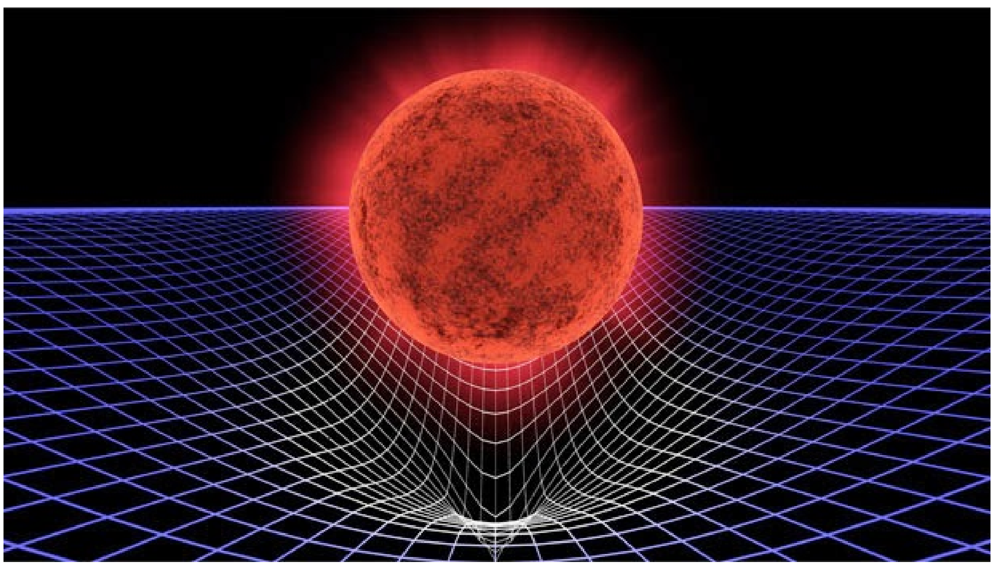
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Φυσικής

Ακριβείς λύσεις των εξισώσεων Einstein:
Η περίπτωση της σφαιρικής συμμετρίας με τέλειο ρευστό



Θεόδωρος Α. Μπουρνέλης

Διπλωματική Εργασία

Υπεύθυνος Καθηγητής: Ταξιάρχης Παπακώστας

Ηράκλειο, 2015

Εισαγωγή

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας αποτελεί αυτή τη στιγμή την επικρατούσα θεωρία στην επιστήμη της Φυσικής, για την κατανόηση της βαρύτητας. Σαν ανακάλυψη κατέχει μία από τις πρώτες θέσεις στις θεωρίες που έφεραν την επανάσταση στον τομέα της Φυσικής, την περίοδο που δημοσιεύθηκαν. Τα θεωρητικά αποτελέσματα που προβλέπονται από τη θεωρία βρίσκουν επαλήθευση μέχρι και σήμερα στις παρατηρήσεις που κάνουμε στο Σύμπαν και η ανακάλυψή της άνοιξε τον δρόμο και σε άλλους κλάδους της επιστήμης είτε για να αναπτυχθούν, όπως η αστροφυσική και η κοσμολογία, είτε για να επανέλθουν στο προσκήνιο, όπως η κλασική φυσική.

Στην συγκεκριμένη εργασία σκοπεύουμε να ρίξουμε μια πρώτη – μικρή ματιά στη θεωρία αυτή. Όπως θα αντιληφθεί ευθύς αμέσως ο αναγνώστης, αυτό το εγχείρημα κάθε άλλο παρά εύκολο είναι. Επίσης για να γίνει αυτό, θα πρέπει να ξεκινήσουμε από τα αρχικά και βασικά εργαλεία, ούτως ώστε να φτάσουμε στην ίδια τη θεωρία και να μπορούμε να την διαχειριστούμε με αξιώσεις. Ως αποτέλεσμα της θεωρίας αυτής εξάγονται οι γνωστές εξισώσεις του Einstein, οι οποίες όμως είναι εν γένει περίπλοκες. Αν και υπάρχουν καταγεγραμμένες κάποιες λύσεις των εξισώσεων του Einstein, η πολυπλοκότητα στην επίλυσή τους αυξάνεται ραγδαία με την παραμικρή αλλαγή ή προσθήκη στις εκάστοτε συνθήκες. Για τον λόγο αυτόν επιλέξαμε αρχικά να παρουσιάσουμε το προφίλ της θεωρίας αυτής και στο τέλος να καταγράψουμε δύο φυσικά παραδείγματα, τα οποία είναι όσο το δυνατόν πιο απλά στην επίλυσή τους. Ελπίζουμε ότι ο αναγνώστης θα μείνει ικανοποιημένος από το αποτέλεσμα.

Ευχαριστίες

Το παρόν έργο αποτελεί εργασία ενός και μισού έτους και είναι ιδιαίτερη η αξία του για μένα. Θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς τον επιβλέποντα καθηγητή και καθοδηγητή μου στο ταξίδι αυτό, κ. Ταξιάρχη Παπακώστα για την προσωπική του εργασία και τον χρόνο που διέθεσε, ούτως ώστε να έλθει εις πέρας η παρούσα εργασία. Μέσα στα χαώδη ζητήματα και στις ελλείψεις μου σε θέματα Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, η βοήθειά του είχε καθοριστικό ρόλο, σε ό,τι αφορά αρχικά την κατανόηση της θεωρίας κι έπειτα την εξαγωγή των απαιτούμενων αποτελεσμάτων. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές και το διοικητικό προσωπικό του Πανεπιστημίου Κρήτης που μου έδωσαν αναρίθμητες και πολύτιμες γνώσεις στον τομέα της Φυσικής και με βοήθησαν από την αρχή, έως και το τέλος της πορείας μου, στα προπτυχιακά χρόνια. Η καθοδήγηση τους και η παντός τύπου βοήθεια ήταν ανυπολόγιστης αξίας. Ακόμα, δεν θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω το Θεό και την οικογένειά μου για την ανιδιοτελή και αέναη στήριξή τους, χωρίς την οποία δεν θα είχα φτάσει ως εδώ.

Περιεχόμενα

1. <u>Η ειδική θεωρία της σχετικότητας</u>

Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας (Ε.Θ.Σ.) εκφράσθηκε αρχικά για να περιγραφούν σωστότερα οι ιδιότητες του γενικού χώρου και του χρόνου σαν ένα πράγμα (χωρόχρονος). Ωστόσο η εφαρμογή της είναι τελικά εφικτή σε χωρικές αποστάσεις και σε χρονικά διαστήματα στα οποία είναι δυνατό να αγνοήσουμε την επίδραση της βαρύτητας. Εν τέλει, τα φαινόμενα στα οποία ισχύει αυτή η προϋπόθεση είναι πάρα πολλά στη φύση μας κι έτσι την συναντά κανείς σε αρκετά σημεία στην καθημερινή του ζωή. Αρκετά νωρίς διαπιστώθηκε η ανεπάρκεια της Νευτώνειας μηχανικής, ιδιαίτερα όταν η επιστήμη μελέτησε φαινόμενα όπως π.χ. η διάσπαση σωματιδίων ή η κίνησή τους με ταχύτητες κοντά σε αυτές της ταχύτητας του φωτός. Έτσι η Ε.Θ.Σ. ήρθε ουσιαστικά να διορθώσει τις ατέλειες της μηχανικής του Νεύτωνα και μάλιστα η θεωρία αυτή επαρκεί σε τεράστιο βαθμό, καθώς συναντά κανείς εκπληκτική πειραματική επαλήθευση στα αποτελέσματά της. Πλέον δεχόμαστε ότι η θεωρία αυτή υποκαθιστά τη θεωρία του Νεύτωνα, με την δεύτερη να είναι μια καλή προσέγγιση σε μια οριακή κατάσταση της πρώτης θεωρίας.

Δύο από τα χαρακτηριστικά συμπεράσματά της είναι η διαστολή του χρόνου και η συστολή του μήκους. Αν χρησιμοποιήσουμε δύο αδρανειακούς παρατηρητές, ο ένας εκ των οποίων κινείται με σταθερή ταχύτητα και ο άλλος παραμένει ακίνητος, και μετρήσουν χρόνο και μήκος για τα ίδια συμβάντα, τότε οι δύο σχέσεις που συνδέουν τις μετρούμενες ποσότητες είναι οι εξής:

- Διαστολή χρόνου: $\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$, όταν Δτ μετράει ο παρατηρητής, ως προς τον οποίο τα γεγονότα συμβαίνουν στην ίδια θέση και Δt ο άλλος παρατηρητής. Το μέγεθος ‘‘u’’ είναι το μέγεθος της ταχύτητας με την οποία κινείται ο ένας παρατηρητής σε σχέση με τον άλλο.
- Συστολή μήκους: $L = L_0\sqrt{1-u^2/c^2}$, όπου L μετράει ο παρατηρητής, ως προς τον οποίο η μετρούμενη απόσταση κινείται και L_0 ο άλλος παρατηρητής.

Έτσι γίνεται εφικτή η σύνδεση των μετρούμενων συντεταγμένων για δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Αν τώρα επιχειρήσουμε να περιγράψουμε φαινόμενα με τη χρήση συντεταγμένων, τότε η σύνδεση των συντεταγμένων μεταξύ των δύο παρατηρητών (και άρα η επικοινωνία τους) γίνεται μέσω των μετασχηματισμών Lorentz, όπου με τόνο (΄) αναφέρονται οι συντεταγμένες του κινούμενου παρατηρητή και χωρίς τόνο αυτές του σταθερού. Για κίνηση στον άξονα x λοιπόν, ο μετασχηματισμός είναι ο εξής:

$$\begin{pmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = L(u) \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix},\ L(u) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \beta = \frac{u}{c},\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

και μάλιστα προεκτείνεται και στα μεγέθη των ταχυτήτων, αλλά και σε αυτά της ενέργειας και των επιμέρους ορμών ως εξής:

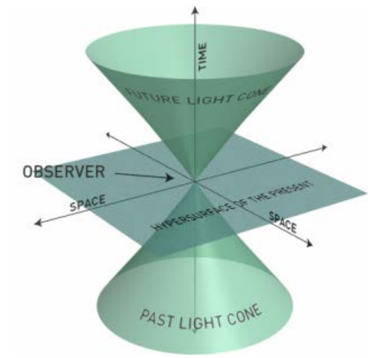
$$\begin{pmatrix} E'/c \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = L(u) \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Αναζητούμε έναν τρόπο για να εκφράσουμε την απόσταση μεταξύ δύο σημείων στον χωρόχρονο, ο οποίος να έχει καθολική εφαρμογή. Απουσία κάποιου σημείου αναφοράς, η μόνη σταθερά που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι η ταχύτητα του φωτός και το διάστημα το οποίο αυτό διανύει. Έτσι μπορούμε να καταλήξουμε στην γενική μορφή ενός χωροχρονικού διαστήματος: $\Delta s^2=c^2\Delta t^2-\Delta x^2-\Delta y^2-\Delta z^2 \Leftrightarrow ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, το οποίο μάλιστα είναι και αναλλοίωτο κάτω από τον παραπάνω μετασχηματισμό.

1.1 Γεωμετρία Minkowski και χωροχρονικό διάστημα

Στην ειδική σχετικότητα, ο Ευκλείδειος χώρος καλείται και χωρόχρονος Minkowski. Πλέον θα αντιμετωπίζουμε τον χώρο και τον χρόνο σαν μια ενιαία ομοιογενής οντότητα. Άλλωστε, παραπάνω παραθέσαμε το στοιχείο μήκους ($ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$) του χωρόχρονου Minkowski, το οποίο εν γένει παραμένει αναλλοίωτο ως προς μετατοπίσεις σε χώρο και χρόνο, αλλά και ως προς στροφές στον Ευκλείδειο χώρο. Με την επιλογή μας αυτή, καλούμαστε ουσιαστικά να μιλήσουμε για τετραδιάστατος χωρόχρονος (και όχι για τρισδιάστατο όπως μέχρι και πριν την ανάλυση αυτήν) με 3 χωρικές συντεταγμένες και 1 χρονική. Αυτός ο τετραδιάστατος χωρόχρονος αναπαρίσταται με σημεία, τα οποία αποκαλούνται γεγονότα (κοσμικά σημεία), σε διαγράμματα, τα λεγόμενα διαγράμματα Minkowski. Τα γεγονότα αυτά εξελίσσονται στον χρόνο και αναπαρίστανται ουσιαστικά σε ένα διάγραμμα τρισδιάστατο εν γένει, χωρισμένο σε 2 μέρη. Παρακάτω μπορούμε να το δούμε και σε εικόνα[1]:

[1] https://www.google.gr/search?newwindow=1&biw=1920&bih=943&tbm=isch&sa=1&q=%CE%9A%CF



Εικόνα 1.1: Διάγραμμα Minkowski. Βλέπουμε τόσο τους κώνους, όσο και το επίπεδο που ορίζει την κοσμική γραμμή.

Παρατηρούμε δύο κώνους, οι οποίοι λέγονται κώνοι φωτός, και ένα επίπεδο, την κοσμική γραμμή. Ο ‘‘πάνω’’ κώνος εμπεριέχει την πορεία του μέλλοντος για πραγματικά γεγονότα, ο ‘‘κάτω’’ κώνος τα του παρελθόντος και το επίπεδο ορίζει την κοσμική γραμμή, στην οποία ξεκίνησε να συμβαίνει το υπό εξέταση γεγονός. Έτσι προκύπτει η ανάγκη για τη χρήση τετρανυσμάτων, τα οποία θα αναλύσουμε περισσότερο παρακάτω, ούτως ώστε η ανάλυση να εμπεριέχει και τις τέσσερις διαστάσεις. Επίσης, για να έχουμε μια γενική εικόνα του όλου φορμαλισμού, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έναν άλλο τανυστή, τον μετρικό τανυστή g. Πιο συγκεκριμένα, μια μικρή απόσταση ds ανάμεσα σε δύο κοντινά σημεία με ‘‘n’’ το πλήθος συντεταγμένες, την εκφράζουμε ως εξής:

$$ds^2=g_{00}(dx^0)^2+g_{11}(dx^2)^2+\ldots+g_{12}(dx^1dx^2)+\ldots = \sum_{a,b=0}^{n} g_{ab}(x)dx^a dx^b$$

Εν γένει ο μετρικός λοιπόν, τανυστής g είναι ο εξής: $g = \begin{bmatrix} g_{00} & \cdots & g_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n0} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}$

Ένα οικείο παράδειγμα για τον φορμαλισμό αυτόν είναι η χωροχρονική απόσταση Minkowski:

$$\rightarrow ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2,$$

%8E%CE%BD%CE%BF%CF%82+%CF%86%CF%89%CF%84%CF%8C%CF%82+%CF%83%CE%B5+%CE%B4%CE%B9%CE%AC%CE%B3%CF%81%CE%B1%CE%BC%CE%BC%CE%B1+Minkowski&oq=%CE%9A%CF%8E%CE%BD%CE%BF%CF%82+%CF%86%CF%89%CF%84%CF%8C%CF%82+%CF%83%CE%B5+%CE%B4%CE%B9%CE%AC%CE%B3%CF%81%CE%B1%CE%BC%CE%BC%CE%B1+Minkowski&gs_l=img.3...630714.638973.0.639223.42.35.5.0.0.1.302.4654.0j22j5j1.28.0.msedr...0...1c.1.58.img..38.4.591.ExZr9yLNMww#facrc=_&imgdii=_&imgrc=Esa6IwIZki850M%253A%3BGsukkMQysA3LZM%3Bhttp%253A%252F%252Fwikiimages.qwika.com%252Fthumb%252Fen%252F9%252F9a%252FWorld_line.png%252F320px-World_line.png%3Bhttp%253A%252F%252Fwikipedia.qwika.com%252Fen2el%252FWorld_line%3B320%3B311

όπου x^1=x ή r , x^2=y ή θ , x^3=z ή φ. Στο παράδειγμα αυτό, μπορούμε να δούμε ότι $g_{00}= c^2$, $g_{11}= -1$, $g_{22}= -1$, $g_{33}= -1$ και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του τανυστή g είναι μηδενικά, για την περίπτωση αυτή. Τότε λέμε ότι ο τανυστής g είναι συμμετρικός και μάλιστα διαγώνιος. Ένα φυσικό παράδειγμα ενός μη διαγώνιου τανυστή g είναι η περίπτωση στην οποία έχουμε την μετρική Minkowski και κάνουμε έναν μετασχηματισμό σε μη αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων. Αν ο μετασχηματισμός μας ήταν σε αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων (μετασχηματισμοί Lorentz) η μετρική θα παρέμενε αναλλοίωτη. Στην περίπτωση του μη αδρανειακού όμως η μετρική αλλάζει, καθώς προκύπτουν και μη μηδενικοί όροι με επιμέρους γινόμενα των συντεταγμένων (π.χ. D(x)dxdy). Πιο συγκεκριμένα μπορούμε να δούμε ότι κατά τον παρακάτω μετασχηματισμό

$$x=x'\cos(\Omega t)-y'\sin(\Omega t), \qquad y= x'\sin(\Omega t)+y'\cos(\Omega t), \qquad z=z'$$

μετά από λίγες πράξεις η μετρική παίρνει τη μη διαγώνια μορφή:

$$ds^2=[c^2 - \Omega^2(x'^2 + y'^2)]dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + \underline{2\Omega y'dx'dt} - \underline{2\Omega x'dy'dt}$$

1.2 Τετρανύσματα

Για να μπορέσουμε να εργασθούμε στον τετραδιάστατο χώρο θα χρειαστούμε ανύσματα ανάλογα με τα διανύσματα στον δισδιάστατο χώρο. Για αυτόν τον σκοπό ορίζονται τα τετρανύσματα στον τετραδιάστατο Minkowski χώρο. Αρχικά το τετράνυσμα χώρου είναι το $x=(x^0,x^1,x^2,x^3)$, όπου x_0=ct και τα υπόλοιπα είναι οι συντεταγμένες του συστήματος στο οποίο δουλεύουμε. Ακόμα μπορούμε να ορίσουμε άλλα τετρανύσματα όπως η τετραταχύτητα, η τετραορμή κ.α. Για παράδειγμα η τετραταχύτητα θα έχει τη μορφή $u=\frac{dx}{d\tau}=\left(c\frac{dt}{d\tau},\frac{dt}{d\tau}\frac{dx^1}{dt},\frac{dt}{d\tau}\frac{dx^2}{dt},\frac{dt}{d\tau}\frac{dx^3}{dt}\right)$, ενώ η τετραορμή $p=mu=(mu_0,mu_1,mu_2,mu_3)$[2]. Ο χρόνος dτ εν προκειμένω αντιστοιχεί στο ελάχιστο διάστημα ds. Ο αναγνώστης, αν το θέλει, μπορεί να βρει αποδείξεις για τις σχέσεις αυτές σε διάφορα επιστημονικά βιβλία. Σκοπός αυτής της ενότητας δεν είναι να θεμελιώσει τη θεωρία αυτή, αλλά να εισάγει τον αναγνώστη στις έννοιες που θα ακολουθήσουν.

[2] Βλ. Μάγγος, Π. Δημήτριος. (2012). ‘‘Φαινόμενο Unruh’’. *Διπλωματική εργασία*, σελ. 25 – 31.

1.3 Άλλα μαθηματικά εργαλεία

Νέα σημειογραφία

Ακόμα και πριν από την υποενότητα αυτή, χρησιμοποιήσαμε μια καινούρια σημειογραφία, η οποία είναι καθοριστικής σημασίας για να υπάρξει μια πιο ισορροπημένη και ευέλικτη ανάλυση της θεωρίας. Αυτή φυσικά έχει να κάνει με τη χρήση ενός ενιαίου γράμματος με εκθέτη (ή δείκτη) και εναλλαγή αυτού. Η εναλλαγή αυτή θα εκφράζει τις διάφορες συντεταγμένες, π.χ. $x^1=x$, $x^2=y$ και $x^3=z$, ή άλλα μεγέθη τα οποία συγκεντρώνονται σε πίνακες, όπως αυτούς των τανυστών ή των τετρανυσμάτων. Άλλο παράδειγμα τέτοιας σημειογραφίας είναι η παράγωγοι ως προς συγκεκριμένες μεταβλητές, όπως π.χ. $\frac{\partial f}{\partial x} \to \partial_x f$ ή $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \to \partial_\alpha$.

Άθροιση κατά Einstein

Η σύμβαση άθροισης κατά Einstein είναι μια χρήσιμη μέθοδος για να γράψει κανείς αθροίσματα. Το κύριο χαρακτηριστικό είναι η διπλή παρουσία ενός δείκτη (ως δείκτη και ως εκθέτη) μέσα σε ένα γινόμενο δύο μεγεθών:

$$\sum_{i=0}^{N} A_i B^{ib} \to A_i B^{ib} = A_1 B^{1b} + A_2 B^{2b} + \cdots + A_N B^{Nb}$$

Παρατηρούμε ότι ο δείκτης i είναι αυτός που αθροίζεται, ενώ ο δείκτης j δεν συμμετάσχει στην πράξη. Αυτό δηλώνει ότι ο j δύναται να πάρει συγκεκριμένη τιμή κατά την άθροιση, άρα να αντιστοιχίσει σε συγκεκριμένο μέγεθος (π.χ. $x^3=z$) και όχι σε ένα άθροισμα μεγεθών. Άλλο παράδειγμα τέτοιας σημειογραφίας είναι:

$$A^i = L^i_j A^j = L^i_0 A^0 + L^i_1 A^1 + L^i_2 A^2 + L^i_3 A^3$$

Σε αυτήν την περίπτωση, τον i τον ονομάζουμε «βουβό» δείκτη, μιας και δεν χρησιμεύει στον προσδιορισμό ενός μεγέθους, αλλά μόνο στο υπολογιστικό κομμάτι.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η παρουσία ενός δείκτη στο πάνω ή το κάτω μέρος ενός μεγέθους, στη γενική σχετικότητα έχει μεγάλη σημασία, μιας και διαχωρίζουν συναλλοίωτα και ανταλλοίωτα[3] μεγέθη.

[3] Περισσότερα, βλ. Weinberg, S. (1972). ‘‘Gravitation and cosmology: Principles and applications of the General theory of Relativity’’, p. 35 – 39.

Ανταλλοίωτα είναι αυτά, τα οποία μετασχηματίζονται με τον τανυστή Lorentz ως εξής

$$V^{a\prime}=L^{a}{}_{b}V^{b}$$

, ενώ συναλλοίωτα αυτά που μετασχηματίζονται μέσω του αντίστροφου τανυστή Lorentz ως εξής

$$U_{a}{}^{\prime}=(L^{a}{}_{b})^{-1}U_{b}=L_{a}{}^{b}U_{b}$$

Ωστόσο δεν θα επεκταθούμε πολύ ούτε σε αυτό το κομμάτι, όπως και σε όλα τα παρακάτω για τον ίδιο λόγο που δεν επεκταθήκαμε και για τα τετρανύσματα.

Η μετρική

Σε αρχικό στάδιο έχουμε συνδέσει την απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία με το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Προέκταση αυτού του Θεωρήματος είναι και ο σχηματισμός της λεγόμενης μετρικής, ως την ελάχιστη απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία, μέσα σε έναν χωρόχρονο. Πιο συγκεκριμένα στην ευκλείδεια γεωμετρία για ένα ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, όταν ‘‘α’’ η υποτείνουσα. Με την ίδια λογική, αν σημειώσουμε δύο γεγονότα μέσα στον χωρόχρονο με συντεταγμένες (t_1,x_1,y_1,z_1) και (t_2,x_2,y_2,z_2) τότε η απόσταση Δs υπολογίζεται από τη σχέση

$$(\Delta s)^2=c^2(t_1-t_2)^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2$$

Στην περίπτωση που αυτά τα δύο σημεία απέχουν απειροελάχιστη απόσταση, η έκφραση αυτή μετατρέπεται

$$(ds)^2=c^2(dt)^2-(dx)^2-(dy)^2-(dz)^2$$ [4]

Έτσι, όταν χρειαστεί να μιλήσουμε για απόσταση σε επίπεδο χωρόχρονο, αυτή είναι η ‘‘μετρική’’ την οποία θα χρειαστούμε. Προφανώς η μετρική μπορεί να γραφεί και σε μορφή πολικών ή κυλινδρικών συντεταγμένων ή σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα επιθυμούμε, διατηρώντας την ιδιότητά της. Άξιο αναφοράς στο σημείο αυτό είναι η παρουσία του $c^2(dt)^2$. Αυτό συμβαίνει λόγω του ότι πλέον η θεωρία μας είναι σε τετραδιάστατο χώρο και έτσι το σημείο αναφοράς μας είναι η απόσταση που καλύπτει το φως με

[4] Για διευκόλυνση από εδώ και στο εξής την ταχύτητα του φωτός c θα την ορίζουμε ίση με 1 (c=1).

την ταχύτητά του, και όχι κάποια αρχή των συντεταγμένων, όπως έχουμε συνηθίσει.

Έπειτα, μπορούμε να γενικεύσουμε την μετρική αυτή, για διάφορους χωρόχρονους (πέραν του επίπεδου) μέσω της σχέσης

$$ds^2=g_{ab}(x)dx^a dx^b$$

που σημειώσαμε και παραπάνω. Τα $g_{ab}(x)$ είναι στοιχεία ενός τανυστή δεύτερης τάξης. Στην περίπτωση του επίπεδου χωρόχρονου, μπορούμε να δούμε ότι ο τανυστής g θα είναι διαγώνιος, μιας και δεν υπάρχουν γινόμενα μεταξύ διαφορετικών συντεταγμένων στην έκφραση της μετρικής.

Τέλος μπορούμε να δούμε την μετρική σαν ένα τανυστή ο οποίος αντιστρέφεται. Εν γένει ισχύει η γνωστή σχέση μεταξύ αντιστρόφων πινάκων

$$g_{ab}g^{bc}=\delta_a^c$$

όπου $g^{bc}=(g_{bc})^{-1}$. Μέσω αυτής της σχέσης εύκολα υπολογίζουμε τον αντίστροφο πίνακα της μετρικής, ο οποίος είναι αρκετά χρήσιμος για την συνέχεια.

<u>Η συναλλοίωτη παράγωγος</u>

Είναι πλήρως κατανοητό ότι για να αντιμετωπίσουμε την θεωρία αυτή με τα σωστά εργαλεία, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη βοήθεια των τανυστών. Για να το πετύχουμε αυτό, κάθε στοιχείο στην ανάλυσή μας θα πρέπει να είναι τανυστής. Έτσι θα πρέπει να ορίσουμε ένα στοιχείο παραγώγου, που από εδώ και στο εξής θα αποκαλούμε *συναλλοίωτη παράγωγο*, το οποίο όταν θα παραγωγίζει ένα διάνυσμα, θα παράγει τανυστή.

Ένα διάνυσμα $\vec{a}$ μπορεί να γραφεί εν γένει ως

$$\vec{a}=\alpha^i\hat{\imath}=\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

, ενώ παράλληλα οι συνιστώσες του μπορούν να μετασχηματιστούν ανάλογα με το σύστημα στο οποίο εργαζόμαστε ως εξής:

$$\alpha^i=\alpha^{j'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}$$

Αποδεικνύεται ότι εάν παραγαγωγίσουμε μερικώς το διάνυσμα αυτό, τότε το αποτέλεσμα που παίρνουμε περιέχει έναν τανυστικό κι έναν μη τανυστικό όρο. Έτσι γίνεται κατανοητό ότι θα πρέπει να γίνει μια διόρθωση στην παραγώγιση του διανύσματος. Η διόρθωση αυτή προκύπτει ότι συμβαίνει μόνο όταν προστεθεί στην παράγωγο ο όρος

$$\Gamma^{i}_{kj}u^{j}$$

, όπου οι συντελεστές Γ^{i}_{kj} ονομάζονται σύμβολα Christoffel. Για τα σύμβολα αυτά θα γίνει λόγος παρακάτω. Εν τέλει λοιπόν, η μορφή της σωστής παραγώγου θα είναι η εξής

$$\nabla_{j}u^{i} = \frac{\partial u^{i}}{\partial x^{j}} + \Gamma^{i}_{kj}u^{k}$$

Με την κίνηση αυτή, μας δίνεται η δυνατότητα να ορίσουμε εν τέλει μια παράγωγο ενός τανυστή, η οποία παράγει τανυστή. Η συναλλοίωτη παράγωγος φυσικά μπορεί να ενεργήσει τόσο σε συνιστώσες ανταλλοίωτου, όσο και σε συνιστώσες συναλλοίωτου διανύσματος καθώς και σε συνιστώσες ενός τυχαίου διανυσματικού πεδίου.[5]

[5] Περισσότερα βλ. Παπακώστα, Τ. ‘‘Εισαγωγή στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας’’, σελ. 33 – 40.

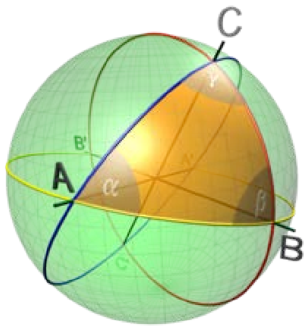
2. Η γεωμετρία στην Φυσική

Ένα από τα πιο διαδεδομένα πειράματα στην φυσική είναι το πείραμα του Γαλιλαίου πάνω στον πύργο της Πίζας. Ουσιαστικά ήταν η πρώτη στιγμή όπου είδαμε με τα μάτια μας ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ανεξάρτητη από την μάζα του αντικειμένου που επιταχύνεται. Έπειτα είδαμε ότι είναι κάτι καθολικό και ότι εξαρτάται μόνο από την απόσταση από την οποία βρίσκεται το αντικείμενο ως προς τη Γη. Σε ένα απλό πείραμα, παρατηρεί κανείς ότι οποιοδήποτε σώμα κι αν πετάξουμε στον αέρα με μία αρχική ταχύτητα προς τα πάνω, αυτό θα φτάσει στο ψηλότερό του σημείο και θα επιστρέψει μετά από λίγο χρόνο, έχοντας ίδιο μέτρο ταχύτητας και αντίθετη φορά. Μπορεί κανείς να δει την αντιστοιχία στον ηλεκτρομαγνητισμό, όπου φορτισμένα σωματίδια μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο θα επιταχυνθούν με τρόπο που εξαρτάται από το φορτίο τους και όχι από τη μάζα τους. Βέβαια στην προκειμένη περίπτωση, σώματα κάθε είδους θα κινηθούν στον χώρο και τον χρόνο με τον ίδιο τρόπο κάτω από την επίδραση της δύναμης της βαρύτητας.

Ο Einstein πρώτος εξέφρασε την ιδέα ότι η μοναδικότητα της κίνησης των σωμάτων στο χώρο και τον χρόνο κάτω από την δύναμη της βαρύτητας ίσως μπορούσε να εξηγηθεί θεμελιωδώς μέσω μιας νέας θεωρίας, η οποία θα αφορούσε τετραδιάστατο κόσμο και θα ένωνε τον χώρο και τον χρόνο σε μία ενιαία ομάδα που θα αποκαλείτο χωρόχρονος. Πιο συγκεκριμένα, δήλωσε ότι η παρουσία μιας τόσο μεγάλης μάζας όπως αυτή ενός πλανήτη (εν προκειμένω της Γης) καμπυλώνει τη γεωμετρία του χωρόχρονου, γύρω από την οποία υπάρχει η μάζα αυτή. Για να το εκφράσουμε διαφορετικά, αρκεί να σκεφτούμε ότι για παράδειγμα ο Einstein πρότεινε πως τελικά η Γη κινείται γύρω από τον Ήλιο όχι λόγω κάποιας δύναμης, η οποία ασκείται από τον Ήλιο στην Γη, αλλά λόγω του ότι η Γη ακολουθεί μια ευθεία πορεία σε έναν καμπυλωμένο, λόγω της ύπαρξης του Ήλιου, χωρόχρονο, δηλαδή μια κυκλική τροχιά, χωρίς να ασκείται πάνω της δύναμη. Από τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα συμπεραίνουμε ότι η Γη δύναται να μείνει σε ισορροπία κάτω από αυτές τις συνθήκες, επομένως αν δοθεί αρχική ταχύτητα στην Γη, τα υπόλοιπα αιτιολογούνται βάσει λίγης γεωμετρίας και λίγης φυσικής.

2.1 Η βαρύτητα ως γεωμετρική θεωρία

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, ο πιο ακριβής μαθηματικός τρόπος να περιγράψουμε τη φυσική γύρω από το πεδίο βαρύτητας είναι μέσω ενός χωρόχρονου, ο οποίος καμπυλώνεται κοντά και γύρω από ένα σώμα με μάζα. Έτσι μοιραία, η έννοια του χωρόχρονου μπαίνει δυναμικά στη θεωρία. Αρχικά ας θυμηθούμε το παράδειγμα που υπήρχε από πριν στους κόλπους της φυσικής και βρίσκεται μέχρι και σήμερα στον ηλεκτρομαγνητισμό. Στην προσπάθεια να αναλύσουμε το ηλεκτρικό πεδίο, χρησιμοποιούμε πρώτα μία πηγή, η οποία δημιουργεί το πεδίο και βλέπουμε τα αποτελέσματά του πάνω σε ηλεκτρικά φορτισμένα σωματίδια σαν δοκιμαστικά σωμάτια. Η αντιστοιχία είναι προφανής. Τοποθετούμε τη μάζα (πηγή) μέσα στον χωρόχρονο, η οποία δημιουργεί το βαρυτικό πεδίο γύρω της και βλέπουμε την επίδρασή του μέσω της κίνησης για παράδειγμα των πλανητών (δοκιμαστικά σωμάτια). Έτσι η γεωμετρία του χώρου, ξαναμπαίνει σαν θεμελιώδες θέμα στην θεωρία μας, αντιλαμβανόμενοι ότι πλέον η θεωρία του Νεύτωνα και τα μαθηματικά του Ευκλείδη δεν μας είναι αρκετά. Για παράδειγμα πλέον το άθροισμα των γωνιών τριγώνου δεν



Εικόνα 2.1: Σφαιρική γεωμετρία

θα δίνει πάντα 180^o , αλλά θα είναι εν γένει είτε μεγαλύτερο, είτε μικρότερο. Έτσι, χρειάζεται μια πιο γενική γεωμετρία, η οποία να προσεγγίζει και να λύνει το πρόβλημα αυτό. Αναμένουμε ότι θα εμπεριέχει διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό ως τη βάση πάνω στην οποία θα κινηθεί. Έτσι η λύση έρχεται μέσα από τα μαθηματικά λοιπόν και συγκεκριμένα το είδος γεωμετρίας που λέγεται *διαφορική γεωμετρία*[6]. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η βαρύτητα τελικά θα είναι μια καθαρά γεωμετρική θεωρία.

2.2 Η γεωμετρία Riemann

Όπως αντιλαμβανόμαστε θέλουμε μία γεωμετρία που να εμπεριέχει καμπυλότητα. Έτσι δεν μας ικανοποιεί η Ευκλείδεια γεωμετρία, αλλά η γεωμετρία Riemann. Έχουμε εισάγει από πριν τον μετρικό τανυστή g, ο οποίος είναι σημαντικός μιας και μας δίνει την γεωμετρία του χωρόχρονου.

Αν ορίσουμε τυχαίες συντεταγμένες $x^\mu = (x^0,x^1,x^2,x^3)$, μέσω των σχέσεων $x(x^\mu)=f^\mu(x^\alpha)$ θα ισχύει:

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha}dx^\alpha \text{ και } ds^2=g_{ab}(x)dx^a dx^b$$

[6] Περισσότερα βλ. Hartle, B.J. (2003). ‘‘Gravity’’, σελ.21 – 28.

και επιβάλουμε η μετρική μας $g_{\mu\nu}$ να είναι συμμετρική, άρα ουσιαστικά επιβάλουμε τα στοιχεία που θα υπάρχουν άνω της διαγωνίου θα είναι ίδια με αυτά κάτω της διαγωνίου, άρα $g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$. Η δεύτερη σχέση από τις παραπάνω χαρακτηρίζει ουσιαστικά έναν χώρο Riemann. Ο Ευκλείδειος και ο χώρος Minkowski είναι απλές περιπτώσεις ενός γενικού χώρου Riemann. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$ds^2=g_{ab}dx^a dx^b =g_{ab}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^b}{\partial x^\nu}dx^\mu dx^\nu = \tilde{g}_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \text{, άρα}$$

ο τανυστής g θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{ab}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^b}{\partial x^\nu}$, πράγμα που είναι ίδιον χαρακτηριστικό ενός συναλλοίωτου τανυστή $2^{ης}$ τάξης.

2.2.1 Τα σύμβολα Christoffel

Γενικά γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι εξής σχέσεις για παραγώγους ως προς τις τυχαίες/γενικευμένες συντεταγμένες που έχουμε επιλέξει:

$$\partial_\mu\Phi\rightarrow\partial_\mu{}'\Phi = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\partial_\lambda\Phi \text{ και } \partial_\mu\mathbf{V}\rightarrow\partial_\mu{}'\mathbf{V} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\partial_\lambda\mathbf{V}$$

για βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη. Ωστόσο όταν κάνουμε το ίδιο για μια διανυσματική βάση συντεταγμένων, τότε τα πράγματα αλλάζουν. Πιο συγκεκριμένα

$$\partial_\nu e^\mu=-\Gamma^\mu_{\nu\lambda}e^\lambda,$$

όπου τα $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ λέγονται σύμβολα Christoffel και προκύπτουν μέσω του φορμαλισμού ανεύρεσης γεωδαισιακών[7]

$$\frac{d^2x^\nu}{ds^2} + \Gamma^\nu_{\lambda\rho}\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\rho}{ds} = 0,$$

όπου

$$\boldsymbol{\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=\frac{g^{\lambda\rho}}{2}\left[\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right]}$$

[7] Βλ. Cheng, T.P. (2005). ‘‘Relativity, Gravitation and Cosmology’’, σελ. 75 – 76.

για δεδομένα λ,μ και ν. Ο δείκτης ρ αθροίζεται, αν θυμηθούμε τη σύμβαση κατά Einstein. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα σύμβολα αυτά έχουν μια ιδιότητα και αυτή είναι ότι

$$\boldsymbol{\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}}$$

Από εδώ και στο εξής, θα χρησιμοποιήσουμε αρκετά τα σύμβολα αυτά μιας και είναι καθοριστικής σημασίας.

2.2.2 Ο τανυστής καμπυλότητας Riemann

Η μελέτη της καμπυλότητας στην δεδομένη γεωμετρία γίνεται μέσω του τανυστή Riemann στη γενική του μορφή.[8]

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\delta}}\right],$$

ο οποίος μπορεί να γραφεί για δεδομένη στρέψη ή καμπυλότητα και διαφορετικά. Εν προκειμένω, ισχύει[9] ότι

$$\boldsymbol{R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}\Gamma^{\varepsilon}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\delta\varepsilon}\Gamma^{\varepsilon}_{\beta\gamma}}$$

για μια τροχιά κίνησης σε καμπύλο χώρο.
Αποδεικνύεται (και από την παραπάνω σχέση) ότι για τον τανυστή Riemann ισχύουν οι παρακάτω συμμετρίες

$$R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\rho\sigma}\ ,$$
$$R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\sigma\rho} \text{ ή } R^{\nu}_{\mu\rho\sigma} = -R^{\nu}_{\mu\sigma\rho}$$
$$\text{και } R_{\nu\mu\rho\sigma} = +R_{\rho\sigma\nu\mu}$$

Η θέση των δεικτών δεν αλλάζει κάτι ως προς τις ιδιότητες του τανυστή. Εναλλαγή των δεικτών επιτυγχάνεται επί της ουσίας μέσω της άθροισης Αϊνστάιν, αν πράξουμε ως εξής:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\rho}R^{\rho}_{\beta\gamma\delta}$$

[8] Βλ. Μάγγος, Π. Δημήτριος. (2012). ‘‘Φαινόμενο Unruh’’. *Διπλωματική εργασία*, σελ. 9 – 11.
[9] Βλ. Hartle, B.J. (2003). ‘‘Gravity’’, σελ.450 – 454.

Μπορούμε να διακρίνουμε μέσω των παραπάνω ιδιοτήτων του τανυστή, ότι για ν=μ ή ρ=σ ότι η πράξη $g^{\lambda\alpha}R_{\alpha\lambda\gamma\delta}$ = 0, μιας και αθροίζονται ουσιαστικά αντίθετα στοιχεία. Υπάρχουν και άλλες τέτοιες ‘‘σύντομες’’ ανάλογες εκφράσεις, ωστόσο αξίζει να αναφερθεί μία συγκεκριμένη και αυτή είναι που οδηγεί στον τανυστή Ricci[10]:

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\alpha}R_{\alpha\mu\nu\lambda} = g^{\lambda\alpha}R_{\nu\lambda\alpha\mu} = g^{\lambda\alpha}R_{\lambda\nu\mu\alpha} = R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda}$$

Ο τανυστής Ricci είναι εν γένει συμμετρικός που σημαίνει ότι $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$. Μπορούμε να φτιάξουμε και τον βαθμωτό τανυστή Ricci μέσω της πράξης $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=R^{\nu}{}_{\nu}=R$, μέγεθος το οποίο λέγεται και βαθμωτή καμπυλότητα και το συναντάμε μέσα στον τανυστή ύλης και ενέργειας των εξισώσεων Einstein που θα δούμε παρακάτω ($G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$).

[10] Βλ. Παπαπέτρου, A. (1974). ‘‘Lectures on general relativity’’. σελ. 40-43. Βλ. και Cheng, T.P. (2005). ‘‘Relativity, Gravitation and Cosmology’’, σελ. 226 – 229.

3. <u>Λίγα πράγματα για την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας</u>

Ο Νεύτωνας είχε διατυπώσει τη θεωρία του περί απόλυτου χώρου, ωστόσο σύντομα ο μεγάλος του αντίπαλος, Gottfried Wilhelm von Leibniz διαφώνησε μαζί του, υποστηρίζοντας την μη αναγκαιότητα ύπαρξης ενός απόλυτου χώρου στην φύση, μιας και αυτά που γνωρίζαμε για τον χώρο ήταν μόνο αυτά που μπορούσαμε να δούμε σαν αλληλεπιδράσεις της ύλης με άλλα υλικά αντικείμενα και όχι κάτι παραπάνω. Αργότερα διατυπώθηκαν και πιο στοχευμένες διαφωνίες, όπως αυτήν του Ernst Mach, για να φτάσουμε στην χρονική περίοδο του Einstein, όπου η θεωρία πλέον του Νεύτωνα έχει τεθεί υπό ξεκάθαρη αμφισβήτηση. Τι οδήγησε όμως συγκεκριμένα τον Einstein στο να ψάξει για μια καινούρια θεωρία; Οι λόγοι ήταν κυρίως τρεις:

Α) Αρχικά έπρεπε να υπάρξει μία θεωρία βαρύτητας σύμφωνη με την Ε.Θ. Σ. που ο ίδιος είχε διατυπώσει. Η θεωρία του Νεύτωνα που ήδη υπήρχε δεν ήταν συμβατή, μιας και δεχόταν ακαριαία διάδοση/μεταφορά κάθε σήματος ή πληροφορίας στη φύση μέσω της άπειρης ταχύτητας του φωτός. Τότε ωστόσο ο κόσμος γνώριζε ότι το φως έχει πεπερασμένη ταχύτητα. Όλα τα παραπάνω καθιστούν τη Νεωτώνεια θεωρία μη σχετικιστική.

Β) Έπειτα ο ίδιος ήθελε να πετύχει μια βαθύτερη κατανόηση μεταξύ της διαφαινόμενης ισότητας μεταξύ βαρυτικής και αδρανειακής μάζας. Μέσω των πειραμάτων του Γαλιλαίου και της θεωρίας του Νεύτωνα, όντως παρατηρείται αυτή η ισότητα, ωστόσο δεν είναι αναμενόμενο αυτό το αποτέλεσμα, μιας και τα δύο αυτά μεγέθη εκφράζουν διαφορετικές ιδιότητες: η αδρανειακή μάζα αναφέρεται στην αντίδραση των σωμάτων σε κάθε είδους επίδραση δύναμης, ενώ η βαρυτική μάζα την αντίδραση του σώματος στην επίδραση μιας συγκεκριμένης δύναμης πάνω σε αυτό, αυτήν της βαρύτητας. Έτσι, βαρύτητα και επιταχυνόμενη κίνηση γίνονται έννοιες δυσδιάκριτες, και εκεί είναι που θέλησε ο Αϊνστάιν να δώσει μια πιο θεμελιώδη εξήγηση, μέσω της ιδέας για καμπύλωση του χώρου παρουσία μάζας.

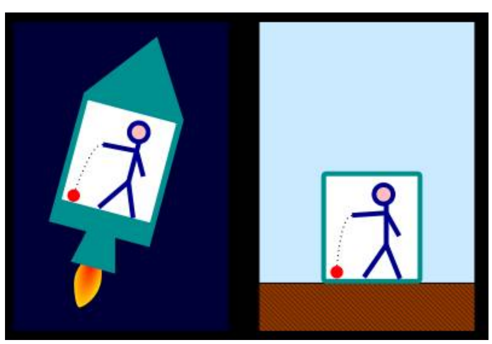
Γ) Τέλος ο Αϊνστάιν υποστήριζε ότι ο χώρος δεν είναι κάποιο πράγμα. Δεν θα έπρεπε οι νόμοι της Φυσικής να εξαρτώνται από τη θέση ή τον τύπο συστήματος αναφοράς που χρησιμοποιούμε ως προς τον χώρο. Μέχρι εκείνη τη στιγμή, οι νόμοι της φύσης ήταν συμβατοί για κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, ωστόσο όταν αποφασίζαμε να εργασθούμε σε επιταχυνόμενα συστήματα αναφοράς, τότε οι νόμοι της φυσικής άλλαζαν και γίνονταν πιο περίπλοκοι. Ο ίδιος δήλωσε ότι τα συστήματα αναφοράς ήταν ανθρώπινα κατασκευάσματα και ότι οι νόμοι της φυσικής δεν θα έπρεπε να εξαρτώνται από αυτά.

Σε συνδυασμό με την αρχή της ισοδυναμίας που παρουσιάζουμε παρακάτω, τέτοιες σκέψεις οδήγησαν τον Αϊνστάιν στο να εργασθεί για την ανεύρεση μιας πιο θεμελιώδους θεωρίας για τη βαρύτητα.[11]

3.1 Η αρχή της ισοδυναμίας

Αρχικά διατυπώθηκε από τον Einstein ως η ‘‘αρχή της ισοδυναμίας της βαρύτητας και της αδράνειας’’. Ιστορικά είναι η αρχή για την ανακάλυψη πραγμάτων που οδήγησαν στη δημιουργία της γενικής θεωρίας της σχετικότητας και προφανώς εμπεριέχεται αυτόματα σε αυτήν. Η αρχή της ισοδυναμίας εκκινεί με την διάκριση αρχικά της μάζας σε αδρανειακή και βαρυτική, αλλά και τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη στιγμή που δεχθούμε αυτές ότι είναι ίσες. Από το πείραμα του Γαλιλαίου είδαμε ότι όλα τα σώματα σε βαρυτικό πεδίο επιταχύνονται με τον ίδιο τρόπο. Έτσι, ένας παρατηρητής που ‘‘πέφτει’’ προς την μάζα που δημιουργεί το βαρυτικό πεδίο δεν είναι σε θέση να διακρίνει άλλα παρόμοια φαινόμενα. Έστω ότι έπεφτε μαζί με αυτόν και ένα βιβλίο, για αυτόν, το βιβλίο θα παρέμενε στάσιμο μπροστά του, όταν όλος ο υπόλοιπος κόσμος του θα ‘‘πήγαινε προς τα πάνω’’. Αυτή η σκέψη οδήγησε τον Einstein στην αρχή της ισοδυναμίας, σύμφωνα με την οποία:

‘‘Η φυσική, σε ένα σύστημα αναφοράς που πέφτει προς το βαρυτικό πεδίο, είναι ισοδύναμη με την φυσική σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, όπου απουσιάζει βαρυτικό πεδίο’’



Εικόνα 3.1: Αναπαράσταση της αρχής της ισοδυναμίας[12]

[11] Βλ. Cheng, T.P. (2005). ‘‘Relativity, Gravitation and Cosmology’’, σελ. 8-10. Περισσότερα βλ. και Weinberg, S. (1972). ‘‘Gravitation and cosmology: Principles and applications of the General theory of Relativity’’, p. 15 – 20.

[12] http://www.physics.ntua.gr/~zamarias/evi/k22.html

Κατ’ αντιστοιχία με την παραπάνω έκφρασή της, η αρχή αυτή μπορεί να ειδωθεί και από άλλη οπτική γωνία:

‘‘Η φυσική σε ένα μη επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς με βαρύτητα g είναι ισοδύναμη με την φυσική σε ένα σύστημα αναφοράς χωρίς βαρύτητα, αλλά επιταχυνόμενο με επιτάχυνση $-g$’’

Η αρχή αυτή χωρίζεται σε ισχυρή και ασθενή αρχή της ισοδυναμίας και έχει τελικά σημαντικές επιπτώσεις στην φυσική, όπως η καμπύλωση της τροχιάς του φωτός λόγω βαρύτητας, την αναπροσαρμογή του χρόνου ανάλογα με το σύστημα αναφοράς κ.α.[13]

3.2 Ο χρόνος σε βαρυτικό πεδίο

Έστω ότι κάνουμε ένα νοητό πείραμα. Βάζουμε δύο επιστήμονες σε έναν πύργο εργαστηρίου, ύψους h, τον A στην κορυφή και τον B στην Γη. Ζητάμε από τον A να στέλνει σήματα φωτός με συγκεκριμένη διάρκεια και συχνότητα. Η αρχή της ισοδυναμίας μας λέει ότι η φυσική στο εργαστήριο θα πρέπει να είναι ανάλογη με αυτήν στην περίπτωση που το εργαστήριο επιταχυνόταν με επιτάχυνση –g κάπου μακρυά σε χώρο με απουσία βαρύτητας. Το προκύπτον φαινόμενο είναι ότι ο B θα λαμβάνει σήματα νωρίτερα από το κανονικό και συχνότερα από ό,τι ο A τα στέλνει, λόγω του ότι ο B πορεύεται προς την αντίθετη κατεύθυνση από αυτήν του φωτός. Με άλλα λόγια τείνει να το συναντήσει πριν αυτό φτάσει στη θέση του B. Έτσι παρατηρείται μια διαστολή του χρόνου, η οποία οδηγεί στο εξής αποτέλεσμα:

$$\Delta\tau_B = \Delta\tau_A \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right)$$

όπου $\Delta\tau_B$ είναι ο χρόνος που μετρά ο B και $\Delta\tau_A$ ο χρόνος που μετρά ο A επιστήμονας. Το ίδιο φαινόμενο πρέπει να εμφανιστεί και μέσα σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο και αδρανειακό σύστημα. Ωστόσο η σχέση αυτή μπορεί να γενικευθεί τονίζοντας ότι $gh = \Phi_A - \Phi_B$ ως διαφορά δυναμικού. Έτσι η γενική σχέση γίνεται

[13] Περισσότερα βλ. Cheng, T.P. (2005). ‘‘Relativity, Gravitation and Cosmology’’, σελ. 39-50. Βλ. και Weinberg, S. (1972). ‘‘Gravitation and cosmology: Principles and applications of the General theory of Relativity’’, p. 67 – 70.

$$\Delta\tau_B=\Delta\tau_A\left(1+\frac{\Phi_A-\Phi_B}{c^2}\right)$$

και αυτή εδώ είναι η σχέση, η οποία ευθύνεται για το φαινόμενο της βαρυτικής ερυθρόπησης.

3.3 Ο χωρόχρονος είναι καμπυλωμένος

Πως ερμηνεύεται όμως το παραπάνω φαινόμενο με την διαφορά του μετρούμενου χρόνου ανάμεσα σε δύο παρατηρητές που ζουν σε διαφορετικό βαρυτικό δυναμικό; Το φαινόμενο αυτό επιδέχεται δύο φυσικά παραδεκτές ερμηνείες. Πρώτη είναι η άποψη ότι η βαρύτητα επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο κυλά ο χρόνος και αφήνει ανεπηρέαστο τον χώρο. Σε ένα επίπεδο χωρόχρονο δηλαδή, με απουσία βαρυτικού πεδίου, τα ρολόγια θα μετρούν ίδιους χρόνους, ενώ με την παρουσία βαρυτικού πεδίου ο χωρόχρονος παραμένει επίπεδος και αλλάζει η ‘‘κινητικότητα’’ του χρόνου, με έναν παράγοντα $\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right)$ και Φ είναι το βαρυτικό δυναμικό στη θέση του ρολογιού που μετρά τον χρόνο. Ορίζοντας τη θέση του Φ=0, μπορούμε να γνωρίζουμε σε ποιες θέσεις, ως προς το δυναμικό Φ, ο χρόνος κυλά ταχύτερα και σε ποιες αργότερα, με τον χρόνο ουσιαστικά να επηρεάζεται με έναν ενιαίο τρόπο.

Μια δεύτερη ερμηνεία του φαινομένου αυτού δέχεται ότι η Γη είναι επίπεδη και ότι κάθε απόσταση μπορεί να μετρηθεί με διαφορετικό αποτέλεσμα, ανάλογα με το που γίνεται η μέτρηση. Πιο συγκεκριμένα οι μετρήσεις ίδιας απόστασης σε επίπεδο χάρτη, θα πρέπει να φαίνονται μικρότερες όσο πάμε πιο Βόρεια (ή και πιο Νότια) από τον ‘‘Ισημερινό’’ (την οριζόντια γραμμή δηλαδή που χωρίζει τον χάρτη σε 2 ίσα μέρη), μιας και είναι γνωστό ότι αεροπορικές εταιρίες επιλέγουν διαδρομές από αυτήν την πλευρά της Γης για εξοικονόμηση καυσίμων. Η εξήγηση για αυτή τη διαφορά στις μετρήσεις είναι η ύπαρξη ενός ειδικού πεδίου το οποίο επηρεάζει τις αποστάσεις κάθε είδους όσο απομακρυνόμαστε από το κέντρο.

Βεβαίως σήμερα μπορούμε να πούμε ότι ισχύουν και οι δύο θεωρίες έως έναν βαθμό. Αποδεικνύεται πιο απλή και πιο ισχυρή σαν θεωρία, αυτή η οποία χρησιμοποιεί την καμπύλωση του χωρόχρονου, μιας και ικανοποιείται τόσο η διαφορά των αποστάσεων, ανάλογα με το εκάστοτε γεωγραφικό μήκος και πλάτος, όσο και το φαινόμενο της διαφοράς του μετρούμενου χρόνου. Άρα εν τέλει μια καμπυλωμένη γεωμετρία είναι και η εκδοχή, την οποία αποδεχόμαστε.[14]

[14] Βλ. Hartle, B.J. (2003). ‘‘Gravity’’, σελ.125 – 126.

4. <u>Η γενική θεωρία της σχετικότητας</u>

Αρχικά ο Albert Einstein χρειάστηκε να μαθητεύσει δίπλα στον άλλοτε συμφοιτητή του Marcel Grossmann, τον άνθρωπο εκείνο που του δίδαξε επί 5 συναπτά έτη (1910–1915) Διαφορική Γεωμετρία στο πανεπιστήμιο της Ζυρίχης. Οι δύο τους μάλιστα το 1913 δημοσίευσαν και το ένα από τα δύο πιο γνωστά papers που δημοσιεύθηκαν πριν τη μεγάλη ανακοίνωση των εξισώσεων του Einstein με όνομα ‘‘Outline of a Generalized Theory of Relativity and of a Theory of Gravitation’’. Με αυτόν τον τρόπο μπόρεσε να προχωρήσει και να φτάσει την εργασία του σε ένα στάδιο ικανοποιητικό, τέτοιο που, αργότερα τη χρονιά του 1915, να την παρουσιάσει στον David Hilbert, έναν γερμανό μαθηματικό γνωστό για τη θεωρία του χώρου Hilbert, κομμάτι της συναρτησιακής ανάλυσης των μαθηματικών. Εκείνος, μέσα σε λίγο χρονικό διάστημα και με τη βοήθεια του λογισμού των μεταβολών, κατέγραψε για πρώτη φορά τις μετέπειτα γνωστές ως εξισώσεις Einstein, κίνηση που έμεινε γνωστή ως Einstein-Hilbert Action, ή απλώς Hilbert Action. Αργότερα τον Νοέμβριο του 1915 ο Albert Einstein παρουσίασε τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας ως μια θεωρία που θα περιέγραφε την βαρύτητα. Όπως ήταν φυσικό, προκάλεσε αναστάτωση, μιας και ήταν μια θεωρία η οποία δεν βασιζόταν σε δύναμη, αλλά σε πεδίο βαρύτητας και μάλιστα στην καμπύλωση μιας νέας έννοιας όπως ο χωρόχρονος, λόγω της ύπαρξης μάζας και ενέργειας μέσα σε αυτόν.

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (Γ.Θ.Σ.) έχει ορισμένες αρχές, στις οποίες βασίζεται, και είναι θεμελιώδεις. Οι αρχές αυτές είναι:

Α) Ισχυρή αρχή της ισοδυναμίας

*‘‘Οι νόμοι της Φυσικής σε ένα μη επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς που βρίσκεται εντός πεδίου βαρύτητας **g** είναι ισοδύναμοι με εκείνους σε ένα σύστημα αναφοράς χωρίς βαρύτητα το οποίο επιταχύνεται με επιτάχυνση **a**= –**g**’’*

Β) Ασθενής αρχή της ισοδυναμίας

*‘‘Οι νόμοι της μηχανικής σε ένα μη επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς που βρίσκεται εντός πεδίου βαρύτητας **g** είναι ισοδύναμοι με εκείνους σε ένα σύστημα αναφοράς χωρίς βαρύτητα το οποίο επιταχύνεται με επιτάχυνση **a**= –**g**’’*

Γ) Αρχή ισοδυναμίας του Einstein

‘‘Σε κάθε σημείο του χωροχρόνου, και εντός μίας αρκετά μικρής περιοχής πέριξ του σημείου αυτού είναι δυνατό να ορισθεί ένα τοπικά αδρανειακό σύστημα αναφοράς, ως προς το οποίο κάθε μη βαρυτικό φαινόμενο της

φυσικής λαμβάνει χώρα με τη μορφή που προβλέπει η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας (Έτσι όπως θα ήταν αν η βαρύτητα δεν υφίστατο)''[15]

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με ένα ελεύθερο σωμάτιο στο χώρο. Από κλασική μηχανική, προκύπτει ότι μέσω της αρχής της ελάχιστης δράσης ένα ελεύθερο σωμάτιο με ταχύτητα αρκετά μικρότερη από αυτήν του φωτός, θα κινηθεί σε μια τροχιά η οποία θα βρεθεί αν λύσουμε την παρακάτω εξίσωση, η οποία λέγεται και εξίσωση των γεωδαισιακών:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

όπου οι συντελεστές $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$ είναι τα σύμβολα Christoffel που παρουσιάσαμε παραπάνω. Έτσι μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι ένα ελεύθερο σωμάτιο θα επιλέξει σε κάθε κίνησή του την μικρότερη ή την μεγαλύτερη δυνατή τροχιά. Η τροχιές αυτές καλούνται γεωδαισιακές.

4.1 Νευτωνική βαρύτητα

Σύμφωνα με τη θεωρία του Νεύτωνα, κάθε σώμα μάζας M έλκει ένα οποιοδήποτε άλλο σώμα μάζας m με μία δύναμη η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\vec{F} = -G\frac{Mm_g}{r^2}\hat{r}$$

Επίσης για ένα σώμα το οποίο επιταχύνεται, μπορούμε να εκφράσουμε την κίνησή του μέσω του τύπου

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = m_i\vec{a}$$

Θεωρούμε πείραμα με σωμάτιο που πέφτει και για το οποίο ισχύει ότι

$$\vec{F} = m_i\vec{a} \text{ και } \vec{F} = -m_g\nabla V$$

[15] Βλ. Μπενάς, Κ. ''Αρχή της ισοδυναμίας: Στο επίκεντρο της φυσικής σήμερα, όπως και πριν από πέντε αιώνες'', σελ. 4.

όπου η δεύτερη σχέση προκύπτει λόγω του ότι η δύναμη της βαρύτητας είναι συντηρητική, επομένως μπορούμε να την εκφράσουμε σε αυτήν την μορφή. Από τη στιγμή που θεωρούμε τις δύο μάζες ίσες, προκύπτει η πρώτη αναφορά της έννοιας του δυναμικού και του πεδίου στη δύναμη της βαρύτητας. Πράγματι:

$$V= -G \int \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r_o}|} d^3\vec{r}$$

, όπου $\rho(\vec{r})$ είναι μια κατανομή μάζας στο χώρο και όχι ένα μοναδικό σωμάτιο δεδομένης μάζας. Το V λοιπόν είναι το βαθμωτό δυναμικό του πεδίου. Για το δυναμικό αυτό, ισχύει η σχέση του Νεύτωνα, η γενίκευση της οποίας είναι και η εξίσωση του Einstein. Η σχέση του Νεύτωνα είναι η εξής:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r})$$

4.2 Εξίσωση Einstein

Η παραπάνω εξίσωση για το δυναμικό της βαρύτητας, αν γενικευθεί και γραφεί με τη μορφή τανυστικού λογισμού, καταλήγει στην εξίσωση που πρώτος έγραψε ο Αϊνστάιν, και η οποία είναι η εξής:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

όπου G_N η κοσμολογική σταθερά του Νεύτωνα, $G_{\mu\nu}$ είναι ο συμμετρικός τανυστής 2ης τάξης Αϊνστάιν, ο οποίος εμπεριέχει όλη την πληροφορία για τον χωρόχρονο, μιας και η κατάσταση της ορμής και της ενέργειας, υπάρχουν μέσα σε αυτόν σε μαθηματική έκφραση, R είναι ο τανυστής Ricci και $R_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής καμπυλότητας Ricci,

$$R_{\mu\nu}= \frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\mu\nu}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\mu\gamma}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\gamma}_{\mu\nu}\Gamma^{\delta}_{\gamma\delta} - \Gamma^{\gamma}_{\mu\delta}\Gamma^{\delta}_{\nu\gamma}$$

ο οποίος προκύπτει μέσα από υπολογισμούς, από τον τανυστή Riemann. Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G_N}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}\right)$$

όπου $T=g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ είναι το ίχνος του τανυστή ενέργειας και ορμής. Με αυτή τη μορφή είναι ευκολότερο να βρούμε τη μετρική ενός χωρόχρονου, αν γνωρίζουμε τα δεδομένα του, τα οποία θα είναι η κατανομή ενέργειας και ορμής σε αυτόν. Αυτή εδώ είναι και μια μορφή των 10 μερικών διαφορικών εξισώσεων, τις οποίες καλούμαστε να λύσουμε. Γενικά δεν είναι εύκολο, ωστόσο υπάρχουν περιπτώσεις, στις οποίες οι εξισώσεις απλοποιούνται και η δουλειά που καλούμαστε να κάνουμε είναι πιο εύκολη.
Για παράδειγμα, στο κενό ισχύει

$$R_{\mu\nu}= T_{\mu\nu} =0$$

το οποίο εκφράζει την απουσία κάποιας μάζας που να δημιουργεί καμπύλωση του χωρόχρονου. Η επιλογή αυτή οδηγεί σε επίπεδο χωρόχρονο (μετρική Minkowski). Από την άλλη, για ένα ασυμπίεστο ιδανικό ρευστό ισχύει

$$T^{\mu\nu} = (e + p)u^{\mu}u^{\nu} + pg^{\mu\nu}$$

, για το οποίο θα ασχοληθούμε εκτενέστερα στο 5^{o} κεφάλαιο της εργασίας μας. Οι εξισώσεις του πεδίου βαρύτητας, σε αντίθεση με ό,τι γνωρίζαμε μέχρι τώρα για ηλεκτρομαγνητισμό, θα είναι μη γραμμικές. Αυτό τις καθιστά και δύσκολες στην επίλυσή τους. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η εξίσωση του Αϊνστάιν δεν έμεινε έτσι, αλλά προστέθηκε και ο όρος $– λg_{\mu\nu}$. Το ‘‘λ’’ αυτό είναι η λεγόμενη «κοσμολογική σταθερά». Σαν όρο τον προσέθεσε ο Αϊνστάιν (με διαφορετικό πρόσημο) αργότερα, για να υπάρχει σύνδεση μεταξύ της θεωρίας του και της τότε αντίληψης ότι το σύμπαν παραμένει σταθερό. Ωστόσο, ήρθαν τα αποτελέσματα του ραδιοτηλεσκοπίου Hubble για να επιβεβαιώσουν την διαστολή του σύμπαντος, οπότε κι εκείνος απέσυρε τον όρο αυτόν. Επιστήμονες αργότερα τον επανέφεραν με αρνητικό πρόσημο, μιας και αποδείχθηκε ότι η παρουσία του, δίνει μεγαλύτερη ακρίβεια και σύνδεση ανάμεσα σε θεωρία και πείραμα. Τέλος, για λόγους συνέπειας της θεωρίας του Αϊνστάιν με την Νευτώνεια θεωρία, θα πρέπει η σταθερά ‘‘λ’’ να είναι ένας πολύ μικρός αριθμός. Στην εργασία μας, δεχθήκαμε ότι ο αριθμός αυτός είναι ίσος με 0.

4.3 Μια απλή λύση της εξίσωσης Einstein – Η λύση Schwarzschild

Μία από τις λύσεις στις εξισώσεις του Αϊνστάιν είναι και η λύση Schwarzschild. Η λύση αυτή περιγράφει στατικά, σφαιρικά και συμμετρικά πεδία στο εξωτερικό μιας σφαιρικής κατανομής μάζας. Με την προσέγγιση δηλαδή της σφαιρικής συμμετρίας, που είναι αρκετά εύστοχη, μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε για μελέτες στο διάστημα, σε αρκετά αντικείμενα. Ξεκινάμε από μια γενική μετρική της μορφής

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + 2C(r)drdt + D(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

θέτουμε T(r)=t+f(r) και $D(r)r^2=R(r)$. Λόγω συμμετρίας χώρου και χρόνου, θέτουμε D=1 και C=0 κι έτσι προκύπτει η λαγκρανζιανή

$$\mathbb{L} = -A(r)\dot{t}^2 + B(r)\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$$

σύμφωνα με την οποία μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό των συμβόλων Christoffel και στοιχείων Riemann, συναρτήσει των A(r) και B(r). Συνυπολογίζοντας ωστόσο ότι τα αποτελέσματα θα πρέπει να συμφωνούν και με τη Νευτώνεια λύση για ασθενή πεδία, τότε καταλήγουμε στην λεγόμενη, μετρική Schwarzschild

$$ds^2 = -c^2\left(1-\frac{r_S}{r}\right)dt^2 + \frac{dr2}{\left(1-\frac{r_S}{r}\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Βέβαια για να είναι σωστή αυτή η μετρική, θα πρέπει να τεθεί άλλη μία προϋπόθεση που έχει να κάνει με τις συνθήκες όταν $r\to\infty$. Κανονικά, η ως άνω μετρική θα πρέπει σε τέτοιες συνθήκες να έχει ως όριο τη μετρική Minkowski, οπότε για να συμβαίνει αυτό μπορούμε να γράψουμε τις συναρτήσεις A(r) και B(r) ως εκθετικές συναρτήσεις [A(r)= $e^{2\nu(r)}$, B(r)=$e^{2\lambda(r)}$]. Έτσι κι αυτό το πρόβλημα λύνεται κι έχουμε μια καλώς αποδεκτή λύση. Όσον αφορά την συνιστώσα του χρόνου, αυτή είναι βεβαίως η μετρηθείσα από έναν παρατηρητή μακρυά από την πηγή.

5. ‘‘Στο εσωτερικό ενός σφαιρικά συμμετρικού, διαστημικού ρευστού’’

Στην ενότητα αυτή, ψάχνουμε να βρούμε τι συμβαίνει στο εσωτερικό ενός σφαιρικού, μη περιστρεφόμενου, ρευστού. Επιλέγουμε μη περιστρεφόμενο ρευστό, διότι σε αντίθετη περίπτωση το έργο μας θα ήταν πιο δύσκολο, αν και στο τέλος τα αποτελέσματα θα ήταν ακόμη πιο γενικά. Η μορφή της μετρικής θα εμπεριείχε γινόμενα των επιμέρους συντεταγμένων (π.χ. D(r)dθdφ) κι έτσι ο τανυστής g_{mn} δεν θα ήταν διαγώνιας μορφής. Στην περίπτωση που μελετάμε, η μορφή της μετρικής μας είναι άγνωστη, αν και διαγώνια, οπότε θα ξεκινήσουμε με τη γενική μορφή σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$ds^2=A^2(r)dt^2-B^2(r)dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$$

Επομένως ο τανυστής g_{mn} και ο αντίστροφός του, γράφονται ως εξής

$$\Rightarrow\ g_{mn}=\begin{bmatrix} A^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ g^{mn}=\begin{bmatrix} \frac{1}{A^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{B^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{r^2 sin^2\theta} \end{bmatrix},\ \text{και κάνουμε την αντιστοιχία:}\ \begin{cases} 0 \Leftrightarrow t \\ 1 \Leftrightarrow r \\ 2 \Leftrightarrow \theta \\ 3 \Leftrightarrow \varphi \end{cases}$$

Γνωρίζουμε ότι στο εσωτερικό ενός ρευστού, η κατανομή ύλης και ενέργειας μπορεί να γραφεί μαθηματικά ως εξής

$$T_{ab}=\frac{8\pi G_N}{c^4}[(e+p)u_a u_b - pg_{ab}]$$

όπου για το $\vec{u}$ ισχύουν τα εξής:

i) $u^a = u_a = 0$, α=1,2,3

ii) $u^0 = \frac{1}{\sqrt{A(r)}}, u_0 = \sqrt{A(r)}$

Έτσι, είμαστε σε θέση να συνεχίσουμε στο καθαρά υπολογιστικό κομμάτι:

Μη μηδενικά Γ (σύμβολα Christoffel)

m=0	m=1	m=2	m=3
$\Gamma^0_{01}=\frac{A'}{A}$	$\Gamma^1_{00}=\frac{AA'}{B^2}$ $\Gamma^1_{11}=\frac{B'}{B}$ $\Gamma^1_{22}=\frac{-r}{B^2}$ $\Gamma^1_{33}=\frac{-r sin^2\theta}{B^2}$	$\Gamma^2_{12}=\frac{1}{r}$ Γ^2_{33}=-sinθcosθ	$\Gamma^3_{13}=\frac{1}{r}$ $\Gamma^3_{23}=\frac{cos\theta}{sin\theta}$

Σημειώνουμε ότι ο τόνος (΄) καταδεικνύει την παραγώγιση των συναρτήσεων ως προς τη μεταβλητή r.

Παράγωγοι των Γ

	Μεταβλητές των παραγώγων			
u_i	**t**	**r**	**θ**	**φ**
x_i	**0**	**1**	**2**	**3**
$\boldsymbol{\Gamma^0_{01}}$	0	$\frac{A''A-(A)^2}{A^2}$	0	0
$\boldsymbol{\Gamma^1_{00}}$	0	$\frac{[(A')^2+AA'']B^2-AA'2BB'}{B^4}$	0	0
$\boldsymbol{\Gamma^1_{11}}$	0	$\frac{B''B-(B')^2}{B^2}$	0	0
$\boldsymbol{\Gamma^1_{22}}$	0	$-\frac{B^2-2rBB'}{B^4}$	0	0
$\boldsymbol{\Gamma^1_{33}}$	0	$-\sin^2\theta\frac{[B^2-2rBB']}{B^4}$	$\frac{-2r sin\theta cos\theta}{B^2}$	0
$\boldsymbol{\Gamma^2_{12}}$	0	$\frac{-1}{r^2}$	0	0
$\boldsymbol{\Gamma^2_{33}}$	0	0	$-(cos^2\theta - sin^2\theta)$	0
$\boldsymbol{\Gamma^3_{13}}$	0	$\frac{-1}{r^2}$	0	0
$\boldsymbol{\Gamma^3_{23}}$	0	0	$\frac{-1}{sin^2\theta}$	0

Μη μηδενικά στοιχεία των τανυστών Riemann

$R^1_{010}=\frac{AA''}{B^2}-\frac{B'AA'}{B^3}$	$R^0_{202}=\frac{-rA'}{AB^2}$

$R^2_{020}=\frac{1}{r}\frac{AA'}{B^2}$	$R^2_{121}=\frac{B'}{rB}$
$R^3_{030}=\frac{1}{r}\frac{AA'}{B^2}$	$R^3_{232}=1-\frac{1}{B^2}$
$R^0_{101}=\frac{A'B'}{AB}-\frac{A''}{A}$	$R^0_{303}=\frac{A'}{A}(\frac{-rsin^2\theta}{B^2})$
$R^1_{212}=\frac{B'r}{B^3}$	$R^1_{313}=sin^2\theta\ [\frac{B'r}{B^3}]$
$R^3_{131}=\frac{B'}{rB}$	$R^2_{323}=sin^2\theta\ [1-\frac{1}{B^2}]$

<u>Μη μηδενικά/διαγώνια στοιχεία του τανυστή Ricci</u>

- $R_{00}=R^1_{010}+R^2_{020}+R^3_{030}=\frac{AA''}{B^2}-\frac{B'AA'}{B^3}+\frac{2}{r}\frac{AA'}{B^2}$
- $R_{11}=R^0_{101}+R^2_{121}+R^3_{131}=\frac{A'B'}{AB}-\frac{A''}{A}+\frac{2B'}{rB}$
- $R_{22}=R^0_{202}+R^1_{212}+R^3_{232}=\frac{-rA'}{AB^2}+\frac{B'r}{B^3}+1-\frac{1}{B^2}$
- $R_{33}=R^0_{303}+R^1_{313}+R^2_{323}=\sin^2\theta[\frac{-rA'}{AB^2}+\frac{B'r}{B^3}+1-\frac{1}{B^2}]$

⇨ $R=g^{00}R_{00}+g^{11}R_{11}+g^{22}R_{22}+g^{33}R_{33}$

…και καταλήγουμε στις εξής εξισώσεις:

➢ $R_{00}-\frac{1}{2}g_{00}R=T_{00} \Leftrightarrow 2\frac{B'}{rB^3}+\frac{1}{r^2}(1-\frac{1}{B^2})=Ee$ (1)

➢ $R_{11}-\frac{1}{2}g_{11}R=T_{11} \Leftrightarrow 2\frac{A'}{rAB^2}-\frac{1}{r^2}(1-\frac{1}{B^2})=Ep$ (2)

➢ $R_{22}-\frac{1}{2}g_{22}R=T_{22} \Leftrightarrow \left(\frac{A''}{AB^2}-\frac{A'B'}{AB^3}+\frac{A'}{rAB^2}-\frac{B'}{rB^3}\right)=Ep$ (3)

➢ $R_{33}-\frac{1}{2}g_{33}R=T_{33} \Leftrightarrow \left(\frac{A''}{AB^2}-\frac{A'B'}{AB^3}+\frac{A'}{rAB^2}-\frac{B'}{rB^3}\right)=Ep$ (4)

Από τις ως άνω εξισώσεις εξάγουμε και τις εξής δύο:

✓ $\frac{A''}{A}+\frac{B^2}{r^2}(1-\frac{1}{B^2})-\frac{1}{r}(\frac{A'}{A}+\frac{B'}{B})-\frac{A'B'}{AB}=0$ (5)

✓ $\frac{1}{r}(\frac{A'}{A}+\frac{B'}{B})=\frac{B^2}{2}E(e+p)$, όπου $E=\frac{8\pi G_N}{c^4}$ (6)

Αξιοποιώντας τις εξισώσεις (2) και (5), συνεχίζουμε:

- $2\frac{A'}{A}-\frac{B^2}{r}+\frac{1}{r}=EpB^2r$ (2α)
- $\frac{A''}{A}+\frac{B^2}{r^2}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{A'}{A}+\frac{B'}{B}\right)-\frac{A'B'}{AB}=0$ (5)

$$\rightarrow(5): \frac{A''}{A}+\frac{B^2}{r^2}-\frac{1}{r^2}-\frac{B^2}{2}E(e+p)-\frac{A'B'}{AB}=0 \quad (7)$$

→Παραγώγιση κατά μέλη στην εξίσωση (2α) :

$$\left[\frac{A''}{A}-\frac{(A')^2}{A^2}\right]-\left[\frac{BB'}{r}-\frac{B^2}{2r^2}\right]-\frac{1}{2r^2}=\frac{E}{2}(p'rB^2+pB^2+2rpBB')\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{A''}{A}=\frac{E(p'rB^2+pB^2+2rpBB')}{2}+\frac{1}{2r^2}+\left[\frac{BB'}{r}-\frac{B^2}{2r^2}\right]+\frac{(A')^2}{A^2} \quad (8)$$

Από τις (7) και (8) έχουμε:

$$\frac{E}{2}p'rB^2+\frac{E}{2}pB^2+ErpBB'+\frac{1}{2r^2}+\frac{BB'}{r}-\frac{B^2}{2r^2}+\frac{(A')^2}{A^2}+\frac{B^2}{r^2}-\frac{1}{r^2}-$$
$$-\frac{B^2}{2}Ee-\frac{B^2}{2}pE-\frac{A'B'}{AB}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Ep'rB^2+2ErpBB'+\frac{B^2}{r^2}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)+2\frac{BB'}{r}+2\frac{(A')^2}{A^2}-B^2Ee-\frac{2A'B'}{AB}=$$

(διαιρώντας με B²) $= Ep'r+2Erp\frac{B'}{B}+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)+2\frac{B'}{rB}+2\frac{(A')^2}{A^2B^2}-Ee-\frac{2A'B'}{AB^3}=0\Rightarrow$

$$\xRightarrow{(1),(2)} Ep'r+Erp\left[EeB^2r-\frac{B^2}{r}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)\right]+\left[2\frac{A'}{rAB^2}-Ep\right]+$$
$$+2\frac{B'}{rB}+2\frac{(A')^2}{A^2B^2}-Ee-\frac{2A'B'}{AB^3}=$$

$$=2Ep'r+2\left[E^2r^2B^2pe-EpB^2\left(1-\frac{1}{B^2}\right)\right]+4\frac{A'}{rAB^2}-2E(e+p)+$$
$$+4\frac{B'}{rB}+2\frac{A'}{A}\frac{2A'}{AB^2}-\frac{4A'B'}{AB^3}=0\Rightarrow$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} 2Ep'r+2\left[E^2r^2B^2pe-EpB^2\left(1-\frac{1}{B^2}\right)\right]+4\frac{A'}{rAB^2}-2E(e+p)+4\frac{B'}{rB}$$
$$+\left[EpB^2r+\frac{B^2}{r}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)\right]\left[Epr+\frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)\right]-2\frac{A'}{A}2\frac{B'}{B^3}=$$

$=2Ep'r+2E^2r^2B^2pe-2EpB^2\left(1-\frac{1}{B^2}\right)$[16] $+4\frac{A'}{rAB^2}-2E(e+p)+4\frac{B'}{rB}-2\frac{A'}{A}2\frac{B'}{B^3}+$

$$E^2p^2r^2B^2+EpB^2\left(1-\frac{1}{B^2}\right)+EpB^2\left(1-\frac{1}{B^2}\right)+\frac{B^2}{r^2}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)^2=0\Rightarrow$$

$$\xRightarrow{(1),(2)} 2Ep'r+2E^2r^2B^2pe+4\frac{A'}{rAB^2}-2E(e+p)+4\frac{B'}{rB}+E^2p^2r^2B^2+$$

[16] Σημειώνουμε ότι οι χρωματισμένοι όροι μέσα στις πράξεις που κάνουμε είναι όροι που κατά την πρόσθεση δίνουν μηδενική συνεισφορά. Αυτό το κάνουμε για διευκόλυνση του επίμονου, στο θέμα των πράξεων, αναγνώστη.

$$+\frac{B^2}{r^2}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)^2 - \left[EpB^2r + \frac{B^2}{r}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)\right]\left[Eer - \frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)\right] =$$

$$=2Ep'r + 2E^2r^2B^2pe + 4\frac{A'}{rAB^2} - 2E(e+p) + 4\frac{B'}{rB} + E^2p^2r^2B^2 +$$
$$+\frac{B^2}{r^2}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)^2 - \left[E^2r^2B^2pe - EpB^2\left(1-\frac{1}{B^2}\right) + EeB^2\left(1-\frac{1}{B^2}\right) - \frac{B^2}{r^2}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)^2\right] =$$

$$= [2Ep'r + E^2r^2B^2p(p+e) - E(p+e)] + 2\frac{2A'}{rAB^2} - E(p+e) + 4\frac{B'}{rB} +$$
$$+2\frac{B^2}{r^2}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)^2 + EpB^2\left(1-\frac{1}{B^2}\right) - EeB^2\left(1-\frac{1}{B^2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{(1),(2)} [\ldots]+2\left[Ep + \frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)\right] - Ee - Ep + 2\left[EeB^2 - \frac{B^2}{r^2}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)\right] +$$
$$+2\frac{B^2}{r^2}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)^2 + EB^2\left(1-\frac{1}{B^2}\right)(p-e) =$$

$$= [\ldots]+E(p-e) + 2EeB^2 + \left(1-\frac{1}{B^2}\right)\left[\frac{2}{r^2} - \frac{2B^2}{r^2}\right] + EB^2\left(1-\frac{1}{B^2}\right)(p-e) +$$
$$+2\frac{B^2}{r^2}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)^2 =$$

$$= [\ldots]+E(p-e) + 2EeB^2 - \frac{2B^2}{r^2}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)\left[1-\frac{1}{B^2}\right] + EB^2\left(1-\frac{1}{B^2}\right)(p-e) +$$
$$+2\frac{B^2}{r^2}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)^2 =$$

$$= [\ldots]+Ep - Ee + 2EeB^2 + EB^2\left[p - e - \frac{p}{B^2} + \frac{e}{B^2}\right] =$$

$$= [\ldots] + Ep - Ee + 2EeB^2 + EB^2p - EB^2e - Ep + Ee =$$

$$= [2Ep'r + E^2r^2B^2p(p+e) - E(p+e)] + EB^2(e+p)$$

…και αν θέσουμε E=1, τότε παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση για την πίεση και την πυκνότητα μέσα στο σφαιρικό υγρό:

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow 2\frac{dp}{dr}r + B^2(e+p)(1+pr^2) - (p+e) = 0}$$

Επομένως η πίεση μέσα στο σφαιρικό υγρό δεν μπορεί να έχει παρά μία μορφή που να επαληθεύει την ως άνω διαφορική εξίσωση.

Στη συνέχεια ψάχνουμε λύσεις για τις εξισώσεις (1),(2),(3) και (4). Σε αυτό το σημείο θα παραθέσουμε δύο απλά παραδείγματα λύσεων με κάποια δυνατή φυσική ερμηνεία.

<u>*1ο παράδειγμα λύσης*</u>

Έστω ότι αντιμετωπίζουμε ένα ρευστό στο οποίο τόσο η πίεση, όσο και η πυκνότητα ύλης είναι σταθερές στο εσωτερικό του. Επομένως p=σταθερό και e=σταθερό. Σε αυτήν την περίπτωση με λίγη προσπάθεια συμπεραίνουμε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) έχουν τετριμμένη λύση, η οποία είναι η εξής:

- $B(r)=\frac{1}{\sqrt{1-Ee\frac{r^2}{3}+\frac{c}{r}}}$, όπου c είναι σταθερά που προκύπτει από την αναγκαία, για την ανεύρεση λύσης, ολοκλήρωση.
- $A(r)=a-b\sqrt{1-Ee\frac{r^2}{3}+\frac{c}{r}}$.

Γενικά μπορούμε να ορίσουμε: $\frac{Ee}{3}=\frac{1}{R^2}$. Επίσης, κοιτάζοντας την οριακή συνθήκη για $r\to 0$, θα παρατηρήσουμε ότι πρέπει η σταθερά c να έχει την τιμή 0. Σε αντίθετη περίπτωση, η λύση που παίρνουμε δεν είναι αντιπροσωπευτική ενός φυσικού προβλήματος και εν γένει ενός κοσμολογικού χώρου. Έτσι, η τελική μορφή της λύσης είναι η εξής:

- $B(r)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}$ και
- $A(r)=a-b\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}$, κι έτσι βρήκαμε τη μορφή της μετρικής στο εσωτερικό του ρευστού.

<u>*2ο παράδειγμα λύσης*</u>

Έστω ότι $e+3p=c_1$, όπου c_1:σταθερά. Σε αυτήν την περίπτωση, αξιοποιώντας πάλι τις εξισώσεις (1) και (2) με βάση την παραπάνω σχέση (έστω ότι E=1), παίρνουμε την εξίσωση:

$$\to \frac{B'}{B^3}+3\frac{A'}{AB^2}-\frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)=\frac{c_1 r}{2} \qquad (9)$$

Εργαζόμαστε έπειτα με ένα σύστημα 2 εξισώσεων, την (5) και την (9). Προσθέτοντας τις δύο αυτές σχέσεις, δημιουργούμε τη σχέση (10):

$$\to \frac{A''}{AB^2}+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)-\frac{1}{r}\frac{A'}{AB^2}-\frac{B'}{rB^3}-\frac{A'B'}{AB^3}+\frac{B'}{rB^3}+3\frac{A'}{rAB^2}-\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{B^2}\right)=\frac{c_1}{2}\Leftrightarrow$$

(πολλαπλασιάζοντας με AB)$\Leftrightarrow \frac{A''}{B}-\frac{A'B'}{B^2}+2\frac{A'}{rB}=\frac{c_1}{2}AB=2\frac{1}{r}\left(\frac{A'}{B}\right)+\frac{d\left(\frac{A'}{B}\right)}{dr}$

$$\rightarrow \frac{d(A'/_B)}{dr} + \frac{2}{r}\left(\frac{A'}{B}\right) = \frac{c_1 AB}{2} \qquad (10)$$

Ολοκληρώνοντας την (8) και ψάχνοντας την ομογενή λύση της διαφορικής εξίσωσης, βρίσκουμε :

$$\Rightarrow \frac{d\left(A'/_B\right)}{\left(A'/_B\right)} = -\frac{2}{r}dr \Leftrightarrow ln\left(A'/_B\right) = -2lnr + c = -2\ln(cr) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(A'/_B\right) = \frac{c}{r^2} \text{ ή αλλιώς } \rightarrow A' = \frac{c}{r^2}B \qquad (11)$$

, όπου c η σταθερά ολοκλήρωσης. Συνεχίζοντας έπειτα, για να βρούμε τη γενική λύση, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων του Lagrange. Έτσι βάζουμε την (11) στην (10) αντιμετωπίζοντας τη σταθερά c σαν συνάρτηση του ‘‘r’’ πλέον και βρίσκουμε τη σχέση:

$$\rightarrow \frac{c'}{r^2} = \frac{c_1 AB}{2} \qquad (12)$$

Έτσι λοιπόν, έχουμε καταλήξει σε ένα σύστημα 2 εξισώσεων, των (11) και (12), οι οποίες είναι δυνητικές ‘‘πηγές’’ λύσεων της (5) και της (9). Την (5) την χρησιμοποιούμε για να καλύψουμε πλήρως τις απαιτούμενες σχέσεις, μιας και δεν χρησιμοποιούμε την (3) απευθείας. Υποστηρίζουμε ότι οι σχέσεις (11) και (12) είναι δυνητικές πηγές, διότι δεν είναι δεδομένο ότι θα βρίσκουμε για κάθε συνάρτηση c(r) που θα βάλουμε, μία λύση των εξισώσεων (5) και (9), από τη στιγμή που το συγκεκριμένο σύστημα είναι μη γραμμικό και άρα ιδιαίτερης πολυπλοκότητας. Εμείς εδώ επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε την οικογένεια συναρτήσεων **$c(r)=\alpha+\beta r^n$** , όπου το n είναι εν γένει ένας αυθαίρετος, πραγματικός αριθμός. Σύμφωνα με τις σχέσεις (11) και (12), από την επιλογή της συγκεκριμένης c(r) προκύπτει:

- $A(r) = Z\left[\frac{\alpha}{n-4}r^{n-4} + \frac{\beta}{2n-4}r^{2n-4} + \gamma\right]$, όπου $Z = \pm\sqrt{\frac{4n\beta}{c_1}}$ και γ η σταθερά ολοκλήρωσης.
- $B(r) = \frac{2n\beta}{c_1 A(r)} r^{n-3}$.

→ Αντικαθιστούμε τις μορφές των A(r) και B(r) που βρήκαμε στην (5) για να δούμε αν πράγματι είναι λύσεις της, και αν ναι, υπό ποιες προϋποθέσεις:

$$\xrightarrow{(5\alpha)} \frac{1}{B^2}\left[\frac{A''}{A} + \frac{B^2}{r^2}\left(1 - \frac{1}{B^2}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'B'}{AB}\right] = 0 =$$

$$= \left[\frac{A''}{AB^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2B^2} - \frac{1}{rB^2}\frac{A'}{A} + \frac{1}{rB^2}\frac{B'}{B} - \frac{A'B'}{AB^3}\right] =$$

$$= \left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2 \frac{Z^2}{2}\left[\frac{-\left(\frac{\alpha}{r^n}+\beta\right)^2}{2\left(\frac{\alpha}{(n-4)}\frac{1}{r^n}+\frac{\beta}{2n-4}+\frac{\gamma}{r^{2n-4}}\right)} + \left\{\frac{\alpha}{r^n}(n-5)+\beta(2n-5)\right\}\right] +$$
$$+\frac{1}{r^2} - \left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2 \frac{A^2}{r^{2n-4}} - \left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2 \frac{Z^2}{2}\left(\frac{\alpha}{r^n}+\beta\right) -$$
$$-\left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2\left[\frac{Z^2}{2}\left(\frac{-\alpha}{r^n}-\beta\right)+\frac{(n-3)A^2}{r^{2n-4}}\right] -$$
$$-\frac{Z^2}{2}\left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2\left(\frac{\alpha}{r^n}+\beta\right)\left[(n-3)-\frac{1}{2}\frac{\frac{\alpha}{r^n}+\beta}{\frac{\alpha}{(n-4)}\frac{1}{r^n}+\frac{\beta}{2n-4}+\frac{\gamma}{r^{2n-4}}}\right] =$$

$$= \left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2 \frac{Z^2}{2}\left[\frac{-\left(\frac{\alpha}{r^n}+\beta\right)^2}{2\left(\frac{\alpha}{(n-4)}\frac{1}{r^n}+\frac{\beta}{2n-4}+\frac{\gamma}{r^{2n-4}}\right)}\right] +$$
$$+\left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2 \frac{Z^2}{2}\left[\frac{\alpha}{r^n}(n-5)+\beta(2n-5)\right]+\frac{1}{r^2} -$$
$$-\left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2 \frac{Z^2}{r^{2n-4}}\left(\frac{\alpha}{(n-4)}r^{n-4}+\frac{\beta}{2n-4}r^{2n-4}+\gamma\right) - \left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2 \frac{(n-3)}{r^{2n-4}}A^2 -$$
$$-\left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2 \frac{Z^2}{2}\left(\frac{\alpha}{r^n}+\beta\right)(n-3) +$$
$$+\frac{Z^2}{4}\left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2 \frac{\left(\frac{\alpha}{r^n}+\beta\right)^2}{\left(\frac{\alpha}{(n-4)}\frac{1}{r^n}+\frac{\beta}{2n-4}+\frac{\gamma}{r^{2n-4}}\right)} = 0 \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\gamma\iota\alpha\ n=3} \left(\frac{c_1}{6\beta}\right)^2 \frac{Z^2}{2}\left[\frac{\alpha}{r^3}(-2)+\beta\right]+\frac{1}{r^2}-\left(\frac{c_1}{6\beta}\right)^2 Z^2\left(\frac{\alpha}{(-1)r^3}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{r^2}\right)-0-0=$$

$$= \left(\frac{c_1}{6\beta}\right)^2\frac{Z^2}{2}\beta - \left(\frac{c_1}{6\beta}\right)^2\frac{\alpha Z^2}{r^3} + \frac{1}{r^2} - \left(\frac{c_1}{6\beta}\right)^2\frac{Z^2\gamma}{r^2} - \left(\frac{c_1}{6\beta}\right)^2\frac{Z^2}{2}\beta + \left(\frac{c_1}{6\beta}\right)^2\frac{\alpha Z^2}{r^3} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{r^2}\left[1-\left(\frac{c_1}{6\beta}\right)^2 Z^2\gamma\right] = 0$$

$$\rightarrow \gamma = \frac{1}{Z^2}\left(\frac{6\beta}{c_1}\right)^2$$

→ Αντικαθιστούμε τώρα τις μορφές των A(r) και B(r) και στην (9) για να δούμε αν είναι λύσεις και αυτής, και αν ναι, να εξετάσουμε την περίπτωση συμφωνίας με τις προϋποθέσεις της (7):

$$\Rightarrow \frac{B'}{rB^3} + 3\frac{A'}{rAB^2} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{B^2}\right) = \frac{c_1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2 \left[\frac{Z^2}{2}\left(\frac{-a}{r^n} - \beta\right) + \frac{n-3}{r^{2n-4}}A^2\right] - \frac{1}{r^2} + \left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2 \frac{A^2}{r^{2n-4}} +$$
$$+3\frac{Z^2}{2}\left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2\left(\frac{a}{r^n} + \beta\right) = \frac{c_1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2 \left[Z^2\left(\frac{a}{r^n} + \beta\right) + \frac{n-3}{r^{2n-4}}Z^2\left(\frac{a}{n-4}r^{n-4} + \frac{\beta}{2n-4}r^{2n-4} + \gamma\right)\right] -$$
$$-\frac{1}{r^2} + \left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2 \frac{Z^2}{r^{2n-4}}\left(\frac{a}{n-4}r^{n-4} + \frac{\beta}{2n-4}r^{2n-4} + \gamma\right) = \frac{c_1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2 \left[Z^2\left(\frac{a}{r^n} + \beta\right) + (n-3)Z^2\left(\frac{a}{n-4}\frac{1}{r^n} + \frac{\beta}{2n-4} + \frac{\gamma}{r^{2n-4}}\right)\right] -$$
$$-\frac{1}{r^2} + \left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2 Z^2\left(\frac{a}{n-4}\frac{1}{r^n} + \frac{\beta}{2n-4} + \frac{\gamma}{r^{2n-4}}\right) = \frac{c_1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2 Z^2\frac{a}{r^n} + \left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2 Z^2\beta +$$
$$+\left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2 (n-3)Z^2\left(\frac{a}{n-4}\frac{1}{r^n} + \frac{\beta}{2n-4} + \frac{\gamma}{r^{2n-4}}\right) - \frac{1}{r^2} +$$
$$+\left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2 Z^2\frac{a}{n-4}\frac{1}{r^n} + \left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2 Z^2\frac{\beta}{2n-4} + \left(\frac{c_1}{2n\beta}\right)^2 Z^2\frac{\gamma}{r^{2n-4}} = \frac{c_1}{2} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\gamma\iota\alpha\ n=3} \left(\frac{c_1}{6\beta}\right)^2 Z^2\frac{a}{r^3} + \left(\frac{c_1}{6\beta}\right)^2 Z^2\beta + 0 - \frac{1}{r^2} + \left(\frac{c_1}{6\beta}\right)^2 Z^2\frac{a}{(-1)}\frac{1}{r^3} + \left(\frac{c_1}{6\beta}\right)^2 Z^2\frac{\beta}{2} +$$
$$+\left(\frac{c_1}{6\beta}\right)^2 Z^2\frac{\gamma}{r^2} = \frac{c_1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{3}{2}\left(\frac{c_1}{6\beta}\right)^2 Z^2\beta - \frac{c_1}{2}\right] + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{c_1}{6\beta}\right)^2 Z^2\gamma - 1\right] = 0$$

$$\rightarrow \gamma = \frac{1}{Z^2}\left(\frac{6\beta}{c_1}\right)^2 \text{και } \beta = \frac{c_1}{3Z^2}\left(\frac{6\beta}{c_1}\right)^2$$

Παρατηρούμε ότι για την επιλογή n=3, οι παραστάσεις απλοποιούνται αρκετά.

→ Από την αντικατάσταση στην (7) προκύπτει η εξής προϋπόθεση, ούτως ώστε οι A(r), B(r) να είναι τελικά λύσεις με βάση την επιλεγμένη c(r):

i) $c_1 = \frac{3\beta}{\gamma}$

→ Από την αντικατάσταση στην (9) παίρνουμε τις εξής 2 προϋποθέσεις:

i) $c_1 = \frac{3\beta}{\gamma}$

ii) 1=1 , που μας υποδεικνύει λοιπόν ότι υπάρχει συμφωνία στις 2 εξισώσεις.

Άρα αρχικά η επιλογή $c(r)=\alpha+\beta r^n$ και στη συνέχεια ο προσδιορισμός n=3 μας οδήγησαν σε λύση. Έτσι τελικά δεχόμαστε ότι $c(r)=\alpha+\beta r^3$. Καταλήγουμε:

- $A(r) = \pm 2\sqrt{\gamma}[\frac{-\alpha}{r} + \gamma(\frac{c_1}{6}r^2 + 1)]$
- $B(r) = \frac{2\gamma}{A(r)}$.

Αντικαθιστούμε τελικά τα A(r) και B(r) στις (1) και (2) και παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα για την πυκνότητα και την πίεση:

❖ $$e = \frac{c^4}{8\pi G_N}\left\{\frac{\left(\gamma\left(\frac{c_1 r^2}{6}+1\right)-\frac{\alpha}{r}\right)^2}{\gamma r^2} + \frac{2\left(\frac{c_1\gamma r}{3}+\frac{a}{r^2}\right)\left(\gamma\left(\frac{c_1 r^2}{6}+1\right)-\frac{\alpha}{r}\right)}{\gamma r} - \frac{1}{r^2}\right\} =$$
$$= \frac{c^4}{8\pi G_N}\left\{\frac{5}{36}c_1^2\gamma r^2 + c_1\gamma - \frac{2}{3}\frac{\alpha c_1}{r} + \frac{1}{r^2}(\gamma-1) - \frac{36a^2}{r^4}\right\}$$

❖ $p = -e$

Εδώ εξετάζουμε την οριακή συνθήκη το r→0, μιας και ασχολούμαστε με ένα σφαιρικό υγρό, πεπερασμένου όγκου. Παρατηρούμε ότι θα πρέπει να θέσουμε α=0 και γ=1, ούτως ώστε οι τιμές της πίεσης και της πυκνότητας να είναι συναρτήσεις που αποδίδουν φυσικό νόημα. Έτσι, καταλήγουμε με τις εξής εκφράσεις:

❖ $$\mathbf{e} = \frac{c^4}{8\pi G_N}\left\{\frac{5}{36}c_1^2 r^2 + c_1\right\}$$

❖ $\mathbf{p = -e}$

$\rightarrow 2p=c_1$: σταθερό

Το ως άνω αποτέλεσμα δεν θα πρέπει να μας ξενίσει. Μάλλον το αντίθετο. Η ενέργειά μας να θέσουμε n=3 περιόρισε την ευρύτητα των λύσεων. Μέσα σε μια ολόκληρη οικογένεια δυνητικών λύσεων, η επιλογή αυτή μας οδήγησε σε μία συγκεκριμένη περίπτωση που ναι μεν σέβεται ό,τι απαιτούμε να σεβαστεί από φυσικής και μαθηματικής πλευράς, ωστόσο μας δίνει σταθερή πίεση και πυκνότητα ύλης, με μία απλή μάλιστα σχέση αναλογίας μεταξύ τους. Αν ωστόσο ψάξει κανείς είναι βέβαιο ότι μπορεί να βρει πιο περίπλοκες και σύνθετες λύσεις.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειώσουμε ότι οι δύο επιλογές που κάναμε στα ως άνω παραδείγματα, ως προς τη σχέση ανάμεσα σε πίεση και πυκνότητα, δεν είναι τυχαίες. Συχνά συναντώνται και οι δύο σε κοσμολογικό επίπεδο, με την δεύτερη μάλιστα να παρουσιάζεται σε κοσμολογικές εξισώσεις για το Σύμπαν μας σήμερα. Τα μοντέλα που εξετάσαμε ουσιαστικά μπορούν να επιλεχθούν συνήθως για τη μελέτη του εσωτερικού ενός άστρου, χωρίς βεβαίως να είμαστε ποτέ σίγουροι για την ορθότητα των αποτελεσμάτων που παίρνουμε για τον εκάστοτε χωρόχρονο, αφού οι προσεγγίσεις που κάναμε ήταν αρκετές κατά τη διάρκεια της ανάλυσής μας. Στην περίπτωση που εισάγουμε και περιστροφή στο πρόβλημα, τότε αυτό θα γίνει πιο περίπλοκο, ωστόσο είναι σχεδόν βέβαιο ότι τα αποτελέσματα που θα πάρουμε θα είναι και πιο κοντά στην πραγματικότητα. Λόγω πολυπλοκότητας είναι πολύ πιθανό στο τέλος να μην καταφέρουμε να βρούμε λύση στο πρόβλημά μας. Το γεγονός όμως ότι εδώ και 100 χρόνια περίπου έχουμε τα εργαλεία και τη δυνατότητα να πάμε την αναζήτησή μας για τον κόσμο, σε κοσμολογικό επίπεδο, ένα βήμα παραπέρα το χρωστάμε αναμφίβολα σε αυτόν τον μεγάλο γερμανοεβραίο. Τον Albert Einstein.

Επίλογος

Εξ αρχής, στόχος μας ήταν να κάνουμε μία διερεύνηση στην θεωρία της Γενικής Σχετικότητας. Για να γίνει αυτό έπρεπε να ξεκινήσουμε από την αρχή και τα πιο βασικά, έτσι ώστε να καταφέρουμε στη συνέχεια να κατανοήσουμε τα πιο σύνθετα. Επιλέξαμε εν γνώσει μας να αποφύγουμε την καταγραφή των πράξεων που χρειάστηκαν, και οι οποίες βέβαια, στο τέλος της ημέρας, κρίνονται αχρείαστες, στην προσπάθεια που κάνουμε για ουσιαστική κατανόηση της θεωρίας. Είναι εύκολο για τον αναγνώστη που θα ασχοληθεί με το αντικείμενο να αντιληφθεί ότι η θεωρία είναι πολυσύνθετη και με τόσο δύσκολους φορμαλισμούς, ώστε μετά από ένα σημείο η βοήθεια του υπολογιστή είναι απαραίτητη για να υπάρξει πρόοδος. Έτσι το ως άνω πόνημα είναι μια εισαγωγική εργασία για αυτόν που ενδιαφέρεται να δει και να μπει μέσα στα πράγματα της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας και παράλληλα μία ευσύνοπτη περιγραφή της για αυτόν που απλά θέλει να ενημερωθεί για το αντικείμενο. Το συμπέρασμα είναι, ότι στο τέλος της ημέρας, καταφέρνουμε, έστω και επίπονα, να μάθουμε κάτι παραπάνω για τον κόσμο μας και για το φαινόμενο αυτό που τόσο μας απασχολεί και συναντάμε παντού και καθημερινά.. τη βαρύτητα!