ΒΕΛΤΙΣΤΕΣ ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΓΙΑ ΤΕΛΕΣΤΕΣ SCHRÖDINGER ΠΟΥ ΟΡΙΖΟΝΤΑΙ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ

Σταματόπουλος Ιωάννης
Α.Μ: 1710
Επιβλέπων Καθηγητής:
Φίλιππας Ευστάθιος

Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμημα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ηράκλειο
Ιούλιος, 2017

1 Εισαγωγή

Θέμα της παρούσας εργασιάς είναι η διερεύνηση ορισμένων θεωρημάτων "βέλτιστης φασματικής γεωμετρίας" (optimal spectral geometry). Τα οποία βρίσκουν ενδιαφέρουσες εφαρμογές στη γεωμετρία και τη φυσική. Διευκρινίζεται ότι με τον όρο "βέλτιστη φασματική γεωμετρία" εννοείται ο προσδιορισμός της γεωμετρίας που μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί μια ορισμένη ιδιοτιμή ενός διαφορικού τελεστή.

Ενδεικτικά παραδείγματα θεωρήματων "βέλτιστης φασματικής γεωμετρίας" αποτελούν:
1)Το θεώρημα Faber-Krahn [1],[2]: Αν θεωρήσουμε το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών Dirichlet για την Laplacian σε ένα χωρίο σταθερού όγκου (σε ένα χωρίο σταθερού εμβαδού), τότε η θεμελιώδης ιδιοτιμή ελαχιστοποιείται μοναδικά στην περίπτωση της μπάλας (δίσκος).
2)Το θεώρημα Weinberger [3]: Αν θεωρήσουμε το πρόβλημα Neumann για την Laplacian σε ένα χωρίο σταθερού όγκου, τότε η θεμελιώδης ιδιοτιμή είναι ταυτοτικά μηδέν και η πρώτη θετική ιδιοτιμή μεγιστοποιείται μοναδικά στην περίπτωση της μπάλας.

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα προβλήματα "βέλτιστης φασματικής γεωμετρίας" μερικές φορές ονομάζονται ισοπεριμετρικά σε αντιστοιχία με το κλασσικό ισοπεριμετρικό πρόβλημα: Απ΄ όλα τα χωρία με δεδομένο όγκο η σφαίρα είναι το χωρίο με την μικρότερη επιφάνεια.

Στην παρούσα εργασία αντικείμενο διερεύνησης αποτελούν θεωρήματα που αφορούν τον τελεστή Schrödinger της μορφής:

$$H\left(C,g\right) := -\frac{d^2}{ds^2} + g\kappa^2$$

όπου C μια κλειστή, ομαλή καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$. Με $\kappa = \kappa\left(s\right)$ συμβολίζουμε την καμπυλότητα της καμπύλης στο σημείο s και g πραγματική σταθερά.

Αυτός ο τελεστής έχει βρεθεί να συνδέεται με μια ειδική περίπτωση ανισοτήτων Lieb–Thirring[10] · πρόκειται για ανισότητες που "παίζουν" θεμελιώδη ρόλο για την απόδειξη της σταθερότητας της ύλης.

Βιβλιογραφικές αναφορές σχετικά με τον παραπάνω τελεστή είναι:
1)Για $g = 1$ υπάρχει η εικασία από τον Benguria και τον Loss [5] ότι το λ_1 (θεμελιώδης ιδιοτιμή) είναι μεγαλύτερη ή ίση του ενός και ότι η ισότητα ισχύει

αν και μόνο αν η καμπύλη ανήκει σε μια κατηγορία με σχήμα οβάλ, συμπεριλαμβανομένου του κύκλου, με καμπυλότητα $\kappa(s) = 1/(\alpha^2 \cos^2(s) + \alpha^{-2}\sin^2(s))$ για α διάφορο του μηδενός. Η εικασία αυτή είναι ακόμα ανοιχτή.
2)Επιπλέον, από τον Benguria και τον Loss [5] αποδείχτηκε το μη-βέλτιστο κάτω φράγμα $\lambda_1 \geq 1/2$ και πιο πρόσφατα από τον Linde[6] βρέθηκε το καλύτερο μη-βέλτιστο κάτω φράγμα $\lambda_1 > (1 + \pi/(\pi+8))^{-}2 \approx 0,60847$.
3) Ο Duclos και ο Exner [7] απέδειξαν ότι για $g < 0$ η θεμελιώδης ιδιοτιμή μεγιστοποιείται μοναδίκα στην περίπτωση του κύκλου.

Στην παρούσα εργασία θα γίνει διεξοδική αναφορά σε δυο θεωρήματα: Στην ενότητα 2 θα παρουσιαστεί το θεώρημα των Exner, Harrell και Loss [8] σύμφωνα με το οποίο για $0 < g < 1/4$ η κύρια ιδιοτιμή ελαχιστοποιείται μοναδικά όταν η καμπύλη είναι κύκλος και για $g > 1$ ο κύκλος δεν ελαχιστοποιεί την κύρια ιδιοτιμή.
Στην ενότητα 3 θα μελετηθεί το θεώρημα του Στεφανόπουλου[9], το οποίο μας δίνει μια εκτίμηση για τη θεμελιώδη ιδιοτιμή για g διάφορο του μηδενός.

2 Θεώρημα Exner, Harrell και Loss

Έστω C μια κλειστή επίπεδη καμπύλη παραμετρικοποιημένη με μήκος τόξου s και κανονικοποιημένη ώστε να έχει μήκος 1. Συμβολίζουμε με $\kappa = \kappa(s)$ την καμπυλότητα της καμπύλης στο σημείο $s \in [0,1]$. Αν $g > 0$ σταθερά, ορίζουμε τον τελεστή $H(C,g)$.

$$H(C,g) := -\frac{d^2}{ds^2} + g\kappa^2 \ .$$

Η κύρια ιδιοτιμή του τελεστή δίνεται από το

$$\lambda_1 = \inf_{\zeta} \int_0^1 \left(\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2 + g\kappa^2\zeta^2 \right) ds \ .$$

Το ζητούμενο είναι η ελαχίστη τιμή της λ_1 για τις διάφορες καμπύλες C.

Θεώρημα 2.1 *α) Ας υποθέσουμε ότι $0 < g < \frac{1}{4}$. Τότε, ο κύκλος είναι η μοναδική καμπύλη που ελαχιστοποιεί τη κύρια ιδιοτιμή λ_1.*
β) Έστω ότι $g > 1$. Τότε, ο κύκλος δεν ελαχιστοποιεί τη θεμελιώδη ιδιοτιμή λ_1.

Σχόλιο: Τα ερωτήματα για την τιμή του g και η φύση της μετάβασης παραμένουν ανοικτά. Εικάζουμε ότι δεν υπάρχει αποδεχτή καμπύλη ελαχιστοποίησης όταν $g > 1$.
Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε μια σειρά λημμάτων:
α)Ας θεωρήσουμε ότι $0 < g < \frac{1}{4}$. Την ελάχιστη τιμή του λ_1, την συμβολίζουμε με λ_* η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$\lambda_* = \inf_{\kappa \in B} \inf_{\zeta \in A} \int_0^1 \left(\left(\frac{d\zeta}{ds} \right)^2 + g\kappa^2 \zeta^2 \right) ds. \tag{1}$$

Όπου

$$A := \left\{ \zeta \in C^2[0,1], \quad \zeta > 0, \quad \zeta(0) = \zeta(1), \quad \int_0^1 \zeta(s)^2 ds = 1 \right\}$$

και

$$B := \left\{ \kappa \in C^1[0,1], \quad \kappa(0) = \kappa(1), \quad \int_0^1 \kappa(s) ds = 2\pi \right\}.$$

Η υπόθεση της θετικότητας μπορεί να επιβληθεί λόγω της θετικότητας των ground states των τελεστών Schrodinger .
Ορίζουμε το συναρτησιακό

$$I(\kappa, \zeta) := \int_0^1 \left(\left(\frac{d\zeta}{ds} \right)^2 + g\kappa^2 \zeta^2 \right) ds.$$

Στην συνέχεια θα δείξουμε οτι μπορεί να επιτευχθεί εναλλαγή στην σειρά των infimum :

$$\inf_{\kappa \in B} \inf_{\zeta \in A} \int_0^1 \left(\left(\frac{d\zeta}{ds} \right)^2 + g\kappa^2 \zeta^2 \right) ds = \inf_{\zeta \in A} \inf_{\kappa \in B} \int_0^1 \left(\left(\frac{d\zeta}{ds} \right)^2 + g\kappa^2 \zeta^2 \right) ds \ .$$

Λήμμα 2.2 *Ισχύει η παρακάτω ισότητα*

$$\inf_{\kappa \in B} \inf_{\zeta \in A} I(\kappa, \zeta) = \inf_{\zeta \in A} \inf_{\kappa \in B} I(\kappa, \zeta) \ .$$

Απόδειξη: Ορίζουμε : $\Gamma_1 = \inf_{\kappa \in B} \inf_{\zeta \in A} I(\kappa, \zeta)$ και $\Gamma_2 = \inf_{\zeta \in A} \inf_{\kappa \in B} I(\kappa, \zeta)$. Από ορισμό του infimum έχουμε ότι για κάθε ζ, κ το $\Gamma_1 \leq I(\kappa, \zeta)$, επίσης έχουμε για κάθε ζ $\Gamma_1 \leq \inf_{\kappa \in B} I(\kappa, \zeta)$ και $\Gamma_1 \leq \inf_{\zeta \in A} \inf_{\kappa \in B} I(\kappa, \zeta)$, επομένως συνεπάγεται $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$.

Από ορισμό του infimum έχουμε ότι για κάθε ζ, κ το $\Gamma_2 \leq I(\kappa, \zeta)$, επίσης έχουμε για κάθε κ το $\Gamma_2 \leq \inf_{\zeta \in A} I(\kappa, \zeta)$ και $\Gamma_2 \leq \inf_{\kappa \in B} \inf_{\zeta \in A} I(\kappa, \zeta)$, επομένως συνεπάγεται $\Gamma_2 \leq \Gamma_1$.
Άρα, αναγκαστικά πρέπει να ισχύει $\Gamma_1 = \Gamma_2$ δηλαδή

$$\inf_{\kappa \in B} \inf_{\zeta \in A} I(\kappa, \zeta) = \inf_{\zeta \in A} \inf_{\kappa \in B} I(\kappa, \zeta) \ .$$

■

Στη συνέχεια θα δείξουμε οτι το λ_* είναι ίσο με το το infimum του παράκατω συναρτησιακού:

$$E(\zeta) := \int_0^1 \left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2 ds + \frac{4\pi^2 g}{\int_0^1 \left(\frac{1}{\zeta^2}\right) ds} \ .$$

Λήμμα 2.3 *Ισχύει η παρακάτω ισότητα*

$$\inf_{\zeta} \inf_{\kappa} \int_0^1 \left(\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2 + g\kappa^2\zeta^2 \right) ds = \inf_{\zeta} \int_0^1 \left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2 ds + \frac{4\pi^2 g}{\int_0^1 \left(\frac{1}{\zeta^2}\right) ds} \ .$$

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι

$$2\pi = \int_0^1 \kappa(s) ds = \int_0^1 \frac{1}{\zeta} \kappa\zeta ds \ .$$

Με χρήση της ανισότητας Cauchy Schwartz έχουμε ότι

$$2\pi \leqslant \left(\int_0^1 \frac{1}{\zeta^2} ds\right)^{1/2} \left(\int_0^1 \kappa^2\zeta^2 ds\right)^{1/2} \ ,$$

απο όπου παίρνουμε ότι

$$\frac{4\pi^2}{\int_0^1 \frac{1}{\zeta^2} ds} \leqslant \int_0^1 \kappa^2\zeta^2 ds \ . \tag{2}$$

Στην παραπάνω ανισότητα η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν

$$\kappa(s) = \left(\frac{2\pi}{\int_0^1 \frac{1}{\zeta^2} ds}\right) \frac{1}{\zeta^2(s)} \ . \tag{3}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (2) με g και προσθέτοντας στις δυο πλευρές τον όρο $\int_0^1 \left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2 ds$:

$$\int_0^1 \left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2 ds + \int_0^1 g\kappa^2\zeta^2 ds \geq \int_0^1 \left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2 ds + \frac{4g\pi^2}{\int_0^1 \frac{1}{\zeta^2} ds} ,$$

δηλαδή για οποιοδήποτε $\zeta \in A$, $k \in B$

$$I(\kappa, \zeta) \geq E(\zeta).$$

Σημειώνουμε οτι για οποιοδήποτε $\zeta \in A$ επιλέγοντας το κ όπως στην (3) έχουμε ισότητα. Συμπεραίνουμε οτι

$$\inf_\zeta \inf_\kappa I(\kappa, \zeta) = \inf_\zeta E(\zeta),$$

που είναι το ζητούμενο.

■

Χάρη στα Λήμματα 2.2 και 2.3 έχουμε ανάγει το διπλό infimum σε μονό, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την θεωρία του λογισμού των μεταβολών.

Λήμμα 2.4 *Ισχύει η παρακάτω ανισότητα*

$$\lambda_* \leq 4g\pi^2 .$$

Απόδειξη: Επιλέγοντας τη δοκιμαστική συνάρτηση $\zeta = 1$ και κάνοντας αντικατάσταση στην $E(\zeta)$, έχουμε $\lambda_* \leq E(\zeta) = 4g\pi^2$.

■

Αποδεχόμαστε το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 2.5 *Αν $\lambda_* < \pi^2$, τότε το συναρτησιακό $E(\zeta)$ έχει ελαχιστοποιητή, δηλαδή υπάρχει $\zeta_* \in A$ τ.ω* $\inf_{\zeta \in A} E(\zeta) = \lambda_* = E(\zeta_*)$.

Απόδειξη: Η απόδειξη παραλείπεται.

■

Επειδή το $g \in (0, \frac{1}{4})$ και σύμφωνα το Λήμμα 2.4 το $\lambda_* < \pi^2$, επομένως από το Λήμμα 2.5 υπάρχει ελαχιστοποιητής, ο οποίος είναι μια γνήσια θετική περιοδική συνάρτηση στο διάστημα [0, 1]. Από την στιγμή που υπάρχει ο ελαχιστοποιητής ζ_* θα ικανοποιεί την εξίσωση Euler-Lagrange για το συναρτησιακό E. Στην συνέχεια θα βρούμε την εξίσωση Euler-Lagrange .

Λήμμα 2.6 *Η Euler-Lagrange για το συναρτησιακό $E(\zeta)$ είναι:*

$$-\zeta_*'' + M\frac{1}{\zeta_*^3} = C\zeta_*. \tag{4}$$

Όπου

$$M := \frac{4\pi^2 g}{\left(\int_0^1 \frac{1}{\zeta_*^2} ds\right)^2}$$

και C ο πολλαπλασιαστής Lagrange.

Απόδειξη: Εμφυτεύουμε ένα υποτιθέμενο τοπικό ελάχιστο ζ_* σε μια οικογένεια αποδεκτών συναρτήσεων ως προς την οποία πραγματοποιούμε την "ακροτατοποίηση" και εισάγουμε στη συνέχεια μια διπαραμετρική οικογένεια της μορφής:

$$z = \zeta_*(s) + \varepsilon_1 h_1(s) + \varepsilon_2 h_2(s)$$

όπου για κάθε h_1, h_2 τ.ω $h_1, h_2 \in C^2(0,1)$,

$$h_1(0) = h_1(1) = h_2(0) = h_2(1) = 0 \ .$$

Ορίζουμε :

$$J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_0^1 (z')^2 ds + \frac{4\pi^2 g}{\left(\int_0^1 \frac{1}{z^2} ds\right)} - C\int_0^1 z^2 ds \ ,$$

όπου C πολλαπλασιαστής Lagrange. Θα πρέπει να ισχύει

$$\frac{dJ}{d\varepsilon_1} = \frac{dJ}{d\varepsilon_2} = 0, \qquad \text{στο} \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0,0)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dJ}{d\varepsilon_1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \\
&= \frac{d}{d\varepsilon_1}\Bigg[\int_0^1 (\zeta_*' + \varepsilon_1 h_1' + \varepsilon_2 h_2')^2 ds \\
&\qquad + \frac{4\pi^2 g}{\left(\int_0^1 \frac{1}{(\zeta_* + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2)^2} ds\right)} - C\int_0^1 (\zeta_* + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2)^2 ds\Bigg] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Επεξεργαζόμαστε τον κάθε όρο ξεχωριστά. Αρχικά, ο πρώτος όρος:

$$\frac{d}{d\varepsilon_1}\int_0^1 \left({\zeta_*}' + \varepsilon_1 {h_1}' + \varepsilon_2 {h_2}'\right)^2 ds$$

$$= \int_0^1 2\left({\zeta_*}' + \varepsilon_1 {h_1}' + \varepsilon_2 {h_2}'\right) h_1 ds$$

$$= \int_0^1 (2\varepsilon_1 {h_1}'^2 + 2{\zeta_*}'{h_1}' + 2{h_1}'\varepsilon_2 {h_2}')ds \ .$$

Για $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ καταλήγω σε

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon_1}\int_0^1 \left({\zeta_*}' + \varepsilon_1 {h_1}' + \varepsilon_2 {h_2}'\right)^2 ds\right|_{\varepsilon_1,\varepsilon_2=0} = \int_0^1 2\zeta' {h_1}' ds =$$

$$= -\int_0^1 \left(2{\zeta_*}'' h_1\right) ds \ . \tag{6}$$

Στην συνέχεια, ο δεύτερος όρος:

$$\frac{d}{d\varepsilon_1}\frac{4\pi^2 g}{\int_0^1 \frac{1}{(\zeta_*+\varepsilon_1 h_1+\varepsilon_2 h_2)^2}ds}$$

$$= -\frac{4\pi^2 g}{\left(\int_0^1 \frac{1}{(\zeta_*+\varepsilon_1 h_1+\varepsilon_2 h_2)^2}ds\right)^2}\frac{d}{d\varepsilon_1}\int_0^1 \frac{1}{(\zeta+\varepsilon_1 h_1+\varepsilon_2 h_2)^2}ds$$

$$= \frac{4\pi^2 g}{\left(\int_0^1 \frac{1}{(\zeta_*+\varepsilon_1 h_1+\varepsilon_2 h_2)^2}ds\right)^2}\int_0^1 \frac{2\varepsilon_1 h_1^2 + 2\zeta_* h_1 + 2\varepsilon_2 h_1 h_2}{(\zeta_*+\varepsilon_1 h_1+\varepsilon_2 h_2)^4}ds \ .$$

Για $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ καταλήγω σε

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon_1}\frac{4\pi^2 g}{\int_0^1 \frac{1}{(\zeta_*+\varepsilon_1 h_1+\varepsilon_2 h_2)^2}ds}\right|_{\varepsilon_1,\varepsilon_2=0} = \frac{4\pi^2 g}{\left(\int_0^1 \frac{1}{\zeta_*^2}ds\right)^2}\int_0^1 \frac{2h_1\, ds}{\zeta_*^3}$$

$$= M\int_0^1 \frac{2h_1}{\zeta_*^3} \ . \tag{7}$$

Και τέλος, ο τρίτος όρος:

$$\frac{d}{d\varepsilon_1} - C\int_0^1 (\zeta_* + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2)^2\, ds = -C\frac{d}{d\varepsilon_1}\int_0^1 (\zeta_* + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2)^2\, ds$$

$$= -C\int_0^1 2\left(\zeta_* + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2\right) h_1 ds = -C\int_0^1 (2\varepsilon_1 h_1^2 + 2\zeta_* h_1 + 2h_1\varepsilon_2 h_2) ds\ .$$

Για $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ καταλήγω σε

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon_1} - C\int_0^1 (\zeta_* + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2)^2\, ds\right|_{\varepsilon_1,\varepsilon_2=0} = -C\int_0^1 2\zeta_* h_1 ds\ . \tag{8}$$

.

Από (5)-(8) παίρνουμε οτι

$$2\int_0^1 h_1(-\zeta_*'' + \frac{M}{\zeta_*^3}ds - C\zeta_*)ds = 0$$

για κάθε $h_1 \in C^2(0,1)$, με $h_1(0) = h_1(1) = 0$, συνεπώς

$$-\zeta_*'' + \frac{M}{\zeta_*^3} - C\zeta_* = 0$$

δηλαδή

$$-\zeta_*'' + \frac{M}{\zeta_*^3} = C\zeta_*\ .$$

■

Στην συνέχεια υπολογίζεται η τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange.

Λήμμα 2.7 *Ισχύει η παρακάτω ισότητα*

$$C = \lambda_*.$$

Απόδειξη: Αν πολλαπλασιάσουμε την (4) με ζ_* και αν ολοκληρώσουμε κατά μέλη τον πρώτο όρο, τότε παίρνουμε:

$$\int_0^1 -(\zeta_*''\zeta_*)ds + M\int_0^1 \frac{1}{\zeta_*^2}ds = C\int_0^1 \zeta_*^2 ds$$

ισχύει

$$\int_0^1 (\zeta_*')^2 ds + \frac{4\pi^2 g}{\left(\int_0^1 \frac{1}{\zeta_*^2}ds\right)} = C\int_0^1 \zeta_*^2 ds$$

συνεπώς

$$E(\zeta_*) = C\int_0^1 \zeta_*^2 ds$$

το δεξί μέλος είναι το $E(\zeta_*) = \lambda_*$ και το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέρος είναι 1 λόγω της κανονικοποίησης.

$$C = \lambda_*$$

■

Συνεπώς η Euler-Lagrange είναι :

$$-\zeta_*'' + \frac{M}{\zeta_*^3} = \lambda_* \zeta_*. \tag{9}$$

Στην συνέχεια θα επιδιωχθεί η επίλυση της Euler-Lagrange για την περίπτωση που το $g \in (0, \frac{1}{4})$.

Καταρχάς, θα αναζητήθουν λύσεις σταθερές. Θα αποδειχθεί ότι $\zeta_*(s) = 1$ είναι λύση της Euler-Lagrange .

Πρώτον έχουμε

$$E(\zeta_*) = E(1) = 4g\pi^2$$

και δεύτερον

$$M = \frac{4\pi^2 g}{\left(\int_0^1 \frac{1}{\zeta_*^2} ds\right)^2} = 4g\pi^2.$$

Άρα, εύκολα βλέπουμε ότι η ταυτοτική συνάρτηση $\zeta_*(s) = 1$ είναι λύση της Euler-Lagrange .

Στην συνέχεια θα αναζητηθεί άλλη λύση (μη-σταθερή) της Euler-Lagrange.

Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (9) με ζ_*' , αυτό έχει ως αποτέλεσμα :

$$\begin{aligned}
0 &= -\zeta_*''\zeta_*' + \frac{M}{\zeta_*^3}\zeta_*' - \lambda_*\zeta_*\zeta_*' \\
&= -\frac{1}{2}((\zeta_*')^2)' - \left(\frac{1}{2}\frac{M}{\zeta_*^2}\right)' - \lambda_*\frac{1}{2}(\zeta^2)' \\
&= ((\zeta_*')^2)' + \left(\frac{M}{\zeta_*^2}\right)' + \lambda_*(\zeta_*^2)' \\
&= \frac{d}{ds}\left[(\zeta_*')^2 + \frac{M}{\zeta_*^2} + \lambda_*\zeta_*^2\right]
\end{aligned}$$

συνεπώς
$$({\zeta_*}')^2 + \frac{M}{\zeta_*^2} + \lambda_* \zeta_*^2 = \tilde{C} \ . \tag{10}$$
Για να υπολογίσουμε το $\tilde{C}$ ολοκληρώνουμε την (10) και αξιοποιούμε την $E(\zeta_*) = \lambda_*$ και την κανονικοποίηση $\int_0^1 \zeta_*^2 ds = 1$.
Επομένως
$$\begin{aligned}
\tilde{C} &= \int_0^1 ({\zeta_*}')^2 ds + \frac{4\pi^2 g}{\left(\int_0^1 \frac{1}{\zeta_*^2} ds\right)^2} \int_0^1 \frac{1}{\zeta_*^2} ds + \lambda_* \int_0^1 \zeta_*^2 ds \\
&= \int_0^1 ({\zeta_*}')^2 ds + \frac{4\pi^2 g}{\int_0^1 \frac{1}{\zeta_*^2} ds} + \lambda_* \int_0^1 \zeta_*^2 ds \\
&= E(\zeta_*) + \lambda_* \\
&= 2\lambda_* .
\end{aligned}$$
Αποδεικνύεται ότι το $\tilde{C} = 2\lambda_*$, συνεπώς η εξίσωση (10) γράφεται:
$$({\zeta_*}')^2 + \frac{M}{\zeta_*^2} + \lambda_* \zeta_*^2 = 2\lambda_* \tag{11}$$
η οποία εύκολα μπορεί να γραφτεί
$$\left[\left(\frac{1}{2}\zeta_*^2\right)'\right]^2 = ({\zeta_*}')^2 \zeta_*^2 = \lambda_* - M - \lambda_* \left(\zeta_*^2 - 1\right)^2 \tag{12}$$
πολλαπλασιάζοντας την (11) με ζ_*^2 και προσθαφαιρώντας τον όρο λ_*.

Τώρα θα λύσουμε την διαφορική εξίσωση (12).
$$\left(\frac{1}{2}\zeta_*^2\right)' = \pm\sqrt{\lambda_*}\sqrt{\left(1 - M/\lambda_* - (\zeta_*^2 - 1)^2\right)}$$
Θα κρατήσουμε τον αρνητικό όρο φυσικά, αν κρατούσαμε τον θετικό όρο η λύση θα μας έβγαζε arcsin που περιγράφει ακριβώς την ίδια λύση με τον αρνητικό όρο συνεπώς
$$\frac{(\zeta_*^2)'}{\sqrt{\left(1 - M/\lambda_* - (\zeta_*^2 - 1)^2\right)}} = -2\sqrt{\lambda_*}$$
θέτουμε $y = \zeta_*^2$
$$\frac{y'}{\sqrt{\left(1 - M/\lambda_* - (y - 1)^2\right)}} = -2\sqrt{\lambda_*}.$$

Καταλήξαμε σε περίπτωση χωριζομένων μεταβλητών και χρησιμοποιώντας τον τύπο $\arccos\left(\frac{x}{\alpha}\right) = -\int \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}dx$ εύκολα καταλήγουμε σε

$$y = 1 + cos\left(2\sqrt{\lambda_*}\,(s-s_0)\right)\sqrt{1-M/\lambda_*}.$$

Επομένως σε

$$\zeta_*^2 = 1 + cos\left(2\sqrt{\lambda_*}\,(s-s_0)\right)\sqrt{1-M/\lambda_*}\ . \qquad (13)$$

Για να είναι λύση της Euler-Lagrange πρέπει να ανήκει στον χώρο A. Για να είναι περιοδική πρέπει:

$$2\sqrt{\lambda_*}\,(1-s_0) = 2\kappa\pi + 2\sqrt{\lambda_*}\,(0-s_0)$$

δηλαδή

$$\lambda_* = \kappa^2\pi^2 \quad .$$

Επειδή η $0 < g < \frac{1}{4}$ και λόγω του Λήμματος2.4, έχουμε τον περιορισμό $\lambda_* < \pi^2$. Επομένως το $\kappa = 0$, κάτι που δεν μπορεί να ισχύει γιατί το συναρτησιακό $E(\zeta)$ είναι γνήσια θετικό. Άρα η λύση δεν είναι περιοδική και επομένως δεν ανήκει στον χώρο A. Συνεπώς η μοναδική αποδεχτή λύση της Euler-Lagrange είναι το $\zeta_* = 1$. Εφόσον το $\zeta_* = 1$, η αντίστοιχη καμπυλότητα είναι $\kappa(s) = \left(\frac{2\pi}{\int_0^1 \frac{1}{\zeta^2}ds}\right)\frac{1}{\zeta^2(s)} = 2\pi$, δηλαδή η καμπύλη είναι κύκλος.

■

Στην συνέχεια θα αποδειχθεί το β του θεωρηματος 2.1.

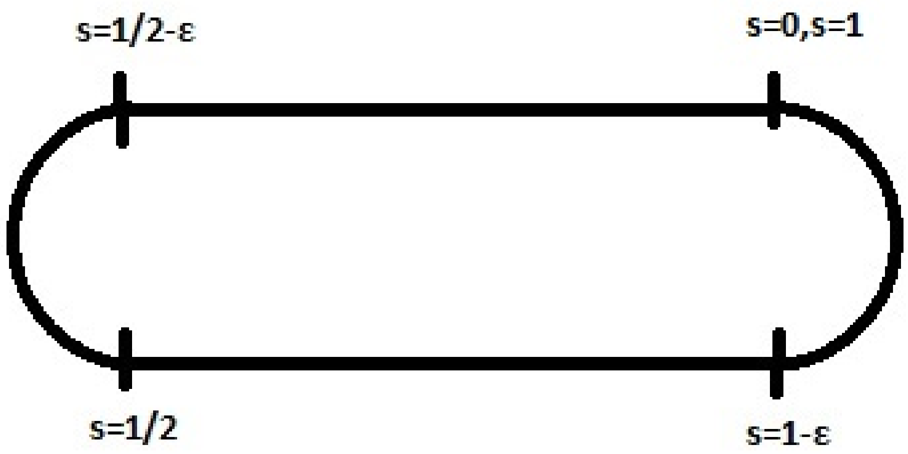
β)Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $g > 1$. Η μικρότερη κύρια ιδιοτιμή για τον κύκλο είναι $4\pi^2 g$, όπως είδαμε στο (α), έτσι πρέπει να δείξουμε ότι μπορούμε να βρούμε καμπύλη όπου η κύρια ιδιοτιμή είναι μικρότερη· αυτό θα το κάνουμε με αντιπαράδειγμα.

Θα εξετάσουμε μια καμπύλη σε σχήμα γηπέδου όπου καμπυλότητα είναι

$$\kappa(s) = \begin{cases} \frac{\pi}{\varepsilon} & \text{για} \quad 1/2-\varepsilon < s < 1/2 \\ \frac{\pi}{\varepsilon} & \text{για} \quad 1-\varepsilon < s < 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για κάποιο $\varepsilon << 1/2$ και θα χρησιμοποιήσουμε την δοκιμαστική συνάρτηση

$$\zeta(s) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi s}{1/2-\varepsilon}\right) & \text{για} \quad 0 < s < 1/2-\varepsilon \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$



Θα δείξουμε οτι με κατάλληλη μικρή επιλογή του ε έχουμε οτι το $I(\kappa,\zeta) < 4g\pi^2$.

Απόδειξη: Υπενθυμίζουμε ότι το

$$I\left(\kappa,\zeta\right) := \int_0^1 \left(\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2 + g\kappa^2\zeta^2\right) ds.$$

και για τις συγκεκριμένες επιλογές του κ και του ζ παίρνουμε

$$I\left(\kappa,\zeta\right) = \int_0^{1/2-\varepsilon} \left(\sin\left(\frac{2\pi s}{1/2-\varepsilon}\right)'\right)^2 ds = \left(\frac{2\pi}{1/2-\varepsilon}\right)^2 \int_0^{1/2-\varepsilon} \cos\left(\frac{2\pi s}{1/2-\varepsilon}\right)^2 ds$$

χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\cos^2\left(x\right) = \frac{1}{2} + \frac{\cos\left(2x\right)}{2}$$

$$\left(\frac{2\pi}{1/2-\varepsilon}\right)^2 \int_0^{1/2-\varepsilon} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos\left(\frac{4\pi s}{1/2-\varepsilon}\right)}{2}\right) ds$$

$$= \left(\frac{2\pi}{1/2-\varepsilon}\right)^2 \left[\int_0^{1/2-\varepsilon} \frac{1}{2} ds + \int_0^{1/2-\varepsilon} \frac{\cos\left(\frac{4\pi s}{1/2-\varepsilon}\right)}{2} ds\right]$$

$$= \left(\frac{2\pi}{1/2-\varepsilon}\right)^2 \left[\frac{1}{2}\left[s\right]_0^{1/2-\varepsilon} + \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{4\pi s}{1/2-\varepsilon}\right)\frac{1/2-\varepsilon}{4\pi}\right]_0^{1/2-\varepsilon}\right]$$

$$= \left(\frac{2\pi}{1/2-\varepsilon}\right)^2 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\right] = \left(\frac{2\pi}{1/2-\varepsilon}\right)^2 \left(\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$= 4\left(\frac{\pi}{1/2-\varepsilon}\right)^2\left(\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{1/2-\varepsilon}\right)^2 - 2\varepsilon\left(\frac{\pi}{1/2-\varepsilon}\right)^2$$

καταλήγουμε σε

$$\left(\frac{\pi}{1/2-\varepsilon}\right)^2 - 2\varepsilon\left(\frac{\pi}{1/2-\varepsilon}\right)^2 \leq \left(\frac{\pi}{1/2-\varepsilon}\right)^2 \underset{\varepsilon\to 0}{\rightarrow} 4\pi^2$$

όπου είναι μικρότερη σε σχέση με του κύκλου που είναι $4\pi^2 g$. Άρα, ο κύκλος για $g > 1$ δεν ελαχιστοποιεί την θεμελιώδη ιδιοτιμή λ_1.

■

Με αυτό έχει ολοκληρωθεί η απόδειξη του Θεωρήματος Exner, Harrell και Loss .

Πριν προχωρήσουμε στο θεώρημα Στεφανόπουλου, είναι απαραίτητη η επισήμανση κάποιων διαφοροποιήσεων στους συμβολισμούς. Στο θεώρημα Exner, Harrell και Loss η καμπύλη συμβολιζόταν με C, η θεμελιώδης ιδιοτιμή με λ_1 και η δοκιμαστική συνάρτηση με ζ. Στο θεώρημα Στεφανόπουλου η καμπύλη θα συμβολίζεται με γ, η θεμελιώδης ιδιοτιμή με λ_0 και η δοκιμαστική συνάρτηση με u.

3 Θεώρημα Στεφανόπουλου

Έστω γ μια ομαλή κλειστή καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$ με μήκος 2π, παραμετρικοποιημένη με μήκος τόξου s και κανονικοποιημένη ώστε να έχει μήκος 1. Συμβολίζουμε με $\kappa = \kappa(s)$ την καμπυλότητα της καμπύλης στο σημείο $s \in [0, 2\pi]$ και g σταθερά, ορίζουμε τον τελεστή $H(\gamma, g)$.

$$H(\gamma, g) := -\frac{d^2}{ds^2} + g\kappa^2 \ .$$

Το πρόβλημα των 2π-περιοδίκων ιδιοτιμών για τον τελεστή $H(\gamma, g)$ είναι

$$H(\gamma, g)\, u = \lambda u$$

ή ισοδύναμα

$$u'' - g\kappa^2 u + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(2\pi), \quad u'(0) = u'(2\pi). \tag{14}$$

Θεώρημα 3.1 *Έστω $g \neq 0$. Αν λ_0 είναι η κύρια ιδιοτιμή του (14) , με κ η καμπυλότητα μιας κλειστής C^2 καμπύλης γ στον $\mathbb{R}^3$ με μήκος 2π, τότε*

$$\frac{g}{2\pi}\int_0^{2\pi}\kappa^2 ds - K(\gamma,g) \leq \lambda_0(\gamma,g) \leq \frac{g}{2\pi}\int_0^{2\pi}\kappa^2 ds, \tag{15}$$

όπου $K(\gamma,g)$ σταθερά δοσμένη από

$$K(\gamma,g) = \min_{r=1/2,1}\left\{g^2\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\kappa^4 ds - \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\kappa^2 ds\right)^2\right]\right\}^r . \tag{16}$$

Η σταθερά $K(\gamma,g)$ είναι ίση με το μηδέν, αν και μόνο αν η καμπύλη γ είναι κύκλος, δηλαδή $\kappa(s) = 1$, οπότε στη σχέση (15) έχουμε διπλή ισότητα.

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε μια σειρά λημμάτων.
Η κύρια ιδιοτιμή του $H(\gamma,g)$ δίνεται από

$$\lambda_0(\gamma,g) = \min_{u\in\Gamma}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{d}{ds}u(s)\right)^2 + g\kappa^2u^2(s)\right]ds. \tag{17}$$

Όπου

$$\Gamma := \Bigg\{u \in C^2[0,2\pi], \quad u > 0, \quad u(0) = u(2\pi),$$
$$u'(0) = u'(2\pi), \quad \int_0^1 u^2(s)ds = 1\Bigg\}.$$

Κάνοντας αντικατάσταση τη δοκιμαστική συνάρτηση $u = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}$ στο παραπάνω συναρτησιακό παίρνουμε

$$\lambda_0(\gamma,g) \leq \frac{g}{2\pi}\int_0^{2\pi}\kappa^2 ds.$$

Από την παραπάνω σχέση λαμβάνεται το άνω φράγμα της (15).

Λήμμα 3.2 *Έστω γ μία C^2 κλειστή καμπύλη με μήκος 2π στον $\mathbb{R}^3$ και παραμετρικοποιημένη με μήκος τόξου s. Αν κ είναι η καμπυλότητα της γ, τότε*

$$\int_0^{2\pi}\kappa^2 ds \leq \int_0^{2\pi}\kappa^4 ds. \tag{18}$$

Η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν το κ είναι σταθερά.

Απόδειξη:. Ξεκινάμε από την ανισότητα Fenchel[4]

$$2\pi \leq \int_\gamma \kappa ds. \tag{19}$$

Η ισότητα ισχύει όταν η γ είναι απλή επίπεδη κυρτή καμπύλη.
Η ανισότητα Fenchel δηλώνει ότι η συνολική καμπυλότητα μιας κλειστής καμπύλης στον $\mathbb{R}^3$ είναι τουλάχιστον 2π.
Με χρήση της ανισότητας Cauchy Schwartz έχουμε ότι

$$2\pi \leq \sqrt{2\pi}\sqrt{\int_0^{2\pi} \kappa^2 ds}$$

από όπου παίρνουμε ότι

$$1 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \kappa^2 ds \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \kappa^2 ds\right)^2. \tag{20}$$

Ξανά με χρήση της ανισότητας Cauchy Schwartz στο αριστερό μέλος της (20) έχουμε ότι

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \kappa^2 ds\right)^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \kappa^4 ds. \tag{21}$$

Άρα, από (20) και (21) λαμβάνουμε το ζητούμενο. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη πρέπει να πάρουμε τις ισότητες από τις ανισότητες (19), (20) και (21). Η ισότητα στην (19) ισχύει όταν η γ είναι απλή επίπεδη κυρτή καμπύλη και η (20) και (21), όταν $\kappa(s)$ είναι σταθερά, δηλαδή είναι κύκλος.

■

Συνεχίζουμε την απόδειξη του θεωρήματος και απλοποιούμε τους συμβολισμούς συμβολίζοντας με λ την κύρια ιδιοτιμή του τελεστή $H(\gamma, g)$ και με u την αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση. Επειδή η u είναι γνήσια θέτικη ως πρώτη ιδιοσυνάρτηση, μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση $z := u'/u$ που είναι συνεχής και περιοδική. Με αυτόν τον μετασχηματισμό το πρόβλημα ιδιοτιμών $H(\gamma, g)\, u = \lambda u$ μετασχηματίζεται σε περιοδική εξίσωση Riccati.

Λήμμα 3.3 *Η εξίσωση Riccati είναι:*

$$z' + z^2 - g\kappa^2 + \lambda = 0, \qquad z(0) = z(2\pi). \tag{22}$$

Απόδειξη: Θα διαιρέσουμε την εξίσωση (14) με u και θα προσθαφαιρέσουμε τον όρο $\left(\frac{u'}{u}\right)^2$ και επομένως παίρνουμε:

$$\frac{u''}{u} - \left(\frac{u'}{u}\right)^2 + \left(\frac{u'}{u}\right)^2 - g\kappa^2 + \lambda = 0.$$

Επειδή η συνάρτηση $z = \frac{u'}{u}$ και η παράγωγος της $z' = \frac{u''}{u} - \left(\frac{u'}{u}\right)^2$, ως εκ τούτου έχουμε το αποτέλεσμα.

■

Στην συνέχεια ασχολούμαστε με το πρόβλημα (22). Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο ότι

$$\int_0^{2\pi} z' ds = \int_0^{2\pi} z ds = 0, \tag{23}$$

επειδή $z = (\ln u)'$ και u, z είναι 2π-περιοδικές.

Η $K(\gamma, g)$, εμφανίζεται ως μια διαφορά τύπου διακύμανσης των ολοκληρωμάτων που αφορούν την καμπυλότητα.

Ορισμός 3.4 *Για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f συμβολίζουμε με $\mu(f)$ τον μέσο όρο της πάνω από το $[0, 2\pi]$, δηλαδή*

$$\mu(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f ds$$

και επίσης ορίζουμε

$$V(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(s) - \mu(f)\right)^2 ds = \mu(f^2) - \mu(f)^2. \tag{24}$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} V(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(s) - \mu(f)\right)^2 ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)^2 ds - 2\frac{1}{2\pi}\mu(f) \int_0^{2\pi} f(s) ds + \mu(f)^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 ds \\ &= \mu(f^2) - 2\mu(f)^2 + \mu(f)^2 \\ &= \mu(f^2) - \mu(f)^2 \end{aligned}$$

■

Επιλέγοντας $f = \kappa^2$ η (16) με βάση την (24) μπορεί να γραφτεί ως

$$K(\gamma, g) = \begin{cases} g^2 V(\kappa^2) & \text{αν} \quad V(\kappa^2) \leq 1, \\ \sqrt{g^2 V(\kappa^2)} & \text{αν} \quad V(\kappa^2) > 1. \end{cases} \tag{25}$$

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε το κάτω φράγμα της ανισότητας (15).

Λήμμα 3.5 *Ισχύει η ισότητα*

$$\lambda = \frac{g}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa^2 ds - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^2 ds. \tag{26}$$

Παρατηρούμε ότι η (26) ποσοτικοποιεί το άνω φράγμα της (15).

Απόδειξη: Ολοκληρώνουμε την σχεση (22)

$$\int_0^{2\pi} z' ds + \int_0^{2\pi} z^2 ds - g \int_0^{2\pi} \kappa^2 ds + 2\pi\lambda = 0.$$

Αξιοποιώντας την (23) και λύνοντας ως προς λ λαμβάνουμε το αποτέλεσμα.

$\blacksquare$

Λήμμα 3.6 *Υπάρχει θετική σταθερά ρ τ.ω*

$$g^2 \int_0^{2\pi} \kappa^4 ds - g\lambda \int_0^{2\pi} \kappa^2 ds = (\lambda + \rho) \int_0^{2\pi} z^2 ds, \tag{27}$$

και

$$\rho \geq 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^2 ds. \tag{28}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν γ κύκλος.

Απόδειξη: Πολλαλπασιάζουμε την (22) με z' και την ολοκληρώνουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} (z')^2 ds + \int_0^{2\pi} z' z^2 ds - g \int_0^{2\pi} z' \kappa^2 ds + \lambda \int_0^{2\pi} z' ds \\ &= \int_0^{2\pi} (z')^2 ds + \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{2\pi} - g \int_0^{2\pi} z' \kappa^2 ds + \lambda \int_0^{2\pi} z' ds. \end{aligned}$$

Ο μεσαίος όρος λόγω της περιοδικότητας είναι μηδέν και λόγω της (23) ο τελευταίος όρος είναι μηδέν, επομένως

$$\int_0^{2\pi} (z')^2 ds = g \int_0^{2\pi} z' \kappa^2 ds. \tag{29}$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε την (22) με κ^2 και την ολοκληρώνουμε

$$\int_0^{2\pi} z'\kappa^2 ds + \int_0^{2\pi} z^2\kappa^2 ds - g\int_0^{2\pi} \kappa^4 ds + \lambda \int_0^{2\pi} \kappa^2 ds = 0,$$

την παραπάνω σχέση την πολλαπλασιάζουμαι με g

$$g\int_0^{2\pi} z'\kappa^2 ds + g\int_0^{2\pi} z^2\kappa^2 ds - g^2\int_0^{2\pi} \kappa^4 ds + g\lambda \int_0^{2\pi} \kappa^2 ds = 0$$

και με βάση την (29) γράφεται ως

$$\int_0^{2\pi} (z')^2 ds + g\int_0^{2\pi} z^2\kappa^2 ds = g^2\int_0^{2\pi} \kappa^4 ds - g\lambda \int_0^{2\pi} \kappa^2 ds. \tag{30}$$

Το αριστερό μέρος της παραπάνω ισότητας είναι ο αριθμητής του πηλίκου Rayleigh του τελεστή $H(\gamma, g)$, όπως δίνεται από την (17). Το z όμως είναι ορθογώνιο ως προς το u, άρα το z δεν είναι πολλαπλάσιο του u, συνεπώς το πηλίκο Rayleigh που αντιστοιχεί στο z είναι γνήσια μεγαλύτερο απο το πηλίκο Rayleigh του u. Αυτό ισχύει γιατί το infimum του Rayleigh είναι η μικρότερη κύρια ιδιοτιμή.

$$\int_0^{2\pi} (z')^2 ds + g\int_0^{2\pi} \kappa^2 z^2 ds = (\lambda + \rho)\int_0^{2\pi} z^2 ds. \tag{31}$$

Από (30) και (31) ολοκληρώνεται η απόδειξη της ισότητας (27). Στή συνέχεια θα αποδείξουμε την ανισότητα του ρ . Πολλαπλασιάζουμε την (22) με z^2 και την ολοκληρώνουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} z' z^2 ds + \int_0^{2\pi} z^4 ds - g\int_0^{2\pi} \kappa^2 z^2 ds + \lambda\int_0^{2\pi} z^2 ds \\ &= \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} z^4 ds - g\int_0^{2\pi} \kappa^2 z^2 ds + \lambda\int_0^{2\pi} z^2 ds. \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος λόγω της περιοδικότητας είναι μηδέν

$$\int_0^{2\pi} z^4 ds + \lambda\int_0^{2\pi} z^2 ds = g\int_0^{2\pi} \kappa^2 z^2 ds. \tag{32}$$

Από την (32) και την (31) παίρνουμε

$$\int_0^{2\pi} (z')^2 ds + \int_0^{2\pi} z^4 ds + \lambda \int_0^{2\pi} z^2 ds = \lambda \int_0^{2\pi} z^2 ds + \rho \int_0^{2\pi} z^2 ds$$

επομένως

$$\int_0^{2\pi} (z')^2 ds + \int_0^{2\pi} z^4 ds = \rho \int_0^{2\pi} z^2 ds. \tag{33}$$

Η (23) ικανοποιεί τις συνθήκες της ανισότητας Wirtinger, δηλαδή να είναι 2π-περιοδική και $\int_0^{2\pi} z ds = 0$. Συνεπώς η ανισότητα Wirtinger γράφεται

$$\int_0^{2\pi} z^2 ds \le \int_0^{2\pi} (z')^2 ds. \tag{34}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $z(s) = \alpha \sin(s) + \beta \cos(s)$ όπου α, β σταθερές. Με χρήση της ανισότητας Cauchy Schwartz έχουμε ότι

$$\int_0^{2\pi} z^2 ds \le \sqrt{2\pi} \sqrt{\int_0^{2\pi} z^4 ds}$$

από όπου παίρνουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} z^2 ds \right)^2 \le \int_0^{2\pi} z^4 ds. \tag{35}$$

Η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν το ένα όρισμα είναι πολλαπλάσιο του άλλου. Με χρήση των ανισότητων (34) και (35) η (33) γράφεται ως

$$\int_0^{2\pi} z^2 ds + \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} z^2 ds \right)^2 \le \rho \int_0^{2\pi} z^2 ds,$$

την λύνουμε ως προς ρ και παίρνουμε την (28). Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη πρέπει να πάρουμε τις ισότητες από τις ανισότητες στην (34) και στην (35). Η ισότητα στην (34) ισχύει όταν $z(s) = \alpha \sin(s) + \beta \cos(s)$ και στην (35) ισχύει όταν το ένα όρισμα είναι πολλαπλάσιο του άλλου. Η μόνη περίπτωση που ισχύουν και οι δύο ταυτόχρονα είναι όταν $z = 0$, που αυτο ειναι ισοδύναμο με $u =$ σταθερά ή ισοδύναμο με $\kappa =$ σταθερά .

■

Στη συνέχεια θέτουμε

$$\beta := \rho - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^2 ds \tag{36}$$

όπου παρατηρούμε από την ανισότητα (28) και απο την (36) ότι

$$\beta \geq 1. \tag{37}$$

Η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν ισχύει στην (28) η ισότητα, δηλαδή όταν $\kappa(s) =$ σταθ.

Λήμμα 3.7 *Ισχύει η παρακάτω ισότητα*

$$\lambda = \frac{g}{2\pi}\int_0^{2\pi} \kappa^2 ds - \frac{g^2}{\beta}V(\kappa^2). \tag{38}$$

Απόδειξη: Συνδυάζοντας την (27) με την (26)

$$\begin{aligned} g^2\int_0^{2\pi}\kappa^4 ds - &\left(\frac{g}{2\pi}\int_0^{2\pi}\kappa^2 ds - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z^2 ds\right) g\int_0^{2\pi}\kappa^2 ds \\ &- \left(\frac{g}{2\pi}\int_0^{2\pi}\kappa^2 ds - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z^2 ds + \rho\right)\int_0^{2\pi} z^2 ds \\ &= 0, \end{aligned}$$

κάνοντας την επιμεριστική και μια αφαίρεση παίρνουμε

$$g^2\int_0^{2\pi}\kappa^4 ds - \frac{g^2}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\kappa^2 ds\right)^2 = \left(\rho - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z^2 ds\right)\int_0^{2\pi} z^2 ds. \tag{39}$$

Με βάση τον ορισμό του β η (39) γράφεται

$$g^2\int_0^{2\pi}\kappa^4 ds - \frac{g^2}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\kappa^2 ds\right)^2 = \beta\int_0^{2\pi} z^2 ds \tag{40}$$

και από την (26)

$$g^2\int_0^{2\pi}\kappa^4 ds - \frac{g^2}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\kappa^2 ds\right)^2 = \beta\left(-2\pi\lambda + g\int_0^{2\pi}\kappa^2\right). \tag{41}$$

Λύνουμε την (41) ως προς λ και με βάση τον ορισμό 3.4 παίρνουμε την (38). ■

Συνεπώς, η (38) με χρήση της (37) γίνεται

$$\lambda(\gamma, g) \geq \frac{g}{2\pi}\int_0^{2\pi}\kappa^2 ds - g^2 V(\kappa^2)$$

και για $K(\gamma, g) = g^2 V(\kappa^2)$ μας δίνει το κάτω φράγμα της (15) για $r = 1$.
Στη συνέχεια θα βρούμε το κάτω φράγμα της (15) για την περίπτωση που το $r = 1/2$.

Λήμμα 3.8 *Ισχύει η παρακάτω ανισότητα*

$$\beta \geq \sqrt{g^2 V(\kappa^2)}. \tag{42}$$

Απόδειξη: Η (40) με βάση τον ορισμό 3.4 γράφεται

$$g^2 V(\kappa^2) = \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^2 ds, \tag{43}$$

με χρήση της (36) και λύνοντας ως προς ρ έχουμε

$$\rho = \beta + \frac{g^2}{\beta} V(\kappa^2). \tag{44}$$

Επίσης, η (43) και πάλι με την χρήση της (36) γράφεται

$$g^2 V(\kappa^2) = \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^2 ds = \left(\rho - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^2 ds\right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^2 ds \tag{45}$$

ή

$$g^2 V(\kappa^2) = \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^2 ds = \beta(\rho - \beta). \tag{46}$$

Θέτουμε $t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^2 ds$ ή $t = \beta$, με αποτέλεσμα η (45) ή (46) να γραφτούν ως

$$t^2 - \rho t + g^2 V(\kappa^2) = 0.$$

Το β και $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^2 ds$ είναι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης. Όταν η καμπύλη είναι κύκλος το $V(\kappa)^2 \to 0$ με αποτέλεσμα το $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^2 ds$ να είναι μηδέν από την (43) και $\beta = \rho$ από την (44) άρα οι μόνες αποδεκτές λύσεις μας είναι

$$\beta = \frac{\rho}{2} + \sqrt{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 - g^2 V(\kappa^2)}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^2 ds = \frac{\rho}{2} - \sqrt{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 - g^2 V(\kappa^2)}.$$

Η διακρίνουσα είναι θετική, επομένως

$$\frac{\rho}{2} \geq \sqrt{g^2 V(\kappa^2)}$$

και το

$$\beta \geq \frac{\rho}{2}$$

επομένως, αποδεικνύεται η (42).

■

Συνεπώς η (38) με βάση την (42) γράφεται

$$\lambda(\gamma, g) \geq \frac{g}{2\pi}\int_0^{2\pi} \kappa^2 ds - \sqrt{g^2 V(\kappa^2)}$$

και για $K(\gamma, g) = \sqrt{g^2 V(\kappa^2)}$ μας δίνει το κάτω φράγμα της (15) για $r = 1/2$. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη πρέπει να απόδειξουμε πότε στην (15) ισχύει η ισότητα. Η ισότητα στην (15) ισχύει, αν και μόνο αν ισχύει στην (21) η ισότητα, δηλαδή όταν $\kappa(s) = \sigma\tau\alpha\vartheta$. Με αυτό έχουμε τελειώσει την απόδειξη του θεωρήματος 3.1.

Πόρισμα 3.9 *Έστω $g \neq 0$. Αν λ_0 είναι η κύρια ιδιοτιμή του (14), όπου κ η καμπυλότητα μιας κλειστής C^2 καμπύλης γ στον $\mathbb{R}^3$ με μήκος 2π, τότε*

$$\frac{g}{2\pi}\int_0^{2\pi} \kappa^2 ds - 1 < \lambda_0(\gamma, g) \leq \frac{g}{2\pi}\int_0^{2\pi} \kappa^2 ds,$$

Σχόλιο: *Το πόρισμα έχει ενδιαφέρον για την περίπτωση όπου το $K(\gamma, g)$ είναι γνήσια μεγαλύτερο του ένος, αλλιώς το θεώρημα(3.1) δίνει καλύτερα αποτελέσματα.*

Απόδειξη: Άπο το γεγονός οτι το $\beta \geq 1$ έχουμε

$$\frac{\rho}{2} + \sqrt{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 - g^2 V(\kappa^2)} \geq 1.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο την παραπάνω σχέση παίρνουμε

$$g^2 V(\kappa^2) \leq -1 + \rho.$$

Με χρήση της (44) η παραπάνω σχέση γράφεται

$$g^2 V(\kappa^2) \leq -1 + \beta + \frac{g^2}{\beta} V(\kappa^2)$$

και με απλές πράξεις παίρνουμε

$$g^2 V(\kappa^2)(\beta - 1) \leq \beta(\beta - 1).$$

Απορρίπτουμε την περίπτωση του κύκλου γιατί τότε το $\beta = 1$ και δεν μπορούμε να διαιρέσουμε, επομένως

$$\beta > g^2 V(\kappa^2). \tag{47}$$

Η (38) με χρήση της (47) γράφεται

$$\lambda(\gamma, g) > \frac{g}{2\pi}\int_0^{2\pi}\kappa^2 ds - 1$$

$\blacksquare$

Αναφορές

[1] Faber, Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt,*Sitzungsber. der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayer. Akad. der Wiss. zu München*(1923) 169–172.

[2] E. Krahn, Über Minimaleigenschaften der Kugel in drei und mehr Dimensionen, *Acta Comm. Univ. Tartu* (Dorpat) A9(1926)1–44

[3] H.F. Weinberger, An isoperimetric inequality for the n–dimensional free membrane problem,*J. Rat. Mech. Anal.* 5(1956)633–636.

[4] Ilka Agricola and Thomas Friedrich, *Global Analysis Differential Forms in Analysis, Geometry and Physics*, American Mathematical Society Providence, Rhode Island

[5] R.D. Benguria, M. Loss, Connection between the Lieb–Thirring conjecture for Schrödinger operators and an isoperi-metric problem for ovals on the plane, in: Partial Differential Equations and Inverse Problems, in: Contemp. Math., vol.362, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp.53–61.

[6] H. Linde, A lower bound for the ground state energy of a Schrödinger operator on a loop, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006) 3629–3635

[7] P. Duclos, P. Exner, Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions, Rev. Math. Phys. 7 (1995) 73–102.

[8] P. Exner, E.M. Harrell, M. Loss, Optimal eigenvalues for some Laplacians and Schrödinger operators depending on curvature, in: Mathematical Results in Quantum Mechanics, Prague, 1998, in: Oper. Theory Adv. Appl., vol.108, Birkhäuser, Basel, 1999, pp.47–58.

[9] Vangelis Stefanopoulos *An isoperimetric type inequality for the principal eigenvalue of Schrödingeroperators depending on the curvature of a loop* Department of Mathematics, University of the Aegean, GR832 00 Karlovassi, Samos, Greece Received28 January 2015; revised12 May 2015 Available online 9 September 2015

[10] Lieb, E.H., Thirring, W.: Bounds for the kinetic energy of fermions which proves the stability of matter. Phys. Rev. Lett. 35, 687–689 (1975) (Errata: PRL 35, 1116 (1975))