ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ακριβείς Λύσεις Εξισώσεων Einstein Με Τέλειο Ρευστό

Σπαθής Ευάγγελος

Προπτυχιακός Φοιτητής

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Παπακώστας Ταξιάρχης

Ηράκλειο 2019

Ευχαριστίες

Πριν την παρουσίαση αυτής της Διπλωματικής Εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέπων καθηγητή μου κ. Παπακώστα Ταξιάρχη που μου έδωσε την ευκαιρία και με ενέπνευσε για το θέμα της εργασίας αυτής. Επίσης θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για τη συμπαράσταση, την αμέριστη βοήθεια που μου παρείχε, καθώς και για την άψογη συνεργασία που είχαμε.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου Φανή και Ηλία, καθώς και τον αδερφό μου Ιωάννη για τη συνεχή στήριξή τους καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου και για όλα όσα μου παρείχαν!

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους αξιότιμους συναδέλφους Βασιλείου Βαρβάρα και Παρλάνη Αντρέα οι οποίοι ήταν εκεί όποτε τους χρειάστηκα για να μου προσφέρουν την οποιαδήποτε βοήθεια.

Περίληψη

Η εργασία αυτή πραγματεύεται τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας καθώς και τις αντίστοιχες εξισώσεις πεδίου του Einstein.

Στο πρώτο κεφάλαιο κάνουμε μια εισαγωγή στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας και παράλληλα μια σύντομη μετάβαση προς το πλαίσιο της Γενικής Θεωρίας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο πραγματοποιούμε την απαιτούμενη μαθηματική παρένθεση - εισαγωγή και κάνουμε ορισμένους χρήσιμους για τα επόμενα κεφάλαια υπολογισμούς. Στο τέλος του κεφαλαίου αυτού διατυπώνουμε τις πεδιακές εξισώσεις Einstein.

Στο τρίτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με την επίλυση των εξισώσεων Einstein για την περίπτωση του κενού στο εξωτερικό μιας σφαιρικής συμμετρίας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο πραγματοποιούμε την ακριβή επίλυση των εξισώσεων Einstein για το τέλειο ρευστό στο εσωτερικό και παράλληλα συνδέουμε τις δύο λύσεις.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

1.1 Σύντομη περιγραφή

Έχει περάσει κάτι περισσότερο από ένας αιώνας από τότε που για πρώτη φορά ο Albert Einstein διατύπωσε την Ειδική (1905) και Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (Γ.Θ.Σ.) (1915). Η θεωρία αυτή άλλαξε ριζικά τη μέχρι τότε θεώρηση των πραγμάτων, ακόμη και για το ίδιο το Σύμπαν. Σήμερα μέσω της θεωρίας της Σχετικότητας είμαστε σε θέση να ερμηνεύσουμε μια σειρά σημαντικών φαινομένων, όπως οι μελανές οπές, το τελικό πεπρωμένο των άστρων, ακόμα και τη Μεγάλη Έκρηξη που αποτέλεσε εφαλτήριο για την εξέλιξη του Σύμπαντος στη μορφή που είναι σήμερα. Η θεωρία της Σχετικότητας δε σχετίζεται μονάχα με κοσμολογικά φαινόμενα, αλλά έχει δράση και στη καθημερινότητά μας, με χαρακτηριστικό παράδειγμα το γεγονός ότι διέπει τη λειτουργία του Παγκόσμιου Συστήματος Προσδιορισμού (G.P.S.) που χρησιμοποιείται καθημερινά από εκατομμύρια ανθρώπους ανά τον κόσμο!

Στο επίκεντρο της θεωρίας αυτής βρίσκεται η βαρύτητα, μία εκ των τεσσάρων θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων. Μέχρι και πριν τη διατύπωση της σχετικότητας από τον Einstein, όλοι θεωρούσαν τη βαρύτητα απλά ως ακόμα μία δύναμη που δρα σε σταθερό χωροχρονικό υπόβαθρο. Σε αντίθεση, η σχετικότητα αντιμετωπίζει τη βαρύτητα ουσιαστικά ως μία παραμόρφωση του χωροχρόνου - όπου χωροχρόνο θα ονομάζουμε μια τετραδιάστατη ενοποίηση του χώρου και του χρόνου - .

Παρά τις θεμελιώδεις διαφορές μεταξύ Νευτώνειας και σχετικιστικής μηχανικής, η πρώτη χρησιμοποιείται και σήμερα - και μάλιστα με μεγάλη επιτυχία - σε φαινόμενα που επιτυγχάνονται ταχύτητες πολύ μικρότερες της ταχύτητας του φωτός. Με άλλα λόγια, για μικρές ταχύτητες η Νευτώνεια μηχανική αποτελεί μία αρκετά καλή προσέγγιση. Όταν όμως οι ταχύτητες πλησιάζουν αρκετά στην ταχύτητα του φωτός, είτε όταν έχουμε να κάνουμε με σωμάτια με μηδενική μάζα, τότε γίνεται φανερή η αδυναμία της Νευτώνειας μηχανικής.

Για να γίνει αντιληπτή αυτή η αδυναμία και η ανάγκη για τη δημιουργία μιας καθολικής θεωρίας, αξίζει να αναφέρουμε το ακόλουθο απλό παράδειγμα. Σύμφωνα με τη μηχανική του Νεύτωνα η ενέργεια ελεύθερου σώματος με μάζα m και ταχύτητα u δίνεται από τη σχέση

$$E=\frac{1}{2}mu^2 \tag{1.1}$$

Όπως ξέρουμε το φως αποτελείται από " σωμάτια " μηδενικής μάζας , τα φωτόνια.

Το γεγονός ότι τα φωτόνια έχουν ενέργεια προκύπτει πολύ εύκολα απ' την εμπειρική παρατήρηση ότι όταν το φως προσπίπτει πάνω στο δέρμα μας ζεσταίνει. 'Ομως σύμφωνα με τη σχέση (1.1) τα φωτόνια οφείλουν να έχουν μηδενική ενέργεια λόγω της μηδενικής τους μάζας. Επομένως γίνεται γρήγορα αντιληπτό ότι η Νευτώνεια μηχανική δεν μπορεί να αποτελεί θεμελιώδη θεωρία. Στο παρόν κεφάλαιο θα αναπτύξουμε τις σχέσεις και τα αποτελέσματα που προκύπτουν μέσω της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας και θα δούμε την ανάγκη για την ύπαρξη της Γ.Θ.Σ. σε μη αδρανειακά πλαίσια (βαρυτικά πεδία).

1.2 Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας

Η επιτυχής τροποποίηση των εξισώσεων της Νευτώνειας μηχανικής από τον Einstein το 1905 ονομάστηκε Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας. Συγκεκριμένα η θεωρία αυτή ονομάστηκε Ειδική Σχετικότητα για να δείξει ότι ασχολείται με συστήματα αναφοράς που κινούνται το ένα ως προς το άλλο (Σχετικότητα), αλλά δε θα πρέπει να κινούνται κυκλικά ή με επιταχυνόμενη κίνηση (Ειδική θεωρία και όχι Γενική).

1.2.1 Αδρανειακά συστήματα αναφοράς και αξιώματα της Ειδικής Σχετικότητας

Ως αδρανειακά συστήματα αναφοράς, ή ισοδύναμα ως αδρανειακούς παρατηρητές, ορίζουμε εκείνους ως προς τους οποίους ένα ελεύθερο σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα. Το κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς δηλαδή διέπεται από τους ίδιους νόμους και ένας παρατηρητής σε αυτό μπορεί να θεωρεί το σύστημα που βρίσκεται ως ακίνητο.

Όλο το οικοδόμημα της σχετικιστικής μηχανικής στηρίζεται πάνω στα δύο αξιώματα της Ειδικής Σχετικότητας :
Πρώτο αξίωμα: " *Οι νόμοι της φύσης είναι ίδιοι για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς* ".
Δεύτερο αξίωμα: " *Η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς "*.
Σύμφωνα με το πρώτο αξίωμα θα πρέπει οι βασικοί νόμοι της φυσικής, όπως ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, να έχουν την ίδια μαθηματική μορφή για όλα τα συστήματα αναφοράς - παρατηρητών που κινούνται με σταθερή μεταξύ τους ταχύτητα. Το δεύτερο αξίωμα συνεπάγεται ότι οποιοσδήποτε παρατηρητής μετρήσει την ταχύτητα του φωτός στο κενό θα βρει την ίδια τιμή $c \approx 2{,}99792458 \cdot 10^8$ m/s. Με άλλα λόγια, η ταχύτητα του φωτός στο κενό δεν εξαρτάται ούτε από την κίνηση της

πηγής που το εκπέμπει, αλλά ούτε από την κίνηση του παρατηρητή που το μετράει.

1.2.2 Αρχή της Σχετικότητας και συνέπειες των αξιωμάτων

Όλη η Νευτώνεια μηχανική συμπεριλαμβανομένου του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα είναι συνεπής με την Αρχή της Σχετικότητας, σύμφωνα με την οποία " *πανομοιότυπα πειράματα που διεξάγονται σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς παράγουν πανομοιότυπα αποτελέσματα* ". Η πρόταση αυτή φανερώνει ότι δεν υπάρχει κάποιο πείραμα που να μπορεί να διεξαχθεί μέσα στο εργαστήριο και να μπορεί να καθορίσει σε ποιο από τα ενδεχομένως άπειρα πιθανά αδρανειακά συστήματα αντιστοιχεί το τελευταίο. Δηλαδή δεν υπάρχει η έννοια της απόλυτης μετατόπισης, περιστροφής ή ταχύτητας. Αυτή η αρχή της σχετικότητας διαδραμάτισε σημαντικό ρόλο για την ανακάλυψη της Ειδικής Σχετικότητας από τον Einstein.

Μία πρώτη συνέπεια του πεπερασμένου της ταχύτητας του φωτός είναι η σχετικότητα της ταυτοχρονικότητας, σύμφωνα με την οποία δύο γεγονότα που φαίνεται να συμβαίνουν ταυτόχρονα για έναν παρατηρητή Α, δεν θα συμβαίνουν ταυτόχρονα για ένα παρατηρητή Β εάν ο Β κινείται σε σχέση με τον Α. Αυτό θα συνέβαινε μόνο στην περίπτωση που το φως είχε άπειρη ταχύτητα και όχι πεπερασμένη όπως τελικά έχει.

Ήδη αναφέραμε πως δεν υπάρχει η έννοια της απόλυτης ταχύτητας, μετατόπισης κ.τ.λ. Ως συνέπεια αυτού, επίσης δεν υπάρχει η έννοια ενός " Παγκόσμιου Χρόνου ", με την έννοια ότι ο χρόνος - και άρα και η ένδειξη των ρολογιών - των παρατηρητών δεν μπορεί να είναι κοινός για παρατηρητές που βρίσκονται σε κίνηση μεταξύ τους. Με ένα απλό παράδειγμα και χρήση απλή γεωμετρίας μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι η σχέση που συνδέει τους χρόνους δύο παρατηρητών που βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους ειναι

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{1.2}$$

όπου t: το χρονικό διάστημα στο ρολόι σε ηρεμία σχετικά με τον παρατηρητή
t': το χρονικό διάστημα στο ρολόι σε κίνηση σχετικά με τον παρατηρητή
u: η ταχύτητα της σχετικής κίνησης

Από τη σχέση (1.2) φανερώνεται πως ο χρόνος t' μπορεί να είναι κατά πολύ μεγαλύτερος από τον χρόνο t εάν η ταχύτητα u πλησιάσει αρκετά κοντά στην ταχύτητα του φωτός (διαστολή του χρόνου).

Μία άλλη συνέπεια, όπως ήδη αναφέραμε, είναι το γεγονός ότι δεν υπάρχει απόλυτη μετατόπιση. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι όχι μόνο οι χρονικές, αλλά και οι χωρικές αποστάσεις στη κατεύθυνση της κίνησης εξαρτώνται από τον παρατηρητή που τις μετράει. Έστω λοιπόν ότι έχουμε δύο παρατηρητές που βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους με ταχύτητα u . Με χρήση της γνωστής σχέσης $L=u\Delta t$ και της σχέσης (1.2) προκύπτει ο τύπος συστολής του μήκους, σύμφωνα με τον οποίο το μήκος ενός αντικειμένου είναι πάντοτε μικρότερο από το ιδιομήκος όταν μετριέται σε σύστημα αναφοράς στο οποίο το αντικείμενο κινείται.Ο τύπος είναι

$$L'=L\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \qquad (1.3)$$

(Ως ιδιομήκος ορίζεται το μήκος αντικειμένου που μετριέται στο σύστημα αναφοράς στο οποίο το αντικείμενο ηρεμεί).
Τέλος, πρέπει να αναφερθεί ότι οι εγκάρσιες αποστάσεις δεν αλλάζουν. Δηλαδή τα μήκη που είναι κάθετα στη σχετική κίνηση των παρατηρητών θα παραμένουν ίδια ως προς αυτούς.

1.2.3 Χωροχρόνος και μετασχηματισμοί Lorentz

Ήδη έχουμε ορίσει ως χωροχρόνο την τετραδιάστατη ενοποίηση του χρόνου και του χώρου. Υπάρχει μία ποσότητα, η οποία συνδυάζει τα παραπάνω, διατηρεί τη μορφή της και παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς σε οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Αυτή η ποσότητα ονομάζεται στοιχείο μήκους επίπεδου χωροχρόνου (ή στοιχείο μήκους του χωροχρόνου Minkowski) και δίνεται από τη σχέση

$$ds^2=c^2\,dt^2-dx^2-dy^2-dz^2 \qquad (1.4)$$

Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τα αξιώματα της σχετικότητας και να συνδέσουμε τις διαφορές των χωροχρονικών συνταταγμένων οποιουδήποτε ζεύγους γεγονότων μεταξύ αδρανειακών συστημάτων αναφοράς πρέπει να αντικαταστήσουμε τους κλασικούς μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου με τους μετασχηματισμούς Lorentz. Οι μετασχηματισμοί αυτοί προκύπτουν βάσει της απαίτησης η σχέση (1.4) να διατηρεί τη μορφή της σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Έτσι, για δύο αδρανειακούς παρατηρητές που βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους κατά τον άξονα x με ταχύτητα u , θα έχουμε

$$t'=\gamma\left(t-\frac{u\,x}{c^2}\right) \qquad (1.5)$$

$$x'=\gamma(x-u\,t) \tag{1.6}$$

$$y'=y \tag{1.7}$$

$$z'=z \tag{1.8}$$

όπου ο παράγοντας γ είναι

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

και προφανώς ο αντίστροφος μετασχηματισμός επιτυγχάνεται απλά θέτοντας όπου u το $-u$. Όταν βέβαια το πηλίκο $\frac{u}{c}$ είναι πολύ μικρότερο της μονάδας, τότε απλά επιστρέφουμε στον απλό μετασχηματισμό του Γαλιλαίου για ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Οι μετασχηματισμοί Lorentz επιφέρουν και έναν αντίστοιχο μετασχηματισμό στις συντεταγμένες της ταχύτητας (u_χ, u_y, u_z) που θα μετρά ένας παρατηρητής σε ένα αδρανειακό σύστημα S σε σχέση με ένα άλλο που βρίσκεται σε σχετική κίνηση ως προς αυτόν σε ένα αδρανειακό σύστημα S'. Με χρήση των σχέσεων $u=\frac{\Delta x}{\Delta t}$, (1.5) και (1.6) παίρνουμε τους μετασχηματισμούς της ταχύτητας για κίνηση κατά τον άξονα x

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-\frac{vu_x}{c^2}} \tag{1.9}$$

για S→S'

$$u'_y=\frac{1}{\gamma}\frac{u_y}{1-\frac{vu_x}{c^2}} \tag{1.10}$$

$$u'_z=\frac{1}{\gamma}\frac{u_z}{1-\frac{vu_x}{c^2}} \tag{1.11}$$

όπου v : η ταχύτητα του παρατηρητή σε κινούμενο σύστημα αναφοράς S'. Για την μετάβαση S'→S αρκεί να κάνουμε την αντικατάσταση $v \leftrightarrow v'$ και να εναλλάξουμε τους ρόλους των u_χ και u'_χ. Επομένως βλέπουμε ότι η τετράδα (cΔt, Δx, Δy, Δz) υφίστανται μετασχηματισμό κατά Lorentz.

1.2.4 Μηχανική στην Ειδική Σχετικότητα

Σε συνέχεια της λογικής της προηγούμενης ενότητας, ισχύει επίσης ότι η μάζα ενός σώματος που κινείται με ταχύτητα u σε σχέση με έναν παρατηρητή θα είναι διαφορετική από τη μάζα ηρεμίας του m_0. Μάλιστα ισχύει ότι θα είναι μεγαλύτερη από τη μάζα ηρεμίας κατά τον παράγοντα

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Έτσι η σχετικιστική μάζα δίνεται από τη σχέση

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{1.12}$$

Επομένως βάσει όλων των παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ένα διαστημόπλοιο που ταξιδεύει στο διάστημα σε σχέση με ένα δίδυμο αεροσκάφος προσγειωμένο, θα έχει μικρότερο μήκος κατά τη διεύθυνση της κίνησής του (συστολή μήκους), ο πιλότος του σε σχέση με του ακίνητου θα γερνάει με πιο αργό ρυθμό, το ρολόι του επίσης θα δείχνει την ώρα να περνά πιο αργά (διαστολή χρόνου) και η μάζα του θα είναι κατά έναν παράγοντα μεγαλύτερη (σχετικιστική μάζα). Όπως φαίνεται από τη σχέση (1.12) όταν η ταχύτητα u πλησιάζει αρκετά κοντά στην τιμή c, η μάζα τείνει να απειριστεί! Άρα κανένα σώμα μάζας m δεν μπορεί πρακτικά να ταξιδέψει τόσο γρήγορα όσο το φως.

Ήδη από την εισαγωγική ενότητα βάσει ενός απλού συλλογισμού έγινε αντιληπτό ότι η κλασική σχέση (1.1) για την (κινητική) ενέργεια ελεύθερου σώματος δεν είναι η σωστή. Αντίστοιχα το ίδιο ισχύει και για την ορμή. Δηλαδή η κλασική σχέση $p=mu$ αποτελεί μια προσεγγιστική σχέση για μικρές ταχύτητες. Όλα τα μεγέθη και οι ποσότητες που έχουμε δει έως τώρα - και που εντέλει είναι διαφορετικά από αυτά που δίνει η Νευτώνεια μηχανική - έχουν με κάποιο τρόπο εξάρτηση από τον παράγοντα γ. Αποτελούν δηλαδή συνάρτηση του λόγου της ταχύτητας του σώματος προς την ταχύτητα του φωτός. Το ίδιο συμβαίνει και με την ορμή (σχετικιστική) που δίνεται από τον κλασικό τύπο (1.13) πολλαπλασιασμένο με τον παράγοντα γ. Είναι λοιπόν

$$p=\frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{1.13}$$

Αντίστοιχα και η σχέση (1.13) ανάγεται στη κλασική σχέση για την ορμή στο όριο των χαμηλών ταχυτήτων ($\frac{u}{c} \rightarrow 0$).

Ας δούμε τώρα ποιες σχέσεις περιγράφουν σωστά την ενέργεια και την κινητική ενέργεια για όλο το φάσμα των ταχυτήτων.
Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$F = m\,a$$

$$F = m\frac{du}{dt} \tag{1.14}$$

Επίσης, από τη κλασική μηχανική ξέρουμε ότι

$$K = \int_0^s F\,ds \tag{1.15}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1.12), (1.14) και (1.15) παίρνουμε για τη κινητική ενέργεια σώματος μάζας m που κινείται με ταχύτητα u τη σχέση

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - mc^2 \tag{1.16}$$

Επίσης, η ενέργεια σώματος μάζας m που κινείται με ταχύτητα u είναι

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = K + mc^2 \tag{1.17}$$

Κοιτάζοντας τις σχέσεις (1.16) και (1.17) προκύπτει ένα σημαντικό αποτέλεσμα. Ένα σώμα που ακινητεί θα έχει ενέργεια, διάφορη του μηδενός, την ενέργεια ηρεμίας. Η ενέργεια αυτή θα δίνεται από τη σχέση

$$E_0 = mc^2 \tag{1.18}$$

Η σχέση αυτή ουσιαστικά εκφράζει την ισοδυναμία μάζας - ενέργειας. Αυτό πρακτικά μας δίνει τη δυνατότητα να πούμε ότι η ενέργεια μπορεί να μετατρέπεται σε μάζα και το αντίστροφο. Με άλλα λόγια η μάζα μπορεί να " δημιουργείται " ή να " καταστρέφεται ", με την απαίτηση ένα ισοδύναμο ποσό ενέργειας να εξαφανίζεται ή να παρουσιάζεται ταυτόχρονα.

Ακόμη, συνδυάζοντας τις σχέσεις (1.17) και (1.13) παίρνουμε μια σχέση που συνδέει ταυτόχρονα ενέργεια, ορμή και μάζα

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 \tag{1.19}$$

Με τη σχέση αυτή δίνεται η απάντηση στο αρχικό ερώτημα αυτού του κεφαλαίου, πως δηλαδή μπορεί ένα σώμα μηδενικής μάζας (π.χ. φωτόνιο) να κατέχει ενέργεια. Βλέπουμε ότι για m=0 η σχέση (1.19) δίνει

$$E = |p| c \tag{1.20}$$

Επομένως σωμάτια με μηδενική μάζα θα κινούνται με ταχύτητα ίση με τη ταχύτητα του φωτός $u=c$.

Όπως μετασχηματίζεται κατά Lorentz η τετράδα (cΔt, Δx, Δy, Δz), αντίστοιχα μετασχηματίζεται και η τετράδα (E/c, p_x , p_y , p_z). Συνδυάζοντας τις ήδη γνωστές σχετικιστικές σχέσεις για την κίνηση με ταχύτητα v κατά τον άξονα x, παίρνουμε για την ενέργεια και την ορμή τους εξής μετασχηματισμούς

$$E' = \gamma \left(E - v\, p_x \right) \tag{1.21}$$

$$p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{v E}{c^2} \right) \tag{1.22}$$

$$p'_y = p_y \tag{1.23}$$

$$p'_z = p_z \tag{1.24}$$

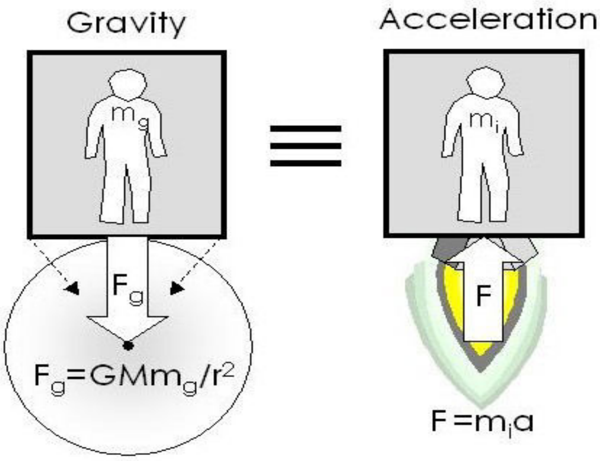
1.3 Βαρυτικά πεδία

Τα βαρυτικά πεδία έχουν ως βασική ιδιότητα ότι όλα τα σώματα που βρίσκονται μέσα σε αυτά κινούνται κατά τον ίδιο τρόπο, αναξαρτήτως μάζας, εφόσον οι αρχικές συνθήκες είναι οι ίδιες. Ως χαρακτηριστικό παράδειγμα που σχετίζεται άμεσα με την καθημερινότητά μας μπορούμε να αναφέρουμε το βαρυτικό πεδίο στη Γη, στο οποίο όλα τα σώματα ανεξαρτήτως μάζας αποκτούν μια κοινή επιτάχυνση g.

1.3.1 Η Αρχή της Ισοδυναμίας

Αυτή η ιδιότητα των βαρυτικών πεδίων μας δίνει τη δυνατότητα για τη δημιουργία μιας αναλογίας μεταξύ της κίνησης ενός σώματος σε ένα βαρυτικό πεδίο και της κίνησης σώματος που δεν υπόκειται σε εξωτερικό πεδίο, αλλά μελετάται από τη σκοπιά ενός μη αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Έτσι έχουμε τη περίφημη αρχή της ισοδυναμίας, σύμφωνα με την οποία " *σε κανένα πείραμα δεν είναι εφικτός ο διαχωρισμός μεταξύ ενός βαρυτικού πεδίου και μιας ομαλής επιτάχυνσης* ". Πρόκειται λοιπόν για δύο πλήρως ισοδύναμες περιπτώσεις!

Η Αρχή της Ισοδυναμίας έχει πλήρη ισχύ σε ομογενή βαρυτικά πεδία. Σε μη ομογενή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ισχύει μόνο τοπικά, δηλαδή για μικρές περιοχές και αντίστοιχα μικρά χρονικά διατήματα, ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε, έστω και προσεγγιστικά, ότι το πεδίο είναι ομογενές.



Σχήμα 1.1: Αρχή της Ισοδυναμίας

(Πηγή σχήματος:http://www.mysearch.org.uk/website1/html/259.Equivalence.html)

1.3.2 Βαρυτικά πεδία σε μη σχετικιστική μηχανική

Βέβαια η παραπάνω αναλογία είναι κάπως εξιδανικευμένη. Στη πραγματικότητα τα πεδία στα οποία μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς είναι ισοδύναμα δεν είναι εντελώς ιδανικά με πραγματικά (ρεαλιστικά) βαρυτικά πεδία που λαμβάνουν χώρα σε αδρανειακά συστήματα. Η ουσιώδης διαφορά έχει να κάνει με τη συμπεριφορά των πεδίων αυτών στο άπειρο. Σε άπειρες αποστάσεις από τα σώματα, τα πραγματικά βαρυτικά πεδία τείνουν στο μηδέν. Σε αντίθεση με αυτό, πεδία που είναι σε μη αδρανειακά πλαίσια αυξάνουν χωρίς όριο στο άπειρο και εντέλει σε καμία περίπτωση δεν μηδενίζονται.

Στη μη σχετικιστική μηχανική η κίνηση ενός σώματος παρουσία βαρυτικού πεδίου προσδιορίζεται από μια Λανγκρατσιανή της μορφής

$$L=\frac{mu^2}{2}-m\Phi \qquad (1.25)$$

,όπου Φ : το βαρυτικό δυναμικό που χαρακτηρίζει το πεδίο.
Επίσης η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου είναι

$$\dot{v}=-\nabla\Phi \qquad (1.26)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η σχέση (1.26) δεν περιέχει τη μάζα ή κάποια άλλη σταθερά που να χαρακτηρίζει το εκάστοτε σώμα, δηλαδή δεν κάνει διάκριση ανάμεσα στα σώματα με βάση κάποιο χαρακτηριστικό τους. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με αυτό που αναφέραμε αρχικά ως βασική ιδιότητα των βαρυτικών πεδίων.

1.3.3 Βαρυτικά πεδία σε σχετικιστική μηχανική

Στην ενότητα 1.2.3 είδαμε ότι το στοιχείο μήκους $ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$ παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς μεταξύ οποιωνδήποτε αδρανειακών συστημάτων αναφοράς. Παρόλ' αυτά αν μετράμε σε ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς ισχύει ότι το ds^2 δεν διατηρεί εν γένει τη μορφή του. Αυτό μπορεί να φανεί όταν μετασχηματίσουμε σε ένα ομοιόμορφα περιστρεφόμενο σύστημα συνταταγμένων, όπου έχουμε

$$x=x'\cos(\Omega t)-y'\sin(\Omega t) \qquad (1.27)$$

$$y=x'\sin(\Omega t)+y'\cos(\Omega t) \qquad (1.28)$$

$$z=z' \qquad (1.29)$$

,όπου $\Omega\equiv\frac{d\varphi}{dt}$: η γωνιακή ταχύτητα κατά μήκος του άξονα z .
Οι σχέσεις (1.27) και (1.28) μπορούν να αναπαρασταθούν και υπό τη μορφή πινάκων ως εξής

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t)\\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \qquad (1.30)$$

Παραγωγίζοντας και υψώνοντας στο τετράγωνο τις σχέσεις (1.27), (1.28) και (1.29) ώστε να πάρουμε τα απαιτούμενα dx^2, dy^2, dz^2 και με τη βοήθεια της σχέσης (1.4), παίρνουμε ότι

$$ds^2=\left[c^2-\Omega^2\left(x'^2+y'^2\right)\right]dt^2-dx'^2-dy'^2-dz'^2+2\Omega\, y'\, dx'\, dt-2\Omega\, x'\, dy'\, dt \tag{1.31}$$

,όπου παρατηρούμε ότι πλέον το μήκος ds^2 δεν αποτελεί απλά ένα άθροισμα τετραγώνων των συντεταγμένων. Άρα εν γένει σε ένα μη αδρανειακό σύστημα το μήκος ds^2 θα είναι της μορφής

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{1.32}$$

όπου $g_{\mu\nu}$: ένας συμμετρικός και εξαρτημένος από την εκάστοτε θέση πίνακας που ουσιαστικά αναπαριστά αυτό που λέμε *χωροχρονική μετρική* *.

Οποιοδήποτε βαρυτικό πεδίο είναι ουσιαστικά μία αλλαγή στη χωροχρονική μετρική $g_{\mu\nu}$ που σημαίνει ότι οι ιδιότητες του χωροχρόνου κάθε φορά εξαρτώνται από ορισμένους παράγοντες (φυσικά φαινόμενα) και δεν αποτελούν σταθερές. Αυτό ουσιαστικά μας οδηγεί στη Γ.Θ.Σ. η οποία κατασκευάστηκε από τον Albert Einstein βάσει της θεωρίας της σχετικότητας για τα βαρυτικά πεδία.

Σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς οι ποσότητες $g_{\mu\nu}$ είναι : $g_{00}=1$ (για το χρόνο) και $g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1$ (για το χώρο) και $g_{\mu\nu}=0$ για $\mu \neq \nu$. Σε αντίθεση με αυτό, παρουσία βαρυτικού πεδίου (μη αδρανειακό πλαίσιο), ο χωροχρόνος είναι τέτοιος ώστε οι ποσότητες $g_{\mu\nu}$ που καθορίζονται από τη μετρική να μην μπορούν υπό κανένα μετασχηματισμό συντεταγμένων να πάρουν τις παραπάνω τιμές για όλο το χώρο. Τέτοιου είδους χωροχρόνους από εδώ και πέρα θα τους λέμε καμπυλωμένους.

Τέλος, μία ακόμα αλλαγή που παρατηρείται όταν πάμε σε μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς είναι ότι πλέον ο χώρος θα είναι μη Ευκλείδιος. Στη γενική περίπτωση ενός βαρυτικού πεδίου, η χωρική μετρική δεν είναι απλά μη Ευκλείδια, αλλά και μη σταθερή, δηλαδή ποικίλει με το χρόνο.

* *η χρήση και οι ιδιότητες των μετρικών καθώς και των τανυστών -ανταλλοίωτων και συναλλοίωτων- θα εξηγηθούν πιο αναλυτικά σε επόμενο κεφάλαιο σε κατάλληλη μαθηματική παρένθεση.*

Κεφάλαιο 2

2.1 Βασικές μαθηματικές έννοιες της Γ.Θ.Σ.

Στην ενότητα αυτή θα γίνει μια συνοπτική παρουσίαση των βασικών μαθηματικών εργαλείων και εννοιών που απαιτούνται για την κατανόηση και ερμηνεία της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

2.1.1 Τετρανύσματα

Ήδη από το εισαγωγικό κεφάλαιο ορίσαμε το χωροχρόνο ως την τετραδιάστατη ενοποίηση του χώρου και του χρόνου με τέσσερα κύρια " συστατικά " (ct, x, y, z) . Αυτές οι συντεταγμένες - μία χρονική και τρεις χωρικές - μπορούν να θεωρηθούν ως οι συνιστώσες ενός τετραδιάστατου ακτινικού διανύσματος στον τετραδιάστατο χωροχρόνο. Τις συνιστώσες αυτές θα τις συμβολίζουμε με A^i , όπου $i=0,1,2,3$. Η συνιστώσα με $i=0$ καλείται χρονική συνιστώσα και οι συνιστώσες με $i=1,2,3$ είναι οι χωρικές συνιστώσες του τετρανύσματος.

Τα τετρανύσματα ακολουθούν τους συνήθεις κανόνες που ισχύουν για τα διανύσματα, μπορούν δηλαδή να πολλαπλασιαστούν με αριθμούς, να αφαιρεθούν και να προστεθούν . Ως μήκος του τετρανύσματος ορίζουμε την απόλυτη τιμή της απόστασης μεταξύ των άκρων του στο χωροχρόνο. Έτσι έχουμε τα διανύσματα που τα άκρα τους χωρίζονται χωροειδώς, χρονοειδώς και αυτά που τα άκρα τους έχουν μηδενική απόσταση (φωτοειδή).

Εν γένει συναντάμε δύο τύπους (μορφές) συνιστωσών των τετρανυσμάτων, τις συναλλοίωτες και τις ανταλλοίωτες. Οι συναλλοίωτες υποδηλώνονται με δείκτες (A_i) και οι ανταλλοίωτες με εκθέτες (A^i). Αυτές σχετίζονται μεταξύ τους ως εξής

$$A_0=A^0,\ A_1=-A^1,\ A_2=-A^2,\ A_3=-A^3 \tag{2.1}$$

Έτσι λοιπόν το τετράγωνο του τετρανύσματος εμφανίζεται με τη μορφή

$$A^i A_i=A^0 A_0+ A^1 A_1+ A^2 A_2+ A^3 A_3 \tag{2.2}$$

όπου το σύμβολο της άθροισης παραλείπεται. Εν γένει έχουμε τη δυνατότητα να εναλλάξουμε τους πάνω και κάτω δείκτες σε οποιοδήποτε ανάλογο ζευγάρι δεικτών.

Απαριθμώντας τις συνιστώσες ενός τετρανύσματος μπορούμε να τις γράψουμε ως

$$A^i=(A^0, A) \tag{2.3}$$

είτε

$$A_i=(A_0, -A) \tag{2.4}$$

Επομένως το τετράγωνο του διανύσματος θα είναι

$$A^i A_i=(A^0)^2-A^2 \tag{2.5}$$

Σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς μπορούμε να ορίσουμε τα τετρανύσματα βάσης, τα οποία έχουν μοναδιαίο μήκος και είναι παράλληλα προς τους άξονες συντεταγμένων t, x, y, z. Τα τετρανύσματα αυτά συμβολίζονται ως e_t, e_x, e_y, e_z (ή e_0, e_1, e_2, e_3). Προφανώς το σύνολο αυτών των τετρανυσμάτων καλείται βάση των τετρανυσμάτων. Η βάση γράφεται ως

$$\alpha=a^t e_t+ a^x e_x+ a^y e_y+ a^z e_z \tag{2.6a}$$

είτε

$$\alpha=a^0 e_0+ a^1 e_1+ a^2 e_2+ a^3 e_3 \tag{2.6b}$$

όπου $a^0, \ldots, a^3$ οι συνιστώσες του διανύσματος. Το παραπάνω άθροισμα γράφεται ισοδύναμα ως

$$\alpha=a^\alpha e_\alpha \tag{2.7}$$

Όταν έχουμε το εσωτερικό γινόμενο τετρανυσμάτων βάσης $(e_\alpha \cdot e_\beta)$ με κατευθύνσεις των αξόνων συντεταγμένων (t, x, y, z) ενός ορθογώνιου αδρανειακού συστήματος αναφοράς, χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό (μετρική επίπεδου χωροχρόνου).

$$n_{\alpha\beta}=e_\alpha \cdot e_\beta \tag{2.8}$$

Έτσι το στοιχείο μήκους επίπεδου χωροχρόνου συναρτήσει της μετρικής θα είναι

$$ds^2=n_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \tag{2.9}$$

2.1.2 Τανυστές

Εφόσον οι γραμμικές απεικονίσεις διανυσμάτων είναι γενικά χρήσιμες στη φυσική, αναμένουμε το ίδιο χρήσιμες να είναι και οι γραμμικές απεικονίσεις ζευγών διανυσμάτων. Η γενική έννοια μέσω της οποίας εκφράζεται το παραπάνω είναι ο τανυστής. Με λίγα λόγια, οι τανυστές είναι γραμμικές απεικονίσεις ζευγών διανυσμάτων σε πραγματικούς αριθμούς οι οποίοι μετασχηματίζονται κάτω από συγκεκριμένους κανόνες. Οι τανυστές είναι βαθμωτά (μονόμετρα) μεγέθη. Διακρίνουμε τους τανυστές ανάλογα το βαθμό (τάξη), δηλαδή ως προς το πόσα διανύσματα αντιστοιχίζουν σε πραγματικούς αριθμούς. Για παράδειγμα ένα διάνυσμα αποτελεί από μόνο του τανυστή πρώτου βαθμού. Αντίστοιχα η μετρική είναι ένας τανυστής δευτέρου βαθμού (μετρικός τανυστής). Οι τανυστές κατέχουν ιδιαίτερη σημασία, αφού οι φυσικοί νόμοι εκφράζονται εν γένει σαν ποσότητες τανυστών έτσι ώστε να είναι αναλλοίωτοι κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων.

Όπως συμβαίνει με τα διανύσματα, έτσι και με τους τανυστές, ανάλογα τη θέση των δεικτών τους (άνω ή κάτω) διακρίνοται σε ανταλλοίωτους και συναλλοίωτους. Έτσι οι συνιστώσες ενός δευτεροτάξιου τανυστή μπορούν να γραφούν υπό τρεις διαφορετικές μορφές : A_{ik} (συναλλοίωτη) , A^{ik} (ανταλλοίωτη) και A^i_k (μεικτή). Η σύνδεση μεταξύ διαφορετικού τύπου συνιστωσών γίνεται βάσει του γενικού κανόνα, σύμφωνα με τον οποίο υψώνοντας ή χαμηλώνοντας ένα χωρικό δείκτη $(1,2,3)$ αλλάζει ο συμβολισμός της συνιστώσας , ενώ αντίστοιχη μετατόπιση του χρονικού δείκτη (0) δεν επιφέρει κάποια αλλαγή. Ακόμη, ένας τανυστής λέγεται συμμετρικός αν $A^{ik}=A^{ki}$ και αντισυμμετρικός αν $A^{ik}=-A^{ki}$. Χαρακτηριστικό του αντισυμμετρικού τανυστή είναι ότι έχει μηδενικές όλες τις διαγώνιες συνιστώσες του $(A^{00}, A^{11}, A^{22}, ...)$.

Βασικό γνώρισμα των τανυστών είναι ο νόμος μετασχηματισμού. Έστω λοιπόν ότι πραγματοποιούμε ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων $x'_\mu = x'_\mu(\nu)$. Τότε το ανταλλοίωτο τετράνυσμα dx'^μ μετασχηματίζεται ως εξής

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \tag{2.10}$$

Για να μπορέσουμε να διατηρήσουμε αναλλοίωτο το διάνυσμα ds^2 , ο μετρικός τανυστής θα πρέπει να μετασχηματίζεται με τον εξής τρόπο

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu \tag{2.11}$$

όπου λόγω των σχέσεων (2.10) και (2.11) παίρνουμε ότι

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta} \tag{2.12}$$

Με τον παραπάνω τρόπο μετασχηματίζεται κάθε (συναλλοίωτος) τανυστής έτσι ώστε πολλαπλασιαζόμενος με ανταλλοίωτους τανυστές να δίνει αναλλοίωτα μεγέθη.

Ισχύει ότι από τις συνιστώσες ενός (ανταλλοίωτου στην προκείμενη) τανυστή μπορούμε να σχηματίσουμε ένα βαθμωτό μέγεθος παίρνοντας το άθροισμα

$$A^i_i = A^0_0 + A^1_1 + A^2_2 + A^3_3 \tag{2.13}$$

Το άθροισμα αυτό καλείται ίχνος του τανυστή και η διαδικασία για την εύρεσή του λέγεται συστολή. Ισχύει ότι εφαρμόζοντας τη συστολή σε ένα ζευγάρι δεικτών ενός τανυστή μειώνεται η τάξη του τανυστή κατά δύο. Ο μοναδιαίος τετρατανυστής δ^i_k ικανοποιεί την εξής συνθήκη για κάθε τετράνυσμα A^i

$$\delta^k_i A^i = A^k \tag{2.14}$$

όπου βέβαια

$$\delta^i_k = 0\,, i \neq k \quad \text{και} \quad \delta^i_k = 1\,, i = k \tag{2.15}$$

το γνωστό δέλτα του Kronecker. Υψώνοντας ή χαμηλώνοντας τον ένα εκ των δύο δεικτών στο δ^i_k αποκτούμε τον ανταλλοίωτο ή συναλλοίωτο τανυστή g_{ik} ή g^{ik} γνωστό και ως μετρικό τανυστή.

2.1.3 Ο μετρικός τανυστής

Όπως ήδη έχει γίνει προφανές η έννοια του μετρικού τανυστή (μετρική) κατέχει προεξάχουσα θέση στη Γ.Θ.Σ. Το αναλλοίωτο διάνυσμα ds^2 που ξέρουμε για το χωροχρόνο Minkowski (1.4), αν λάβουμε υπόψιν και τη βαρύτητα παύει να έχει αυτή τη μορφή μιας και πλέον οφείλει να εμφανίζει μέσα του και τη λεγόμενη μετρική. Αυτό πρακτικά συμβαίνει γιατί πάμε από μια ειδική εξιδανικευμένη περίπτωση κενού χώρου (Minkowski) σε έναν εν γένει καμπύλο χωροχρόνο όπου κάνουν την εμφάνισή τους και άλλες ποσότητες. Έτσι λοιπόν γενικεύοντας, παίρνουμε όπως ήδη έχει γραφτεί σε προηγούμενα μέρη την ποσότητα

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{2.16}$$

όπου πρόκειται βεβαίως για ένα βαθμωτό μέγεθος που και αυτό με τη σειρά του παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Η σημαντικότητα αυτού του μετρικού τανυστή έγκειται στο ότι περιέχει όλη την πληροφορία που σχετίζεται με την γεωμετρία του εκάστοτε χωροχρόνου. Πρόκειται λοιπόν για μια ποσότητα που έχει την ίδια τιμή σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων.

Ο χωροχρόνος Minkowski αποτελεί όπως είπαμε μια εξιδανικευμένη περίπτωση όπου εκεί οι συνιστώσες της μετρικής είναι

$$g_{00}=1\,,\,g_{11}=-1\,,\,g_{22}=-1\,,\,g_{33}=-1 \tag{2.17}$$

Αυτό μπορεί να αναπαρασταθεί και υπό τη μορφή πίνακα

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=n_{\mu\nu} \tag{2.18}$$

Εν γένει όμως στον καμπύλο χωροχρόνο τα διαγώνια και μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα θα έχουν μη - μηδενικές συνιστώσες.

Μία βασική ιδιότητα του μετρικού τανυστή είναι ότι παρουσιάζει συμμετρία ως προς την εναλλαγή των δεικτών του, δηλαδή

$$g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha} \tag{2.19}$$

Αυτό μπορεί να προκύψει πολύ εύκολα εξισώνοντας τα δύο δεύτερα μέλη του ds^2 έχοντας προκαλέσει εναλλαγή στο ένα εκ των δύο στους δείκτες της μετρικής. Επίσης μία άλλη βασική ιδιότητα είναι ότι έχουμε την ύπαρξη αντιστρόφου του μετρικού τανυστή , δηλαδή

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\nu}=\delta^{\alpha}_{\nu} \tag{2.20}$$

Τέλος, με τις μετρικές έχουμε τη δυνατότητα να ανεβάζουμε και να κατεβάζουμε δείκτες σε διανύσματα ή τανυστές μετατρέποντας έτσι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα (ή τανυστή) σε ανταλλοίωτο και αντιστρόφως. Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε ένα συναλλοίωτο διάνυσμα A_ν και θέλουμε να πάρουμε το αντίστοιχο ανταλλοίωτο. Τότε με χρήση της κατάλληλης μετρικής ($g^{\mu\nu}$) παίρνουμε

$$g^{\mu\nu}A_\nu=A^\mu \tag{2.21}$$

2.1.4 Σύμβολα Christoffel

Με τον όρο σύμβολα Christoffel εννοούμε συγκεκριμένες συναρτήσεις συντεταγμένων που η μορφή τους εξαρτάται από το εκάστοτε σύστημα που χρησιμοποιούμε. Εν γένει τα σύμβολα Christoffel παρουσιάζουν μια τανυστική συμπεριφορά ως προς γραμμικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων και μόνον. Τα σύμβολα Christoffel μπορεί να μηδενίζονται, ανάλογα το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε. Για το λόγο αυτό λέμε ότι παρουσιάζουν μια τανυστική συμπεριφορά αλλά δεν είναι ακριβώς τανυστές, αφού γνωρίζουμε πως αν ένας τανυστής μηδενίζεται σε ένα σύστημα συντεταγμένων, τότε θα μηδενίζεται και σε όλα τα υπόλοιπα.

Με τη χρήση των συμβόλων Christoffel μπορούμε να κατασκευάσουμε τανυστές ανώτερης τάξης με συναλλοίωτη διαφόριση άλλων τανυστών μικρότερης τάξης. Χαρακτηριστικό γνώρισμά τους είναι ότι παρουσιάζουν συμμετρία ως προς τους συναλλοίωτους δείκτες, δηλαδή

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} \tag{2.24}$$

Τα σύμβολα Christoffel μπορεί να προέρχονται από μια γενική γραμμική έκφραση σε σχέση με τη μετρική και τις παραγώγους της που είναι η

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}\right) \tag{2.25}$$

είτε από τα σύμβολα Christoffel δεύτερης τάξης και το μετρικό τανυστή

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}=g_{\gamma\delta}\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta} \tag{2.26}$$

Επίσης τα σύμβολα Christoffel δεύτερης τάξης (ή δεύτερου είδους) δίνονται βάσει της σχέσης

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}}\right) \tag{2.27}$$

όπου $g^{\mu\nu}$: ο αντίστροφος του μετρικού τανυστή $g_{\mu\nu}$ που ορίζεται βάσει της γνωστής ιδιότητας του δέλτα του Kronecker.

Τέλος αξίζει να αναφέρουμε ότι τα σύμβολα Christoffel μπορούν να εξαχθούν και με έναν άλλο τρόπο αντί της σχέσης (2.27). Μέσω της εκάστοτε μετρικής παίρνουμε την αντίστοιχη Λαγκραντσιανή L από την οποία προκύπτουν οι συναλλοίωτες συνιστώσες F_{μ} κάνοντας χρήση του αριστερού μέλους των εξισώσεων Euler , όπου παίρνουμε

$$2F_{\mu}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial x'^{\mu}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} \tag{2.28}$$

Για να βρούμε τις ανταλλοίωτες συνιστώσες (τανυστές) F^{μ} χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$F^{\mu}=g^{\mu\nu}F_{\nu} \tag{2.29}$$

και χρησιμοποιούμε τα $g^{\mu\nu}$ που βρίσκουμε από τη γενική σχέση

$$g^{-1}g=I \tag{2.30}$$

όπου I : ο μοναδιαίος πίνακας. Εντέλει συγκρίνουμε τις ανταλλοίωτες συνιστώσες που βρήκαμε με τις εξισώσεις της γενικής μορφής

$$F^{\mu}=\ddot{x}^{\mu}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} \tag{2.31}$$

και έτσι παίρνουμε τα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel.

2.1.5 Η συναλλοίωτη παράγωγος

Ο ορισμός της συναλλοίωτης παραγώγου προκύπτει ουσιαστικά από την ανάγκη να ορίσουμε την παράγωγο του διανύσματος. Πρέπει όμως ο ορισμός αυτός να δοθεί με προσοχή, και αυτό διότι η παράγωγος ενός διανύσματος περιέχει εν γένει τη μεταβολή μεταξύ διανυσμάτων σε γειτονικά σημεία του χωροχρόνου σε αντίθεση με άλλες πράξεις, όπως η πρόσθεση και η αφαίρεση, που ορίζονται σε ένα και μοναδικό σημείο. Έχουμε λοιπόν τη συναλλοίωτη παράγωγο (σε βάση συντεταγμένων)

$$\nabla_{\alpha}\upsilon^{\beta}=\frac{\partial\upsilon^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}+\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}\upsilon^{\gamma} \tag{2.32}$$

όπου για τα σύμβολα Christoffel έχουμε βάσει της σχέσης (2.27)

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=\frac{1}{2}g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}}+\frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}}\right) \tag{2.33}$$

Εν γένει η φιλοσοφία πίσω από τη κατασκευή των συναλλοίωτων παραγώγων έγκειται στη σύγκριση ενός διανύσματος σε ένα σημείο x^{α} σε σχέση με ένα άλλο διάνυσμα που διαδίδεται παράλληλα σε κάποιο γειτονικό σημείο $x^{\alpha}+dx^{\alpha}$ κατά μήκος μιας καμπύλης. Τέλος, ισχύει ότι η συναλλοίωτη παράγωγος της μετρικής μηδενίζεται, δηλαδή

$$\nabla_{\gamma} g_{\alpha\beta}=0 \tag{2.34}$$

Αυτό προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι σε ένα (τοπικό) αδρανειακό σύστημα έχουμε προφανώς μηδενισμό όλων των πρώτων παραγώγων της μετρικής.

2.2 Εύρεση των συμβόλων Christoffel σφαιρικά συμμετρικής μετρικής

Στην παρούσα ενότητα θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε τα σύμβολα Christoffel από μια δεδομένη μετρική η οποία παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία. Εν γένει μας ενδιαφέρει η περίπτωση σφαιρικά συμμετρικών μετρικών, αφού τέτοια είναι και η μετρική Schwarzschild η οποία όπως θα δούμε στη συνέχεια προέκυψε από τη λύση των εξισώσεων Einstein για το κενό.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε την περίπτωση της σφαιρικά συμμετρικής μετρικής

$$ds^2=A^2(r)\,dt^2-B^2(r)\,dr^2-r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\Phi^2\right) \tag{2.35}$$

Για την εύρεση των συμβόλων Christoffel στην προκειμένη περίπτωση θα εργαστούμε κάνοντας χρήση της σχέσης (2.27) μιας και εδώ είναι πιο πρακτικός αυτός ο τρόπος. Από τη σχέση (2.35) εύκολα προκύπτει ότι

$$g_{tt}=A^2(r),\, g_{rr}=-B^2(r),\, g_{\theta\theta}=-r^2,\, g_{\Phi\Phi}=-r^2\sin^2\theta \tag{2.36}$$

και επομένως

$$g^{tt}=\frac{1}{A^2(r)},\, g^{rr}=\frac{-1}{B^2(r)},\, g^{\theta\theta}=\frac{-1}{r^2},\, g^{\Phi\Phi}=\frac{-1}{r^2\sin^2\theta} \tag{2.37}$$

Με συνδυασμό των συντεταγμένων (t,r,θ,Φ) στους δείκτες και στους εκθέτες παίρνουμε συνολικά 64 σύμβολα Christoffel εκ των οποίων εντέλει προκύπτει ότι μόνο τα 13 από αυτά αντιστοιχούν σε 9 μη μηδενικούς όρους. Θα βρούμε χαρακτηριστικά τρία από αυτά $(\Gamma^{r}_{\theta\theta}, \Gamma^{\theta}_{r\theta}, \Gamma^{\Phi}_{\Phi r})$.

Από τη σχέση (2.27) έχουμε

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}}\right)$$

επομένως

$$\Gamma^{r}_{\theta\theta}=\frac{1}{2}g^{rr}\left(\frac{\partial g_{r\theta}}{\partial x^{\theta}}+\frac{\partial g_{r\theta}}{\partial x^{\theta}}-\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^{r}}\right)$$

$$\Gamma^{r}_{\theta\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{B^2}\right)\left(\frac{-\partial(-r^2)}{\partial x^{r}}\right)$$

$$\Gamma^{r}_{\theta\theta}=\frac{-1}{2}\frac{1}{B^2}2\mathrm{r}$$

$$\Gamma^{r}_{\theta\theta}=\frac{-r}{B^2} \tag{2.38}$$

όπου οι όροι $\partial g_{\chi\psi}$ για $\chi \neq \psi$ απαλείφονται από τους υπολογισμούς.
Αντίστοιχα για τα $\Gamma^{\theta}_{r\theta}$ έχουμε

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta}=\frac{1}{2}g^{\theta\theta}\left(\frac{\partial g_{\theta r}}{\partial x^{\theta}}+\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^{r}}-\frac{\partial g_{r\theta}}{\partial x^{\theta}}\right)$$

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{r^2}\right)\frac{\partial(-r^2)}{\partial x^{r}}$$

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta}=\frac{-1}{2}\frac{1}{r^2}(-2\mathrm{r})$$

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta}=\frac{1}{r}=\Gamma^{\theta}_{\theta r} \tag{2.39}$$

Τέλος, για τα $\Gamma^{\Phi}_{\Phi r}$ έχουμε

$$\Gamma^{\Phi}_{\Phi r}=\frac{1}{2}g^{\Phi\Phi}\left(\frac{\partial g_{\Phi\Phi}}{\partial x^{r}}+\frac{\partial g_{\Phi r}}{\partial x^{\Phi}}-\frac{\partial g_{\Phi r}}{\partial x^{\Phi}}\right)$$

$$\Gamma^{\Phi}_{\Phi r}=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{r^2\sin^2\theta}\right)\left(\frac{\partial(-r^2\sin^2\theta)}{\partial x^{r}}\right)$$

$$\Gamma^{\Phi}_{\Phi r}=\frac{-1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(-2\mathrm{r}\sin^2\theta\right)$$

$$\Gamma^{\Phi}_{\Phi r}=\frac{1}{r}=\Gamma^{\Phi}_{r\Phi} \tag{2.40}$$

Συνεχίζοντας την ίδια εργασία και για τους υπόλοιπους όρους παίρνουμε εντέλει τα εξής μη μηδενικά σύμβολα Christoffel

$$\begin{gathered}\Gamma^{r}_{rr}=\frac{\dot{B}^2}{B^2},\Gamma^{r}_{tt}=A\frac{\dot{A}^2}{B^2},\Gamma^{r}_{\theta\theta}=\frac{-r}{B^2},\Gamma^{r}_{\Phi\Phi}=\frac{-rsin^2\theta}{B^2}\\ \Gamma^{\theta}_{r\theta}=\Gamma^{\theta}_{\theta r}=\frac{1}{r},\Gamma^{\theta}_{\Phi\Phi}=-sin\theta\, cos\theta\\ \Gamma^{\Phi}_{\theta\Phi}=\Gamma^{\Phi}_{\Phi\theta}=cot\theta,\Gamma^{\Phi}_{\Phi r}=\Gamma^{\Phi}_{r\Phi}=\frac{1}{r}\\ \Gamma^{t}_{rt}=\Gamma^{t}_{tr}=\frac{\dot{A}^2}{A^2}\end{gathered} \tag{2.41}$$

2.3 Οι πεδιακές εξισώσεις Einstein

Ο Einstein ήθελε να βρει ένα κατάλληλο γεωμετρικό πλαίσιο που να είναι σε θέση να ικανοποιεί την Αρχή της Ισοδυναμίας. Αυτή η αναζήτηση τον οδήγησε στις εξισώσεις Einstein, στις οποίες θα καταλήξουμε αφού πρώτα γίνει μια σχετικά σύντομη αναφορά στους τανυστές που περιέχονται στις εξισώσεις αυτές.

2.3.1 Οι τανυστές Riemann και Ricci

Η Γ.Θ.Σ. όπως ξέρουμε σχετίζεται με τον καμπύλο χώρο. Έτσι είναι προφανές ότι θα είναι χρήσιμο να έχουμε ένα τανυστή που να μπορεί να εκφράζει τη καμπυλότητα του χωροχρόνου. Αυτό ουσιαστικά κάνει ο τανυστής Riemann. Μας δίνει τη σχετική επιτάχυνση μεταξύ δύο υλικών σημείων σε ελεύθερη πτώση μέσα σε βαρυτικό πεδίο και ισούται με

$$R^{\nu}_{\mu\kappa\lambda}=\frac{\partial\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}}{\partial x^{\kappa}}-\frac{\partial\Gamma^{\nu}_{\kappa\mu}}{\partial x^{\lambda}}+\Gamma^{\nu}_{\kappa\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}-\Gamma^{\nu}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\kappa\mu} \quad (2.42)$$

Ο τανυστής Riemann είναι τανυστής τέταρτης τάξης, έχει λοιπόν στις τέσσερις διαστάσεις 256 συνιστώσες εκ των οποίων μόνο οι 20 είναι ανεξάρτητες.

Εφόσον ο τανυστής Riemann περιγράφει την καμπυλότητα του χωροχρόνου είναι προφανές ότι ο μηδενισμός ή όχι όλων των συνιστωσών του θα αποτελεί κριτήριο για το αν ο χώρος είναι επίπεδος ή καμπύλος αντίστοιχα. Σε έναν επίπεδο χωροχρόνο θα έχουμε δηλαδή

$$R^{\nu}_{\mu\kappa\lambda}=0 \quad (2.43)$$

Αυτό συμβαίνει γιατί στον επίπεδο χώρο το σύστημα συντεταγμένων είναι τέτοιο ώστε τα σύμβολα Christoffel του δεύτερου μέλους της σχέσης (2.42) να μηδενίζονται.

Ο τανυστής Ricci προκύπτει μέσω της συστολής του τανυστή Riemann ως προς τον πρώτο και τρίτο δείκτη

$$R_{\mu\kappa}=R^{\nu}_{\mu\kappa\nu} \quad (2.44)$$

Οι συμμετρίες του τανυστή Riemann ως προς ν,μ και ως προς κ,λ αποδεικνύουν ότι οι συστολές δίνουν τον ίδιο τανυστή ή μηδέν. Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε το βαθμωτό του Ricci

$$R\equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=g^{\kappa\lambda}g^{\mu\nu}R_{\mu\kappa\nu\lambda} \quad (2.45)$$

Σε ένα φυσικό σύστημα αναφοράς έχουμε

$$R_{\mu\kappa}=\frac{\partial\Gamma^{\nu}_{\nu\mu}}{\partial x^{\kappa}}-\frac{\partial\Gamma^{\nu}_{\kappa\mu}}{\partial x^{\nu}}+\Gamma^{\nu}_{\kappa\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}-\Gamma^{\nu}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\kappa\mu} \quad (2.46)$$

Ο μηδενισμός του τανυστή Ricci μας φανερώνει ότι ο χώρος είναι κενός. Αυτό όμως δεν συνεπάγεται αναγκαστικά και ταυτόχρονο μηδενισμό του τανυστή Riemann. Τέλος πρέπει να αναφέρουμε ότι ο τανυστής Ricci είναι συμμετρικός

$$R_{\mu\kappa}=R_{\kappa\mu} \quad (2.47)$$

2.3.2 Ο τανυστής ενέργειας – ορμής

Σύμφωνα με τη Γ.Θ.Σ. παρουσία ύλης έχουμε καμπύλωση του χωροχρόνου. Το γεγονός αυτό δημιουργεί αυτόματα την ανάγκη για την ύπαρξη ενός τανυστή που να συνδέει τη μετρική $g_{\mu\nu}$ με την ύλη. Έτσι προέκυψε ο τανυστής ενέργειας - ορμής $T_{\mu\nu}$. Όπως ξέρουμε η κοσμολογική αρχή ορίζει ότι βρισκόμαστε σε ένα ομογενές και ισότροπο χώρο - ιδανικό ρευστό - . Αυτό το ιδανικό ρευστό οφείλει να καθορίζεται από την πυκνότητα $\rho(t)$, την πίεση $p(t)$ και την ταχύτητα u_μ. Η ταχύτητα εν γένει εξαρτάται μόνο από το χρόνο και παρουσιάζει ανεξαρτησία από τις χωρικές συντεταγμένες, δηλαδή

$$u^\mu=(1,0,0,0) \tag{2.48}$$

Αυτό συμβαίνει γιατί το σύστημα αναφοράς που επιλέγουμε κινείται μαζί με το ρευστό και άρα ως προς το σύστημα αναφοράς το ρευστό εμφανίζεται ως ακίνητο. Έτσι ικανοποιείται η απαίτηση για ισοτροπικό Σύμπαν.

Με βάση τα παραπάνω, ο τανυστής ενέργειας - ορμής δίνεται από τη σχέση

$$T_{\mu\nu}=(\rho+p)u_\mu u_\nu-p\,g_{\mu\nu} \tag{2.49}$$

όπου $u_\mu=g_{\mu\rho}u^\rho$ η συναλλοίωτη ταχύτητα. Ο τανυστής ενέργειας - ορμής μπορεί να εκφραστεί και συναρτήσει ανταλλοίωτων ταχυτήτων

$$T_{\mu\nu}=(\rho+p)g_{\mu\rho}u^\rho g_{\nu\sigma}u^\sigma-pg_{\mu\nu} \tag{2.50}$$

Γνωρίζοντας τη μετρική και την παραπάνω σχέση έχουμε

$$T^\mu_\nu=\begin{pmatrix}\rho & 0 & 0 & 0\\ 0 & -g_{22}p & 0 & 0\\ 0 & 0 & -g_{33}p & 0\\ 0 & 0 & 0 & -g_{44}p\end{pmatrix} \tag{2.51}$$

Επίσης είναι προφανές ότι η διατήρηση της ενέργειας και της ορμής θα μπορεί πλέον να εκφράζεται μέσω της διατήρησης του τανυστή ενέργειας - ορμής

$$\partial_\nu T^{\mu\nu}=0 \tag{2.52}$$

2.3.3 Οι πεδιακές εξισώσεις Einstein

Ο Einstein αναζητούσε ένα γεωμετρικό πλαίσιο για μια θεωρία που θα ικανοποιούσε την αρχή της ισοδυναμίας, ώσπου κατάλαβε ότι το πλαίσιο αυτό ήταν η ψευδο - Ριμάννεια γεωμετρία των τεσσάρων διαστάσεων. Θεωρώντας την κίνηση τυχαίου σωματιδίου σε ένα τυχαίο καρτεσιανό καμπυλόγραμμο σύστημα καταλήγουμε στην εξίσωση κίνησης για σωμάτιο που κινείται με ταχύτητα $u \ll c$

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dT^2} + \Gamma^\lambda_{\nu\kappa} \frac{dx^\nu}{dT} \frac{dx^\kappa}{dT} = 0 \qquad (2.53)$$

Αντίστοιχα για σωμάτια με ταχύτητα $u=c$ η εξίσωση κίνησης

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\sigma^2} + \Gamma^\lambda_{\nu\kappa} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\kappa}{d\sigma} = 0 \qquad (2.54)$$

όπου για την περίπτωση αυτή αντί του T χρησιμοποιούμε την παράμετρο $\sigma \equiv y^1$, εφόσον το σώμα κινείται με την ταχύτητα του φωτός. Τα σύμβολα Christoffel $\Gamma^\lambda_{\nu\kappa}$ θα προκύψουν βάσει της σχέσης (2.27). Βλεπουμε λοιπόν ότι είναι απαραίτητη η γνώση του μετρικού τανυστή και μάλιστα όπως προκύπτει στη συνέχεια θα είναι αυτός που θα μας δίνει το βαρυτικό πεδίο.

Για να μπορέσουμε να καταλήξουμε στις εξισώσεις Einstein αναγκαίο βήμα είναι η σύγκριση με τα αποτελέσματα που παίρνουμε χρησιμοποιώντας τη Νευτώνεια θεωρία. Η εξίσωση (2.52) για την περίπτωση ασθενούς και ανεξάρτητου του χρόνου (στάσιμου) βαρυτικού πεδίου γίνεται

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dT^2} = \frac{1}{2} n^{\alpha\beta} \frac{\partial h_{11}}{\partial x^\beta} \qquad (2.55)$$

όπου $\alpha = 2, 3, 4$ για $x^1 = t, x^2 = x, x^3 = y, x^4 = z$. Η αντίστοιχη εξίσωση που προκύπτει μέσω της Νευτώνειας θεωρίας είναι η

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dT^2} = n^{\alpha\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} \qquad (2.56)$$

όπου $\Phi = \frac{-GM}{r}$ με $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Συγκρίνοντας τη σχέση (2.54) με τη σχέση (2.55) έχουμε

$$h_{11} = 2\Phi + C \qquad (2.57)$$

όπου C είναι σταθερά, και συνδυάζοντας με το γεγονός ότι το Νευτώνειο δυναμικό Φ οφείλει να ικανοποιεί την εξίσωση Poisson η οποία στη γενική της μορφή στις τρεις διαστάσεις είναι

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})\varphi(x,y,z)=f(x,y,z) \tag{2.58}$$

και η οποία για τη βαρύτητα γίνεται

$$\nabla^2 \Phi=4\pi G\rho \tag{2.59}$$

παίρνουμε εντέλει

$$G_{\mu\nu}=8\pi \mathrm{G}\mathrm{T}_{\mu\nu} \tag{2.60}$$

όπου $T_{\mu\nu}$ ο τανυστής ενέργειας - ορμής.

Ο τανυστής $G_{\mu\nu}$ (τανυστής Einstein) οφείλει να είναι συμμετρικός, εφόσον συμμετρικός είναι και ο τανυστής ενέργειας - ορμής. Επίσης επειδή ο τανυστής ενέργειας - ορμής διατηρείται (λόγω αρχής διατήρησης ενέργειας και ορμής) το ίδιο οφείλει να κάνει και ο τανυστής $G_{\mu\nu}$.Ακόμη ο $G_{\mu\nu}$ περιέχει όρους που είναι γραμμικοί ως προς τις_δεύτερες παραγώγους της μετρικής. Τέλος, για ασθενές βαρυτικό πεδίο είναι

$$G_{11}=\nabla^2 g_{11} \tag{2.61}$$

Τα παραπάνω επιβάλλουν να ισχύει η σχέση

$$G_{\mu\nu}=c_1 R_{\mu\nu}+c_2 R g_{\mu\nu} \tag{2.62}$$

όπου $R_{\mu\nu}$ ο τανυστής Ricci και R η βαθμωτή καμπυλότητα ή βαθμωτό του Ricci. Η χρήση της ταυτότητας Bianchi $(\nabla_\nu G_{\mu\nu}=0)$ δίνει

$$\nabla_\nu G^\nu_\mu=(\frac{c_1}{2}+C_2)\nabla_\mu R \tag{2.63}$$

και επιλέγοντας ως λύση την περίπτωση για $c_2=\frac{-1}{2}c_1$ τότε

$$G_{\mu\nu}=c_1(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}R g_{\mu\nu}) \tag{2.64}$$

Αντίστοιχα για μη - σχετικιστικό σύστημα χρησιμοποιώντας το γραμμικό κομμάτι του τανυστή Riemann (ώστε να έχουμε ασθενές πεδίο) και υποθέτοντας ότι το πεδίο είναι στατικό, παίρνουμε έπειτα από μια σειρά πράξεων ότι

$$G_{11} \simeq c_1 \nabla^2 g_{11} \tag{2.65}$$

Έτσι συγκρίνοντας τις σχέσεις (2.60) και (2.64) καταλήγουμε στις εξισώσεις Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.66}$$

και η γενίκευση αυτών δίνει

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.67}$$

όπου Λ είναι η κοσμολογική σταθερά η οποία προτάθηκε από τον Einstein ώστε να επιτύχει στατικό Σύμπαν, αφού την εποχή εκείνη οι αστρονόμοι δεν είχαν ακόμη ανακαλύψει ότι το Σύμπαν είναι διαστελλόμενο. Θεωρούμε ότι η κοσμολογική σταθερά Λ είναι πρακτικά πολυ μικρή με αμελητέα συνεισφορά στη Νευτώνεια θεωρία. Οι εξισώσεις Einstein ικανοποιούν τη ταυτότητα Bianchi ώστε να έχουμε συμβατότητα με τη διατήρηση της ενέργειας.

Έτσι λοιπόν παίρνουμε δέκα διαφορετικές εξισώσεις πεδίου με μερικές παραγώγους οι οποίες εμφανίζουν ως άγνωστη παράμετρο τις συνιστώσες της μετρικής, όπως είχε αναφερθεί στην αρχή αυτής της ενότητας. Συνεπώς η λύση των εξισώσεων αυτών συνεπάγεται την εύρεση των συνιστωσών της μετρικής γεγονός που θα μας καθορίσει τη γεωμετρία του χώρου μας. Έτσι θα είμαστε σε θέση να μπορούμε να προβλέψουμε την κίνηση οποιουδήποτε σωμάτιου μέσα στο χώρο αυτό. Βλέποντας τις εξισώσεις αυτές αντιλαμβανόμαστε ότι ο Einstein ήθελε βάσει των νοητικών του πειραμάτων να ενσωματώσει στις εξισώσεις του το γεγονός ότι η ενέργεια και η ύλη προκαλούν αλλοιώσεις στη γεωμετρία του χωροχρόνου καθώς και ότι ο τανυστής ενέργειας - ορμής ουσιαστικά παριστάνει την πηγή του βαρυτικού πεδίου.

Κεφάλαιο 3

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε τις εξισώσεις πεδίου για το κενό, καταλήγοντας παράλληλα στην αντίστοιχη μετρική. Λύση των εξισώσεων ουσιαστικά σημαίνει εύρεση των συνιστωσών του μετρικού τανυστή που θα μας καθορίσει τη " γεωμετρία " του χωροχρόνου και συνεπώς και την κίνηση σωματιδίων μέσα σε αυτόν.

3.1 Υπολογισμός των συνιστωσών του τανυστή Ricci

Έστω λοιπόν ότι έχουμε τη περίπτωση της σφαιρικά συμμετρικής μετρικής

$$ds^2 = A^2(r)\,dt^2 - B^2(r)\,dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\Phi^2)$$

Για τη μετρική αυτή έχουμε ήδη βρει τα αντίστοιχα σύμβολα Christoffel. Θα υπολογίσουμε εδώ τις συνιστώσες του τανυστή Ricci, καθεμιά από τις οποίες αντιστοιχεί σε μία από τις τέσσερις χωροχρονικές συντεταγμένες. Πραγματοποιούμε στο συμβολισμό, χάριν ευκολίας, την αντιστοιχία

$$t \rightarrow 0,\ r \rightarrow 1,\ \theta \rightarrow 2,\ \Phi \rightarrow 3$$

και έτσι οι διαγώνιες συνιστώσες της μετρικής θα γράφονται πλέον υπό τη μορφή

$$g_{00} = A^2(r),\ g_{11} = -B^2(r),\ g_{22} = -r^2,\ g_{33} = -r^2\sin^2\theta \tag{3.1}$$

Αντίστοιχες αλλαγές πραγματοποιούνται και στο συμβολισμό των ανταλλοίωτων συνιστωσών, αλλά και στο συμβολισμό των συμβόλων Cristoffel. Επίσης από εδώ και στο εξής, χάριν συντομίας, θα γράφουμε τους όρους A(r) και B(r) απλά ως A και B μιας και τους θεωρούμε μόνο συναρτήσει της απόστασης r.
Έχοντας ήδη υπολογίσει τα απαιτούμενα σύμβολα Christoffel, μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στον υπολογισμό των τεσσάρων συνιστωσών του τανυστή Ricci $(R_{00}, R_{11}, R_{22}, R_{33})$ κάνοντας χρήση της γενικής σχέσης

$$R_{\mu\nu} = -\Gamma^{\alpha}_{(\mu\nu,\alpha)} + \Gamma^{\alpha}_{(\mu\alpha,\nu)} - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} \tag{3.2}$$

Οι μη διαγώνιες συνιστώσες του $R_{\mu\nu}$ απαλοίφονται ιδανικά! Για τις διαγώνιες συνιστώσες έχουμε τέσσερις μη μηδενικούς όρους. Θα υπολογίσουμε αναλυτικά τις δύο πρώτες εξ αυτών και στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα και των τεσσάρων συνιστωσών.

Η πρώτη συνιστώσα R_{00} , σύμφωνα με τη σχέση (3.2), θα είναι

$$R_{00}=-\Gamma^{\alpha}_{(00,\alpha)}+\Gamma^{\alpha}_{(0\alpha,0)}-\Gamma^{\beta}_{00}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}+\Gamma^{\beta}_{0\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta 0}$$

, όπου αναπτύσσουμε αναλυτικά τους όρους της και παίρνουμε

$$\begin{aligned}R_{00}=&-\Gamma^{0}_{(00,0)}-\Gamma^{1}_{(00,1)}-\Gamma^{2}_{(00,2)}-\Gamma^{3}_{(00,3)}-\Gamma^{\beta}_{00}\Gamma^{0}_{\beta 0}-\Gamma^{\beta}_{00}\Gamma^{1}_{\beta 1}-\Gamma^{\beta}_{00}\Gamma^{2}_{\beta 2}-\Gamma^{\beta}_{00}\Gamma^{3}_{\beta 3}+\Gamma^{\beta}_{00}\Gamma^{0}_{\beta 0}+\Gamma^{\beta}_{01}\Gamma^{1}_{\beta 0}\\&+\Gamma^{\beta}_{02}\Gamma^{2}_{\beta 0}+\Gamma^{\beta}_{03}\Gamma^{3}_{\beta 0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{00}=&-\Gamma^{1}_{(00,1)}-\Gamma^{0}_{00}\Gamma^{0}_{00}-\Gamma^{1}_{00}\Gamma^{0}_{10}-\Gamma^{2}_{00}\Gamma^{0}_{20}-\Gamma^{3}_{00}\Gamma^{0}_{30}-\Gamma^{0}_{00}\Gamma^{1}_{01}-\Gamma^{1}_{00}\Gamma^{1}_{11}-\Gamma^{2}_{00}\Gamma^{1}_{21}-\Gamma^{3}_{00}\Gamma^{1}_{31}-\Gamma^{0}_{00}\Gamma^{2}_{02}\\&-\Gamma^{1}_{00}\Gamma^{2}_{12}-\Gamma^{2}_{00}\Gamma^{2}_{22}-\Gamma^{3}_{00}\Gamma^{2}_{32}-\Gamma^{0}_{00}\Gamma^{3}_{03}-\Gamma^{1}_{00}\Gamma^{3}_{13}-\Gamma^{2}_{00}\Gamma^{3}_{23}-\Gamma^{3}_{00}\Gamma^{3}_{33}+\Gamma^{0}_{00}\Gamma^{0}_{00}+\Gamma^{1}_{00}\Gamma^{0}_{10}\\&+\Gamma^{2}_{00}\Gamma^{0}_{20}+\Gamma^{3}_{00}\Gamma^{0}_{30}+\Gamma^{0}_{01}\Gamma^{1}_{00}+\Gamma^{1}_{01}\Gamma^{1}_{10}+\Gamma^{2}_{01}\Gamma^{1}_{20}+\Gamma^{3}_{01}\Gamma^{1}_{30}+\Gamma^{0}_{02}\Gamma^{2}_{00}+\Gamma^{1}_{02}\Gamma^{2}_{10}\Gamma^{2}_{02}\Gamma^{2}_{20}\\&+\Gamma^{3}_{02}\Gamma^{2}_{30}+\Gamma^{0}_{03}\Gamma^{3}_{30}+\Gamma^{1}_{03}\Gamma^{3}_{10}+\Gamma^{2}_{03}\Gamma^{3}_{20}+\Gamma^{3}_{03}\Gamma^{3}_{30}\end{aligned}$$

$$R_{00}=-\Gamma^{1}_{(00,1)}-\Gamma^{1}_{00}\Gamma^{1}_{11}-\Gamma^{1}_{00}\Gamma^{2}_{12}-\Gamma^{1}_{00}\Gamma^{3}_{13}+\Gamma^{1}_{00}\Gamma^{0}_{01}$$

$$R_{00}=-\Gamma^{1}_{(00,1)}-\Gamma^{1}_{00}\left(\Gamma^{1}_{11}+\Gamma^{2}_{12}+\Gamma^{3}_{13}-\Gamma^{0}_{01}\right)$$

Εισάγοντας στην τελευταία σχέση τις (2.41) έχουμε

$$R_{00}=\frac{-\partial}{\partial r}\left(\frac{A\dot{A}}{B^2}\right)-\frac{A\dot{A}}{B^2}\left(\frac{\dot{B}}{B}+\frac{1}{r}+\frac{1}{r}-\frac{\dot{A}}{A}\right)$$

$$R_{oo}=\frac{-(A\dot{A})'B^2A\dot{A}(B^2)'}{B^4}-\frac{A\dot{A}}{B^2}\left(\frac{\dot{B}}{B}+\frac{2}{r}-\frac{\dot{A}}{A}\right)$$

όπου εντέλει παίρνουμε

$$R_{oo}=\frac{-A\ddot{A}}{B^2}+\frac{A\dot{A}\dot{B}}{B^3}-\frac{2A\dot{A}}{rB^2} \tag{3.3}$$

Αντίστοιχα για τον υπολογισμό της συνιστώσας R_{11} θα έχουμε, από το γενικό τύπο (3.2)

$$R_{11}=-\Gamma^{\alpha}_{(11,\alpha)}+\Gamma^{\alpha}_{(1\alpha,1)}-\Gamma^{\beta}_{11}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}+\Gamma^{\beta}_{1\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta 1}$$

, όπου και σε αυτήν αναπτύσσουμε αναλυτικά τους όρους της και παίρνουμε

$$R_{11}=-\Gamma^{0}_{(11,0)}-\Gamma^{1}_{(11,1)}-\Gamma^{2}_{(11,2)}-\Gamma^{3}_{(11,3)}+\Gamma^{0}_{(10,1)}+\Gamma^{1}_{(11,1)}+\Gamma^{2}_{(12,1)}+\Gamma^{3}_{(13,1)}-\Gamma^{0}_{11}\Gamma^{\alpha}_{0\alpha}-\Gamma^{1}_{11}\Gamma^{\alpha}_{1\alpha}-\Gamma^{2}_{11}\Gamma^{\alpha}_{2\alpha}$$
$$-\Gamma^{3}_{11}\Gamma^{\alpha}_{3\alpha}+\Gamma^{0}_{1\alpha}\Gamma^{\alpha}_{01}+\Gamma^{1}_{1\alpha}\Gamma^{\alpha}_{11}+\Gamma^{2}_{1\alpha}\Gamma^{\alpha}_{21}+\Gamma^{3}_{1\alpha}\Gamma^{\alpha}_{31}$$

$$R_{11}=\Gamma^{0}_{(10,1)}+\Gamma^{2}_{(12,1)}+\Gamma^{3}_{(13,1)}-\Gamma^{1}_{11}\Gamma^{0}_{10}-\Gamma^{1}_{11}\Gamma^{1}_{11}-\Gamma^{1}_{11}\Gamma^{2}_{12}-\Gamma^{1}_{11}\Gamma^{3}_{13}+\Gamma^{0}_{10}\Gamma^{0}_{01}+\Gamma^{0}_{11}\Gamma^{1}_{01}+\Gamma^{0}_{12}\Gamma^{2}_{01}$$
$$+\Gamma^{0}_{13}\Gamma^{3}_{01}+\Gamma^{1}_{10}\Gamma^{0}_{11}+\Gamma^{1}_{11}\Gamma^{1}_{11}+\Gamma^{1}_{12}\Gamma^{2}_{11}+\Gamma^{1}_{13}\Gamma^{3}_{11}+\Gamma^{2}_{10}\Gamma^{0}_{21}+\Gamma^{2}_{11}\Gamma^{1}_{21}+\Gamma^{2}_{12}\Gamma^{2}_{21}$$
$$+\Gamma^{2}_{13}\Gamma^{3}_{21}+\Gamma^{3}_{10}\Gamma^{0}_{31}+\Gamma^{3}_{11}\Gamma^{1}_{31}+\Gamma^{3}_{12}\Gamma^{2}_{31}+\Gamma^{3}_{13}\Gamma^{3}_{31}$$

$$R_{11}=\Gamma^{0}_{(10,1)}+\Gamma^{2}_{(12,1)}+\Gamma^{3}_{(13,1)}-\Gamma^{1}_{11}\Gamma^{0}_{10}-\Gamma^{1}_{11}\Gamma^{2}_{12}-\Gamma^{1}_{11}\Gamma^{3}_{13}+\Gamma^{0}_{10}\Gamma^{0}_{01}+\Gamma^{2}_{12}\Gamma^{2}_{21}+\Gamma^{3}_{13}\Gamma^{3}_{31}$$

$$R_{11}=\Gamma^{0}_{(10,1)}+\Gamma^{2}_{(12,1)}+\Gamma^{3}_{(13,1)}-\Gamma^{1}_{11}(\Gamma^{0}_{10}+\Gamma^{2}_{12}+\Gamma^{3}_{13})+\Gamma^{0}_{10}\Gamma^{0}_{01}+\Gamma^{2}_{12}\Gamma^{2}_{21}+\Gamma^{3}_{13}\Gamma^{3}_{31}$$

και εισάγοντας στην τελευταία σχέση τις (2.41) έχουμε

$$R_{11}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{\dot{B}}{B}\left(\frac{\dot{A}}{A}+\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\right)+\frac{\dot{A}}{A}\frac{\dot{A}}{A}+\frac{1}{r}\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\frac{1}{r}$$

$$R_{11}=\frac{(\dot{A})'A-\dot{A}(A)'}{A^{2}}-\frac{\dot{B}}{B}\left(\frac{\dot{A}}{A}+\frac{2}{r}\right)+\frac{\dot{A}^{2}}{A^{2}}$$

όπου τελικά παίρνουμε

$$R_{11}=\frac{\ddot{A}}{A}-\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}-\frac{2\dot{B}}{rB} \qquad (3.4)$$

Για τις υπόλοιπες δύο συνιστώσες εργαζόμαστε με ανάλογο τρόπο. Έτσι, καταλήγουμε στις εξής τέσσερις συνιστώσες του τανυστή Ricci

$$R_{oo}=\frac{-A\ddot{A}}{B^{2}}+\frac{A\dot{A}\dot{B}}{B^{3}}-\frac{2A\dot{A}}{rB^{2}} \qquad (3.3)$$

$$R_{11}=\frac{\ddot{A}}{A}-\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}-\frac{2\dot{B}}{rB} \qquad (3.4)$$

$$R_{22}=\frac{B-r\dot{B}}{B^{3}}+\frac{r\dot{A}}{AB^{2}}-1 \qquad (3.5)$$

$$R_{33}=\sin^{2}\theta\, R_{22} \qquad (3.6)$$

3.2 Εξισώσεις Einstein για το κενό

Για να πραγματοποιήσουμε αρχικά μια επαλήθευση στα όσα μέχρι τώρα έχουμε υπολογίσει, θα εξετάσουμε την περίπτωση του κενού, αναμένοντας οι όροι A^2 και $-B^2$ της μετρικής (2.35) στις οποίες θα καταλήξουμε, να συμπίπτουν με τις αντίστοιχες παραμέτρους της μετρικής Schwarzchild. Από τη βιβλιογραφία, η μετρική Schwarzschild είναι

$$ds^2 = (1-\frac{2\mathrm{m}}{r})dt^2 - (1-\frac{2\mathrm{m}}{r})^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\Phi^2) \tag{3.7}$$

Σε κενό χώρο όπου ο τανυστής ενέργειας - ορμής μηδενίζεται, δηλαδή για $T_{\mu\nu}=0$, η εξίσωση Einstein ανάγεται στην

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \tag{3.8}$$

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση (3.8) με τον όρο $g^{\mu\nu}$, βρίσκουμε από τις σχέσεις

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\nu}_{\nu} = R \tag{3.9}$$

και

$$g^{\lambda\nu} g_{\mu\nu} = \delta^{\lambda}_{\mu} \tag{3.10}$$

ότι

$$R - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\mu} R = 0 \tag{3.11}$$

Ισχύει εν γένει ότι στην περίπτωση χώρου n-διαστάσεων έχουμε $\delta^{\mu}_{\mu}=n$. Εφόσον στη Γ.Θ.Σ. έχουμε τέσσερις διαστάσεις (n=4), η εξίσωση (3.11) μας δίνει

$$R = 0 \tag{3.12}$$

Συνεπώς η εξίσωση (3.8) ανάγεται για το κενό στην

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{3.13}$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι οι εξισώσεις Einstein για το κενό - και συνεπώς και οι παράμετροι A^2 και $-B^2$ - θα προκύψουν από τις σχέσεις που βρήκαμε για τις τέσσερις συνιστώσες του τανυστή Ricci με μηδέν το δεύτερο μέλος. Συνεπώς από τις σχέσεις (3.3), (3.4), (3.5) και (3.6) έχουμε τις εξισώσεις πεδίου για το κενό

$$\frac{-A\ddot{A}}{B^2}+\frac{A\dot{A}\dot{B}}{B^3}-\frac{2A\dot{A}}{rB^2}=0 \tag{3.14}$$

$$\frac{\ddot{A}}{A}-\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}-\frac{2\dot{B}}{rB}=0 \tag{3.15}$$

$$\frac{B-r\dot{B}}{B^3}+\frac{r\dot{A}}{AB^2}-1=0 \tag{3.16}$$

$$\sin^2\theta\frac{(B-r\dot{B})}{B^3}+\sin^2\theta\frac{r\dot{A}}{AB^2}-\sin^2\theta=0 \tag{3.17}$$

3.3 Η λύση Schwarzschild

Έχοντας βρει τις εκφράσεις για τις εξισώσεις πεδίου για την περίπτωση του κενού, θα προχωρήσουμε στη λύση αυτών αναμένοντας, όπως ήδη έχει αναφερθεί, να καταλήξουμε σε λύσεις που θα ταυτίζονται με τους αντίστοιχους όρους της μετρικής Schwarzschild. Αναμένουμε δηλαδή να πάρουμε

$$A^2=1-\frac{2m}{r} \quad \text{και} \quad B^2=\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (3.14) με τον όρο $\frac{B^2}{A^2}$ και παίρνουμε

$$\frac{-\ddot{A}}{A}-\frac{2\dot{A}}{rA}+\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}=0 \tag{3.18}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τη σχέση (3.18) με τη σχέση (3.15) και παίρνουμε ότι

$$\frac{\ddot{A}}{A}-\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}-\frac{2\dot{B}}{rB}-\frac{\ddot{A}}{A}+\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}-\frac{2\dot{A}}{rA}=0$$

με αποτέλεσμα

$$\frac{-\dot{B}}{B}=\frac{\dot{A}}{A} \tag{3.19}$$

Συνεπώς η σχέση (3.16) λόγω της (3.19), γίνεται

$$\frac{B}{B^3}-\frac{r\dot{B}}{B^3}-\frac{\dot{B}}{B}\frac{r}{B^2}-1=0$$

$$-2\mathrm{r}\frac{\dot{B}}{B^3}+\frac{1}{B^2}-1=0$$

και πολλαπλασιάζοντας τη τελευταία σχέση με τον όρο $\frac{1}{r}$ έχουμε

$$-2\frac{\dot{B}}{B^3}+\frac{B^{-2}}{r}-\frac{1}{r}=0$$

$$(B^{-2})'+\frac{B^{-2}}{r}=\frac{1}{r}$$

Θέτουμε $u=B^{-2}$ και παίρνουμε τη πρωτοτάξια διαφορική εξίσωση

$$u'+\frac{1}{r}u=\frac{1}{r}$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι της γενικής μορφής

$$y'+P(r)y=Q(r)$$

όπου στη περίπτωσή μας έχουμε

$$P(r)=\frac{1}{r} \quad \text{και} \quad Q(r)=\frac{1}{r}$$

Εξισώσεις αυτής της μορφής λύνονται με τη βοήθεια του γενικού τύπου

$$y(r)=e^{-\int Pdr}\left[\int Q(r)e^{\int Pdr}dr+C\right]$$

Η εφαρμογή του παραπάνω τύπου με κάποιες στοιχειώδεις ολοκληρώσεις, μας δίνει

$$u(r)=e^{-lnr}(r+C)$$

$$u(r)=1+\frac{1}{r}C$$

Συνεπώς

$$1+\frac{1}{r}C=\frac{1}{B^2}$$

δηλαδή

$$B=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{C}{r}}}$$

και με την προϋπόθεση ότι η σταθερά $C=-2m$, παίρνουμε εντέλει τον όρο B^2 όπως αναμέναμε αρχικά

$$B^2=\frac{1}{1-\frac{2m}{r}} \tag{3.20}$$

Κάπως αντίστοιχα εργαζόμαστε για να βρούμε και τον όρο A . Η σχέση (3.18) λόγω της (3.19), γίνεται

$$\frac{-\ddot{A}}{A}-\frac{\dot{A}^2}{A^2}-\frac{2\dot{A}}{rA}=0$$

$$\frac{\ddot{A}}{A}+\frac{\dot{A}^2}{A^2}+\frac{2}{r}\frac{\dot{A}}{A}=0 \tag{3.21}$$

Η σχέση (3.21) είναι μια δευτεροτάξια διαφορική εξισώση η οποία με τη σειρά της μας δίνει

$$A=\sqrt{1-\frac{2m}{r}}$$

δηλαδή

$$A^2=1-\frac{2m}{r} \tag{3.22}$$

Συνεπώς η σχέση (2.35) λόγω των σχέσεων (3.20) και (3.22) ανάγεται στην

$$ds^2=\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2-\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\Phi^2\right) \tag{3.23}$$

η οποία είναι βεβαίως όμοια με την μετρική που δίνεται από τη σχέση (3.7), κάτι που επιβεβαιώνει την εγκυρότητα των έως τώρα υπολογισμών μας. Πρόκειται λοιπόν για τη μετρική Schwarzschild, η οποία μπορεί να παρασταθεί και υπό τη μορφή πίνακα

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 1-\frac{2m}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

Αυτή η λύση προέκυψε το 1916 από τον Karl Schwarzschild, ο οποίος βρήκε τη μοναδική στατική, σφαιρικά συμμετρική λύση της εξίσωσης Einstein για το κενό. Αυτή περιγράφει τη γεωμετρία του χωρόχρονου στο εξωτερικό μιας σφαιρικής κατανομής. Μάλιστα, η λεπτομερής κατανομή της ύλης στο εσωτερικό του σώματος δεν επηρεάζει το εξωτερικό πεδίο. Ως εκ τούτου, η μελέτη της κίνησης των πλανητών του ηλιακού μας συστήματος είναι εφικτή μέσω της μελέτης των γεωδαισιακών της μετρικής Schwarzschild, αλλά μπορεί να αποτελέσει και μια σχετικά καλή προσέγγιση της γεωμετρίας στο εξωτερικό του Ήλιου. Κύριο χαρακτηριστικό της μετρικής αυτής είναι η χρονική ανεξαρτησία, κάτι το οποίο έρχεται σε συμφωνία με το θεώρημα του Birkhoff, σύμφωνα με το οποίο " *μία σφαιρικά συμμετρική λύση των εξισώσεων πεδίου για το κενό είναι απαραίτητα στατική* ".

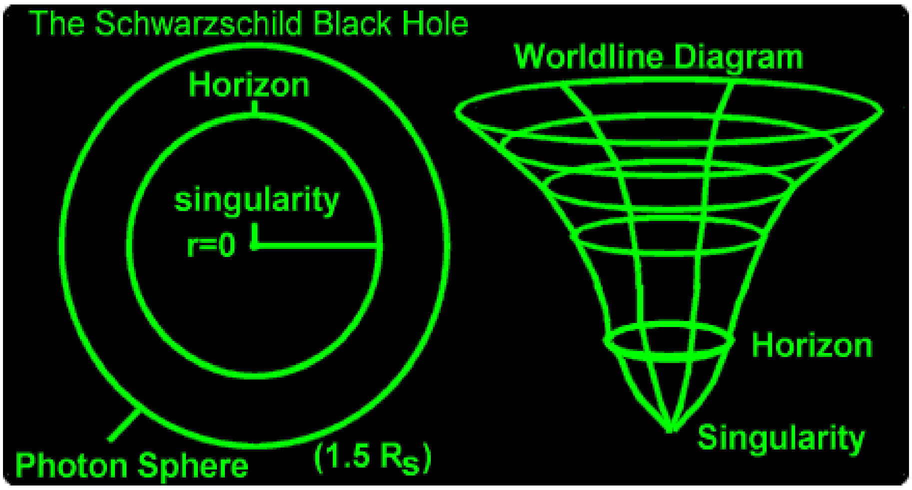
3.4 Μελανή οπή Schwarzschild

Η μετρική Schwarzschild μπορεί να σχετίζεται και με μία μαύρη τρύπα που δεν περιστρέφεται. Πρόκειται δηλαδή για την απλούστερη περίπτωση μιας μελανής οπής η οποία είναι μη περιστρεφόμενη, δεν έχει ηλεκτρικό φορτίο και χαρακτηρίζεται μόνο από μία παράμετρο, τη συνολική της μάζα.

Όλη η μάζα της μελανής οπής είναι συγκεντρωμένη σε ένα σημείο μηδενικής ακτίνας και πρακτικά άπειρης πυκνότητας (μοναδικότητα). Η μοναδικότητα περιβάλλεται από μία σφαιρική επιφάνεια που η ακτίνα της δίνεται από τη σχέση

$$R_s=\frac{2GM}{c^2}$$

και λέγεται ορίζοντας γεγονότων. Μάλιστα για ακτίνες μικρότερες της ακτίνας Schwarzschild η ταχύτητα διαφυγής εξισώνεται με αυτή της ταχύτητας του φωτός. Στην περιοχή αυτή είναι πρακτικά αδύνατη η διαφυγή από τη μαύρη τρύπα λόγω εξαιρετικά υψηλής βαρυτικής έλξης, ακόμη και για το ίδιο το φως! Δεν μπορούμε λοιπόν να διακρίνουμε τίποτε πέρα από τον ορίζοντα γεγονότων. Το γεγονός αυτό αποτελεί το βασικότερο πρόβλημα της επιστημονικής κοινότητας όσον αφορά τη μέλετη μιας μελανής οπής, αφού δεν είναι δυνατή η συλλογή εύρους πληροφοριών για τη σύσταση του εσωτερικού της!



Σχήμα 3.1: Η μελανή οπή Schwarzschild

(Πηγή σχήματος: https://blackholescience.wordpress.com)

Κεφάλαιο 4

Στο κεφάλαιο αυτό θα καθορίσουμε την ακριβή επίλυση των εξισώσεων Einstein για το τέλειο ρευστό. Με τον όρο τέλειο ρευστό εννοούμε ένα ρευστό που είναι ασυμπίεστο, δηλαδή με σταθερή πυκνότητα. Επίσης χαρακτηριστικό του είναι ότι σε μία πεπερασμένη ακτίνα, όπως θα δούμε προς το τέλος του κεφαλαίου αυτού, έχουμε μηδενισμό της πίεσής του.

4.1 Εξισώσεις Einstein για το τέλειο ρευστό

Όπως έχουμε αναφέρει ήδη από το δεύτερο κεφάλαιο, βάσει της σχέσης (2.66), οι εξισώσεις Einstein για ύλη είναι

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\kappa T_{\mu\nu} \tag{4.1}$$

όπου κ είναι σταθερά. Λόγω της σχέσης (2.49), η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\kappa[(\rho+p)u_\mu u_\nu-p g_{\mu\nu}] \tag{4.2}$$

Για τη βαθμωτή καμπυλότητα (βαθμωτό Ricci), από τη σχέση (2.45) έχουμε

$$R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

την οποία αναπτύσσουμε στις πλήρεις συνιστώσες της

$$R=g^{00}R_{00}+g^{01}R_{01}+g^{02}R_{02}+g^{03}R_{03}+g^{10}R_{10}+g^{11}R_{11}+g^{12}R_{12}+g^{13}R_{13}+g^{20}R_{20}+g^{21}R_{21}+g^{22}R_{22}$$
$$+g^{23}R_{23}+g^{30}R_{30}+g^{31}R_{31}+g^{32}R_{32}+g^{33}R_{33}$$

Από την παραπάνω σχέση " επιβιώνουν " μόνο οι διαγώνιοι όροι

$$R=g^{00}R_{00}+g^{11}R_{11}+g^{22}R_{22}+g^{33}R_{33} \tag{4.3}$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τις σχέσεις (3.14), (3.15), (3.16) και (3.17) με τον όρο -1 και έχουμε

$$\frac{A\ddot{A}}{B^2}-\frac{A\dot{A}\dot{B}}{B^3}+\frac{2A\dot{A}}{rB^2}=0 \tag{4.4}$$

$$\frac{-\ddot{A}}{A}+\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}+\frac{2\dot{B}}{rB}=0 \tag{4.5}$$

$$\frac{-1}{B^2}+\frac{r\dot{B}}{B^3}-\frac{r\dot{A}}{AB^2}+1=0 \tag{4.6}$$

$$\sin^2\theta\left(\frac{-1}{B^2}+\frac{r\dot{B}}{B^3}-\frac{r\dot{A}}{AB^2}+1\right)=0 \tag{4.7}$$

Εισάγουμε τις παραπάνω τέσσερις σχέσεις μαζί με την (2.37) στην (4.3) και παίρνουμε ότι

$$R=\frac{2\ddot{A}}{AB^2}-\frac{2\dot{A}\dot{B}}{AB^3}+\frac{4\dot{A}}{rAB^2}-\frac{4\dot{B}}{rB^3}+\frac{2}{r^2B^2}-\frac{2}{r^2} \tag{4.8}$$

Τώρα μπορούμε έχοντας πλέον όλα τα απαιτούμενα, να αναπτύξουμε τη σχέση (4.2) στις πλήρεις συνιστώσες της. Από αυτό το ανάπτυγμα παίρνουμε δεκαέξι εξισώσεις εκ των οποίων οι δώδεκα είναι της μορφής

$$(\rho+p)u_\mu u_\nu=0 \tag{4.9}$$

Οι υπόλοιπες τέσσερις είναι οι εξής

$$\frac{2A^2\dot{B}}{rB^3}-\frac{A^2}{r^2B^2}+\frac{A^2}{r^2}=(\rho+p)u_0^2-A^2p \tag{4.10}$$

$$\frac{2\dot{A}}{rA}+\frac{1}{r^2}-\frac{B^2}{r^2}=(\rho+p)u_1^2+B^2p \tag{4.11}$$

$$\frac{-r\dot{B}}{B^3}+\frac{r\dot{A}}{AB^2}+\frac{r^2\ddot{A}}{AB^2}-\frac{r^2\dot{A}\dot{B}}{AB^3}=(\rho+p)u_2^2+r^2p \tag{4.12}$$

$$\sin^2\theta\left(\frac{-r\dot{B}}{B^3}+\frac{r\dot{A}}{AB^2}+\frac{r^2\ddot{A}}{AB^2}-\frac{r^2\dot{A}\dot{B}}{AB^3}\right)=(\rho+p)u_3^2+r^2\sin^2\theta\, p \tag{4.13}$$

Χρησιμοποιώντας μια τετράδα διαδοχικών εξισώσεων της (4.9), έστω τις

$$(\rho+p)u_0u_1=0$$

$$(\rho+p)u_0 u_2=0$$

$$(\rho+p)u_0 u_3=0$$

$$(\rho+p)u_1 u_0=0$$

παίρνουμε ότι

$$u_1=u_2=u_3=0 \tag{4.14}$$

Επίσης, ισχύει εν γένει ότι

$$g^{\mu\nu}u_\mu u_\nu=1$$

όπου για $\mu=\nu=1$ η παραπάνω σχέση γίνεται

$$g^{00}u_0^2=1$$

$$u_0^2=\frac{1}{g^{00}}$$

και λόγω της σχέσης (2.37)

$$u_0^2=A^2 \tag{4.15}$$

Επομένως η σχέση (4.10) λόγω της (4.15) γίνεται

$$\frac{2A^2\dot{B}}{rB^3}-\frac{A^2}{r^2B^2}+\frac{A^2}{r^2}=(\rho+p)A^2-A^2p$$

για την οποία έπειτα από κάποιες στοιχειώδεις πράξεις έχουμε

$$\frac{2}{r}\frac{\dot{B}}{B^3}+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)=\chi\rho \tag{4.16}$$

,όπου ο παράγοντας χ είναι σταθερά και ισούται με $\chi=\frac{8\pi G}{c^4}$.

Επίσης η σχέση (4.11) λόγω της (4.14) γίνεται

$$\frac{2\dot{A}}{rA}+\frac{1}{r^2}-\frac{B^2}{r^2}=B^2p$$

για την οποία παίρνουμε εντέλει

$$\frac{2}{r}\frac{1}{B^2}\frac{\dot{A}}{A}-\frac{1}{r^2}(1-\frac{1}{B^2})=\chi\,p \tag{4.17}$$

Στη συνέχεια παίρνουμε τη σχέση (4.12) και τη πολλαπλασιάζουμε με τον όρο $\frac{B^2}{r^2}$

$$\frac{-\dot{B}}{r\,B}+\frac{\dot{A}}{r\,A}+\frac{\ddot{A}}{A}-\frac{\dot{A}\,\dot{B}}{AB}=B^2\,p \tag{4.18}$$

Τέλος αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (4.18) και (4.11) και παίρνουμε ότι

$$\frac{\ddot{A}}{A}+\frac{B^2}{r^2}(1-\frac{1}{B^2})-\frac{\dot{A}}{A}(\frac{1}{r}+\frac{\dot{B}}{B})-\frac{1}{r}\frac{\dot{B}}{B}=0 \tag{4.19}$$

Οι σχέσεις (4.16), (4.17) και (4.19) είναι οι εξισώσεις πεδίου για την περίπτωση του τέλειου ρευστού τις οποίες και θα χρησιμοποιήσουμε ώστε να καταλήξουμε στη αντίστοιχη μετρική.

4.2 Αναγωγή των πεδιακών εξισώσεων στο κενό

Στο σημείο αυτό θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε τους όρους Α και Β από τις εξισώσεις πεδίου της προηγούμενης ενότητας, με τα δεύτερα μέλη τους ίσα με το μηδέν. Θα εργαστούμε δηλαδή για την περίπτωση του κενού, κυρίως ως μια διεργασία ελέγχου της εγκυρότητας των όσων έχουμε έως τώρα υπολογίσει. Αν πράγματι οι μέχρι τώρα υπολογισμοί μας είναι σωστοί, θα πρέπει τα αποτελέσματά μας να συμπίπτουν με αυτά των σχέσεων (3.20) και (3.22).

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (4.16) - με το δεύτερο μέλος της πλέον μηδεν - με τον όρο B^2 και έχουμε

$$\frac{2\,\dot{B}}{r\,B}+\frac{B^2}{r^2}-\frac{1}{r^2}=0 \tag{4.20}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (4.19) και (4.20) έχουμε

$$\frac{\ddot{A}}{A}-\frac{1}{r}\frac{\dot{A}}{A}-\frac{\dot{A}}{A}\frac{\dot{B}}{B}-3\frac{\dot{B}}{B}\frac{1}{r}=0 \tag{4.21}$$

Επίσης πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (4.17) με τον όρο B^2 και έχουμε

$$\frac{2}{r}\frac{\dot{A}}{A}-\frac{B^2}{r^2}+\frac{1}{r^2}=0 \tag{4.22}$$

Η πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (4.19) και (4.22) μας δίνει

$$\frac{\ddot{A}}{A}+\frac{\dot{A}}{A}\frac{1}{r}-\frac{\dot{A}}{A}\frac{\dot{B}}{B}-\frac{1}{r}\frac{\dot{B}}{B}=0 \tag{4.23}$$

Τέλος αφαιρούμε τη σχέση (4.23) από την (4.21) και έχουμε

$$\frac{-2}{r}\frac{\dot{A}}{A}-\frac{2}{r}\frac{\dot{B}}{B}=0$$

$$\frac{\dot{A}}{A}+\frac{\dot{B}}{B}=0$$

$$B=\kappa\frac{1}{A} \tag{4.24}$$

Προφανώς θα πρέπει εφόσον πρόκειται για την περίπτωση του κενού να καταλήξουμε ότι $\kappa=1$.

Από την εξίσωση (4.16), έχουμε για το κενό

$$\frac{2\dot{B}}{rB^3}+\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2B^2}=0$$

η οποία ανάγεται στην

$$u'+\frac{1}{r}u=\frac{1}{r} \tag{4.25}$$

όπου η λύση της τελευταίας έχει ήδη βρεθεί στην ενότητα 3.3 και είναι

$$B=\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}} \tag{4.26}$$

το οποίο και αναμέναμε να βρούμε εφόσον μηδενίσαμε το δεύτερο μέλος των πεδιακών εξισώσεων που περιέχει τον τανυστή ενέργειας και ορμής.

Στη συνέχεια εισάγουμε τη σχέση (4.24) στη σχέση (4.19) και έχουμε

$$\frac{\ddot{A}}{A}+\frac{\kappa^2}{r^2A^2}-\frac{1}{r^2}-\frac{\dot{A}}{rA}+\frac{\dot{A}^2}{A^2}+\frac{A}{rA}=0$$

Συνεπώς, έπειτα από μερικές στοιχειώδεις πράξεις προκύπτει ότι

$$\kappa^2 = -r^2 A\ddot{A} + A^2 - r^2 \dot{A}^2 \qquad (4.27)$$

Αν η εξίσωση (4.27) είναι σωστή θα πρέπει να ικανοποιείται για $\kappa=1$ και για A ίσο με αυτό που δίνεται από τη σχέση (3.22). Πράγματι θέτοντάς τα στη παραπάνω σχέση, επιβεβαιώνουμε πράγματι ότι $\kappa=1$, που σημαίνει ότι η σχέση (4.24) ανάγενται στην

$$B = \frac{1}{A} \qquad (4.28)$$

Οι σχέσεις (4.26) και (4.28) δίνουν εντέλει το αποτέλεσμα που αρχικά αναμέναμε, επιβεβαιώνοντας παράλληλα τους έως τώρα υπολογισμούς μας.

4.3 Εσωτερική λύση για το τέλειο ρευστό

Στην ενότητα αυτή αφήνουμε οριστικά την περίπτωση του κενού και οδηγούμαστε στη διερεύνηση της λύσης για το τέλειο ρευστό. Όπως ήδη έχει αναφερθεί, η περίπτωση του τέλειου ρευστού συνεπάγεται σταθερή πυκνότητα. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (4.16) το δεύτερο μέλος με μια σταθερά C. Από την επίλυση αυτής της εξίσωσης θα βρούμε τον όρο B της μετρικής για το τέλειο ρευστό.

Είναι λοιπόν

$$\frac{2}{r}\frac{\dot{B}}{B^3} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{1}{B^2} = C$$

Η παραπάνω εξίσωση έπειτα από κάποιους στοιχειώδεις υπολογισμούς και θέτοντας $u = B^{-2}$ ανάγεται στην

$$u' + \frac{1}{r}u = \frac{1}{r}(1 - Cr^2) \qquad (4.30)$$

η οποία είναι μια εξίσωση της γενικής μορφής

$$u' + P(r)u = Q(r)$$

όπου στην περίπτωσή μας είναι $P(r) = \frac{1}{r}$ και $Q(r) = \frac{1}{r}(1 - Cr^2)$

Η διαφορική εξίσωση (4.30) λύνεται με τη βοήθεια του γενικού τύπου

$$y(r)=e^{-\int Pdr}[\int Q e^{\int Pdr} dr+\lambda]$$

Είναι λοιπόν

$$y(r)=\frac{1}{r}(\int 1-Cr^2 dr+\lambda)$$

Είναι δηλαδή

$$u=1-\frac{C r^2}{3}+\frac{\lambda}{r}$$

όπου $u=B^{-2}$. Επομένως θα έχουμε

$$\frac{1}{B^2}=1-\frac{C r^2}{3}+\frac{\lambda}{r}$$

Άρα

$$B=\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{c r^2}{3}+\frac{\lambda}{r})}}$$

όπου ο όρος $\frac{\lambda}{r}$ μπορεί να παραλειφθεί καθώς όταν το r τείνει στο μηδέν, ο όρος απειρίζεται. Συνεπώς για τον όρο B έχουμε

$$B=\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{c r^2}{3})}} \tag{4.31}$$

Συνεχίζουμε, αναζητώντας αντίστοιχα μία έκφραση και για τον όρο A . Η εξίσωση (4.19) με μια αναδιάταξη των όρων της γράφεται

$$\frac{\ddot{A}}{A}+\frac{B^2}{r^2}(1-\frac{1}{B^2})-\frac{1}{r}(\frac{\dot{A}}{A}+\frac{\dot{B}}{B})-\frac{\dot{A}}{A}\frac{\dot{B}}{B}=0 \tag{4.32}$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (4.16) με τον όρο B^2 και γίνεται

$$\frac{2}{r}\frac{\dot{B}}{B}+\frac{B^2}{r^2}-\frac{1}{r^2}=B^2 C \tag{4.33}$$

και αφαιρούμε κατά μέλη τις εξισώσεις (4.32) και (4.33)

$$\frac{\ddot{A}}{A}-\frac{1}{r}\frac{\dot{A}}{A}-\frac{3}{r}\frac{\dot{B}}{B}-\frac{\dot{A}}{A}\frac{\dot{B}}{B}=-C\,B^2 \qquad (4.34)$$

Στη συνέχεια εισάγουμε τη σχέση (4.31) στην (4.34) και παίρνουμε

$$\frac{\ddot{A}}{A}-\frac{1}{r}\frac{\dot{A}}{A}-C\,B^2-\frac{1}{3}c\,r\frac{\dot{A}}{A}B^2=-C\,B^2$$

όπου η τελευταία σχέση έπειτα από κάποιες στοιχειώδεις πράξεις και εισάγοντάς της τη σχέση (4.31) μας δίνει ότι

$$\frac{\ddot{A}}{A}=\frac{1}{r(1-\frac{C\,r^2}{3})} \qquad (4.35)$$

Παρατηρώντας το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (4.35) βλέπουμε ότι μπορούμε να το γράψουμε και ως το γινόμενο του αθροίσματος επί τη διαφορά

$$\frac{1}{r(1-\frac{1}{3}c\,r^2)}=\frac{1}{r(1-\sqrt{(\frac{C}{3})}r)(1+\sqrt{(\frac{C}{3})}r)}$$

το οποίο μπορούμε να το " σπάσουμε " σε επιμέρους όρους

$$\frac{1}{r(1-\sqrt{(\frac{C}{3})}r)(1+\sqrt{(\frac{C}{3})}r)}=\frac{\Gamma}{r}+\frac{\Delta}{(1-\sqrt{(\frac{C}{3})}r)}+\frac{E}{(1+\sqrt{(\frac{C}{3})}r)}$$

όπου μετά απο μια σειρά σχετικά απλών πράξεων και κάνοντας την υπόθεση ότι $\Gamma=1$ και $E=-\Delta$ παίρνουμε

$$\frac{-C}{3}+\Delta\sqrt{(\frac{C}{3})}+\Delta\sqrt{(\frac{C}{3})}=0$$

$$\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{C}{3})}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η εξίσωση (4.35) γράφεται πλέον ως

$$\frac{\ddot{A}}{\dot{A}}=\frac{1}{r}+\rho\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{C}{3})}\frac{1}{1-\sqrt{(\frac{C}{3})}r}-\rho\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{C}{3})}\frac{1}{1+\sqrt{(\frac{C}{3})}r}$$

Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης και έχουμε

$$\ln\dot{A}=\ln r-\rho\frac{1}{2}\ln(1-\sqrt{(\frac{C}{3})}r)-\rho\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{(\frac{C}{3})}r)+\ln\delta$$

όπου ο τελευταίος όρος προκύπτει ως σταθερά ολοκλήρωσης. Συνεχίζουμε λίγο ακόμα τις πράξεις και παίρνουμε

$$\ln\dot{A}=\ln\delta r-\rho\frac{1}{2}\ln(1-\frac{C}{3}r^2)$$

$$\ln\dot{A}=\ln\frac{\delta r}{(1-\frac{C}{3}r^2)^{(\frac{\rho}{2})}}$$

συνεπώς

$$\dot{A}=\frac{\delta r}{(1-\frac{C}{3}r^2)^{(\frac{\rho}{2})}}$$

όπου για την περίπτωση $\rho=1$ μας δίνει

$$\dot{A}=\frac{\delta r}{\sqrt{(1-\frac{C}{3}r^2)}}$$

και αντίστοιχα για $\rho=-1$

$$\dot{A}=\delta r\sqrt{(1-\frac{C}{3}r^2)}$$

Για την πρώτη περίπτωση ολοκληρώνουμε και έχουμε

$$A=\frac{-3\delta}{C}\sqrt{(1-\frac{Cr^2}{3})}+\delta_0$$

$$A=C\,\delta_0-3\,\delta\sqrt{(1-\frac{1}{3}C\,r^2)} \tag{4.36}$$

όπου δ_0 είναι η σταθερά που προκύπτει μέσω της ολοκλήρωσης. Αν εργαστούμε με ανάλογο τρόπο και για την περίπτωση $\rho=-1$ καταλήγουμε σε αποτέλεσμα το οποίο δεν ικανοποιεί την εξίσωση (4.32).

Συνεπώς βάσει των σχέσεων (4.31), (4.36) και δεδομένου ότι η γενική μορφή της μετρικής δίνεται από την σχέση (2.35), παίρνουμε τη μετρική για την περίπτωση του τέλειου ρευστού

$$ds^2=\left(C\,\delta_0-3\,\delta\sqrt{(1-\frac{1}{3}C\,r^2)}\right)^2 dt^2-\frac{dr^2}{1-\frac{1}{3}C\,r^2}-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\Phi^2) \tag{4.37}$$

Επίσης στο σημείο αυτό μπορούμε πλέον να προχωρήσουμε και στη διατύπωση μιας έκφρασης για την πίεση του ρευστού. Η εξίσωση (4.17) λόγω των σχέσεων (4.31) και (4.36) μας δίνει

$$\chi\, p=2\frac{1}{r}(1-\frac{1}{3}C\,r^2)\frac{\delta\, r}{\sqrt{(1-\frac{1}{3}C\,r^2)}}\frac{1}{\frac{-3\delta}{C}\sqrt{(1-\frac{1}{3}C\,r^2)}+\delta_0}-\frac{1}{r^2}[1-(1-\frac{1}{3}C\,r^2)]$$

από την οποία έπειτα απο ορισμένες πράξεις, παίρνουμε ότι

$$\chi p=\frac{1}{3}C\frac{9\,\delta\sqrt{(1-\frac{1}{3}C\,r^2)}-C\,\delta_0}{C\,\delta_0-3\,\delta\sqrt{(1-\frac{1}{3}C\,r^2)}} \tag{4.38}$$

4.4 Συνένωση εσωτερικής και εξωτερικής λύσης

Η ενότητα αυτή αφορά κυρίως την εύρεση των σταθερών ολοκλήρωσης που προέκυψαν κατά τον υπολογισμό των όρων A και B της μετρικής για το τέλειο ρευστό. Για να γίνει αυτό εφικτό, θα απαιτήσουμε οι δύο λύσεις - εσωτερική και εξωτερική - να ταυτίζονται ως προς τις αντίστοιχες συνιστώσες τους για κάποιο $r=R$. Η ισότητα των δύο συνιστωσών των μετρικών που δίνονται από τις σχέσεις (3.23) και (4.37) επιβάλλει

$$\left(C\,\delta_0-3\,\delta\sqrt{(1-\frac{1}{3}C\,r^2)}\right)^2=1-\frac{2m}{r} \tag{4.39}$$

Επίσης στην ακτίνα $r=R$ όπου έχουμε " ταύτιση " των δύο λύσεων, απαιτούμε να έχουμε συνοχή ως προς $\frac{g_{(\mu\nu,r)}}{N}$, όπου $N=\sqrt{(1-\frac{2m}{r})}$ για την εξωτερική και $N=\sqrt{(1-\frac{1}{3}Cr^2)}$ για την εσωτερική περίπτωση. Η συνθήκη αυτή μας επιβάλλει ακόμα δύο εξισώσεις

$$\sqrt{(1-\frac{1}{3}Cr^2)}=\sqrt{(1-\frac{2m}{r})} \tag{4.40}$$

$$2C\delta r(C\delta_o-3\delta\sqrt{(1-\frac{1}{3}Cr^2)})=\frac{2m}{r^2}\sqrt{(1-\frac{2m}{r})} \tag{4.41}$$

Από τις σχέσεις (4.39), (4.40) και (4.41) παίρνουμε ότι

$$C=\frac{6m}{r^3} \tag{4.42}$$

$$\delta=\frac{1}{6} \tag{4.43}$$

$$C\delta_0=\frac{3}{2}\sqrt{(1-\frac{2m}{r})} \tag{4.44}$$

όπου $r=R$.
Αν εισάγουμε τους παραπάνω όρους στην εξίσωση (4.38) βλέπουμε ότι στο σημείο όπου έχουμε " ταύτιση " των δύο λύσεων, έχουμε μηδενισμό της πίεσης.

Αυτή η συνέχεια των συνιστωσών $g_{\mu\nu}$ καθώς και των κάθετων διανυσμάτων Ν της μετρικής είναι απόρροια του γεγονότος ότι η " υπερεπιφάνεια " στην οποία έχουμε ταύτιση των δύο λύσεων είναι μία και κοινή και για τις δύο λύσεις εκατέρωθεν αυτής. Αυτό λοιπόν εξασφαλίζει τη συνοχή και των παραγώγων της μετρικής σε εφαπτομενικές ως προς την επιφάνεια αυτή διευθύνσεις. Συνεπώς αυτή η οριακή επιφάνεια έχει μια εγγενή γεωμετρία και μπορεί να ενσωματωθεί εξίσου και στις δύο λύσεις - κενού και τέλειου ρευστού - . Άρα οποιαδήποτε μετρική επάγεται σε αυτή την επιφάνεια θα πρέπει να είναι ουσιαστικά η ίδια. Αυτή η προσέγγιση, ώστε να γίνει εφικτή η ταύτιση των δύο λύσεων, είναι ιδιαίτερα βολική καθώς δεν απαιτεί την εφαρμογή γκαουσιανών συντεταγμένων και τη χρήση της αντίστοιχης γεωμετρίας, γεγονός που θα έκανε αρκετά πολυπλοκότερους τους υπολογισμούς μας.

4.5 Από το τέλειο ρευστό στη μετρική Minkowski

Στο σημείο αυτό μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η " διαδρομή " που ακολουθήσαμε δεν είναι αμφίδρομη. Με λίγα λόγια, από την περίπτωση του κενού μπορούμε να οδηγηθούμε σε μια λύση για το τέλειο ρευστό αλλά όχι και το αντίθετο! Θα περίμενε κάποιος ότι μηδενίζοντας την πυκνότητα - άρα και την πίεση - από την μετρική τη σχέσης (4.37) θα παίρναμε ξανά τη μετρική Schwarzschild.

Η σχέση (4.16) λόγω των σχέσεων (4.31) και (4.42) ανάγεται στην

$$\chi\rho=\frac{2}{r}\frac{m}{r^2\sqrt{(1-\frac{2m}{r})}(\sqrt{(1-\frac{2m}{r})})^3}+\frac{1}{r^2}(1-\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}) \qquad (4.45)$$

Παρατηρώντας τη σχέση (4.45) βλέπουμε ότι για το μηδενισμό της πυκνότητας μας αρκεί να μηδενίσουμε τη μάζα. Συνεπώς αυτό που πρέπει τώρα να κάνουμε είναι να θέσουμε στη μετρική του τέλειου ρευστού τη μάζα m ίση με το μηδέν, ώστε να δούμε τι αποτέλεσμα θα μας δώσει. Η μετρική της σχέσης (4.37) λόγω των σχέσεων (4.42), (4.43) και (4.44) γίνεται

$$ds^2=(\frac{3}{2}\sqrt{(1-\frac{2m}{r})}-\frac{1}{2}\sqrt{(1-\frac{2m}{r})})^2 dt^2-\frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}}-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\Phi^2) \qquad (4.46)$$

Η μετρική (4.46) με μηδενισμό της μάζας m μας δίνει

$$ds^2=dt^2-dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\Phi^2) \qquad (4.47)$$

η οποία είναι βεβαίως η μετρική Minkowski σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Το γεγονός ότι από τη λύση του τέλειου ρευστού καταλήξαμε στη μετρική Minkowski οφείλεται στο ότι κατά τη διαδικασία εύρεσης του όρου B της μετρικής για το τέλειο ρευστό στην ενότητα 4.3, εξαλείψαμε τον όρο $\frac{\lambda}{r}$ που προέκυπτε. Αν κρατούσαμε τον όρο αυτό θα μπορούσαμε να διατηρήσουμε μοναδικότητα (singularity) και έτσι θα μπορούσε η " διαδρομή " από τη λύση του κενού στο τέλειο ρευστό να είναι αμφίδρομη.

Τέλος, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι καθ' όλη τη διάρκεια των υπολογισμών μας χρησιμοποιήσαμε τις λεγόμενες γεωμετροποιημένες μονάδες, σύμφωνα με τις οποίες η ταχύτητα του φωτός c και η βαρυτική σταθερά G είναι ίσες με τη μονάδα. Για αυτό οι δύο αυτές σταθερές δεν εμφανίζονται σε κανέναν από τους όρους των μετρικών.

Βιβλιογραφία

[1] Παπακώστας Τ. (1991) Εισαγωγή στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, Ευρωπαικό Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα Erasmus, Πανεπιστήμιο Κρήτης

[2] Papapetrou A. (1974) Lectures on General Relativity, Institut Henri Poincare'

[3] Hartle J. B. (2012) Βαρύτητα: Εισαγωγή στη γενική σχετικότητα του Einstein, εκδόσεις Τζιόλας

[4] Martin J. L. (2005) Γενική Σχετικότητα: Μια βασική εισαγωγή για Φυσικούς, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

[5] Τομαράς Θ.Ν. Εισαγωγή στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, πανεπιστημιακές σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Κρήτης

[6] Τομαράς Θ.Ν. Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, πανεπιστημιακές σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Κρήτης

[7] Serway R.A. - Moses C.J. - Moyer C.A. (2007) Σύγχρονη Φυσική, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

[8] Περιβολαρόπουλος Λ. (2015) Κοσμολογία: Τανυστής Ενέργειας και Ορμής, διαλέξεις τμήματος Φυσικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων (https://vimeo.com/122198456)

[9] Περιβολαρόπουλος Λ. (2015) Κοσμολογία: Μετρική - Τανυστές, διαλέξεις τμήματος Φυσικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων (https://vimeo.com/121399443)

[10] Περιβολαρόπουλος Λ. (2015) Κοσμολογία: Συναλλοίωτη Παράγωγος - Εξισώσεις Einstein, διαλέξεις τμήματος Φυσικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων (https://vimeo.com/122201124)

[11] Περιβολαρόπουλος Λ. (2015) Κοσμολογία: Χωροχρόνος Robertson - Walker - Χωρική Καμπυλότητα, διαλέξεις τμήματος Φυσικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων (https://vimeo.com/122198048)

[12] Landau L.D. - Lifshitz E.M. (1971) The classical theory of fields, Pergamon Press

[13] Κόκκοτας Κ.Δ. (2008) Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, πανεπιστημιακές σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

[14] Krasinski A. - Plebanski J. (2006) An Introduction to General Relativity and Cosmology, Cambridge University Press