι λάθος 27. Πιο αναλυτικά 8 μαθητές απάντησαν σωστά και στις δυο ερωτήσεις, 20 μαθητές απάντησαν σωστά στην ερώτηση 4 και λάθος στην ερώτηση 5, οι 4 μαθητές που έδωσαν μερικώς ορθή απάντηση στην ερώτηση 5 είχαν απαντήσει σωστά στην ερώτηση 4, ο ένας μαθητής που απάντησε μερικώς ορθά στην ερώτηση 4, έδωσε λάθος απάντηση στην 5, 2 μόλις μαθητές που απάντησαν λάθος στην τέταρτη ερώτηση, απάντησαν σωστά στην πέμπτη και τέλος 6 μαθητές απάντησαν λάθος και στις δυο.

Τα παρακάτω αποσπάσματα είναι οι απαντήσεις μιας μαθήτριας στις ερωτήσεις 4 και 5 οι οποίες αξιολογήθηκαν ως λανθασμένες. Τις απαντήσεις αυτές τις είδαμε και προηγουμένως μαζί με τα αποσπάσματα από τον διάλογο με τη μαθήτρια. Το συμπέρασμα ήταν ότι η μαθήτρια δε μπόρεσε να κατανοήσει την έννοια της μεταβλητής σαν ένα συγκεκριμένο αλλά άγνωστο αριθμό, καθώς έδωσε τιμή στο γράμμα της ερώτησης 4 και βρήκε με κάποιο τρόπο την τιμή του γράμματος στην ερώτηση 5.

Ερώτηση 4

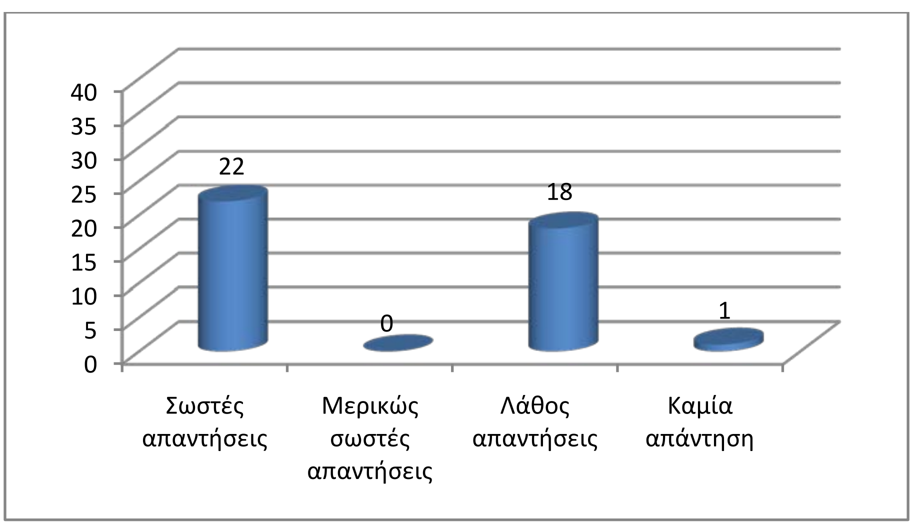


Ερώτηση 5



<u>Ερώτηση 6</u>

Σε αυτήν την ερώτηση οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν στο εξής : ‘‘ Η ισότητα α+β+γ= α+δ+γ είναι αληθής πάντοτε, μερικές φορές ή ποτέ;’’. Στόχος της ερώτησης ήταν να μελετήσουμε κατά πόσο οι μαθητές μπορούσαν να αντιληφθούν ότι τα γράμματα β και δ θεωρούνται γενικευμένοι αριθμοί, δηλαδή μπορούν να πάρουν περισσότερες από μια τιμές. Στην ερώτηση αυτή 22 μαθητές (54%), δηλαδή σχεδόν οι μισοί έδωσαν σωστή απάντηση, 18 μαθητές (44%) απάντησαν λάθος και 1 μαθητής (2%) δεν έδωσε καμία απάντηση.



Στην ερώτηση αυτή οι απαντήσεις κατατάσσονται ως εξής: Κατηγορία 6.1 – 3 απαντήσεις

Κατηγορία 6.2 – 19 απαντήσεις

Κατηγορία 6.3 – 15 απαντήσεις

Κατηγορία 6.4 – 3 απαντήσεις

Κατηγορία 6.5 - 1 απάντηση

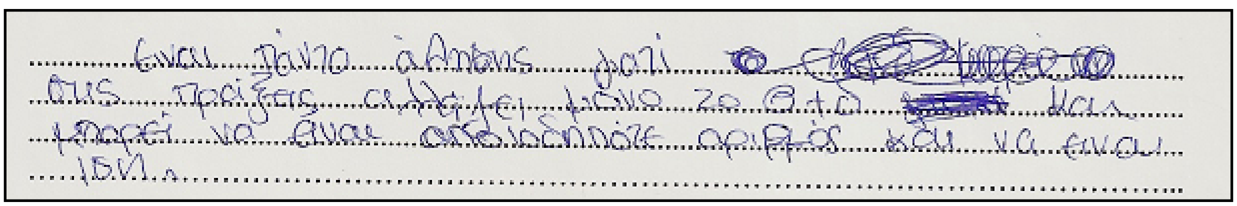
Στη συνέχεια υπάρχει ένας πίνακας στον οποίο παρουσιάζονται πιο αναλυτικά οι απαντήσεις των μαθητών σε αυτήν την ερώτηση. Ο λόγος για τον οποίο προχωρήσαμε σε αυτήν την παρουσίαση είναι ότι κάποιες από τις απαντήσεις είχαν ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον.

	κατηγορία	**μαθητές**	**Απάντηση**
Σωστές απαντήσεις	6.1	3	Μερικές φορές
	6.2	18	Μερικές φορές, ισχύει όταν β=δ
	6.2	1	Μερικές φορές διότι δε γνωρίζουμε τους αριθμούς
Λάθος απαντήσεις	6.3	6	Ποτέ
	6.3	5	Ποτέ γιατί β≠δ
	6.3	3	Ποτέ γιατί το β και το δ μπορεί να έχουν διαφορετικές τιμές
	6.3	1	Ποτέ, διότι τα β και δ είναι διαφορετικοί αριθμοί. Εκτός αν είναι διαφορετικοί τύποι αριθμών δηλαδή β=2/10 και δ=0,2. Τότε μπορεί να ισχύει η ισότητα
	6.4	1	Πάντοτε
	6.4	1	Πάντα αληθής διότι είναι μια ισότητα
	6.4	1	Πάντα αληθής διότι το β και το δ μπορεί να είναι οποιοιδήποτε αριθμοί και να είναι ίσοι
Καμία απάντηση	6.5	1	Δεν απάντησε

Από τον πίνακα παρατηρούμε ότι πολλοί μαθητές κατάλαβαν πως η ισότητα θα αληθεύει μόνο όταν β=δ και συγκεκριμένα κατανοούν ότι τα β και δ μπορούν να πάρουν περισσότερες από μια τιμές, οπότε και η ισότητα θα ισχύει μερικές φορές. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι απαντήσεις στις οποίες οι μαθητές φαίνεται να κατανοούν πως τα β και δ είναι διαφορετικοί αριθμοί εφόσον είναι και διαφορετικά τα γράμματα, καθώς επίσης και η απάντηση στην οποία ο μαθητής φαίνεται να θεωρεί ότι η ισότητα θα αληθεύει πάντα εφόσον μπορεί να δώσει την ίδια τιμή στα β και δ και μόνον αυτήν.

Ακολουθεί απόσπασμα της συνέντευξης με μια μαθήτρια η απάντηση της οποίας ανήκει στην κατηγορία 6.4.

<u>6ο απόσπασμα: διάλογος με τη μαθήτρια που έδωσε την παρακάτω απάντηση</u>
(η απάντηση αξιολογήθηκε ως λανθασμένη)


είναι πάντα αληθής γιατί στις πράξεις αλλάζει μόνο το β και δ και μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός και να είναι ίσα.

Ε: θα ήθελα να μου εξηγήσεις τι σου ζητάει το πρόβλημα

Μ: αν αυτή η ισότητα είναι αληθής πάντοτε, μερικές φορές ή ποτέ

Ε: εξήγησε μου τη λύση που εφάρμοσες

Μ: λέω ότι είναι πάντα αληθής γιατί στις πράξεις αλλάζει μόνο το β και το δ και αυτά μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός και να είναι ίσα… Δεν το έχω γράψει πολύ καλά

Ε:καταλαβαίνω τι θες να πεις αλλά αν μπορείς θα ήθελα να το αναλύσεις περισσότερο

Μ: βασικά τώρα που το ξανασκέφτομαι δε νομίζω ότι είναι πάντα αληθής

Ε: δηλαδή πιστεύεις ότι η απάντηση σου δεν είναι σωστή?

Μ: ναι. Γιατί οι αριθμοί (παύση) … αν α=3, γ=5, β=6 και δ=8 δε θα είναι ίσα. Οπότε η απάντηση είναι ποτέ.

Ε: μου έδωσες ένα παράδειγμα με αριθμούς όπου το β είναι διαφορετικό από το δ …

Μ: αλλά αν βάλουμε τον ίδιο αριθμό θα είναι ίσα

Ε: άρα η απάντηση θα είναι ποτέ?

Μ: όχι, θα είναι μερικές φορές

Ε: πότε θα είναι λοιπόν ίσα?

Μ: όταν και στις δυο μεριές έχει τους ίδιους αριθμούς.

Από τον παραπάνω διάλογο, παρατηρούμε ότι η μαθήτρια αρχικά θεώρησε ότι η ισότητα είναι πάντα αληθής διότι μπορεί να δώσει τις ίδιες τιμές στα β και δ. Δηλαδή δεν κατανόησε πλήρως τα γράμματα σαν γενικευμένους αριθμούς, όπου μπορούν να πάρουν διάφορες τιμές και όχι μόνο μια που θα τα κάνει ίσα. Με μια δεύτερη σκέψη, απάντησε ότι δε θα είναι ποτέ αληθής διότι μπορεί να είναι διαφορετικοί αριθμοί και κατέληξε στη σωστή απάντηση με την βοήθεια της ερευνήτριας. Παρατηρούμε ότι γενικά υπάρχει μια δυσκολία από την μεριά της μαθήτριας να κατανοήσει ότι το γράμμα μπορεί να πάρει περισσότερες από μια τιμές και δεν αρκεί μια συγκεκριμένη τιμή για να βγάλει κάποιο συμπέρασμα για το πρόβλημα.

<u>Ερώτηση 7</u>

Στόχος της ερώτησης 7 είναι να μελετήσουμε κατά πόσο οι μαθητές αντιλαμβάνονται το γράμμα σα μεταβλητή, δηλαδή ότι αντιπροσωπεύει ένα σύνολο. Τα παιδιά κλήθηκαν να απαντήσουν στην ερώτηση : ‘‘ Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος, ο 2α ή ο α+2, όταν το α παίρνει τις τιμές α= 0,1,2,3,4,5… ; ’’. Σε αυτήν την ερώτηση μετά την ερώτηση 5 είχαμε τις λιγότερες σωστές απαντήσεις. Από το διάγραμμα που ακολουθεί, παρατηρούμε ότι το 30% των μαθητών απάντησε σωστά, το 17% έδωσε μερικώς ορθή απάντηση και το 53% απάντησε λάθος.

Στην ερώτηση αυτή οι απαντήσεις κατατάσσονται ως εξής : Κατηγορία 7.1 – 4 απαντήσεις

Κατηγορία 7.2 – 8 απαντήσεις

Κατηγορία 7.3 – 2 απαντήσεις

Κατηγορία 7.4 – 5 απαντήσεις

Κατηγορία 7.5 – 5 απαντήσεις

Κατηγορία 7.6 – 11 απαντήσεις

Κατηγορία 7.7 – 3 απαντήσεις

Κατηγορία 7.8 – 3 απαντήσεις

Στην κατηγορία 7.1 ανήκουν οι μαθητές που έδωσαν την παρακάτω σωστή απάντηση, χωρίς να κάνουν δοκιμές :

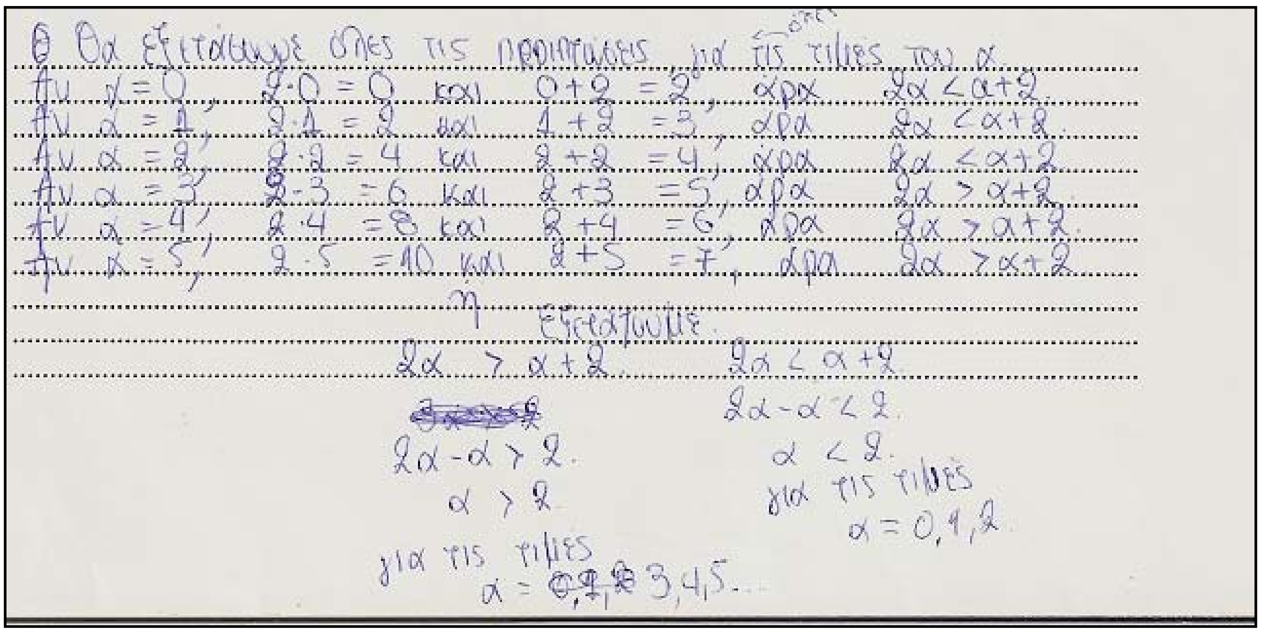
Αν $α<2$ τότε $α+2>2α$

Αν $α=2$ τότε $α+2=2α$

Αν $α>2$ τότε $α+2<2α$

Ενώ οι μαθητές που ανήκουν στην κατηγορία 7.2 έκαναν σωστές δοκιμές για τα α=0,1,2,3,4,5 και στη συνέχεια έδωσαν την παραπάνω απάντηση. Από τους μαθητές που έδωσαν μερικώς ορθή απάντηση, οι δυο που ανήκουν στην κατηγορία 7.3, δεν έγραψαν ή έγραψαν λάθος συμπέρασμα για την τιμή α = 2 και οι 5 που ανήκουν στην κατηγορία 7.4, έκαναν δοκιμές για συγκεκριμένους αριθμούς και έγραψαν συμπεράσματα μόνο για αυτούς. Στην κατηγορία 7.5 ανήκουν οι μαθητές που απάντησαν ότι το α + 2 είναι μεγαλύτερο, με ή χωρίς αιτιολόγηση, ενώ στην κατηγορία 7.6 οι μαθητές που απάντησαν ότι το 2α είναι μεγαλύτερο, με ή χωρίς αιτιολόγηση. Στην κατηγορία 7.7 ανήκουν οι μαθητές που απάντησαν ότι είναι ίσα και τέλος στην κατηγορία 7.8, ανήκουν οι μαθητές που έδωσαν οποιαδήποτε άλλη απάντηση.

Ακολουθεί η απάντηση και ένα απόσπασμα από τη συνέντευξη με μια μαθήτρια που η απάντηση της ανήκει στην κατηγορία 7.3.


Θ Θα εξετάσουμε όλες τις περιπτώσεις για τις τιμές του α.
Αν α = 0, 2·0 = 0 και 0 + 2 = 2, άρα 2α < α + 2
Αν α = 1, 2·1 = 2 και 1 + 2 = 3, άρα 2α < α + 2
Αν α = 2, 2·2 = 4 και 2 + 2 = 4, άρα 2α < α + 2
Αν α = 3, 2·3 = 6 και 2 + 3 = 5, άρα 2α > α + 2
Αν α = 4, 2·4 = 8 και 2 + 4 = 6, άρα 2α > α + 2
Αν α = 5, 2·5 = 10 και 2 + 5 = 7, άρα 2α > α + 2
ή εξετάζουμε
2α > α + 2   2α < α + 2
2α − α > 2   2α − α < 2
α > 2   α < 2
για τις τιμές α = 3, 4, 5...   για τις τιμές α = 0, 1, 2

<u>7ο απόσπασμα: διάλογος με τη μαθήτρια που έδωσε την παραπάνω απάντηση</u>

Ε: θα ήθελα να μου εξηγήσεις τι σου ζητάει το πρόβλημα

Μ: όταν ο α είναι φυσικός αριθμός ή ακέραιος μάλλον…

Ε: είναι φυσικός αριθμός, οι ακέραιοι παίρνουν και αρνητικές τιμές

Μ: ναι? Οπότε αν είναι ο α φυσικός αριθμός, ζητάει να βρούμε ποιο είναι μεγαλύτερο, όταν προσθέσουμε στο α το 2 ή όταν το πολλαπλασιάσουμε με το 2

Ε: μου έδωσες δύο λύσεις. Θα ήθελα να μου εξηγήσεις και τις δυο

Μ: στην πρώτη λύση εξέτασα απλά κάποιους αριθμούς, αυτούς που έχει δώσει στο α

Ε: σταμάτησες στο α=5. Έχεις καταλάβει ότι το α παίρνει και άλλες τιμές?

Μ: ναι. Απλά σταμάτησα στο 5. Εξέτασα όταν προσθέσεις στο α το 2 και όταν το πολλαπλασιάζεις με το 2 και βρήκα στις τρεις πρώτες περιπτώσεις ότι το 2α είναι μεγαλύτερο από το α+2 και στις υπόλοιπες ότι είναι μικρότερο. Είδα ότι αλλάζει αλλά δεν ήξερα αν είναι αυτή η λύση.

Ε: εξήγησε μου την δεύτερη λύση που έδωσες

Μ: το έλυσα σαν ανίσωση. Εξέτασα πότε ισχύει το 2α > α+2

Ε: και πότε βρήκες ότι ισχύει?

Μ: όταν το α είναι 3,4,5 … δηλαδή όταν είναι μεγαλύτερο από το 2

Ε: στη συνέχεια?

Μ: εξέτασα πότε 2α < α+2 και βρήκα, για τις τιμές 0 έως 2

Ε: στην πρώτη ανίσωση έχεις βρει α>2 και στην δεύτερη α<2. Μπορεί το α να πάρει την τιμή 2 σε κάποια από αυτές τις περιπτώσεις?

Μ: σε αυτήν που λέει μικρότερο από το 2… Βασικά δεν ξέρω. Δεν ξέρω αν μπορούμε να πάρουμε μικρότερο ή ίσο με το 2.

Ε: κοίταξε την ανίσωση α<2. Το α λαμβάνει την τιμή 2?

Μ: όχι

Ε: οπότε ισχύει και για α=2?

Μ: όχι

Ε: οπότε στην δεύτερη λύση που έδωσες δεν υπάρχει αποτέλεσμα για α=2. Στην πρώτη λύση τι βρήκες για α=2

Μ: ότι 2α < α+2

Ε: θα ήθελα να ελέγξεις ξανά αυτή τη περίπτωση. Αν α=2, ποια αποτελέσματα βρήκες?

Μ: 2 φορές το 2 ίσον 4 και 2 συν 2 ίσον 4. Άρα … α … είναι το ίδιο, δεν το είχα δει.

Ε: όταν τελείωσες το φυλλάδιο, έκανες ανασκόπηση των λύσεων σου?

Μ: ναι εκτός την άσκηση 7

Σε αυτή την απάντηση παρατηρούμε ότι στο δεύτερο τρόπο επίλυσης που έγραψε η μαθήτρια, ενώ έλυσε σωστά τις ανισώσεις, στην περίπτωση όπου βρήκε α<2, συμπεριέλαβε ως τιμή για το α και την τιμή 2. Στην πρώτη λύση για α=2 έβγαλε λάθος συμπέρασμα αλλά όπως είπε το έγραψε από απροσεξία. Παρατηρούμε τέλος, ότι η μαθήτρια έχει κατανοήσει την έννοια του γράμματος ως μεταβλητή και το λάθος της σχετίζεται με τις γνώσεις της στις ανισώσεις.

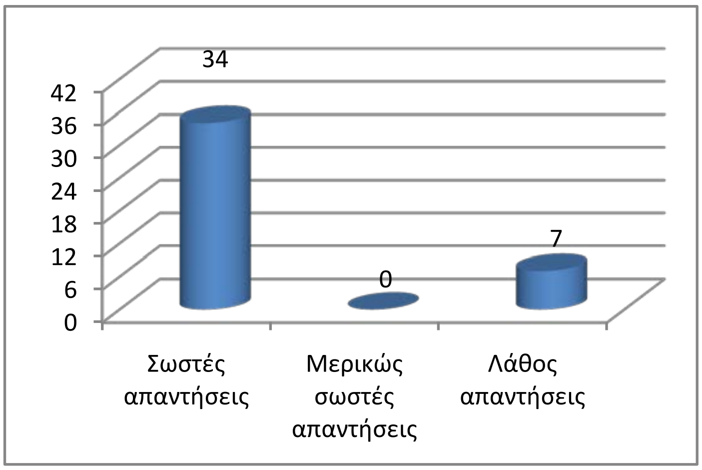
Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται κάποιες από τις λάθος απαντήσεις των παιδιών που έχουν ερευνητικό ενδιαφέρον. Στην πρώτη στήλη βρίσκεται η κατηγορία στην οποία ανήκει η απάντηση, στη δεύτερη στήλη υπάρχει το πλήθος των μαθητών που έδωσαν την λάθος απάντηση που βρίσκεται στη τρίτη στήλη, ενώ στην τέταρτη στήλη παρουσιάζονται κάποιες από τις αιτιολογήσεις των παιδιών για τις απαντήσεις που έδωσαν.

Κατηγορία	Παιδιά	Απάντηση	Χαρακτηριστικές αιτιολογήσεις
7.6	**10**	Το 2α είναι μεγαλύτερο από το α+2	Γιατί είναι πολλαπλασιασμός
			Διότι αν π.χ α=3, 2×3=6 και 2+3=5
			2α > α+2 (ενώ είχε κάνει σωστές δοκιμές για α=0,1,2,3,4,5)
7.5	**5**	Το α+2 είναι μεγαλύτερο από το 2α	Διότι αν α=1, τότε 1+2=3 > 2×1=2
7.7	**2**	Είναι ίσα	2+0=2 – 0+2=2 οι δύο αριθμοί νομίζω ότι είναι ίση 2+5=7 – 5+2=7 κάθε φορά και αυτό το καθορίζει ο κοινός αριθμός 2
			Επειδή η τιμή είναι ίδια, ο αριθμός έχει σχέση, δεν έχει σχέση το γράμμα που θα μπει μπροστά. Αν ήταν 3α και α+2, θα ήταν μεγαλύτερο το 3α. Τα γράμματα είναι σα να μην μετράνε
7.8	**2**	Όταν το α παίρνει την τιμή φυσικού αριθμού, πάντα 2α > α+2. Όμως αν α=0 τότε 2α < α+2	
7.8	**1**	Όταν το α είναι μονός αριθμός (0,1,3,5,…) όχι όμως περιττός (5,9), τότε μεγαλύτερος είναι ο α+2. Όταν το α είναι ζυγός αριθμός (2,4,6,8) τότε πολλές φορές α+2=2α αλλά και κάποιες α+2<2α. Για παράδειγμα 2α = α+2 και 2α >α+2 2×2 = 2+2 2×8>2+8 4 = 4 16>10	

3.2 Δεύτερο φύλλο εργασίας - Η επίλυση προβλήματος από τους μαθητές και οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν

Πρόβλημα 1

Στο πρόβλημα 1 του δεύτερου φυλλαδίου, τα παιδιά κλήθηκαν να γράψουν μια εξίσωση με την οποία επιλύεται το ακόλουθο πρόβλημα : << Το διπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά πέντε είναι ίσο με το πενταπλάσιο του αριθμού, μειωμένο κατά τέσσερα.>>. Όπως φαίνεται και από το διάγραμμα, οι περισσότεροι μαθητές (83%) απάντησαν σωστά.



Στην πρόβλημα 1 οι απαντήσεις κατατάσσονται ως εξής: Κατηγορία 1.1 – 34 απαντήσεις

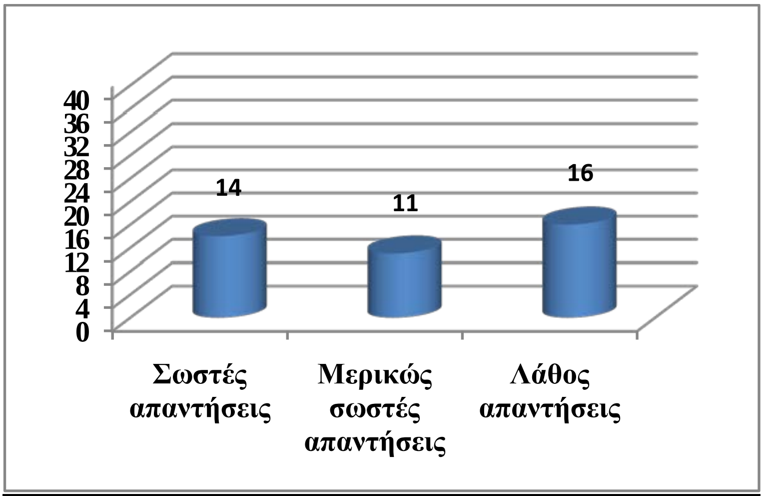
Κατηγορία 1.2 – 2 απαντήσεις

Κατηγορία 1.3 – 5 απαντήσεις

Στην κατηγορία 1.1 ανήκουν οι μαθητές που απάντησαν ορθά στο πρόβλημα γράφοντας τη σωστή εξίσωση $2x + 5 = 5x – 4$. Στην κατηγορία 1.2 ανήκουν οι μαθητές που έδωσαν τη λάθος απάντηση $2x + 5 = 5y – 4$. Ενώ στην κατηγορία 1.3 ανήκουν οι μαθητές που έδωσαν οποιαδήποτε άλλη λάθος απάντηση όπως τις εξισώσεις ‘‘$x^2+5 = x^5–4$’’ και ‘‘$2x+5=2x+5·5–4$’’.

Πρόβλημα 2

Εδώ τα παιδιά κλήθηκαν να επιλύσουν την εξίσωση $\frac{x+4}{5}+\frac{x-4}{3}=\frac{1+8x}{15}-2$, περιγράφοντας αναλυτικά το κάθε βήμα και να συμπεράνουν αν υπάρχει λύση. Το 32% των μαθητών απάντησε σωστά, το 29%, έδωσε μερικώς ορθή απάντηση και το 39% απάντησε λάθος.



Στο πρόβλημα 2 οι απαντήσεις κατατάσσονται ως εξής: Κατηγορία 2.1 – 10 απαντήσεις

Κατηγορία 2.2 – 4 απαντήσεις

Κατηγορία 2.3 – 11 απαντήσεις

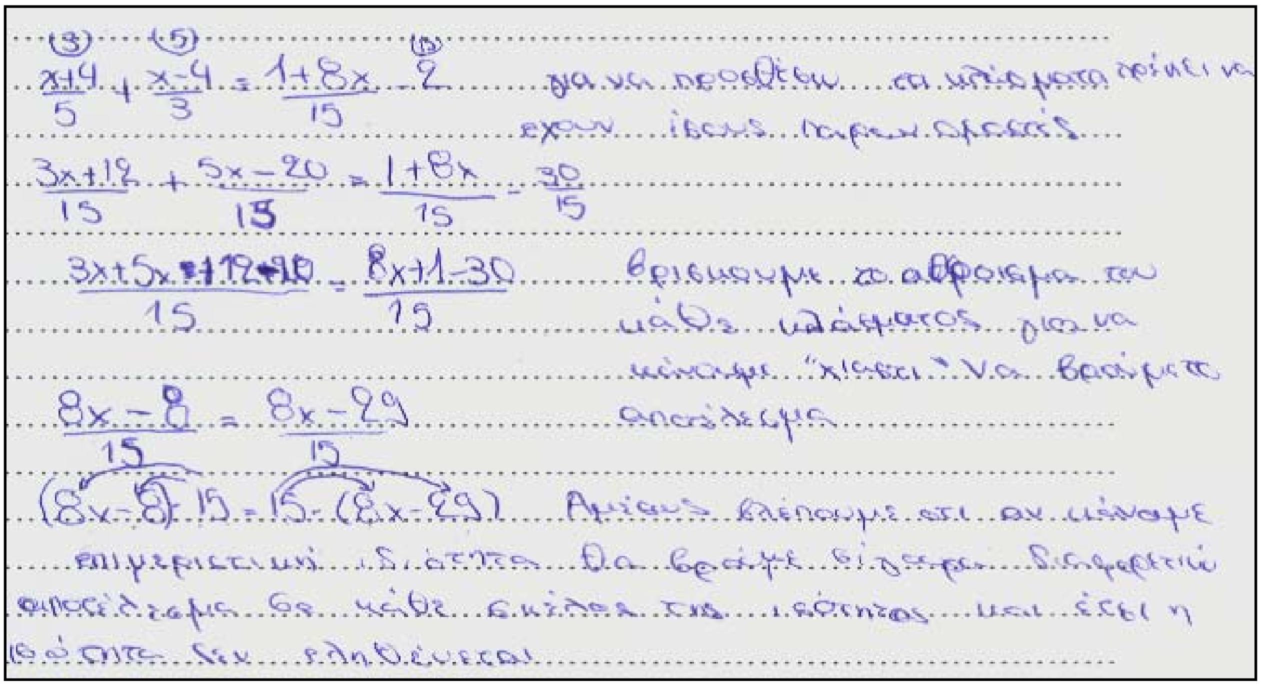
Κατηγορία 2.4 – 9 απαντήσεις

Κατηγορία 2.5 – 5 απαντήσεις

Κατηγορία 2.6 – 2 απαντήσεις

Στην κατηγορία 2.1 ανήκουν οι μαθητές που έλυσαν σωστά την εξίσωση, έδωσαν σωστή περιγραφή των βημάτων και έβγαλαν το ορθό συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει λύση. Στην κατηγορία 2.2 ανήκουν οι μαθητές που έλυσαν σωστά την εξίσωση και έβγαλαν το σωστό συμπέρασμα αλλά η περιγραφή των βημάτων της λύσης, δεν ήταν ολοκληρωμένη ή δεν υπήρχε. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι απαντήσεις των μαθητών που έδωσαν μερικώς ορθή απάντηση και ανήκουν στην κατηγορία 2.3, καθώς έκαναν κάποιο λάθος κατά την επίλυση της εξίσωσης, έφτασαν σε κάποιο συμπέρασμα της μορφής οx=α (όπου α πραγματικός αριθμός) και συμπέραναν ορθά ότι δεν υπάρχει λύση διότι η εξίσωση είναι αδύνατη. Να σημειώσουμε ότι κανένας μαθητής δεν κατέληξε στην εξίσωση 0x=0. Στην κατηγορία 2.4 ανήκουν οι μαθητές που απάντησαν λάθος στο πρόβλημα καθώς δεν ολοκλήρωσαν την επίλυση της εξίσωσης και έτσι δεν έβγαλαν κάποιο συμπέρασμα για τη λύση. Μάλιστα η μια μαθήτρια που δεν έλυσε μέχρι τέλους την εξίσωση, όταν παρέδωσε το γραπτό της μου είπε ότι ‘‘δεν μπορώ να τη λύσω ολόκληρη διότι δε θυμάμαι τα βήματα, δηλαδή τι πρέπει να κάνω για να φτάσω στο συμπέρασμα ότι x = κάτι ’’ Στην κατηγορία 2.5 ανήκουν οι μαθητές που έκαναν λάθος στις πράξεις και βρήκαν λύση και στην τελευταία κατηγορία ανήκουν οι μαθητές που έδωσαν οποιαδήποτε άλλη λανθασμένη απάντηση.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η εξής (σωστή)απάντηση μιας μαθήτριας:


$\frac{x+4}{5} + \frac{x-4}{3} = \frac{1+8x}{15} - 2$ για να προσθέσω τα κλάσματα πρέπει να έχουν ίσους παρονομαστές

$\frac{3x+12}{15} + \frac{5x-20}{15} = \frac{1+8x}{15} - \frac{30}{15}$

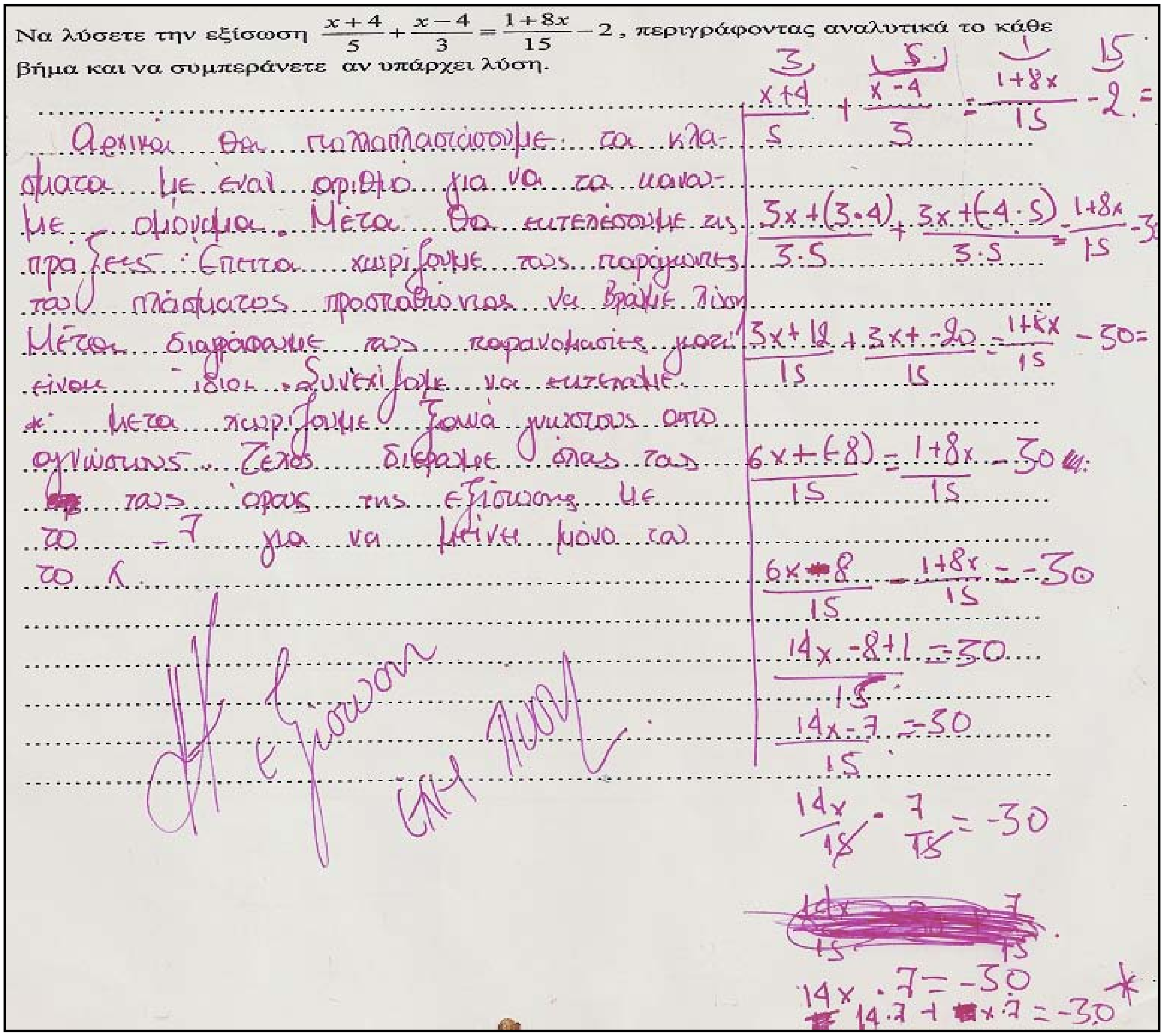
$\frac{3x+5x+12-20}{15} = \frac{8x+1-30}{15}$ βρίσκουμε το άθροισμα του κάθε κλάσματος για να κάνουμε “χιαστί” να βρούμε αποτέλεσμα

$\frac{8x-8}{15} = \frac{8x-29}{15}$

$(8x-8)\cdot 15 = 15\cdot(8x-29)$ Αμέσως βλέπουμε ότι αν κάνουμε επιμεριστική ιδιότητα θα βρούμε σίγουρα διαφορετικό αποτέλεσμα σε κάθε σκέλος της ισότητας και έτσι η ισότητα δεν επαληθεύεται

Αυτό που παρατηρούμε από αυτήν την απάντηση είναι ότι η συγκεκριμένη μαθήτρια έχει κατανοήσει πλήρως την έννοια του ίσον ως ισοδυναμία. Παρατήρησε ότι δεν υπάρχουν οι ίδιοι αριθμοί στις δυο πλευρές του ίσον και κατέληξε από αυτό το σημείο στο σωστό συμπέρασμα. Όσον αφορά την περιγραφή των βημάτων, η μαθήτρια δεν έγραψε με ακρίβεια τα βήματα, όμως παρατηρούμε ότι έχει κατανοήσει πλήρως τη διαδικασία.

<u>8ο απόσπασμα: διάλογος με τη μαθήτρια που έδωσε την παρακάτω απάντηση</u>
(η απάντηση αξιολογήθηκε ως λανθασμένη διότι η μαθήτρια βρήκε λύση)



Ε: θα ήθελα να μου εξηγήσεις τι σου ζητάει το πρόβλημα

Μ: να λύσω την εξίσωση

Ε: σου ζητάει κάτι άλλο?

Μ: και να βρούμε αν υπάρχει λύση

Ε: ακολούθησες μια διαδικασία επίλυσης και έχεις βρει λύση

Μ: βασικά εγώ ξεκίνησα βάζοντας καπελάκια για να τα κάνουμε ομώνυμα, ώστε να μπορούμε να απομονώσουμε τους αγνώστους και να κάνουμε κάποιες πράξεις. Στη πορεία όμως, όταν έκανα τις πράξεις (παύση) … δεν ξέρω (παύση) …

Ε: σου φάνηκε κάτι λάθος?

Μ: ναι. Αλλά μετά δε μπορούσα να σταματήσω γιατί είχα προχωρήσει τις πράξεις και δεν καταλάβαινα ακριβώς που είναι το λάθος.

Ε: θα μπορούσες να ελέγξεις τώρα τη λύση σου και να διορθώσεις αν υπάρχει κάποιο λάθος?

Μ: ναι

Ε : ας δούμε ένα-ένα τα βήματα. Στην αρχή, έβαλες καπελάκια. Ας δούμε το δεύτερο βήμα . υπάρχει κάποιο λάθος ή να προχωρήσουμε?

Μ: ναι υπάρχει λάθος, υπάρχει ο κρυφός παρονομαστής στο -2 οπότε θα γίνει -30/15

Ε: υπάρχει κάποιο άλλο λάθος? Στο δεύτερο κλάσμα το 3χ πως το βρήκες?

Μ: α … 5χ είναι, από βιασύνη το έκανα

Ε: ωραία. Η εξίσωση αυτή καταλήγει στο αποτέλεσμα 0χ=-21. Από αυτό το σημείο μπορείς να μου πεις αν υπάρχει λύση και ποια είναι?

Μ: δεν υπάρχει λύση

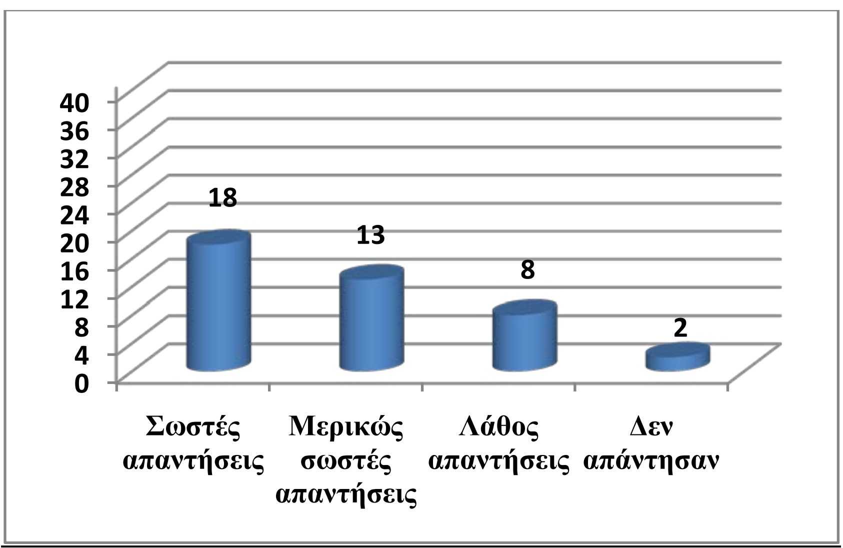
Ε: έκανες ανασκόπηση της λύσης που εφάρμοσες?

Μ: όχι γιατί ήταν προχωρημένες οι πράξεις. Αν είχα και άλλο χρόνο θα το κοίταζα ξανά.

Όπως και αλλά παιδιά που απάντησαν λάθος στο πρόβλημα αυτό και βρήκαν λύση, έτσι και αυτή η μαθήτρια δεν θεώρησε το -2, κλάσμα με παρονομαστή το 1 και πολλαπλασίασε με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο μόνο τον αριθμό -2. Με μια δεύτερη ματιά όμως στη λύση, η μαθήτρια εντόπισε αυτό το λάθος με μεγάλη ευκολία. Εάν προσέξουμε τη λύση της μαθήτριας παρατηρούμε επίσης, ότι έχει και άλλα λάθη που σχετίζονται με τις πράξεις μεταξύ μονωνύμων αλλά και μεταξύ αριθμών. Όσον αφορά το τελευταίο ερώτημα του προβλήματος δηλαδή να συμπεράνουν αν υπάρχει λύση, η μαθήτρια κάνοντας αυτά τα λάθη κατέληξε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει. Όταν κατά την διάρκεια της συνέντευξης της δόθηκε η τελική μορφή της εξίσωσης, συμπέρανε ότι τελικά, αυτή δεν υπάρχει. Τέλος, όπως βλέπουμε στην περιγραφή των βημάτων, δεν έχει ξεκάθαρα στο μυαλό της μια διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσει. Γράφει ότι χωρίζουμε τους παράγοντες του κλάσματος για να βρούμε λύση και πιο κάτω γράφει ότι χωρίζουμε ξανά γνωστούς από αγνώστους, επίσης ότι ‘‘πολλαπλασιάζουμε τα κλάσματα με έναν αριθμό για να τα κάνουμε ομώνυμα’’ χωρίς να ξεκαθαρίζει ποιος είναι αυτός ο αριθμός.

Πρόβλημα 3

Στο τελευταίο πρόβλημα δόθηκε στους μαθητές ένα σχήμα στο οποίο σημειώνονταν τα δεδομένα και ζητήθηκε από τους μαθητές να εξηγήσουν πως θα βρουν το εμβαδόν του τετραγώνου. Δεν ζητήθηκε να βρουν τη λύση εκτός αν αυτό τους διευκόλυνε στην περιγραφή. Σωστές απαντήσεις θεωρήθηκαν και αυτές που είχαν μόνο την επίλυση και καθόλου περιγραφή. Στο πρόβλημα αυτό εξετάστηκαν 4 στοιχεία, η περιγραφή που έδωσαν τα παιδιά, η εφαρμογή των Πυθαγορείων θεωρημάτων, οι πράξεις και τέλος ο τύπος του εμβαδού του τετραγώνου. Το 44% των μαθητών έδωσε πλήρης απάντηση, το 31% έδωσε μερικώς ορθή απάντηση, το 20% απάντησε λάθος και τέλος το 5 % δεν έδωσε καμία απάντηση.



Στο πρόβλημα 3 οι απαντήσεις κατατάσσονται ως εξής: Κατηγορία 3.1 – 14 απαντήσεις

Κατηγορία 3.2 – 2 απαντήσεις

Κατηγορία 3.3 – 2 απαντήσεις

Κατηγορία 3.4 – 6 απαντήσεις

Κατηγορία 3.5 – 3 απαντήσεις

Κατηγορία 3.6 – 3 απαντήσεις

Κατηγορία 3.7 – 1 απαντήσεις

Κατηγορία 3.8 – 8 απαντήσεις

Κατηγορία 3.9 – 2 απαντήσεις

Οι 14 που ανήκουν στην πρώτη κατηγορία, έδωσαν πλήρης απάντηση δηλαδή είχαν σωστή περιγραφή, σωστή εφαρμογή των Πυθαγορείων θεωρημάτων, σωστές πράξεις και σωστό τύπο του εμβαδού του τετραγώνου. Στην κατηγορία 3.2 ανήκουν οι μαθητές που απάντησαν σωστά στο ερώτημα δίνοντας μόνο την περιγραφή, ενώ στην κατηγορία 3.3 ανήκουν οι μαθητές που έδωσαν μόνο τη σωστή επίλυση του προβλήματος.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζουμε αναλυτικά ποια από τα στοιχεία που εξετάσαμε σε αυτό το πρόβλημα απαντήθηκαν σωστά, λάθος ή δεν απαντήθηκαν από τους μαθητές που κρίναμε ότι έδωσαν μερικώς ορθή απάντηση. Οι μαθητές αυτοί ανήκουν στις κατηγορίες 3.4, 3.5, 3.6, 3.7. Με το γράμμα Σ σημειώνουμε τη σωστή παρουσίαση του στοιχείου, με το Λ τη λάθος και με τα γράμματα Δ.Υ σημειώνουμε ότι δεν υπήρχε αυτό το στοιχείο στην λύση του παιδιού.

Μερικώς ορθές απαντήσεις					
Αριθμός Μαθητών	**Κατηγορία**	**Περιγραφή της επίλυσης**	**Εφαρμογή Πυθαγορείων θεωρημάτων**	**Πράξεις**	**Τύπος εμβαδού του τετραγώνου**
6	**3.4**	Σ	Σ	Σ	Λ
3	**3.5**	Σ	Σ	Λ	Σ
3	**3.6**	Σ	Σ	Λ	Λ
1	**3.7**	Σ	Λ	Σ	Λ

Στην κατηγορία 3.8 ανήκουν οι μαθητές που απάντησαν λάθος στο πρόβλημα. Από αυτούς οι 3 βρήκαν την πλευρά ΒΓ εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ, ενώ ένας άλλος μαθητής βρήκε την πλευρά ΑΖ σωστά αλλά την πρόσθεσε στην πλευρά ΖΓ και θεώρησε το άθροισμα αυτό ως τη μια πλευρά του τετραγώνου, του οποίου βρήκε και το εμβαδόν με σωστό τύπο. Τέλος, στην κατηγορία 3.9 ανήκουν οι μαθητές που δεν έδωσαν καμία απάντηση στο πρόβλημα.

Το πιο συχνό λάθος των μαθητών στο συγκεκριμένο πρόβλημα ήταν στον τύπο του εμβαδού του τετραγώνου. Από τους 23 μαθητές που έδωσαν μερικώς ορθή απάντηση και που απάντησαν λάθος, οι 12 έκαναν λάθος στον τύπο του εμβαδού. Να σημειωθεί εδώ ότι 5 μαθητές από τους 41 δεν απάντησαν ολοκληρωμένα στο πρόβλημα, δηλαδή δεν έφτασαν στο σημείο όπου έπρεπε να βρουν το εμβαδόν. Ο λάθος τύπος του εμβαδού που έγραψαν τα παιδιά καθώς και το πώς αξιολογήθηκε η απάντηση τους παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα

Πλήθος μαθητών	**Τύπος εμβαδού**	**Απάντηση**
6	4ΒΓ	Μερικώς ορθή απάντηση
2	4ΒΓ	Λάθος
2	2ΒΓ	Μερικώς ορθή απάντηση
1	$EΓ^4$	Μερικώς ορθή απάντηση
1	$2\ E_{ΓΑΒ} = 2\ \frac{βυ}{2}$	Μερικώς ορθή απάντηση

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο βαθμός κατανόησης της έννοιας του γράμματος και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές – Φυλλάδιο 1

Πρώτος στόχος της έρευνας είναι να μελετηθεί ο βαθμός κατανόησης της έννοιας του γράμματος, από τους μαθητές της Β΄ Γυμνασίου. Για τον σκοπό αυτό χορηγήθηκε στους μαθητές το πρώτο φυλλάδιο, το οποίο είχε επτά ερωτήσεις. Σε κάθε μια ερώτηση, το γράμμα είχε διαφορετική ερμηνεία (εκτός από τις ερωτήσεις 4 και 5 στις οποίες είχε την ίδια).

Στην ερώτηση 1, το α έχει μια αριθμητική τιμή από ένα σύνολο.

Στην ερώτηση 2, το α και το β, δεν χρησιμοποιούνται ευθέως και μπορεί να αγνοηθεί η τιμή τους, χωρίς να είναι απαραίτητος ο υπολογισμός τους.

Στην ερώτηση 3, το χ χρησιμοποιείται σα συντομογραφία για ένα αντικείμενο.

Στην ερώτηση 4, το γ χρησιμοποιείται ως ένας συγκεκριμένος αλλά άγνωστος αριθμός.

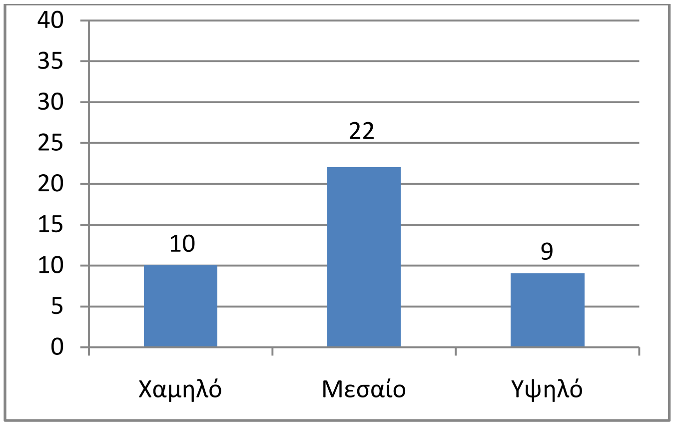
Στην ερώτηση 5, το ν χρησιμοποιείται ως ένας συγκεκριμένος αλλά άγνωστος αριθμός.

Στην ερώτηση 6, το β και το δ χρησιμοποιούνται σα γενικευμένοι αριθμοί, δηλαδή μπορούν να πάρουν διάφορες τιμές.

Στην ερώτηση 7, το α χρησιμοποιείται σα μεταβλητή, έτσι ώστε να αντιπροσωπεύει ένα σύνολο όχι συγκεκριμένων τιμών.

Τα αποτελέσματα από την διόρθωση του πρώτου φυλλαδίου, ως προς τον βαθμό κατανόησης της έννοιας του γράμματος, διαφοροποιήθηκαν ανάλογα με την κάθε ερώτηση. Συγκεκριμένα, η πρώτη ερώτηση απαντήθηκε σωστά από όλους τους μαθητές. Δηλαδή όλοι οι μαθητές κατανόησαν ότι το γράμμα έχει μια συγκεκριμένη τιμή. Στην δεύτερη ερώτηση οι περισσότεροι μαθητές (37) απάντησαν σωστά και μόνο δυο μαθητές δεν μπόρεσαν να αγνοήσουν την τιμή των γραμμάτων α και β και έδωσαν συγκεκριμένη τιμή σε αυτά. Στην ερώτηση 3, 34 μαθητές κατανόησαν ότι το γράμμα x χρησιμοποιείται σαν συντομογραφία για ένα αντικείμενο. Μόνο ένας μαθητής έδωσε συγκεκριμένη τιμή στο χ για να απαντήσει στην ερώτηση. Στις ερωτήσεις 4 και 5 που είχαν τον ίδιο στόχο, δηλαδή να μελετηθεί κατά πόσο οι μαθητές κατανοούν ότι το γράμμα έχει την έννοια ενός συγκεκριμένου αλλά άγνωστου αριθμού, τα αποτελέσματα των απαντήσεων είχαν μεγάλη απόκλιση. Στην ερώτηση 4, το 78% των μαθητών απάντησε σωστά και μόνο 5 μαθητές έδωσαν συγκεκριμένες τιμές στα α,β,γ. Στην ερώτηση 5, μόνο το 24% των μαθητών απάντησε σωστά και 8 μαθητές προσπάθησαν να βρουν την τιμή του γράμματος ν επιλύοντας μια εξίσωση. Στην ερώτηση 6, απάντησαν σωστά 22 δηλαδή σχεδόν οι μισοί μαθητές και 9 μαθητές δεν κατανόησαν ότι τα γράμματα β και δ μπορούν να πάρουν περισσότερες από μια τιμές, δεν κατανόησαν δηλαδή ότι θεωρούνται γενικευμένοι αριθμοί. Τέλος στην ερώτηση 7, μόνο 12 μαθητές απάντησαν σωστά, αρκετοί μαθητές έβγαλαν συμπεράσματα χρησιμοποιώντας μια ή δυο τιμές για το γράμμα α, δηλαδή δεν κατανόησαν ότι το γράμμα έχει τη μορφή μεταβλητής. Στο σύνολο παρατηρούμε ότι οι μαθητές είχαν περισσότερες δυσκολίες στις τρεις τελευταίες ερωτήσεις.

Χωρίσαμε 3 επίπεδα κατανόησης της έννοιας της γράμματος, ανάλογα με το πλήθος των σωστών απαντήσεων του κάθε μαθητή. Στο πρώτο επίπεδο (χαμηλό) κατανόησης ανήκουν οι μαθητές που απάντησαν σωστά σε μια ή δυο ερωτήσεις, στο δεύτερο επίπεδο (μεσαίο) ανήκουν οι μαθητές που απάντησαν σωστά σε τρεις ή τέσσερις ερωτήσεις και τέλος στο τρίτο επίπεδο (υψηλό) ανήκουν οι μαθητές που απάντησαν σωστά σε πέντε ή έξι ερωτήσεις. Για τον διαχωρισμό αυτών των επιπέδων δεν λάβαμε υπ’ όψιν μας, την ερώτηση 1 στην οποία απάντησαν σωστά όλοι οι μαθητές. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο παρακάτω διάγραμμα



Επίσης συγκρίνοντας τα αποτελέσματα μας με τα αποτελέσματα της έρευνας των Βερίκιου και Κλαουδάτου (1999) η οποία ήταν βασισμένη στην έρευνα του Kuchemann (1982), όσον αφορά τις 3 τελευταίες ερμηνείες του γράμματος δηλαδή το γράμμα ως ένας συγκεκριμένος αλλά άγνωστος αριθμός , ως γενικευμένος αριθμός δηλαδή ότι μπορεί να πάρει περισσότερες από μια τιμές και τέλος ως μεταβλητή δηλαδή ότι αντιπροσωπεύει ένα σύνολο, συμπεράναμε ότι τα αποτελέσματα είναι παρόμοια. Δηλαδή συμπεράναμε ότι όλοι οι μαθητές εκτός από 6 βρίσκονται στο στάδιο των συγκεκριμένων ενεργειών ή αλλιώς το πρώιμο στάδιο των τυπικών διεργασιών. Στο στάδιο αυτό οι μαθητές είναι επηρεασμένοι από προηγούμενη εμπειρία τους στην αριθμητική, όπου δεν χειρίζονταν αφηρημένες έννοιες όπως αυτή της μεταβλητής. Στο συμπέρασμα αυτό καταλήξαμε, μελετώντας πόσοι μαθητές κατανόησαν και τις 3 τελευταίες ερμηνείες και απάντησαν σωστά στις αντίστοιχες ερωτήσεις. Για τις ερωτήσεις 4 και 5 μας αρκούσε η μια να είναι σωστή.

Η επίλυση προβλήματος από τους μαθητές και οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν – Φυλλάδιο 2

Ο δεύτερος στόχος της παρούσας έρευνας ήταν να μελετήσει κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν και να επιλύσουν ένα πρόβλημα. Για τον σκοπό αυτό χορηγήθηκε στους μαθητές ένα φυλλάδιο με τρία προβλήματα. Το πρώτο είναι ένα λεκτικό πρόβλημα και ζητήθηκε από τους μαθητές να γράψουν την εξίσωση με την οποία επιλύεται. Το δεύτερο πρόβλημα έδινε στους μαθητές μια εξίσωση και τους ζητήθηκε να την επιλύσουν, περιγράφοντας αναλυτικά το κάθε βήμα και στο τέλος να συμπεράνουν αν υπάρχει λύση.

Τέλος το τρίτο είναι ένα γεωμετρικό πρόβλημα, δόθηκε στους μαθητές ένα σχήμα και κάποια μήκη και ζητήθηκε να βρουν το εμβαδόν ενός τετραγώνου.

Με το πρώτο πρόβλημα, θέλαμε να εξετάσουμε κατά πόσο οι μαθητές είναι ικανοί να προσλαμβάνουν κάτι και να αποδίδουν σε διαφορετική μορφή από αυτή που τους δόθηκε αρχικά, δηλαδή να μπορο ύν να το **μεταφράσουν**. Με το δεύτερο πρόβλημα θέλαμε να εξετάσουμε πρώτον κατά πόσο οι μαθητές είναι ικανοί να **επεκτείνουν** κάτι σε νέες καταστάσεις και δεύτερον αν είναι ικανοί να **κρίνουν** αν κάτι είναι σωστό ή να κάνουν συγκρίσεις ή αντιπαραβολές για να βγάζουν συμπεράσματα χρησιμοποιώντας αυτό που έχουν κατανοήσει. Τέλος με το τρίτο και τελευταίο πρόβλημα θέλαμε να εξετάσουμε αν οι μαθητές είναι ικανοί να αντιληφθούν την κεντρική **ιδέα** του προβλήματος, τον τρόπο δηλαδή με τον οποίο αυτό λειτουργεί ή να μπορούν να χρησιμοποιούν και να συνθέτουν κάτι ευρύτερο και να γνωρίζουν γιατί και αυτό λειτουργεί και δεύτερον αν είναι ικανοί να επεκτείνουν κάτι σε νέες καταστάσεις, όπως στο δεύτερο πρόβλημα.

Τα αποτελέσματα αυτού του φυλλαδίου όπως και στο πρώτο, διαφοροποιήθηκαν ανάλογα με το κάθε πρόβλημα. Συγκεκριμένα, το πρόβλημα 1 απαντήθηκε σωστά από τους περισσότερους μαθητές, μόνο το 7% των μαθητών έδωσε λάθος απάντηση. Το συμπέρασμα λοιπόν είναι ότι οι περισσότεροι μαθητές έχουν την ικανότητα να μεταφράσουν αυτό που τους δίνεται ή διαφορετικά, έχουν την ικανότητα να το προσλαμβάνουν και να το αποδίδουν σε διαφορετικές μορφές από αυτήν που τους παρουσιάστηκε αρχικά. Στο δεύτερο πρόβλημα τα αποτελέσματα δεν ήταν τόσο ξεκάθαρα. Από τους 41 μαθητές, μόνο 14 απάντησαν σωστά στο πρόβλημα, 11 μαθητές έδωσαν μερικώς ορθή απάντηση και 16 μαθητές απάντησαν λάθος. Όσον αφορά τον πρώτο στόχο του προβλήματος, το συμπέρασμα είναι ότι οι περισσότεροι μαθητές δεν είχαν την ικανότητα να το επεκτείνουν σε νέες καταστάσεις καθώς μόνο 14 μαθητές έλυσαν σωστά την εξίσωση και 18 μαθητές περιέγραψαν ορθά τα βήματα της λύσης. Όσον αφορά τον δεύτερο στόχο, 25 μαθητές δηλαδή περισσότεροι από τους μισούς, έκριναν ορθά ότι δεν υπάρχει λύση. Οι απαντήσεις των 14 μαθητών από αυτούς αξιολογήθηκαν σωστές ενώ των υπόλοιπων 11 μερικώς ορθές διότι αυτοί, έκαναν κάποιο λάθος στις πράξεις κατά την επίλυση, κατέληξαν σε μια εξίσωση της μορφής $0x=α$, όπου α πραγματικός αριθμός εκτός του μηδενός και ορθά συμπέραναν ότι δεν υπάρχει λύση καθώς η εξίσωση είναι αδύνατη. Στο τρίτο και τελευταίο πρόβλημα είχαμε 18 σωστές απαντήσεις, 13 μερικώς ορθές, 8 λανθασμένες και 2 μαθητές δεν απάντησαν στο πρόβλημα. Για να απαντήσουμε στα ερωτήματα μας, μελετήσαμε τους εξής 4 παράγοντες :

1. Περιγραφή της λύσης
2. Εφαρμογή των Πυθαγορείων θεωρημάτων
3. Πράξεις και
4. Τύπος εμβαδού

Συνολικά 27 μαθητές έδωσαν σωστή περιγραφή, 27 μαθητές εφάρμοσαν ορθά τα Πυθαγόρεια θεωρήματα, 22 μαθητές εκτέλεσαν σωστά όλες τις πράξεις και 25 μαθητές χρησιμοποίησαν το σωστό τύπο για το εμβαδόν του τετραγώνου. Όσον αφορά τον πρώτο στόχο μας, δηλαδή να μελετήσουμε κατά πόσο οι μαθητές έχουν αντιληφθεί την κεντρική του ιδέα, εξετάσαμε αν οι μαθητές ήταν σε θέση να αντιληφθούν τι έπρεπε να βρουν πρώτα για να μπορέσουν να βρουν το εμβαδόν του τετραγώνου και όσον αφορά τον δεύτερο στόχο, δηλαδή να μελετήσουμε αν οι μαθητές είχαν την ικανότητα να επεκτείνουν κάτι σε νέες καταστάσεις, εξετάσαμε κατά πόσο οι μαθητές μπόρεσαν να χωρίσουν το πρόβλημα που είχαν σε μικρότερα. Δηλαδή να βρουν πρώτα την πλευρά ΑΖ εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΖΓ, στη συνέχεια να βρουν την πλευρά ΒΖ, εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΖΒ, έπειτα να προσθέσουν το ΒΖ στο ΖΓ ώστε να βρουν την πλευρά ΒΖ και τέλος να εφαρμόσουν τον τύπο του εμβαδού του τετραγώνου για να βρουν το ζητούμενο. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις απαντήσεις είναι ότι 18 μαθητές που έχουν απαντήσει σωστά στο ερώτημα, έχουν αντιληφθεί την κεντρική ιδέα του προβλήματος και μπόρεσαν να το επεκτείνουν σε νέες καταστάσεις, 12 μαθητές που έδωσαν μερικώς ορθή απάντηση, αντιλήφθηκαν και την κεντρική ιδέα και μπόρεσαν να το επεκτείνουν, ενώ 1 μαθητής που έδωσε μερικώς ορθή απάντηση, έχει αντιληφθεί μόνο την κεντρική ιδέα αλλά δεν ήταν σε θέση να το επεκτείνει. Τέλος από τους 8 μαθητές που έδωσαν λανθασμένη απάντηση στο πρόβλημα, μόνο ο ένας έχει αντιληφθεί την κεντρική ιδέα και μπόρεσε να το επεκτείνει, 3 μαθητές αντιλήφθηκαν την κεντρική ιδέα μόνο, ενώ 4 μαθητές δεν κατάφεραν τίποτα από τα δυο.

Σύγκριση των αποτελεσμάτων των δυο φυλλαδίων

Έπειτα από την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών προχωρήσαμε στη σύγκριση των αποτελεσμάτων των δυο φυλλαδίων. Τα συμπεράσματα είναι τα εξής:

Από τους μαθητές που ανήκουν στο χαμηλό επίπεδο κατανόησης της έννοιας του γράμματος,

- Ένας μαθητής δεν απάντησε σωστά σε κανένα από τα προβλήματα του δεύτερου φυλλαδίου
- Έξι μαθητές απάντησαν σωστά σε 1 πρόβλημα του δεύτερου φυλλαδίου
- Δύο μαθητές απάντησαν σωστά σε 2 προβλήματα του δεύτερου φυλλαδίου
- Ένας μαθητής απάντησε σωστά και στα 3 προβλήματα

Από τους μαθητές που ανήκουν στο μεσαίο επίπεδο κατανόησης της έννοιας του γράμματος,

- Τρεις μαθητές δεν απάντησαν σωστά σε κανένα πρόβλημα του δεύτερου φυλλαδίου
- Οχτώ μαθητές απάντησαν σωστά σε 1 πρόβλημα του δεύτερου φυλλαδίου
- Επτά μαθητές απάντησαν σωστά σε 2 προβλήματα του δεύτερου φυλλαδίου
- Τέσσερις μαθητές απάντησαν σωστά και στα 3 προβλήματα

Από τους μαθητές που ανήκουν στο υψηλό επίπεδο κατανόησης της έννοιας του γράμματος,

- Ένας μαθητής δεν απάντησε σωστά σε κανένα πρόβλημα του δεύτερου φυλλαδίου
- Δυο μαθητές απάντησαν σωστά σε 1 πρόβλημα του δεύτερου φυλλαδίου
- Ένας μαθητής απάντησε σωστά σε 2 προβλήματα του δεύτερου φυλλαδίου
- Πέντε μαθητές απάντησαν σωστά και στα 3 προβλήματα

Παρατηρούμε λοιπόν ότι από τους μαθητές που ανήκουν στο χαμηλό επίπεδο κατανόησης της έννοιας του γράμματος, μόνο ένας απάντησε σωστά και στα τρία προβλήματα του δεύτερου φυλλαδίου, ενώ 6, δηλαδή οι περισσότεροι μαθητές αυτής της κατηγορίας απάντησαν σωστά μόνο σε ένα πρόβλημα. Οι πέντε από αυτούς απάντησαν σωστά στο πρόβλημα 1. Από τους 22 μαθητές που ανήκουν στο μεσαίο επίπεδο κατανόησης της έννοιας του γράμματος, οι 15 απάντησαν σωστά σε 1 ή 2 προβλήματα του δεύτερου φυλλαδίου, ενώ μόνο τέσσερις απάντησαν σωστά και στα τρία. Τέλος, από τους μαθητές που ανήκουν στο υψηλό επίπεδο κατανόησης της έννοιας του γράμματος, μόνο ένας μαθητής δεν απάντησε σωστά σε κανένα πρόβλημα του δεύτερου φυλλαδίου, ενώ οι πέντε από τους 9 που ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία απάντησαν σωστά και στα τρία προβλήματα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Φύλλα εργασίας και ερωτήσεις συνέντευξης

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

ΟΝΟΜΑ:

1) Αν $\alpha+5=12$, τότε $\alpha=$;

2) Αν $\alpha+\beta=6$, τότε $\alpha+\beta+7=$;

3) Αν χ είναι η πλευρά ενός τετραγώνου, τότε η περίμετρός του $\Pi=$;

4) Αν $\alpha+\beta=8$, τότε $\alpha+\beta+\gamma=$;

5) Να βρεθεί το άθροισμα 3ν και 5

6) Η ισότητα $\alpha+\beta+\gamma = \alpha+\delta+\gamma$ είναι αληθής πάντοτε, μερικές φορές ή ποτέ;

7) Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος, ο 2α ή ο $\alpha+2$, όταν το α παίρνει τις τιμές $\alpha= 0,1,2,3,4,5...$

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

ΟΝΟΜΑ:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να γράψετε μια εξίσωση με την οποία επιλύεται το ακόλουθο πρόβλημα:
<<το διπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά πέντε είναι ίσο με το πενταπλάσιο του αριθμού, μειωμένο κατά τέσσερα.>>

....

....

....

....

....

....

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x+4}{5}+\frac{x-4}{3}=\frac{1+8x}{15}-2$, περιγράφοντας αναλυτικά το κάθε βήμα και να συμπεράνετε αν υπάρχει λύση.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

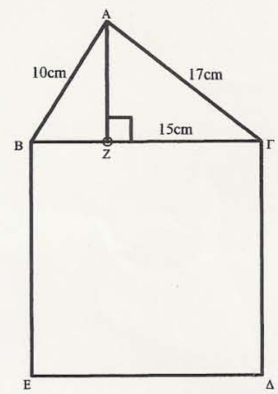
....

....

....

ΠΡΟΒΛΉΜΑ 3

Στο παρακάτω σχήμα AB=10cm, ΑΓ=17cm και ΖΓ=15cm . Να εξηγήσετε πως θα βρούμε το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΓΔΕ



<u>Ερωτήσεις Συνέντευξης</u>

- Μπορείτε να μου εξηγήσετε το πρόβλημα; Ποια είναι τα δεδομένα, και ποιά τα ζητούμενα;

- Μπορείτε να εξηγήσετε τη λύση που εφαρμόσατε;

- Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, πως κρίνετε τη λύση που δώσατε; Είναι σωστή; Υπάρχουν περιθώρια βελτίωσης;

- Θεωρείτε ότι έχετε χρησιμοποιήσει όλα τα δεδομένα και τους περιορισμούς του προβλήματος;

- Γιατί εφαρμόσατε τη συγκεκριμένη μέθοδο; Ποιος ήταν ο τρόπος σκέψης σας;

- Θα μπορούσατε να αντιμετωπίσετε το πρόβλημα με ένα διαφορετικό τρόπο;

- Στο τέλος της λύσης έγινε ανασκόπηση της μεθόδου που εφαρμόσατε;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β - Βαθμολόγηση φύλλων εργασίας

Φυλλάδιο 1

1) Αν α+5=12, τότε α=;

Σωστές απαντήσεις: *1)* α=7

*2)*α=12-5 άρα α=7

2) Αν α+β=6, τότε α+β+7=;

Σωστές απαντήσεις: *1)* α+β+2=7+2=9

2) α+β+2=9

3) πρέπει να προσθέσω και στα δυο μέλη τον ίδιο αριθμό για να ισχύει η ισότητα, άρα α+β+2=7+2=9

Μερικώς ορθές απαντήσεις: 1) α=4, β=3 γιατί α+β=7 δηλαδή 4+3=7, άρα 4+3+2=9 (και γενικά όσα παιδιά έδωσαν συγκεκριμένες τιμές στα α και β για να βρουν το άθροισμα)

Λάθος απαντήσεις: οποιαδήποτε άλλη απάντηση

3) Αν χ είναι η πλευρά ενός τετραγώνου, τότε η περίμετρος του Π=;

Σωστές απαντήσεις: *1)* Π=4x

2) Π=x+x+x+x

Μερικώς σωστές απαντήσεις: Π=xxxx άρα Π=4x

Λάθος απαντήσεις: *1)* Π=x^2

2) Π=xx

3) οποιαδήποτε άλλη απάντηση

4) Αν α+β=8, τότε α+β+γ=;

Σωστές απαντήσεις: *1)* α+β+γ=8+γ

2) πρέπει να διατηρηθεί η ισότητα, άρα α+β+γ=8+γ

3) δεν μπορώ να βρω το αποτέλεσμα, παρά μόνο 8+γ

Μερικώς σωστές απαντήσεις: δε μπορώ να βρω το άθροισμα διότι δε γνωρίζω το γ

Λάθος απαντήσεις: *1)* α=4, β=4, 4+4=8, τότε (α+β)+2=10, έβαλα δικό μου αριθμό και έκανα 10=10

2) α+β=8 δηλαδή 5+3=8, τότε 5+3+2=10

(γενικά όσα παιδιά έβαλαν έδωσαν συγκεκριμένες τιμές στα α,β,γ για να βρουν το άθροισμα)

3) οποιαδήποτε άλλη απάντηση

5) Να βρεθεί το άθροισμα 3ν και 5

Σωστές απαντήσεις: *1)* 3ν+5

2) δε μπορώ να βρω το άθροισμα, παρά μόνο 3ν+5

Μερικώς σωστές απαντήσεις: δεν μπορώ να βρω το άθροισμα διότι δε γνωρίζω την τιμή του ν

Λάθος απαντήσεις: *1)* 15ν

2) 8ν

3) 3ν+5, ν=5/3 ν=1,66

(γενικά όσοι μαθητές προσπάθησαν να βρουν το ν)

4) οποιαδήποτε άλλη απάντηση

Καμία απάντηση: δε δόθηκε απάντηση

6) Η ισότητα $α+β+γ = α+δ+γ$ είναι αληθής πάντοτε, μερικές φορές ή ποτέ;

Σωστές απαντήσεις: *1)* μερικές φορές

2) μερικές φορές, όταν $β=δ$

3) θα είναι αληθής μόνο όταν $β=δ$, διαφορετικά ποτέ

Λάθος απαντήσεις: 1) ποτέ

2) ποτέ διότι το β είναι διαφορετικό από το δ

3) πάντα

4) πάντα διότι τα β και δ μπορούν να είναι οποιοιδήποτε αριθμοί και να είναι ίση

5) οποιαδήποτε άλλη απάντηση

Καμία απάντηση: δε δόθηκε απάντηση

7) Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος, ο 2α ή ο α+2, όταν το α παίρνει τις τιμές $α=0,1,2,3,4,5…$

Σωστές απαντήσεις: *1)* $2α < α+2$ όταν $α < 2$

$2α = α+2$ όταν $α = 2$

$2α > α+2$ όταν $α > 2$

2) δοκιμές για κάποιες τιμές του α και στη συνέχεια η παραπάνω απάντηση

Μερικώς ορθές απαντήσεις: *1)* αν $α > 2$ τότε $2α > α+2$

αν $α < 2$ τότε $2α < α+2$

(γενικά όσα παιδιά δεν έγραψαν ή έγραψαν λάθος συμπέρασμα για α=2)

2) αν α=1 τότε α+2 > 2α

αν α=3 τότε 2α > α+2

(γενικά όσα παιδιά έβγαλαν συμπέρασμα μόνο για τυχαίες τιμές του α)

3) οι μαθητές που έβγαλαν συμπεράσματα μόνο για τις τιμές 1,2,3,4,5

Λάθος απαντήσεις:

1) το 2α είναι μεγαλύτερο από το α+2

2) το 2α είναι μεγαλύτερο από το α+2 αφού είναι πολλαπλασιασμός

3) το α+2 είναι μεγαλύτερο από το 2α

4) οποιαδήποτε άλλη απάντηση

Φυλλάδιο 2

Πρόβλημα 1

Να γράψετε μια εξίσωση με την οποία επιλύεται το ακόλουθο πρόβλημα: <<το διπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά πέντε είναι ίσο με το πενταπλάσιο του αριθμού, μειωμένο κατά τέσσερα.>>

Σωστές απαντήσεις: *1)* 2x+5 = 5x-4

2) 2x+5 = 5x-4

2x-5x = -5-4

-3x = -9

x = 3

Λάθος απαντήσεις: *1)* $x^2+5 = x^5-4$

2) 2x+5 = 5y-4

3) οποιαδήποτε άλλη απάντηση

Πρόβλημα 2

Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x+4}{5}+\frac{x-4}{3}=\frac{1+8x}{15}-2$, περιγράφοντας αναλυτικά το κάθε βήμα και να συμπεράνετε αν υπάρχει λύση.

Σωστές απαντήσεις: *1)*οι απαντήσεις που είχαν σωστή επίλυση της εξίσωσης, σωστή περιγραφή των βημάτων της λύσης και σωστό συμπέρασμα

2) οι απαντήσεις που είχαν σωστή επίλυση της εξίσωσης, σωστό συμπέρασμα και καθόλου περιγραφή

Μερικώς σωστές απαντήσεις: 1) οι απαντήσεις που είχαν κάποιο λάθος στη περιγραφή των βημάτων αλλά η επίλυση της εξίσωσης και το συμπέρασμα είναι σωστά

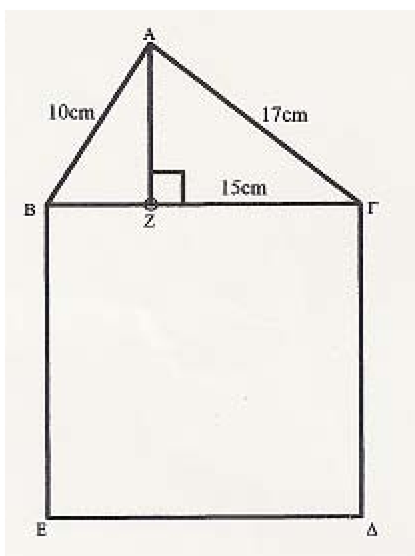
2) οι απαντήσεις που είχαν λάθος στην επίλυση της εξίσωσης και κατέληγαν σε αποτέλεσμα της μορφής 0χ=α, αλλά το συμπέρασμα ήταν σωστό.

Λάθος απαντήσεις: *1)* οι απαντήσεις στις οποίες οι μαθητές έβρισκαν λύση στην εξίσωση

2) οι απαντήσεις που δεν ήταν ολοκληρωμένες

Πρόβλημα 3

Στο παρακάτω σχήμα ΑΒ=10cm, ΑΓ=17cm και ΖΓ=15cm. Να εξηγήσετε πως θα βρούμε το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΓΔΕ.



Σωστές απαντήσεις: η ορθή αριθμητική λύση του προβλήματος αλλά και ορθή περιγραφική λύση των μαθητών.

Μερικώς σωστές απαντήσεις: *1)* οι απαντήσεις που έχουν κάποιο αριθμητικό λάθος αλλά ο τρόπος σκέψης είναι σωστός.

2) οι απαντήσεις που έχουν σωστή περιγραφή αλλά λάθος στην εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος

3) οι απαντήσεις που έχουν σωστή περιγραφή, σωστή εφαρμογή των Πυθαγορείων Θεωρημάτων αλλά λάθος τύπο εμβαδού

Λάθος απαντήσεις: *1)* οι απαντήσεις που εφαρμόζουν Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ

2) οποιαδήποτε άλλη απάντηση

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Μαθηματικά Α΄ γυμνασίου, μέρος Α΄, ενότητα 4.1 (σελ.73)

∫θº∞§∞π√-4 71-78) 5-3-2007 16-09-08 15:42 ™ÂÏ›‰·73

*Στην ισότητα $2 \cdot 6=12$ το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να επιβεβαιώσουμε ότι είναι σωστή. Η ισότητα όμως $2 \cdot x=12$ δεν είναι η ίδια. Αυτό το x που περιέχει "κρύβει" έναν αριθμό που αν τον βάλουμε στη θέση του, "επαληθεύει" αυτή την ισότητα. Αν βάλουμε οποιαδήποτε άλλη τιμή στη θέση του x, η ισότητα $2 \cdot x=12$ δεν ισχύει. Γι' αυτό τη σχέση δεν τη λέμε ισότητα, αλλά **εξίσωση**. Και ο x είναι ο **άγνωστος** αυτής της σχέσης. Όταν εμφανίζεται αυτός ο περίφημος **άγνωστος x**, ακολουθεί κι ένα **πρόβλημα**. Τώρα, η σχέση η δική μας με τέτοιου είδους "σχέσεις" δεν θα είναι καθόλου προβληματικές αν προσέξουμε καλά όσα ακολουθούν.*

Μαθαίνουμε

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να διατυπώσουμε κάποιες προτάσεις με τη βοήθεια αριθμών και γραμμάτων, ενώ για να λύσουμε ορισμένα προβλήματα μπορούμε να δημιουργήσουμε μια ισότητα με γράμματα και αριθμούς. Τέτοιες ισότητες τις λέμε εξισώσεις.

- **Εξίσωση με έναν άγνωστο** είναι μία ισότητα, που περιέχει αριθμούς και ένα γράμμα (άγνωστος).

Οι ισότητες:
$x + 5 = 12$, $y - 2 = 3$, $10 - z = 1$
$w : 5 = 4$, $7 \cdot \varphi = 14$, $24 : \psi = 6$
είναι εξισώσεις

- **Λύση ή ρίζα της εξίσωσης** είναι ο αριθμός που, όταν αντικαταστήσει τον άγνωστο, επαληθεύει την ισότητα.

Λύση ή ρίζα της εξίσωσης
$x - 7 = 5$ είναι ο αριθμός 12 διότι
$12 - 7 = 5$
Τη λύση τη γράφουμε: $x=12$

- Η διαδικασία, μέσω της οποίας, βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης, λέγεται **επίλυση της εξίσωσης.**

Τον άγνωστο μιας εξίσωσης τον συμβολίζουμε με ένα γράμμα π.χ. x, y, z, w, φ, ψ κ.λπ.

- Μια εξίσωση λέγεται **ταυτότητα ή αόριστη**, όταν όλοι οι αριθμοί είναι λύσεις της.

Οι εξισώσεις:
$x = x$ ή $0 \cdot z = 0$
είναι αόριστες ή ταυτότητες.

- Μια εξίσωση λέγεται **αδύνατη**, όταν κανένας αριθμός δεν την επαληθεύει.

Οι εξισώσεις:
$x + 2 = x + 6$ ή $0 \cdot w = 5$
είναι αδύνατες

- Βάσει των ορισμών των πράξεων

η εξίσωση:	$x+\alpha=\beta$	έχει λύση την	$x=\beta-\alpha$	Η εξίσωση:	$x + 5 = 12$	έχει λύση την	$x=12-5$ ή $x=7$
-//-	$x-\alpha=\beta$	-//-	$x=\beta+\alpha$	-//-	$y - 2 = 3$	-//-	$y=3+2$ ή $y=5$
-//-	$\alpha-x=\beta$	-//-	$x=\alpha-\beta$	-//-	$10 - z = 1$	-//-	$z=10-1$ ή $z=9$
-//-	$\alpha \cdot x=\beta$	-//-	$x=\beta:\alpha$	-//-	$7 \cdot \varphi = 14$	-//-	$\varphi=14:7$ ή $\varphi=2$
-//-	$x:\alpha=\beta$	-//-	$x=\beta \cdot \alpha$	-//-	$w : 5 = 4$	-//-	$w=4 \cdot 5$ ή $w=20$
-//-	$\alpha:x=\beta$	-//-	$x=\alpha:\beta$	-//-	$24 : \psi = 6$	-//-	$\psi=24:6$ ή $\psi=4$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Μια δεξαμενή χωρητικότητας $6m^3$ που έχει μήκος 1,5m και πλάτος 2m, έχει ύψος (α) 1,5m ή (β) 3m ή (γ) 2m;

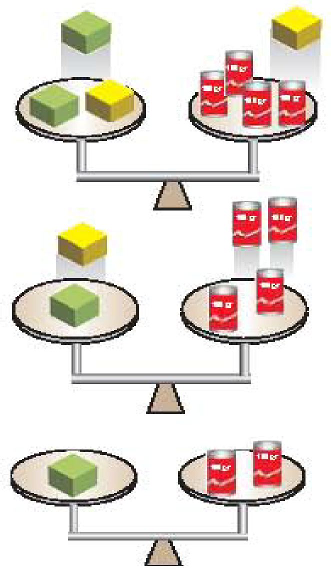
Λύση

Αν συμβολίσουμε με x το ύψος της δεξαμενής, τότε ο όγκος της θα ισούται με: **V=1,5·2·x**. Όμως γνωρίζουμε ότι ο όγκος της δεξαμενής είναι $6m^3$, άρα $3x=6$. (Δεν γράφουμε τις μονάδες στις εξισώσεις, αλλά πρέπει να γνωρίζουμε ποιες μονάδες χρησιμοποιούμε). Επομένως, **x=6 : 3**, δηλαδή **x=2 m**.
Συνεπώς το σωστό ύψος της δεξαμενής είναι τα **2 m**.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

Μαθηματικά Β΄ γυμνασίου, μέρος Α΄, ενότητα 1.2 (σελ.17-18)

1.2(15-21) 18-12-06 22:54



➤ **2ο βήμα:**
Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι μπορούμε με τον ίδιο τρόπο ν' αφαιρέσουμε έναν κύβο από κάθε δίσκο χωρίς πάλι να διαταραχθεί η ισορροπία της ζυγαριάς.

➤ **3ο βήμα:**
Τώρα έχουν μείνει δύο κύβοι στον ένα δίσκο και τέσσερα βαρίδια στον άλλο. Για να βρούμε πόσο βάρος έχει ο ένας κύβος, μπορούμε να σηκώσουμε έναν κύβο από τον ένα δίσκο (δηλαδή το μισό βάρος ενός δίσκου) και δύο βαρίδια από τον άλλο δίσκο (δηλαδή το μισό βάρος του άλλου δίσκου). Διαιρέσαμε, λοιπόν, τα βάρη και των δύο δίσκων δια 2, οπότε η ζυγαριά συνεχίζει να ισορροπεί.

Άρα, ένας κύβος ζυγίζει 200 γραμμάρια.

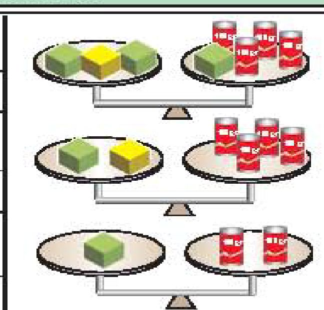
Ας δούμε τώρα μια «*μαθηματική*» λύση του παραπάνω προβλήματος:

Ας πούμε ότι κάθε κύβος ζυγίζει x κιλά.
Τότε, στον αριστερό δίσκο της ζυγαριάς βρίσκονταν στην αρχή $3x + 200$ γραμμάρια και στο δεξιό δίσκο $x + 600$ γραμμάρια. Αφού η ζυγαριά ισορροπεί, θα είναι: $3x + 200 = x + 600$.

Η ισότητα αυτή, που περιέχει τον άγνωστο αριθμό x, ονομάζεται **εξίσωση**.

Η παράσταση $3x + 200$ λέγεται **πρώτο μέλος** της εξίσωσης, ενώ η παράσταση $x + 600$ λέγεται **δεύτερο μέλος** αυτής.

Για να βρούμε τώρα τον άγνωστο αριθμό x, λύνουμε την εξίσωση.

Εξίσωση 3x + 200 = x + 600	**Περιγραφή λύσης**	
$3x+200-200=x+600-200$	Αφαιρούμε το 200 και από τα δύο μέλη της εξίσωσης	
$3x = x + 400$	Κάνουμε τις πράξεις	
$3x - x = x + 400 - x$	Αφαιρούμε το x και από τα δύο μέλη της εξίσωσης	
$(3 - 1)x = 400$ άρα $2x = 400$	Αναγωγή ομοίων όρων	
$\frac{2x}{2} = \frac{400}{2}$	Διαιρούμε με το 2 και τα δύο μέλη της εξίσωσης	
$x = 200$	Απλοποιούμε τα κλάσματα	

Άρα, ο κάθε κύβος ζυγίζει 200 γραμμάρια.

1.2(15-21) 18-12-06 22:54 ™ÂÏ›‰·18

Επαλήθευση:
Πράγματι, στον αριστερό δίσκο της ζυγαριάς υπάρχουν 3·200 + 200 = 600 + 200 = 800 γραμμάρια και στο δεύτερο δίσκο υπάρχουν 200 + 600 = 800 γραμμάρια. Δηλαδή, η ζυγαριά ισορροπεί.

Στην παραπάνω λύση της εξίσωσης 3x + 200 = x + 600 «απομονώσαμε» το x στο πρώτο μέλος της εξίσωσης, προσθέτοντας ή αφαιρώντας και στα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό. Η διαδικασία αυτή μπορεί να γίνει πιο γρήγορα με τη βοήθεια του εξής πρακτικού κανόνα:

> Σε μία εξίσωση μπορούμε να **«μεταφέρουμε»** όρους από το ένα μέλος στο άλλο, **αλλάζοντας το πρόσημό τους**.

Δηλαδή: $3x+200 = x+600$ ← Μεταφέρουμε το +x στο πρώτο μέλος, οπότε γίνεται -x. Επίσης, μεταφέρουμε το +200 στο δεύτερο μέλος, οπότε γίνεται -200.

$3x-x = 600-200$

$2x = 400$ ← Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

$\frac{2x}{2} = \frac{400}{2}$ ← Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου και απλοποιούμε τα κλάσματα

Άρα $x = 200$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να λυθεί η εξίσωση: 2(x−1)+3(2−x)=4(x+2).

Λύση: Έχουμε διαδοχικά:

$2x-2+6-3x = 4x+8$ ← Κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)

$2x-3x-4x = 8+2-6$ ← Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

$-5x = 4$ ← Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

$\frac{-5x}{-5} = \frac{4}{-5}$ ← Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου

Άρα $x = -\frac{4}{5}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{y+1}{2} + y = \frac{2y+3}{3} + 2$.

Λύση: Σε αυτή την εξίσωση έχουμε και παρονομαστές.
Μπορούμε, όμως, να πάρουμε μια εξίσωση χωρίς παρονομαστές, αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με ένα κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 2 και 3. Συνήθως χρησιμοποιούμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, το οποίο εδώ είναι το 6. **Η διαδικασία αυτή λέγεται απαλοιφή παρονομαστών**.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε

Αναλυτικοί πίνακες αποτελεσμάτων των φυλλαδίων

Α.Α	Ερώτ.1	Ερώτ.2	Ερώτ.3	Ερώτ.4	Ερώτ.5	Ερώτ.6	Ερώτ.7
1	2	2	1	1	5	3	6
2	2	4	4	4	4	1	7
3	2	2	2	2	4	2	3
4	2	3	2	4	3	4	8
5	2	2	2	5	3	2	8
6	2	2	2	2	4	2	6
7	2	2	3	3	4	2	6
8	2	2	1	1	1	3	5
9	2	2	2	5	4	4	7
10	2	1	1	4	5	3	5
11	2	2	3	1	4	3	6
12	2	2	4	2	1	2	3
13	2	2	2	2	2	2	2
14	2	2	2	1	1	2	2
15	2	2	2	2	1	2	2
16	2	2	1	1	5	1	1
17	2	2	2	2	3	2	2
18	2	2	2	2	1	3	1
19	2	2	2	1	2	3	2
20	2	2	2	1	2	3	2
21	2	2	2	2	3	2	6
22	2	2	1	5	3	2	2
23	1	1	4	1	5	5	4
24	1	1	1	1	4	3	2
25	2	2	1	1	3	3	4
26	2	2	1	1	4	2	6
27	1	2	1	1	4	3	6
28	2	1	2	1	3	2	6
29	1	1	1	1	4	2	5
30	2	1	1	1	1	2	1
31	2	2	1	1	4	2	4
32	2	1	1	1	1	3	1
33	2	2	2	1	3	2	4
34	2	2	1	1	4	2	6
35	2	2	2	2	4	4	6
36	2	1	2	1	1	2	5
37	2	1	4	1	5	3	4
38	2	2	1	1	4	3	6
39	2	3	1	4	1	3	5
40	2	2	1	1	2	3	7
41	1	4	4	5	1	1	8

Α.Α	Πρόβλημα 1	Πρόβλημα 2	Πρόβλημα 3
1	1	3	4
2	3	6	8
3	1	1	1
4	1	4	1
5	1	1	5
6	1	1	1
7	1	4	4
8	1	4	6
9	1	4	9
10	1	2	3
11	1	4	4
12	1	3	1
13	1	3	4
14	1	3	2
15	1	1	1
16	1	1	1
17	1	1	1
18	1	1	1
19	1	2	1
20	1	1	2
21	1	5	8
22	1	5	7
23	1	5	7
24	3	5	8
25	1	4	1
26	1	4	6
27	1	4	9
28	1	5	1
29	3	6	3
30	1	3	4
31	1	3	4
32	1	2	1
33	1	3	1
34	1	2	8
35	2	3	8
36	3	3	8
37	1	1	5
38	1	1	4
39	1	3	8
40	2	4	8
41	3	3	1

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

-Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H. and Krathwohl, D. R. (1956). *A Taxonomy of Educational Objectives I*. London: Longman.

-Boulton-Lewis, G., Cooper, T., Atweh, B., Pillay, H., Wilss, L., & Mutch, S. (1997). Processing load and the use of concrete representations and strategies for solving linear equations. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 379-397.

-Bruner J. C. (1972). *Relevance of education*, London: Penquin.

- Buxkemper, A., & Hartfiel, D. (2003). Understanding. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(6), 801–812.

-Farmaki, B., Klaoudatos, N., & Verikios, P. (2005). Inrtoduction of Algebraic thinking: Connecting the Concepts of linear Function and linear equation. In *Scientia Paedagogica Experimentalis*, vol. XLII nr.2, pp.231-254.

-Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 317-326.

Kieran C. (1988). Two different approaches among algebra learners. In A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra*, K-12 (1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics), Reston, VA: NCTM.

- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 35-56). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

-Kieran C. (1992) ‘‘The learning and Teaching of the School algebra ’’. In D. Grouws (Ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 390-419). New York

-Kuchemann (1981), ‘‘Algebra’’, in Hart M., (Ed), Childrens *Understanding of Mathematics*: 11-16 John Murray pp. 102-119

-Mingus, T. Y., & Grassl, R. M. (1998). Algorithmic and recursive thinking: current beliefs and their implications for the future. In the *Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics*: 1998 NCTM Yearbook (Morrow & Kenney, Eds.). Reston, VA: NCTM p. 33.

- Oksuz C. (2007). Children’s understanding of equality and the equal symbol. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.* Ανακτήθηκε από το διαδίκτυο στις 26/02/2011: http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm.

- Petitto, A. (1979). The role of formal and non-formal thinking in doing algebra. Journal of Children’s Mathematical Behaviour, 2(2), 69-82.

-Pirie, S., & Martin, L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1–36.

- Porteous K. Understanding Mathematics. Ανακτήθηκε από το διαδίκτυο στις 14/4/2010: http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome23/Porteous%20Understanding%20Mathematics.doc

- Sierpinska A., (1990). Some remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10, (3), 24-36 (November 1990) FLM Publishing Association, Montreal, Quebec, Canada.

- Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. Mathematics Teaching, 77, 20-26.

-Stacey, K. and MacGregor, M. (1997). Building foundations for algebra. *Mathematics teaching in the middle school*, 2, 252-260.

-Star, J. R., Glasser, H., Lee, K., Gucler, B., Demir, M., & Chang, L. (2005). *Investigating the Development of Students' Knowledge of Standard Algorithms in Algebra*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Canada.

- Steinberg, R., Sleeman, D., & Ktorza, D. (1990). Algebra students knowledge of equivalence ofequations. *Journal for research in mathematics education*, 22 (2), 112-121.

-Tall, D., & de Lima, R. N. (2008). Procedural embodiment and magic in linear equations. *Educational Studies in Mathematics, 67,* 3-18.

-Vlassis, J. (2002). The balance model: hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics,* 49, 341-359.

- Wagner S., ''Αυτές οι μεταβλητές… τι είναι;'' Στο περιοδικό της ΕΜΕ Ευκλείδης Γ, τόμος 3, τεύχος 1, 1984, σελ. 82 – 96, (άρθρο από το περιοδικό The mathematics teacher, Οκτώβριος 1983, τόμος 76, τεύχος 7).

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Βανδουλάκης Ι., Καλλιγάς Χ., Μαρκάκης Ν. και Φερεντίνος Σ. (2008). Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

- Βερύκιος, Π. και Ν. Κλαουδάτος «Τα επίπεδα κατανόησης της έννοιας της μεταβλητής από μαθητές της Γ' Γυμνασίου». *Πρακτικά του 16ου Συνεδρίου της ΕΜΕ*, Λάρισα 12-13-14 Νοεμβρίου 1999, σελ. 431- 439.

- Βερύκιος, Π. (2003)$_1$. Η μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα: Εμπόδια στη μαθησιακή πορεία του μαθητή. Η περίπτωση της εξίσωσης. *Πρακτικά του 20ου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, ΕΜΕ*, Βέροια.

-Βερύκιος, Π. (2003)$_2$. Κατανόηση εννοιών της άλγεβρας από μαθητές του Γυμνασίου. *Πρακτικά Συνεδρίου με θέμα «Τα μαθηματικά στο Γυμνάσιο»*, Μαθηματικό Τμήμα Πανεπιστημίου Αθηνών.

-Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2007α). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου (2η έκδοση)*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

- Λεμονίδης, Χ. (1996). Εμπειρική έρευνα στην ικανότητα επίλυσης εξισώσεων Α' βαθμού από μαθητές Γυμνασίου. *Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, Τεύχος 1. Περιοδική έκδοση του Παραρτήματος Κεντρικής Μακεδονίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, σσ. 14-35.

-Σακονίδης, Χ., & Δραμαλίδης, Α. (2006). Η επίδοση μαθητών ηλικίας 13-15 χρόνων σε θέματα σχολικής άλγεβρας. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων, 11,* 100-116.