# Θέματα Μαθηματικής Λογικής

Η Συμπάγεια ως εφαρμογή της Τοπολογίας &
το Θεώρημα Kochen-Specker στα θεμέλια της Φυσικής

Master's Thesis

Μπαχά Ιωάννα Ελένη

Επιβλέπων: Αθανάσιος Φειδάς

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Τμήμα Μαθηματικών & Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Ηράκλειο Κρήτης
Ιούνιος, 2018

Η τριμελής εξεταστική επιτροπή αποτελείται από τους:

Ηλίας Κυρίτσης, Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Λευτέρης Κυρούσης , Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αθανάσιος Φειδάς (Επιβλέπων), Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών & Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Η παρούσα εργασία αποτελεί διπλωματική εργασία στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος «Μαθηματικά και Εφαρμογές τους » του Τμήματος Μαθηματικών & Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης.

Πριν την παρουσίαση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω ορισμένους από τους ανθρώπους που γνώρισα, συνεργάστηκα μαζί τους και έπαιξαν πολύ σημαντικό ρόλο στην πραγματοποίησή της.

Πρώτο από όλους θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής εργασίας, Καθηγητή Αθανάσιο Φειδά για την πολύτιμη καθοδήγηση του, την εμπιστοσύνη του και την εκτίμηση που μου έδειξε.

Επιπλέον, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στους καθηγητές Ηλία Κυρίτση και Λευτέρη Κυρούση που δέχτηκαν να είναι μέλη της τριμελής επιτροπής αξιολόγησης της μεταπτυχιακής εργασίας, καθώς και για τις πολύτιμες συμβουλές τους.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς την υποψήφια διδάκτωρ Δήμητρα Χομπιτάκη και τον υποψήφιο διδάκτορα Μάνο Καμαριανάκη οι οποίοι συνέβαλαν ουσιαστικά στην ολοκλήρωση αυτής της εργασίας.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες θέλω να απευθύνω σε όλους τους φίλους μου, και ιδιαιτέρως στην Ιωάννα Κλημεντία Πολιτάκη, για ανοχή και την ψυχολογική υποστήριξη που μου δώσανε όλο αυτό το διάστημα.

Τέλος, το μεγαλύτερο ευχαριστώ θα ήθελα να δώσω τους γονείς μου Ματίνα και Ηρακλή, την αδερφή μου Ουρανία Δανάη, καθώς και όλα τα μέλη της οικογένειάς για όλα τα χρόνια υπομονή και υποστήριξης που μου πρόσφεραν τα για την ολοκλήρωση των μεταπτυχιακων μου σπουδών.

## Abstract

In the introduction of this article, we make a brief historical retrospection of Mathematical Logic, from Ancient Greece and Aristotle to the modern era and the great evolution of Logic. At the beginning of the 20th century, three schools of mathematical philosophy, each opposite to the other, appeared: Formalism, Intuitionism and Logicism.

According to Logicism, logic is the basis for any kind of argument. And since Mathematics are considered as an extension of logic, most or all mathematics are reducible to logic. Russell and Whitehead championed this theory, fathered by Gottlob Frege.

On the other hand, Intuitionists such as G.Boole, J.Wenger and E.Schroder, were mostly interested in studying the relationship between numerical and logical operations.

Regarding formalism, one of its first supporters was David Hilbert, whose theory was intended to be a complete and consistent axiomatization of all mathematics. His main objective was to prove that these axiomatic systems do not lead to contradictions.

In the second chapter, we study various concepts from the field of Topology. Our ultimate goal is to present an alternative proof of the Compactness' Theorem via Topology techniques.

**Definition 1** *A topological space $X$ is called compact iff for each class $\{O_a : a \in I\}$ of open sets of $X$, for which $X = \bigcup_{i \in I} O_i$, there is a finite $I_0 \subset I$ such that $X = \bigcup_{i \in I_o} O_i$.*

**Definition 2** *A topological space $X$ is called compact if for each class of $\{C_a : a \in I\}$ of closed sets of $X$, which are the complement of open sets ($C_a = X - O_a$), for which $\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$, there is a finite number of $I_0 \subset I$ such that $\bigcap_{i \in I_o} C_i = \emptyset$.*

The alternative formulation of the above definition will be more useful for the following proofs.

**Remark 1** *Let $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ topological spaces. We recall the definition of the Product Topology, which we symbolize:*

$$\prod_{n=1}^{\infty} X_n = \{f : \mathbb{N} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \ f(n) \in X_n\} \tag{1}$$

In order to prove the Compactness' Theorem, we assume that, for the Topology Spaces $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ of the remark (1), we can accept that $X_1 = \ldots = X_n = \{0, 1\}$. We shall denote this space by $2^\omega = \{0, 1\}^\omega = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \ldots$, where each of $X_i = \{0, 1\}$ is trivially compact. Moreover, all subsets of $2^\omega$ are both open and close, using the discrete topology.

**Definition 3** *Let $\{x_i : i \in I\}$ be a family of topological spaces and $X = \prod_{i \in I} X_i$ their product. The open sets in product topology are unions (finite or infinite) of sets of the form: $X = \prod_{i \in I} U_i$, where every $U_i$ is an open subset of $X_i$ and $X_i \neq U_i$ only finitely many $i$.*

The following theorem of Topology plays an important role towards the proof of the Compactness theorem.

**Theorem 0.1 (Tychonoff)** *Let $\{X_i : i \in I\}$, a family of compact topological spaces. Then the product $X = \prod_{i \in I} X_i$ is a compact topological space.*

According to the theorem, the space $2^\omega$ is compact and therefore, its open subsets are, by definition, sets of the form:

$$O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_p \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots \tag{2}$$

where $O_i$ are open subsets of $\{0, 1\}$, for $i \in \{1, \ldots, p\}$.

**Lemma 0.2** *Given a formula $\phi$, we denote the set $F_\phi = \{\bar{u} : \bar{u}(\phi) = 1\}$. Then, both of the following statements are valid:*

1. *$F_\phi$ is an open set, for every formula $\phi$.*
2. *$F_\phi$ is a closed set, for every formula $\phi$.*

*Proof:* We will prove the lemma in two steps. First, we will prove the *2*, assuming that *1* is true. The proof is then completed by showing the validity of *1*.

*Proof of* 2. For each formula $\phi$ the following applies:

$$F_\phi = F^c_{\neg\phi}, \tag{3}$$

where $F^c_{\neg\phi}$ denotes the complement of set $F_{\neg\phi}$. The set $F_{\neg\phi}$ is an open set and therefore $F_\phi$, for each formula $\phi$, is closed.

*Proof of* 1. First, suppose that the random formula $\phi$ is just a variable, $x_n$. We define the set:

$$F_{x_n} = \{u : \ u(x_n) = 1\}, \tag{4}$$

where $u(x_n)$ is the valuation of variable $x_n$.

The elements of this set are sequences of 0 and 1, whose $n$th term is equal to 1 and all others are either 0 or 1. Notice that the set $F_{x_n}$ is an element of the base of open subsets, as defined above, therefore it is an open set.

We will show that the same principle also applies to the case where $\phi$ contains more than one variable. Suppose that the variables appearing in the $\phi$ formula are between the variables $x_1, \ldots, x_n$. Obviously, the remaining variables from $x_{n+1}$ do not affect the valuation of $\phi$.

We consider a valuation $u$ and let every $i \in \{1, \ldots, n\}$ have $u(x_i) = w_i$. For each $i \in \{1, \ldots, n\}$ we define:

$$\bar{x}_i = \begin{cases} x_i, & w_i = 1 \\ \neg x_i, & w_i = 0. \end{cases} \tag{5}$$

We then define the set $W = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \{0,1\}^n$ which contains all $n$-groups of valuations of variables appearing in the formula $\phi$, for which $\phi$ is true.

As in the case of one variable, we will define the sets

$$F_{\bar{x_i}} = \{u : \ u(\bar{x_i}) = 1\}, \tag{6}$$

for $i \in \{1, \dots, n\}$, which are both open and closed. Obviously $\phi$ is logicably equivalent to the formula:

$$\phi = \bigvee \bar{x_1} \wedge \bar{x_2} \wedge \dots \wedge \bar{x_n} \tag{7}$$

and therefore $F_\phi$ is:

$$F_\phi = \bigcup_{W \in w} (F_{\bar{x_1}} \cap F_{\bar{x_2}} \cap \dots \cap F_{\bar{x_n}}). \tag{8}$$

Therefore, the set $F_\phi$ is a finite union of finitely many intersections of closed sets and as such, it is a closed set.

□

**Theorem 0.3** *(Compactness' Theorem in Logic). Let $\Sigma$ be a set of formulas. If $\Sigma$ is finitely satisfiable, then $\Sigma$ is satisfiable.*

*Proof:* To prove that the set $\Sigma = \{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ is satisfiable, we need to show that

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_{\phi_k} \neq \emptyset, \tag{9}$$

where $F_{\phi_k}$ as in Lemma (an/kl).

We shall prove this by contradiction, therefore we suppose that the intersection of $F_{\phi_k}$ is the empty set. Applying Tychonoff's theorem, we know that the space $2^\omega$ is compact thus we get, from the equivalent definition of compactness in Topology, that there is a finite number of sets $F_{\phi_k}$ whose intersection is the empty set. But this leads to a contradiction, because it is known that the set $\Sigma$ is finitely satisfiable, so for every finite subset of $\Sigma$ is satisfiable. Therefore, for every $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcap_{k \in \{1,\ldots,n\}} F_{\phi_k} \neq \emptyset. \tag{10}$$

$\square$

In the third chapter, we make a brief introduction to quantum mechanics and study the experiment of the two slits and the conlusions derived by it.

The double slit experiment, first performed by Thomas Young in 1801 is considered one of the most famous experiments in quantum physics. The layout of the experiment is quite simple. We have a wall with two very small slots in close proximity and on the opposite side a screen that records the result of the experiment.

In front of the wall we place a source. In the first version of the experiment we consider a source that sends out particles of macroscopic dimension, for example small balls. Some will bounce off the wall, but some of them will travel through the slits and hit the screen behind. The screen marks all the spots where a ball has hit and the pattern that will be formed on the screen will be in the form of two lines of marks roughly the same shape as the slits.

The second time we run the experiment with a source that emits (classic) waves. As the wave passes though both slits, it essentially splits into two new waves, each spreading out from one of the slits. These two waves interfere with each other. For some of these waves, the crest of one will meet the trough of the other, and they will cancel each other out (destructive interference). For some other waves, their crests will meet resulting in a wave of double the amplitude (constructive interference). When the waves meet the screen placed behind the wall, we will see a stripy pattern, called an interference pattern.

Lastly, we run the experiment with a source that sends out particles of the microcosm, for example electrons. Imagine firing electrons at our wall with the two slits, but block one of tho slits for the moment. You'll find that some of the electrons will pass through the open slit and strike the screen just as small balls did at the first experiment. Something unexpected occurs when we repeat the experiment with both slits open. You would expect two rectangular strips on the second wall, as with the small balls, but what is actually observed is very different: the spots where electrons hit build up to replicate the interference pattern from a wave.

There is a possibility that the electrons might somehow interfere with each other, so they don't arrive in the same places they would if they were alone. However, the interference pattern remains even when we fire electrons one by one, so that they have no chance of interfering. Strangely, each individual electron contributes one dot to an overall pattern that looks like the interference pattern of a wave. his means that somehow each electron splits, passes through both slits at once, interferes with itself, and then recombines to meet the second screen as a single particle.

To find out what exactly happens, we place a detector by the slits, to see from which slit each electron passes through. If you do that, then the pattern on the screen turns into the particle pattern of two strips, as seen in the first experiment. The interference pattern disappears. Somehow, the act of looking makes sure that the electrons travel like well-behaved little balls.

This experiment suggests that what we call ”particles”, such as electrons, somehow combine characteristics of particles and characteristics of waves. That's the famous wave particle duality of quantum mechanics. It also suggests that the act of observing, of measuring, a quantum system has a profound effect on the system. The question of exactly how that happens constitutes the *measurement problem* of quantum mechanics.

In the last chapter, we present the proof of the Kochen-Specker Theorem and examine its importance for quantum mechanics. The Kochen-Specker theorem was suggested by S.Kochen and E.Specker in 1967. It is also known as the Bell-KS theorem, because in 1966 Bell had proposed an alternative formulation that led to similar conclusions.

**Theorem 0.4 (KS Theorem)** *There is no function $S^2 \to \{0,1\}$, where $S^2$ is the unit sphere, such that for each system $\{a_1, a_2, a_3\}$ this representation takes the value 0 in just one direction.*

In order to understand the significance of the KS theorem, we must make reference to some well known facts and definitions of the Quantum mechanics field.

Quantum mechanics based on experimental data, makes the following assumptions regarding the electron spin on the orthhohelium atom:

I. The projection $s(a,t)$ of the spin in the direction $a \in S^2$, where $S^2$ is the unit sphere, at the moment $t$ is measurable. Also, $s(a,t)$ randomly takes only one of the values -1,0,1 with some probability each.

II. The lengths $|s(a_i,t)|^2$, for $i = 1,2,3$, of the three projections in an orthonormal basis $\{a_1, a_2, a_3\} \subset S^2$ are measurable. Each such orthonormal basis will be called system. The sum of the lengths of the projections of the spin onto the vectors of every system is always equal to 2.

From now on, we will refer to the above properties as *axioms I and II.* According to classical mechanics, the quantity spin had to be a function of different variables. The key question we consider is this: Can the spins be considered as a function of natural variables and at the same time satisfy axioms I and II?

The answer to the above question is negative due to the KS theorem. In particular, we begin by assuming that there exists such a function $|s(a,t)|$ that satisfy both axioms.

From axiom I, we get that the value $|s(a,t)|$ is either 0 or 1, whereas from axiom II, we derive that, for each system $\{a_1, a_2, a_3\}$, only one of $|s(a_i)|$ equals 0. We shall also refer to this property of $|s(a_i,t)|$ as *basic property.* Finally, we derive a contradiction using the basic property of $|s(a_i,t)|$ and the KS theorem.

Lastly and in order to prove the KS theorem, we present the proof of the following Technical Theorem.

**Technical Theorem.** *It is possible to construct a finite set* $\Gamma \subset S^2$ *which has* 117 *vertices and the following property: "For any function* $k\colon \Gamma \to \{0,1\}$*, there is a system* $\{a_1, a_2, a_3\} \subset \Gamma$ *in which* $k$ *will not take value* 0 *exactly once, or there will be a pair of* $\{a_1, a_2\} \subset \Gamma$ *perpendicular directions, in which* $k$ *is equal to* 1*."*

A direct consequence of this theorem is the KS theorem. To prove the Technical Theorem, we first need the following two intermediate lemmas.

**Lemma 0.5** *Let* $a$ *and* $b$ *vertices on* $S^2$ *such that:* $sin\theta \in [0, 1/3]$*, where* $\theta$ *is the angle formed between* $a$ *and* $b$*. Then, the following graph can be constructed, for which* $a_0 \mapsto a$ *and* $a_9 \mapsto b$*.*

**Lemma 0.6** *The vertices* $a_0$ *and* $a_9$ *of the graph* (1) *will always be either both 0 or both 1.*

*Proof:* Suppose that in the graph we assign different values at the vertices $a_0$ and $a_9$. We select the value 1 for $a_0$ and 0

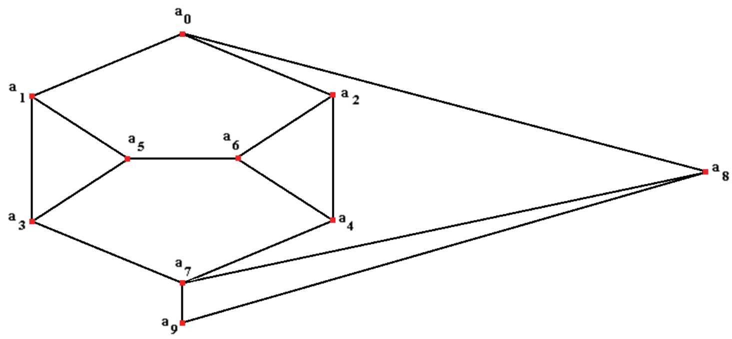



Figure 1: G1

for $a_9$. According to the basic property, we will give values to the other vertices as shown in the figure (2):

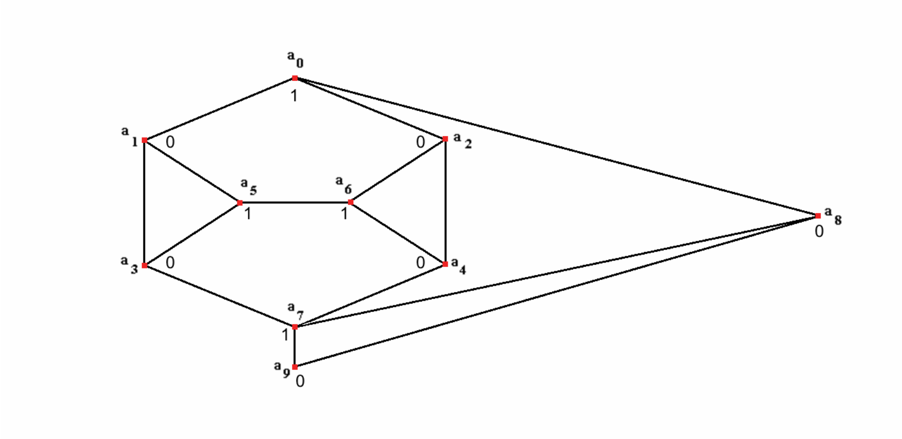



Figure 2: G2

This requires that vertices $a_5$ and $a_6$ are orthogonal and both take the value 1, which is forbidden. Hence, two vertices closer than $arcsin(1/3)$ cannot have different values.

$\square$

*Technical Theorem's Proof:* We have to construct another KS graph in the following way. Consider a realization of the graph (1), where, according to Lemma(0.5), the angle between vertices $a_0$ and $a_9$ is $\theta = \pi/10 \leqslant sin^{-1}(1/3)$.

Now we choose three orthogonal vertices $p_0, q_0, r_0$ and space interlocking copies of (1) between them such that every instance of vertex $a_9$ of one copy of (1) is identified with the instance of $a_0$ of the next copy. In this way five interlocking copies of (1) are spaced between $p_0$ and $q_0$ and all five instances of $a_8$ are identified with $r_0$. Working in the same way, five interlocking copies are spaced between $q_0$ and $r_0$, identifying all copies of $a_8$ with $p_0$, and between $p_0$ and $r_0$, identifying all copies of $a_8$ with $q_0$.

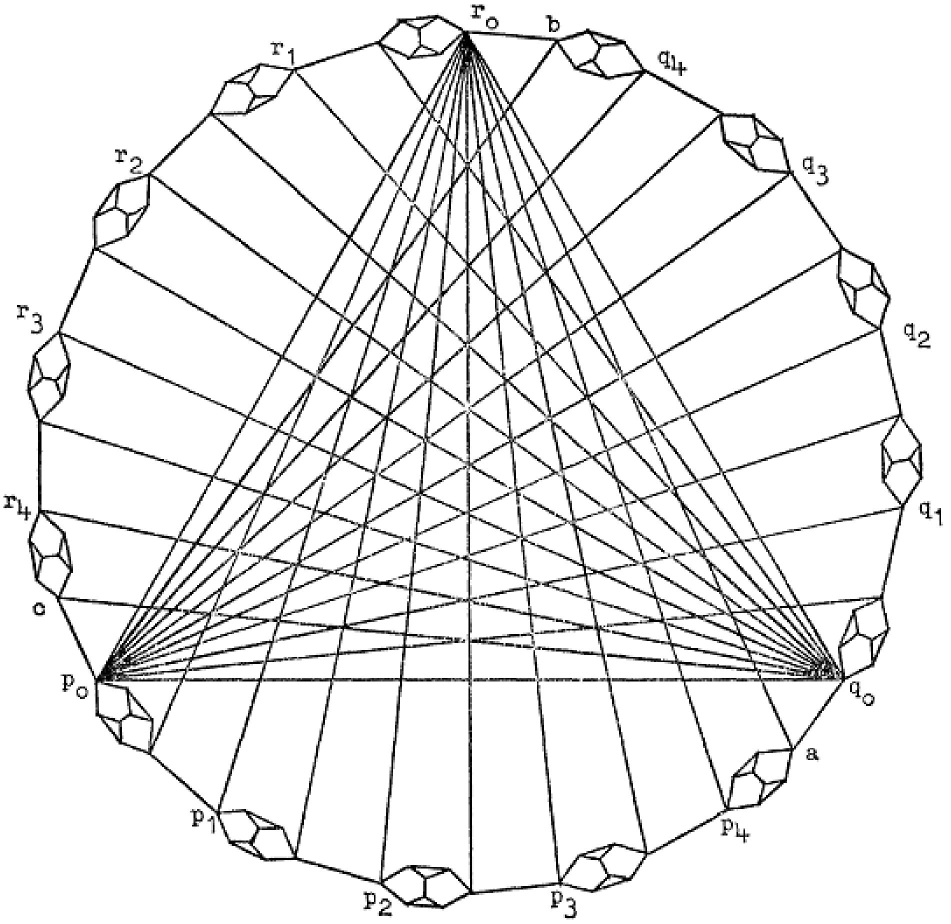



Figure 3: G3

That graph is constructible is born out directly by the construction itself. If from the 15 copies of (1) used in the process of constructing (3) we subtract those vertices that were identified with each other, we end up with the requested set of 117 vertices.

However, although (3) is constructible, no values can be attributed to its vertices according to the basic property. We know from Lemma (0.5) that a copy of (1) with $\theta = \pi/10 \leqslant sin^{-1}(1/3)$, requires that vertices $a_0$ and $a_9$ have the same value. Now, since $a_9$ in one copy of (1) is identical to $a_0$ in the next copy, $a_9$ in the second copy must have the same value as $a_0$ in the first. Indeed, by repetition of this argument all instances of $a_0$ must have the same value.

Vertices $p_0, q_0, r_0$ are identified with points $a_0$, so they must have the same value, which are inconsistent with the constraint that exactly one of them must get the value 0 and the other two must get the value 1.

$\square$

# Περιεχόμενα



.

# 1 Ιστορία της Λογικής

## 1.1 Η Λογική στην αρχαιότητα

Η *Λογική*, ή καλύτερα Επιστήμη της Λογικής, είναι η ανάλυση και η μελέτη των μεθόδων του συλλογισμού και συμπερασμού. Με απλά λόγια, είναι η μελέτη του τρόπου με τον οποίο κάνουμε συλλογισμούς και αποδείξεις. Θα μπορούσε να θεωρηθεί ανεξάρτητος κλάδος, όπως η Φυσική και τα Μαθηματικά, για τους περισσότερους όμως αποτελεί τη βάση της ορθής νόησης, που είναι απαραίτητη σε όλες τις επιστήμες.

Η Λογική ως επιστήμη αναπτύχθηκε ήδη από την αρχαιότητα. Ο Αριστοτέλης ήταν ο πρώτος ο οποίος διέκρινε τα είδη του συλλογισμού, δημιουργώντας ένα σύστημα που είναι γνωστό ως «συλλογιστική». Τα έργα του που σχετίζονται με τη λογική και ονομάζονται ως σύνολο *Το Όργανον*, είναι η πρώτη τυπική μελέτη της Λογικής που έχει βρεθεί. Αν κάνουμε σύγκριση ανάμεσα στη λογική του Αριστοτέλη και στη μοντέρνα λογική, θα δούμε πως έχουν ως κοινό χαρακτηριστικό τους το ίδιο αντικείμενο, την *λογική πρόταση*.

Οι λογικές προτάσεις αποτελούνται από παρατεθειμένες λέξεις οι οποίες συνολικά αντιπροσωπεύουν κάτι στο οποίο μπορούμε να δώσουμε μία από τις τιμές, Αλήθεια ή Ψέμα. π.χ. Ο ακέραιος 8 είναι μεγαλύτερος από τον ακέραιο 5. Υπάρχουν προτάσεις οι οποίες όμως δεν μπορούν να θεωρηθούν λογικές προτάσεις. Τέτοιες είναι οι ερωτηματικές προτάσεις, οι προσταγές ή ευχετικές προτάσεις π.χ. Πιστεύεις ότι θα βρέξει;

Συχνά οι λογικές προτάσεις συνδέονται μέσω των λογικών συνδέσμων και δημιουργούνται έτσι σύνθετα προτασιακά σύνολα. Οι σύνδεσμοι που έχει καθιερωθεί να χρησιμοποιούνται πιο συχνά είναι οι εξής: άρνηση, σύζευξη, διάζευξη, συνεπαγωγή και ισοδυναμία. π.χ Ο ακέραιος 8 είναι μεγαλύτερος από τον ακέραιο 5 και ο ακέραιος 3 είναι μικρότερος από τον ακέραιο 4.

Στην αρχαιότητα, εκτός από τον Αριστοτέλη και τη σχολή του, άλλο μεγάλο σχολείο της ελληνικής λογικής είναι αυτό των Στωικών, οι οποίοι έπαιξαν σημαντικό ρόλο στη λογική έρευνα. Δυστυχώς σώθηκαν μόνο αποσπάσματα από το έργο τους στη λογική. Για αρκετούς αιώνες η Αριστοτέλεια Λογική θεωρούνταν αντίπαλη της Στωϊκής Λογικής. Ωστόσο, μετά την Αναγέννηση έγινε σαφές ότι είναι συμπληρωματικές και όχι αντικρουόμενες θεωρίες.

## 1.2 Η Λογική στα νεότερα χρόνια

Για πολλούς αιώνες η εξέλιξη του τομέα της Λογικής παραμένει στάσιμη. Η αρχή μιας καινούριας περιόδου ξεκινάει με ιδέες όπως αυτές των Leibniz και Bolzano. Το σχέδιο του πρώτου ήταν η δημιουργία της «characteristica universalis», μιας γλώσσας μέσα από την οποία θα μπορούσαν όλα τα επιστημονικά προβλήματα να αναχθούν σε υπολογισμούς μέσω αυτής. Όμως αυτό το έργο αυτό δεν λειτούργησε ουσιαστικά. Ο δεύτερος, χρησιμοποιώντας μια ημιτυπική γλώσσα μελέτησε σημαντικές έννοιες της λογικής, όπως η λογική συνέπεια και η συνεπαγωγή.

Στα νεότερά της χρόνια η λογική χαρακτηρίστηκε ως «συμβολική» ή «μαθηματική». Η αρχή της σηματοδοτείται με την έκδοση δύο έργων που δημοσιεύθηκαν το 1847, το Formal Logic του De Morgan και το Mathematical Analysis of Logic του Boole.

Στα τέλη του 19ου αιώνα άρχισε η μεγάλη αλλαγή στην ιστορία της Λογικής, όταν και άρχισαν να αναπτύσσονται τρεις σχολές λογικών αναζητήσεων. Στην *Λογικιστική Σχολή* τα μέλη της θεωρούσαν ότι η λογική αποτελούσε τη βάση για κάθε είδους επιχειρηματολογία. Υποστηρικτές της υπήρξαν οι G.Frege και B.Russell. Ο Frege ανέπτυξε μια τυπική γλώσσα στο έργο του Begriffsschrift. Δυστυχώς όμως το σύστημα αυτό ήταν αντιφατικό όπως απέδειξε ο Russell με το γνωστό παράδοξό του. Ο ίδιος με την βοήθεια του A.Whitehead εξέδωσαν το έργο Principia Mathematica. Τα παράδοξα αποφεύχθηκαν με τη συμπερίληψη της *αρχής του φαύλου κύκλου* στο σύστημα, η οποία έλεγε ότι καμιά οντότητα δεν μπορεί να οριστεί με αναφορά σε μια ολότητα που περιέχει την οντότητα που θέλουμε να ορίσουμε.

Η δεύτερη σχολή ήταν η *Αλγεβρική Σχολή*, εκπρόσωποι της οποίας υπήρξαν οι G.Boole, J.Venn και E.Schroder. Το ενδιαφέρον της επικεντρώθηκε στη μελέτη της σχέσης που υπάρχει μεταξύ αριθμητικών πράξεων και λογικών πράξεων.

Τέλος έχουμε την λεγόμενη *Φορμαλιστική Σχολή* με σημαντικότερους εκπροσώπους της τους R.Dedekind, G.Peano και D.Hilbert. Η έρευνα της σχολής επικεντρωνόταν στην κατασκευή αξιωματικών συστημάτων για επί μέρους κλάδους των μαθηματικών. Η βασική επιδίωξη ήταν να αποδειχθεί ότι αυτά τα αξιωματικά συστήματα δεν οδηγούν σε αντιφάσεις. Για πιο αναλυτική ιστορική αναδρομή μπορείτε να δείτε το βιβλίο του Bochenski [10].

Μερικοί από τους σημαντικότερους λογικολόγους υπήρξαν επίσης και οι A.Tarski, A.Church και K.Gödel. Ειδικά ο Gödel, ο οποίος απέδειξε δυο από τα πιο θεμελιώδη θεωρήματα της σύγχρονης Λογικής, το «*θεώρημα πληρότητας του κατηγορηματικού λογισμού*» και το «*θεώρημα μη πληρότητας της τυπικής αριθμητικής*».

## 2 Συμπάγεια

Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, ένας μεγάλος σταθμός στην εξέλιξη του τομέα της Μαθηματικής Λογικής υπήρξε η απόδειξη του *Θεωρήματος της Πληρότητας* από τον Gödel το 1929. Σημαντικό πόρισμα του θεωρήματος αυτού είναι το *Θεώρημα της Συμπάγειας*. Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η παρουσίαση μιας εναλλακτικής απόδειξης του Θεωρήματος της Συμπάγειας με χρήση τοπολογικών εργαλείων. Πρώτα όμως θα θυμίσουμε μερικές βασικές έννοιες στη Μαθηματική Λογική [9]. Σε αυτό το σημείο να αναφέρουμε ότι τα αντικείμενα μελέτης μας θα είναι οι λογικές προτάσεις και όταν αναφερόμαστε σε προτασιακές μεταβλητές θα εννοούμε προτάσεις οι οποίες δεν μπορούν να χωριστούν σε μικρότερες προτάσεις οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με λογικούς συνδέσμους.

## 2.1 Εισαγωγικά στην έννοια της Συμπάγειας

Είμαστε στον προτασιακό λογισμό και έστω ότι έχουμε τους εξής προτασιακούς τύπους $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ , για $n \in \mathbb{N}$. Κάθε προτασιακός τύπος (βλ. ορ. (1)) αποτελείται από μια ακολουθία λογικών συμβόλων (προτασιακές μεταβλητές, λογικούς συνδέσμους, παρενθέσεις), τα οποία έχουν τοποθετηθεί «με τρόπο που να έχει νόημα», π.χ. η ακολουθία λογικών συμβόλων $x_1 \wedge ]$ δεν αποτελεί προτασιακό τύπο, σε αντίθεση με την ακολουθία $(x_1 \wedge x_2) \to x_3$, η οποία είναι ένας προτασιακός τύπος.

Η τιμή αλήθειας (βλ. ορ. (2)) ενός προτασιακού τύπου επηρεάζεται από την τιμή αλήθειας που παίρνει κάθε προτασιακή μεταβλητή που εμφανίζεται σε αυτόν. Ο τρόπος με τον οποίο απονείμουμε τις τιμές αλήθειας στους τύπους απεικονίζει τις έννοιες που δίνουμε στους ίδιους τους λογικούς συνδέσμους. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε τιμή αλήθειας των προτασιακών μεταβλητών ο τύπος λαμβάνει μια συγκεκριμένη τιμή αλήθειας, π.χ. ο τύπος $x_1 \wedge x_2$, η έννοια του οποίου μεταφράζετε ως «$x_1$ και $x_2$», παίρνει την τιμή Αλήθεια όταν και οι δυο μεταβλητές $x_1$ και $x_2$ παίρνουν την τιμή Αλήθεια, ενώ αν έστω και μια από τις μεταβλητές (ή και οι δύο) παίρνουν την τιμή Ψέμα, τότε και η τιμή αλήθειας του τύπου θα είναι Ψέμα.

Ας θεωρήσουμε το σύνολο προτασιακών τύπων $\Sigma = \{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ με δεδομένο ότι οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο $\Sigma_0$, του συνόλου $\Sigma$, είναι ικανοποιήσιμο (βλ. ορ. (6)), δηλαδή υπάρχουν κατάλληλες τιμές των μεταβλητών για τις οποίες όλοι οι τύποι του $\Sigma_0$ αληθεύουν. Το Θεώρημα της Συμπάγειας, του οποίου απόδειξη θα δούμε αναλυτικά στην συνέχεια του κεφαλαίου, ισχυρίζεται ότι εάν ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις, τότε και το άπειρο σύνολο $\Sigma$ θα είναι ικανοποιήσιμο, δηλαδή θα μπορούμε να δώσουμε τιμές αλήθειας στις μεταβλητές με τέτοιο τρόπο ώστε όλοι οι τύποι του $\Sigma$ να γίνονται ταυτόχρονα αλήθεια.

*Παράδειγμα.* Θεωρούμε ότι βρισκόμαστε στο σύμπαν των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, επομένως θεωρούμε δεδομένη κάθε τους ιδιότητα. Θα χρησιμοποιήσουμε την γλώσσα της Αριθμητικής η οποία περιλαμβάνει τα εξής μη λογικά σύμβολα $L = \{+, \cdot, <, =, 0, 1\}$, δηλαδή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο αυτά και τα γνωστά λογικά σύμβολα για να σχηματίσουμε τις προτάσεις μας. Οι προτασιακοί τύποι στο σύμπαν στο οποίο ερμηνεύονται, συγκεκριμένα εδώ στο $\mathbb{N}$, για κάθε τιμή αλήθειας των μεταβλητών που περιέχουν, μπορούν να πάρουν μόνο μία τιμή, Αλήθεια ή Ψέμα. Θεωρούμε το άπειρο σύνολο τύπων:

$$S = \begin{cases} \phi_1 : & 1 < x \\ \phi_2 : & 1 + 1 < x \\ \ldots & \\ \phi_n : & 1 + 1 + \ldots + 1 < x \\ \ldots & \end{cases} \tag{1}$$

και το $T(\mathbb{N})$, που είναι η θεωρία των φυσικών, δηλαδή το σύνολο όλων των προτάσεων της γλώσσας $L$ που αληθεύουν στο $\mathbb{N}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το σύνολο $S \cup T(\mathbb{N})$ είναι ικανοποιήσιμο. Έστω $S_0$ ένα τυχαίο πεπερασμένο υποσύνολο του $S \cup T(\mathbb{N})$. Έστω $S_0$ το σύνολο των τύπων του $S$ που περιέχονται σε αυτό το συγκεκριμένο υποσύνολο. Τότε το $S_0$ θα περιέχεται σε ένα σύνολο της μορφής $S_0'$, όπου

$$S_0' = \begin{cases} \phi_1 : & 1 < x \\ \phi_2 : & 1 + 1 < x \\ \ldots & \\ \phi_k : & 1 + 1 + \ldots + 1 < x. \end{cases} \tag{2}$$

Προφανώς, το $S_0' \cup T(\mathbb{N})$ είναι ικανοποιήσιμο, διότι μπορούμε να επιλέξουμε το $x$ να πάρει την τιμή $k+1$. Όμως το σύνολο $S_0$ είναι τυχαίο οπότε όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα του $S \cup T(\mathbb{N})$ είναι ικανοποιήσιμα. Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα της συμπάγειας το σύνολο $S$ είναι ικανοποιήσιμο. Άρα υπάρχει μία μαθηματική δομή στην οποία ικανοποιούνται οι προτάσεις που αληθεύουν στους φυσικούς αριθμούς και ταυτόχρονα υπάρχει και ένα κατάλληλο $x$ το οποίο ικανοποιεί όλους τους τύπους του συνόλου $S$, άρα είναι μεγαλύτερο από όλους τους «συνηθισμένους φυσικούς αριθμούς». Η μελέτη αυτών των δομών επαφίεται στην non-standard number theory.

Στην συνέχεια του κεφαλαίου θα ορίσουμε με αυστηρότητα όλες τις λογικές έννοιες και θα δούμε αναλυτικά την απόδειξη του Θεωρήματος της Συμπάγειας στον Προτασιακό Λογισμό.

**Ορισμός 1** *Προτασιακό τύπο ονομάζουμε οποιαδήποτε ακολουθία λογικών συμβόλων η οποία μπορεί να κατασκευαστεί με μια πεπερασμένη εφαρμογή των παρακάτω κανόνων:*

1. *Αποτελείται από μια προτασιακή μεταβλητή*
2. *Αν ο $\phi$ είναι τύπος, τότε και ο $\neg\phi$ είναι τύπος.*
3. *Αν $\phi_1, \phi_2$ είναι τύποι, τότε και οι $(\phi_1 \vee \phi_2), (\phi_1 \wedge \phi_2)$, $(\phi_1 \to \phi_2), (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2)$ είναι τύποι.* [1]

**Ορισμός 2** *Έστω $A = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ σύνολο προτασιακών μεταβλητών. Αποτίμηση ονομάζουμε οποιαδήποτε συνάρτηση $u : A \to \{0,1\}$. Κάθε $u(x_i)$ είναι η αποτίμηση της μεταβλητής $x_i$ και τα $0,1$ ονομάζονται «τιμές αλήθειας» οι οποίες αντιστοιχούν στις έννοιες Ψέμα και Αλήθεια αντίστοιχα. Εάν ο $\phi$ είναι προτασιακός τύπος που περιέχει μεταβλητές που ανήκουν στο*

---

[1] $(\neg\phi)$ συμβολίζει την άρνηση του τύπου $\phi$ και έχει την έννοια: «όχι $\phi$».
$(\phi_1 \vee \phi_2)$ συμβολίζει την διάζευξη και έχει την έννοια: «$\phi_1$ ή $\phi_2$».
$(\phi_1 \wedge \phi_2)$, συμβολίζει την σύζευξη και έχει την έννοια: «$\phi_1$ και $\phi_2$».
$(\phi_1 \to \phi_2)$ συμβολίζει την συνεπαγωγή και έχει την έννοια: «αν $\phi_1$, τότε $\phi_2$».
$(\phi_1 \leftrightarrow \phi_2)$ συμβολίζει την ισοδυναμία και έχει την έννοια: «$\phi_1$ αν και μόνο αν $\phi_2$».

*A, θα συμβολίζουμε με* $\bar{u}(\phi)$ *την αντίστοιχη τιμή αλήθειας της.*

*Παράδειγμα:* Για τον τύπο $\phi = x_1 \wedge x_2$ γνωρίζουμε ότι είναι αληθής μόνο στην περίπτωση όπου οι προτασιακές μεταβλητές $x_1$ και $x_2$ παίρνουν την τιμή αλήθεια. Επομένως έχουμε ότι $\bar{u}(\phi) = 1$ αν και μόνο αν $u(x_1) = 1$ και $u(x_2) = 1$.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η τιμή του $\bar{u}(\phi)$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές που δίνει η $u$ στις προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στον $\phi$. Οι κανόνες με τους οποίους απονέμονται τιμές αλήθειας σε συνθέσεις προτασιακών τύπων από τις τιμές των υπο-τύπων τους στηρίζεται στην ερμηνεία των λογικών συνδέσμων $\neg, \wedge, \vee$ κ.λ.π. Παραδείγματος χάριν, ο τύπος $\phi \rightarrow \psi$ παίρνει την τιμή Ψέμα αν και μόνο αν ο $\phi$ παίρνει την τιμή Αλήθεια και ο $\psi$ παίρνει την τιμή Ψέμα.

Εάν ένας προτασιακός τύπος είναι αληθής για οποιεσδήποτε αποτιμήσεις των μεταβλητών του, τότε τον ονομάζουμε *ταυτολογία*. Αντίστοιχα, ένας προτασιακός τύπος είναι ψευδής για οποιεσδήποτε αποτιμήσεις των μεταβλητών του, ονομάζεται *αντίφαση*. Για παράδειγμα, ο τύπος $p \wedge \neg p$ είναι αντίφαση.

**Ορισμός 3** *Λέμε ότι «το σύνολο προτασιακών τύπων $T$ συνεπάγεται ταυτολογικά το $\phi$», και το συμβολίζουμε ως εξής: $T \vDash \phi$ [2], αν και μόνο αν κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί κάθε τύπο του $T$ ικανοποιεί και τον τύπο $\phi$.*

Το ότι «το σύνολο προτασιακών τύπων $T$ συνεπάγεται ταυτολογικά το $\phi$» συχνά εκφράζεται και ως «το σύνολο υποθέσεων $T$ συνεπάγεται λογικά το συμπέρασμα $\phi$» ή «το $\phi$ αποτελεί λογικό συμπέρασμα του συνόλου των υποθέσεων T». Εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ισχύει $\varnothing \vDash \phi$ αν και μόνο αν ο $\phi$ είναι ταυτολογία.

[2]συμβολισμός της ταυτολογικής συνεπαγωγής

**Ορισμός 4** *Ορίζουμε το αξιωματικό σύστημα* $< A_0, K_0 >$, *όπου το* $A_0$ *είναι το σύνολο που περιέχει τα αξιώματα και το* $K_0$ *το σύνολο των αποδεικτικών κανόνων. Το αξιωματικό σύστημα που θα χρησιμοποιούμε περιέχει τα εξής:*

1. *Αξιώματα του* $A_0$ *αποτελούνται από τις εξής ταυτολογίες:*

   *ΑΣ1* $\phi \to (\psi \to \phi)$

   *ΑΣ2* $[\phi \to (\psi \to \chi)] \to [(\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi)]$

   *ΑΣ3* $(\neg\phi \to \neg\psi) \to [(\neg\phi \to \psi) \to \phi]$

2. *Κανόνας του* $K_0$ *είναι η εξής ταυτολογική συνεπαγωγή:*
   *Modus Ponens (MP) :* $\phi, \phi \to \psi \vDash \psi$

Είναι γνωστό ότι κάθε τύπος μπορεί να γραφεί σε ισοδύναμη μορφή χρησιμοποιώντας μόνο τους λογικούς συνδέσμους $\neg$ και $\to$. Έτσι, το αξιωματικό σύστημα που χρησιμοποιούμε μπορεί να διαχειριστεί ουσιαστικά όλους τους τύπους. Το σύστημα αυτό έχει επικρατήσει κυρίως για ιστορικούς λόγους, καθώς ήταν αυτό που είχε προτείνει ο D.Hilbert.

Για την εξαγωγή λογικών συμπερασμάτων χρησιμοποιούμε μια τυπική διαδικασία απόδειξης. Σύμφωνα με αυτήν ξεκινάμε από ένα σύνολο υποθέσεων εφαρμόζοντας διαδοχικά σε αυτό τους αποδεικτικούς κανόνες. Αυτό μας επιτρέπει να εξάγουμε ένα λογικό συμπέρασμα από τις υποθέσεις μας.

**Ορισμός 5** *Έστω ένα σύνολο προτασιακών τύπων* $T = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ *που τις αποκαλούμε αρχικές υποθέσεις και μία πρόταση* $\psi$ *που αποκαλούμε συμπέρασμα. Τυπική Απόδειξη για τον τύπο* $\psi$*,με υποθέσεις από το* $T$*, λέγεται οποιαδήποτε πεπερασμένη ακολουθία προτασιακών τύπων* $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ *τέτοια ώστε:*

1. *Ο τύπος* $\psi$ *να ταυτίζεται με τον* $\chi_k$*, και*

2. *κάθε τύπος* $\chi_i$ *για* $i \in (1, k-1)$ *είτε ανήκει στο σύνολο των αρχικών υποθέσεων* $A_0 \cup T$*, είτε προκύπτει από αυτούς με χρήση του* $MP$*.*

*Οποτεδήποτε υπάρχει τυπικής απόδειξη του τύπου $\phi$ από το σύνολο υποθέσεων $T$ συμβολίζουμε ως εξής: $T \vdash \phi$* [3].

Οι τυπικές αποδείξεις και οι κανόνες που εφαρμόζουμε εί-ναι κατασκευασμένοι με τέτοιο τρόπο ώστε ό,τι είναι αποδεί-ξιμο μέσω μιας τυπικής απόδειξης να είναι και ταυτολογική συνεπαγωγή των υποθέσεων. Αυτό διαπιστώνετε από το ακόλουθο Θεώρημα της Εγκυρότητας [5] του οποίου η απόδειξη είναι εύκολη.

**Θεώρημα Εγκυρότητας.** *Για κάθε σύνολο προτασιακών τύπων $T$ και κάθε προτασιακό τύπο $\phi$ αν $T \vdash \phi$ , τότε $T \vDash \phi$.*

Αυτό που δεν είναι προφανές είναι κατά πόσον ισχύει και το αντίστροφο. Το θεώρημα που απάντησε στο ερώτημα αυτό είναι το θεώρημα της Πληρότητας που αποτελεί το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος.

**Θεώρημα Πληρότητας.** *Για κάθε σύνολο προτασιακών τύπων $T$ και κάθε προτασιακό τύπο $\phi$ αν $T \vDash \phi$ , τότε $T \vdash \phi$.*

**Ορισμός 6** *Λέμε ότι η αποτίμηση $u$ ικανοποιεί τον τύπο $\phi$ εάν $\bar{u}(\phi) = 1$. Λέμε ότι η αποτίμηση $u$ ικανοποιεί το σύνολο τύπων $T$, αν και μόνο αν η $u$ ικανοποιεί κάθε τύπο του συνόλου $T$. Λέμε ότι το σύνολο $T$ είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνο αν υπάρχει μία αποτίμηση που το ικανοποιεί.*

Το Θεώρημα της Συμπάγειας, που θα αποδείξουμε στην συνέχεια, είναι πόρισμα των θεωρημάτων της Πληρότητας και της Εγκυρότητας. Θα δού-με την απόδειξη αυτού του θεωρήματος μέσα από δύο διαφορετικές οπτικές γωνίες. Η πρώτη θα είναι μέσω της μαθηματικής λογικής. Ενώ στην συνέχεια θα δούμε την απόδειξη μέσω Τοπολογίας, αφού πρώτα κάνουμε μια σύντομη εισαγωγή σε αυτόν τον τομέα των μαθηματικών [3].

[3] συμβολισμός της τυπικής απόδειξης

**Θεώρημα Συμπάγειας.** *Έστω $T$ τυχαίο σύνολο τύπων. Εάν το $T$ είναι πεπερασμένως ικανοποιήσιμο, δηλαδή κάθε $T' \subset T$ με $|T'| < \infty$ είναι ικανοποιήσιμο, τότε το $T$ είναι ικανοποιήσιμο.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι Τ είναι ένα άπειρο σύνολο προτασιακών τύπων, για το οποίο κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του είναι ικανοποιήσιμο αλλά το ίδιο το Τ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Τότε, για κάποιον τύπο $p_0$, $T \vDash p_0$ και $T \vDash \neg p_0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα της Πληρότητας ισχύει $T \vdash p_0$ και $T \vdash \neg p_0$. Επομένως, υπάρχει κάποιο πεπερασμένο $T' \subset T$ τέτοιο ώστε $T' \vdash p_0$ και $T' \vdash \neg p_0$ (επειδή κάθε απόδειξη περιέχει μόνο πεπερασμένους ως προς το πλήθος τύπους). Τότε από το Θεώρημα της Εγκυρότητας, θα ισχύει $T' \vDash p_0$ και $T' \vDash \neg p_0$. Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι ξέρουμε από τις υποθέσεις ότι το $T'$ είναι ικανοποιήσιμο και αυτό θα σήμαινε πως οι αποτιμήσεις που ικανοποιούν το $T'$ θα ικανοποιούν και το $p_0$ και το $\neg p_0$ κάτι το οποίο είναι αντίφαση.

$\square$

## 2.2 Η συμπάγεια στη Λογική

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε μια εναλλακτική απόδειξη του θεωρήματος της *Συμπάγειας της Λογική*. Η απόδειξη θα πραγματοποιηθεί με την βοήθεια της *Τοπολογίας* και για αυτό θα ορίσουμε κάποιες βασικές έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια.

### 2.2.1 Μια εισαγωγή στην Τοπολογία

Η Γενική Τοπολογία γεννήθηκε μέσα από μια σειρά άρθρων του Cantor, τα οποία δημοσιεύθηκαν κατά την περίοδο 1879-1884, στα οποία μελέτησε και όρισε, πάνω σε υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου, μερικές από τις πιο θεμελιώδεις αρχές της Τοπολογίας. Ο όρος Τοπολογία εισήχθη από τον Johann Benedict Listing τον 19ο αιώνα και έως τα μέσα του 20ου αιώνα, είχε γίνει ένας σημαντικός κλάδος των μαθηματικών. Η αναδόμησης των θεμελίων της ανάλυσης βοήθησε στην ανάπτυξής της.

Ο κλάδος της Τοπολογίας ασχολείται με τις ιδιότητες του χώρου οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες υπό συνεχείς παραμορφώσεις. Για παράδειγμα το τέντωμα και η κάμψη είναι επιτρεπόμενες διεργασίες, αλλά όχι το σκίσιμο ή η κόλληση.

Στην συνέχεια ορίσουμε μερικές από τις βασικές έννοιες της Τοπολογίας. Οι ορισμοί θα διατυπωθούν με βάση τις σημειώσεις του κ.Μήτση [4] και το βιβλίο [7]

**Ορισμός 7** *Έστω $X$ σύνολο. Μια οικογένεια $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του $X$ καλείται* τοπολογία *στο $X$, αν :*

1. $\varnothing, X \in \mathcal{T}$
2. *Κάθε πεπερασμένη τομή στοιχείων της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$. Δηλαδή αν $n \in \mathbb{N}$ και $G_1, G_2, \ldots, G_n \in \mathcal{T}$, τότε*

$$\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{T} \tag{3}$$

3. Η $\mathcal{T}$ είναι κλειστή ως προς τις αυθαίρετες ενώσεις. Δηλαδή αν $I$ ένα σύνολο δεικτών και $G_i \in \mathcal{T}$, για κάθε $i \in I$ τότε

$$\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T} \tag{4}$$

*Το ζεύγος (X,$\mathcal{T}$), όπου X είναι ένα σύνολο και $\mathcal{T}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X, ονομάζεται* τοπολογικός χώρος *και τα στοιχεία του $\mathcal{T}$ καλούνται ανοιχτά σύνολα.*

**Ορισμός 8** *Έστω $X$ ένα σύνολο. Η οικογένεια $\mathcal{T} = P(X)$ του $X$ είναι μια τοπολογία, η διακριτή τοπολογία του X. Η $\mathcal{T}$ επάγεται από τη διακριτή μετρική*

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} \tag{5}$$

*Η μικρότερη τοπολογία αυτού ενός χώρου έχει δύο ανοικτά σύνολα, το $\varnothing$ και το X. Η διακριτή τοπολογία είναι η μεγαλύτερη και περιέχει όλα τα δυνατά υποσύνολα ως ανοιχτά σύνολα. Συγκεκριμένα, κάθε σημείο του X είναι ένα ανοιχτό σύνολο στη διακριτή τοπολογία.*

**Ορισμός 9** *Ένας τοπολογικός χώρος $X$ καλείται συμπαγής αν για κάθε κλάση $\{O_a : a \in I\}$ ανοικτών συνόλων του $X$, για τα οποία ισχύει $X = \bigcup_{i \in I} O_i$, υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός από $O_a$ που έχει ως ένωσή του το $X$, δηλαδή υπάρχει ένα πεπερασμένο $I_0 \subset I$, τέτοιο ώστε $X = \bigcup_{i \in I_o} O_i$.*

Η εναλλακτική διατύπωση του παραπάνω ορισμού που ακολουθεί θα μας είναι πιο εύχρηστη για τις αποδείξεις που έπονται.

**Ορισμός 10** *Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται συμπαγής αν για κάθε κλάση $\{C_a : a \in I\}$ κλειστών συνόλων του $X$, δηλαδή τα συμπληρώματα των ανοικτών συνόλων ($C_a = X - O_a$), για* *τα οποία* $\bigcap_{i\in I} C_i = \varnothing$, *ισχύει πως υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός από* $C_a$ *που έχει ως τομή του το κενό, δηλαδή υπάρχει ένα πεπερασμένο* $I_0 \subset I$, *τέτοιο ώστε* $\bigcap_{i\in I_o} C_i = \varnothing$.

*Σχόλιο:* Είναι προφανές πως ο ορισμός αυτός ισοδυναμεί με τον προηγούμενο αν αντικαταστήσουμε κάθε ανοικτό σύνολο $O_a$ με το συμπλήρωμα του $C_a$, που είναι κλειστό, την ένωση με την τομή και το $X$ με το κενό σύνολο.

**Ορισμός 11** *Έστω* $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ *τοπολογικοί χώροι. Υπενθυμίζουμε το Γινόμενο των τοπολογικών χώρων το οποίο συμβολίζουμε:*

$$\prod_{n=1}^{\infty} X_n = \{f : \mathbb{N} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \ f(n) \in X_n\} \tag{6}$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος της Συμπάγειας, που θα δούμε στην συνέχεια, θεωρούμε ότι για τους Τοπολογικούς Χώρους $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ του ορισμού (11) ισχύει $X_1 = \ldots = X_n = \{0, 1\}$. Για τον χώρο αυτό με την διακριτή τοπολογία όλα τα υποσύνολα είναι ανοιχτά (άρα και κλειστά). Ο χώρος είναι συμπαγής και η απόδειξη του είναι τετριμμένη. Συμβολίζουμε τον χώρο $2^w = \{0, 1\}^\omega = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \ldots \times \{0, 1\} \times \ldots$.

**Ορισμός 12** *Έστω* $\{X_i : i \in I\}$, *μια οικογένεια τοπολογικών χώρων και το γινόμενο* $X = \prod_{i\in I} X_i$ *που παράγεται από αυτήν. Τα ανοικτά σύνολα στην τοπολογία γινόμενο είναι ενώσεις (πεπερασμένες ή άπειρες) σύνολων της μορφής:* $X = \prod_{i\in I} U_i$, *όπου κάθε* $U_i$ *είναι ανοικτό υποσύνολο του* $X_i$ *και ισχύει* $X_i \neq U_i$ *μόνο για πεπερασμένα* $i$.

Η Συμπάγεια στη Λογική, που αναφέραμε παραπάνω, έπεται από την συμπάγεια στην Τοπολογία, για κάποια κατάλληλη Τοπολογία. Στην Τοπολογία έχουμε το εξής πολύ σημαντικό θεώρημα το οποίο αναφέρεται στην έννοια της συμπάγειας:

**Θεώρημα 1 (Tychonoff)** *Έστω $\{X_i : i \in I\}$, μια οικογένεια συμπαγών τοπολογικών χώρων. Τότε το γινόμενο $X = \prod_{i\in I} X_i$ είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος.*

Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα του Tychonoff ο χώρος $2^\omega$ είναι συμπαγής και τα ανοιχτά σύνολα αυτού σύμφωνα με τον ορισμό (12) είναι ενώσεις συνόλων της μορφής

$$O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_p \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \tag{7}$$

όπου $O_i$ ανοικτά υποσύνολα του $\{0,1\}$, για $i \in \{1,\ldots,p\}$.

**Λήμμα 1** *Ορίζουμε, για κάθε τύπο $\phi$, το σύνολο $F_\phi = \{\bar{u} : \bar{u}(\phi) = 1\}$.*

1. *Κάθε σύνολο της μορφής $F_\phi$ είναι ανοικτό σύνολο.*

2. *Κάθε σύνολο της μορφής $F_\phi$ είναι κλειστό σύνολο.*

*Απόδειξη.* Αρχικά υποθέτοντας ότι ισχύει το *1* αποδεικνύουμε το *2.*

*2.* Για κάθε τύπο $\phi$ ισχύει:

$$F_\phi = F^c_{\neg\phi}, \tag{8}$$

όπου με $F^c_{\neg\phi}$ συμβολίζουμε το συμπλήρωμα του συνόλου $F_{\neg\phi}$. Το $F_{\neg\phi}$ είναι ανοιχτό σύνολο και συνεπώς το $F_\phi$, για κάθε τύπο $\phi$, είναι κλειστό.

*1.* Αρχικά, ας υποθέσουμε ότι ο τυχαίος τύπος $\phi$ είναι μία μεταβλητή, η $x_n$. Ορίζουμε το σύνολο:

$$F_{x_n} = \{u : \ u(x_n) = 1\}, \tag{9}$$

όπου $u(x_n)$ η αποτίμηση της μεταβλητής $x_n$.

Τα στοιχεία αυτού του συνόλου είναι ακολουθίες από 0 και 1, των οποίων οι $n-$οστοί όροι είναι ίσοι με 1 και όλοι οι υπόλοιποι είναι ένα οποιοδήποτε στοιχείο του {0,1}. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $F_{x_n}$ αποτελεί στοιχείο της βάσης των ανοιχτών, όπως την ορίσαμε παραπάνω, επομένως είναι ανοικτό σύνολο.

Θα δείξουμε ότι το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση όπου ο τύπος $\phi$ περιέχει περισσότερες της μίας μεταβλητές. Έστω ότι οι (πεπερασμένες) μεταβλητές που εμφανίζονται στον τύπο $\phi$ είναι μεταξύ των μεταβλητών $x_1, \dots, x_n$. Προφανώς, οι υπόλοιπες μεταβλητές από το $x_{n+1}$ και μετά δεν επηρεάζουν την αποτίμηση του τύπου $\phi$.

Θεωρούμε μια αποτίμηση $u$ και έστω για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ να έχουμε $u(x_i) = w_i$. Για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ ορίζουμε:

$$\bar{x_i} = \begin{cases} x_i, & w_i = 1 \\ \neg x_i, & w_i = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Στην συνέχεια ορίζουμε το σύνολο $W = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \{0,1\}^n$ το οποίο περιέχει όλες τις $n$-αδες των αποτιμήσεων των μεταβλητών που εμφανίζονται στον τύπο $\phi$, για τις ο οποίες ο $\phi$ αληθεύει.

Όπως προηγουμένως στην περίπτωση της μιας μεταβλητής θα ορίσουμε τα σύνολα

$$F_{\bar{x_i}} = \{u : \ u(\bar{x_i}) = 1\}, \tag{11}$$

για $i \in \{1, \dots, n\}$, τα οποία είναι και ανοικτά και κλειστά. Προφανώς ο $\phi$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο:

$$\phi = \bigvee \bar{x_1} \wedge \bar{x_2} \wedge \dots \wedge \bar{x_n} \tag{12}$$

και άρα το $F_\phi$ είναι:

$$F_\phi = \bigcup_{W \in w} (F_{\bar{x_1}} \cap F_{\bar{x_2}} \cap \dots \cap F_{\bar{x_n}}). \tag{13}$$

Άρα το σύνολο $F_\phi$ είναι μια πεπερασμένη ένωση από πεπερασμένες τομές κλειστών συνόλων και το οποίο γνωρίζουμε ότι είναι κλειστό σύνολο.

□

Για την καλύτερη κατανόηση της παραπάνω απόδειξης θα δώσουμε ένα παράδειγμα. Γνωρίζοντας πως κάθε προτασιακός τύπος μπορεί να έρθει σε κανονική συζευκτική μορφή μπορούμε να εξετάσουμε το παράδειγμα του προτασιακού τύπου $\phi = x_1 \vee x_2$. Ο τύπος $\phi$ παίρνει την τιμή Αλήθεια σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις. Όταν $u(x_1) = u(x_2) = 1$, $u(x_1) = 1$ και $u(x_2) = 0$, και στην περίπτωση όπου $u(x_1) = 0$ και $u(x_2) = 1$.

Έτσι μπορούμε να κατασκευάσουμε το σύνολο $F_\phi$ το οποίο σύμφωνα με την παραπάνω απόδειξη είναι:

$$F_\phi = (F_{x_1} \cap F_{x_2}) \cup (F_{x_1} \cap F_{\neg x_2}) \cup (F_{\neg x_1} \cap F_{x_2}). \tag{14}$$

Μετά από την σύντομη υπενθύμιση των βασικών εννοιών της Μαθηματικής Λογικής και την εισαγωγή των θεμελιωδών εννοιών της Τοπολογίας θα δούμε από μια διαφορετική σκοπιά το θεώρημα της Συμπάγειας, καθώς και μια εναλλακτική απόδειξή του με την βοήθεια των εργαλείων της Τοπολογίας. Θυμίζουμε το Θεώρημα της Συμπάγειας.

**Θεώρημα 2** *(Θεώρημα Συμπάγειας στη Λογική). Έστω $\Sigma$ τυχαίο σύνολο τύπων. Εάν το $\Sigma$ είναι πεπερασμένως ικανοποιήσιμο, δηλαδή κάθε $\Sigma_0 \subset \Sigma$ με $|\Sigma_0| < \infty$ είναι ικανοποιήσιμο, τότε το $\Sigma$ είναι ικανοποιήσιμο.*

*Απόδειξη.* Για να αποδείξουμε ότι το σύνολο $\Sigma = \{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ είναι ικανοποιήσιμο αρκεί να δείξουμε ότι

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_{\phi_k} \neq \varnothing, \tag{15}$$

όπου $F_{\phi_k}$ όπως στο Λήμμα (1). Για αυτόν τον λόγο η τομή όλων των $F_{\phi_k}$ είναι το κενό σύνολο. Επειδή ο χώρος $2^\omega$ είναι συμπαγής από το θεώρημα του Tychonoff, από τον *ισοδύναμο ορισμό* της συμπάγειας στην Τοπολογία, υπάρχει κάποιο πεπερασμένο πλήθος από τα σύνολα $F_{\phi_k}$ των οποίων η τομή είναι το κενό σύνολο. Αυτό είναι άτοπο, διότι γνωρίζουμε πως το σύνολο $\Sigma$ είναι πεπερασμένως ικανοποιήσιμο, επομένως κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\Sigma$ είναι ικανοποιήσιμο, δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\bigcap_{k \in \{1,\ldots,n\}} F_{\phi_k} \neq \varnothing. \tag{16}$$

$\square$

Για περισσότερες πληροφορίες πάνω στην απόδειξη της Συμπάγειας με χρήση τοπολογικών εργαλείων και σε αγγλική γλώσσα μπορείτε να συμβουλευτείτε και την εργασία [14].

# 3 Εισαγωγή στην Κβαντομηχανική

Αφού γνωρίσαμε λίγο καλύτερα τον τομέα της Λογικής ας δούμε και κάποιες επεκτάσεις που μπορεί να έχει σε συσχετισμό με την επιστήμη της Φυσικής. Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε αρχικά μια εισαγωγή στην κβαντική μηχανική παρατηρώντας παράλληλα την εξέλιξη αυτού του κλάδου μέσα από την πάροδο των ετών. Θα εξετάσουμε μερικά πολύ σημαντικά πειράματα, που άλλαξαν τον τρόπο που βλέπουμε τον κόσμο γύρο μας, και τον τρόπο με τον οποίο τα αποτελέσματα αυτών των πειραμάτων επηρέασαν την μετέπειτα εξελικτική πορεία. Για μεγαλύτερη εμβάθυνση πάνω στην Κβαντομηχανική μελετήστε τα βιβλία [6].

## 3.1 Τι είναι η Κβαντική Φυσική;

Τον 17ο αιώνα ο Newton και πολλοί άλλοι μεγάλοι επιστήμονες έδωσαν μια πολύ πετυχημένη θεωρία με την οποία εξηγούσαν τον τρόπο με τον οποίο κινούνται τα υλικά σώματα. Αυτό το θεωρητικό πλαίσιο ονομάστηκε *Κλασική Μηχανική*, η οποία περιγράφει έναν απόλυτα αιτιοκρατικό (ντετερμινιστικό) κόσμο. Αυτό σημαίνει πως η πλήρης γνώση της κατάστασης ενός συστήματος σε μία χρονική στιγμή $t_0$ μας προσφέρει πλήρη γνώση του συστήματος για οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t$ στο παρελθόν ή στο μέλλον του. Επιπλέον, όταν κάνουμε μετρήσεις στα συστήματα που παρατηρούμε, η διαδικασία της μέτρησης δεν θα διαταράξει το σύστημα αυτό.

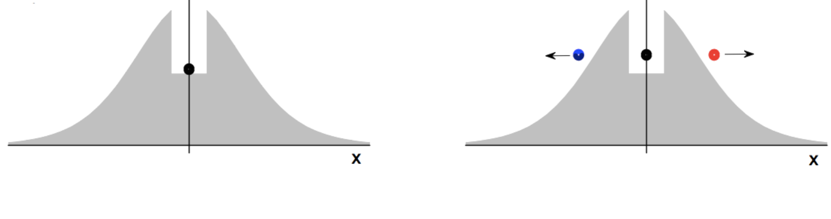
Όταν οι φυσικοί αρχίσανε να μελετάνε τη συμπεριφορά της ύλης και του φωτός σε «ατομική» κλίμακα παρατήρησαν συμπεριφορές οι οποίες δεν συμφωνούσαν με τους κανόνες της κλασικής μηχανικής. Τότε ήταν που άρχισε να διαμορφώνεται η θεωρία της *Κβαντικής Μηχανικής*.

Η Κβαντομηχανική είναι αξιωματικά θεμελιωμένη θεωρία της Φυσικής, που αναπτύχθηκε με σκοπό την ερμηνεία φαινομένων που η νευτώνεια αδυνατούσε να περιγράφει. Μπορεί να θεωρηθεί ως η μελέτη της φυσικής σε πολύ μικρού μήκους κλίμακες, καθώς περιγράφει τη συμπεριφορά της ύλης στο μοριακό, ατομικό και υποατομικό επίπεδο. Ωστόσο, υπάρχουν και ορισμένα μακροσκοπικά συστήματα στα οποία εφαρμόζεται άμεσα.

Ο όρος κβάντο (**quantum**) προέρχεται από τα Λατινικά, όπου σημαίνει ποσότητα, και αναφέρεται σε μια αδιάστατη μονάδα ποσότητας. Ένα κβάντο ενός μεγέθους είναι η μικρότερη δυνατή ποσότητα αυτού του μεγέθους που μπορεί να υπάρξει (π.χ ένα φωτόνιο είναι ένα κβάντο φωτός, δηλαδή η μικρότερη ποσότητα φωτός που μπορεί να υπάρξει). Επιπλέον, όλες οι ποσότητες αυτού του μεγέθους είναι πάντα ακέραια πολλαπλάσια αυτής της μονάδας. Σε αντίθεση με την κλασσική μηχανική, στην κβαντομηχανική ορισμένες ποσότητες δεν μπορούν να παίρνουν οποιαδήποτε τιμή, αλλά μόνο διακριτές τιμές. Κάποιες από αυτές είναι η ενέργεια ενός ατόμου ύλης σε κατάσταση ηρεμίας και η ορμή του.

Οι ερμηνείες που μας δίνει η Κβαντομηχανική για τα φαινόμενα έρχεται σε αντιδιαστολή με την κοινή διαίσθηση, δηλαδή είναι αντιδιαισθητική. Ας δούμε ένα παράδειγμα για να καταλάβουμε την διαφορά αυτή.

*Παράδειγμα*: Τοποθετούμε μια μπάλα στον πάτο ενός πηγαδιού που βρίσκετε στην κορυφή ενός λόφου. Σύμφωνα με τις εμπειρίες μας θα λέγαμε ότι η μπάλα θα ηρεμήσει στον πάτο του πηγαδιού και δεν θα βρεθεί ποτέ έξω από αυτό. Αντιθέτως, σύμφωνα με την κβαντική, το σώμα δεν βρίσκεται σε ηρεμία και υπάρχει πιθανότητα να βρεθεί εκτός του πηγαδιού.



Από τότε που ανακαλύφθηκε η Κβαντική Φυσική έχουν εμφανιστεί πολλές ερμηνείες που προσπαθούν να εξηγήσουν το φυσικό της νόημα. Η επικρατέστερη ερμηνεία είναι η λεγόμενη *ερμηνεία της Κοπεγχάγης*.

Έστω ότι έχουμε ένα ηλεκτρόνιο το οποίο μπορεί να βρεθεί σε μια από τρεις πιθανές θέσεις, η κάθε μια με δική της πιθανότητα. Σύμφωνα με την ερμηνεία της Κοπεγχάγης η θέση στην οποία βρίσκεται το ηλεκτρόνιο, αφού το μετρήσουμε, είναι τυχαία. Η Κβαντομηχανική υποστηρίζει πως υπάρχει τρόπος να προβλέψουμε μόνο την πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο σε μια θέση.

Την Κβαντομηχανική σε συνδυασμό με την ερμηνεία της Κοπεγχάγης οι περισσότεροι φυσικοί την αποδέχτηκαν κάτω από την πίεση των πειραματικών δεδομένων, μιας και ερχόταν σε σύγκρουση με τις καθιερωμένες τους αντιλήψεις. Μερικοί μάλιστα, όπως ο Einstein, συνέχισαν να την αμφισβητούν μέχρι πρόσφατα υποστηρίζοντας διαφορετικές ερμηνείες για τα αποτελέσματα των πειραματικών δεδομένων.

Συμπεραίνουμε από τα παραπάνω ότι η Κβαντομηχανική είναι μια Πιθανοκρατική θεωρία. Επιπλέον μπορεί να χαρακτηριστεί ως μια μη τοπική θεωρία. Αυτό σημαίνει ότι αν κάποια στιγμή δύο συστήματα ήταν συσχετισμένα, δηλαδή αντάλλασσαν μηνύματα μεταξύ τους, όσο και εάν απομακρυνθούν θα εξακολουθούν να είναι συσχετισμένα μεταξύ τους [16].

## 3.2 Χρονική αναδρομή: Η ανακάλυψη του spin

Το 1900, Ο Max Planck στην προσπάθειά του να μελετήσει την ακτινοβολία του λεγόμενου μέλανος σώματος (ένα ιδανικό σώμα το οποίο απορροφά όλο το φως που προσπίπτει πάνω του) επικεντρώνεται στην βελτίωση μιας σχέσης σχετικά με την κατανομή της ενέργειας που ακτινοβολείται στις διάφορες συχνότητες. Για να το πετύχει αυτό χρησιμοποιεί την υπόθεση σύμφωνα με την οποία η φωτεινή ενέργεια που ακτινοβολείται από ένα θερμαινόμενο σώμα (ακτινοβολία μέλανος σώματος) δεν εκπέμπεται με συνεχόμενη ροή, αλλά σε μορφή αυτοτελών ποσοτήτων, τα γνωστά σήμερα *κβάντα*. Οι ποσότητες της ενέργειας διαφέρουν ανάλογα με τη συχνότητά του εκπεμπόμενου φωτός. Έτσι με τη θεωρητική αυτή ερμηνεία κατάφερε να συμφωνήσει με τα πειραματικά δεδομένα στο υπεριώδες.

Πέντε χρόνια αργότερα, το 1905, ο Einstein, για να ερμηνεύσει το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, υπέθεσε ότι η ενέργεια ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος μεταφέρεται σε διακριτές ποσότητες «κβάντα φωτός» που ονομάζονται φωτόνια. Κάθε κβάντο περιέχει την ελάχιστη δυνατή ενέργεια που μπορεί να υπάρξει για κάθε συγκεκριμένο μήκος κύματος. Η διαπίστωση αυτή, μαζί με την ερμηνεία της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος από τον Planck, αποτέλεσε το θεμέλιο της θεωρίας για τον κυματοσωματιδιακό δυϊσμό του φωτός αλλά και της πρώιμης Κβαντικής Μηχανικής.

Ο Ernest Rutherford το 1911 προτείνει το πλανητικό μοντέλο για το άτομο, σύμφωνα με το οποίο σε κάθε άτομο υπάρχει θετικό φορτίο συγκεντρωμένο σε μια πολύ μικρή περιοχή του που που συγκεντρώνει το μεγαλύτερο μέρος της μάζας του ατόμου και ονομάζεται πυρήνας. Γύρω από τον πυρήνα βρίσκονται σε τροχιές τα αρνητικά φορτισμένα ηλεκτρόνια, δεχόμενα από τον πυρήνα ελκτικές ηλεκτρικές δυνάμεις Coulomb, σχηματίζοντας ένα σύννεφο αρνητικού φορτίου. Το μοντέλο αυτό ήταν ασυμβίβαστο με την κλασική φυσική, διότι σύμφωνα με αυτήν τα ηλεκτρόνια θα έπρεπε κατά την κίνησή τους να εκπέμπουν ακτινοβολία με αποτέλεσμα να χάνουν ενέργεια και έτσι τελικά να πέφτουν πάνω στον πυρήνα. Επομένως τα άτομα θα ήταν ασταθή.

Το 1913 ο Niels Bohr δέχτηκε το ατομικό πρότυπο του προηγούμενου, προσθέτοντας ωστόσο τις ακόλουθες δύο συνθήκες. Θεώρησε αρχικά ότι οι επιτρεπόμενες τροχιές είναι αυτές για τις οποίες ισχύει το γεγονός ότι η στροφορμή του ηλεκτρονίου κατά την περιφορά του γύρω από τον πυρήνα είναι κβαντισμένη και ίση με ένα ακέραιο πολλαπλάσιο της ποσότητας $h/(2\pi)$, όπου $h$ είναι η σταθερά του Plank. Επιπλέον, ορίζει πως το ηλεκτρόνιο όταν βρίσκεται στις επιτρεπτές τροχιές δεν ακτινοβολεί. Το άτομο εκπέμπει ακτινοβολία μόνο όταν το ηλεκτρόνιο μεταπίπτει από μια αρχική στάσιμη κατάσταση υψηλής ενέργειας σε μια στάσιμη κατάσταση χαμηλότερης ενέργειας, και η διαφορά τους σε ενέργεια είναι $E_2 - E_1 = h\nu$.

Ο Wolfgang Pauli το 1925 εισάγει την *απαγορευτική αρχή* για τα ηλεκτρόνια που είναι μια από τις σημαντικότερες αρχές της κβαντικής μηχανικής και της ατομικής θεωρίας. Σύμφωνα με αυτή δεν είναι δυνατόν να υπάρξουν στο ίδιο άτομο πάνω από δύο ηλεκτρόνια τα οποία να βρίσκονται στην ίδια κβαντική κατάσταση. Η αρχή αυτή επιβεβαιώνει και την σταθερότητα των ατόμων.

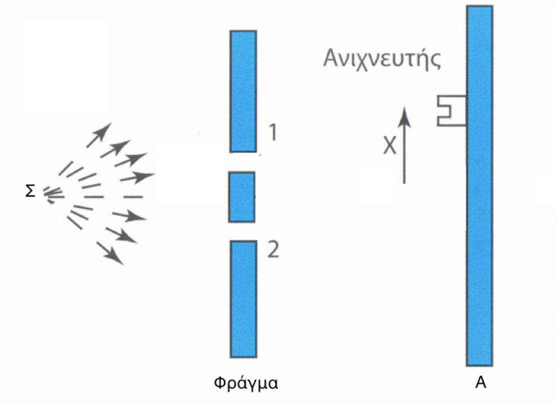
Το ίδιο έτος οι George Uhlenbeck και Samuel Goudsmit εξετάζοντας λεπτομερώς το ανώμαλο φαινόμενο Zeeman, που είχε σκοπό την παρατήρηση της επίδρασης μαγνητικού πεδίου στα άτομα, κατέληξαν στο συμπέρασμα πως ο τέταρτος κβαντικός αριθμός του Pauli πρέπει να σχετίζεται με την περιστροφή ηλεκτρονίων. Εισάγουν λοιπόν την έννοια της ιδιοστροφορμής (spin) που δίνει ένα καινούργιο κβαντικό αριθμό, ο οποίος ήταν απαραίτητος για την εφαρμογή της αρχής του Pauli [1].

## 3.3 Τα 3 νοητά πειράματα

*Νοητό πείραμα* είναι ένα βοήθημα της σκέψης για να υποστηριχθεί, να αντικρουσθεί ή να επεξηγηθεί κάποια θεωρία. Έτσι κατασκευάζεται νοητικά μια κατάσταση που θα ήταν πολύ δύσκολο, έως και αδύνατον να υπάρξει στην πραγματικότητα, όπως για παράδειγμα, ένα ταξίδι με την ταχύτητα του φωτός. Φανταστικά πειράματα του είδους αυτού δεχόμαστε ότι διεξάγονται υπό εξιδανικευμένες συνθήκες, για να πετύχουμε μεγαλύτερη απλότητα. Στην συνέχεια θα περιγράψουμε ένα νοητό πείραμα σε τρεις διαφορετικές εκδοχές του, θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα και θα βγάλουμε τα συμπεράσματά μας. Τα πειράματα αυτά μπορούμε να τα δούμε ακόμα πιο αναλυτικά στο βιβλίο του Χρ. Γ. Γεωργαλάς(κεφ.,σελ.) [2].

Το πείραμα αυτό πραγματοποιήθηκε πρώτη φορά από τον Thomas Young το 1803. Η διάταξη του πειράματος είναι αρκετά απλή. Έχουμε ένα τοίχωμα με δύο πολύ λεπτές οπές, που θα τις ονομάσουμε $O_1$ και $O_2$, σε κοντινή απόσταση μεταξύ τους. Ακριβώς απέναντι έχουμε μια οθόνη, πάνω στην οποία θεωρούμε ότι υπάρχει κάποιου είδους μετρητής, ο οποίος μπορεί να προσδιορίσει το πλήθος των σωματιδίων ή αντίστοιχα την ένταση των κυμάτων που προσπίπτουν σε κάθε περιοχή της οθόνης. Μπροστά από το τοίχωμα θα τοποθετήσουμε μια πηγή $\Sigma$ η οποία ισαπέχει από τις δύο οπές του τοιχώματος, δηλαδή $\Sigma O_1 = \Sigma O_2$. Από τις οπές αυτές κάποιο πλήθος σωματιδίων ή μέρος της ενέργειας που μεταφέρουν τα κύματα περνούν πίσω από το φράγμα και καταλήγουν τελικά στην οθόνη.

Θα διεξάγουμε το πείραμα τρεις φορές τροποποιώντας κάθε φορά μια συνιστώσα του. Θεωρούμε πως η πηγή θα εκπέμπει με τον ίδιο τρόπο, προς όλες τις κατευθύνσεις σωματίδια ή κύματα. Στην πρώτη εκδοχή του πειράματος θα θεωρήσουμε ότι η πηγή εκπέμπει σωματίδια μακροσκοπικών διαστάσεων, π.χ. σφαιρίδια. Την δεύτερη φορά θα τοποθετήσουμε ολόκληρο το σύστημα μέσα στο νερό και η πηγή μας θα εκπέμπει (κλασικά) κύματα στην επιφάνεια του νερού, ενώ την τρίτη θα εκπέμπει σωματίδια του μικρόκοσμου.




Σχήμα 1: Το πείραμα των δύο οπών

## Πείραμα των δύο οπών για κλασικά σωματίδια

Η πηγή εκπέμπει με τον ίδιο τρόπο και σταθερό ρυθμό σφαιρίδια μακροσκοπικών διαστάσεων τα οποία διαθέτουν όλα την ίδια μάζα και ενέργεια. Ενώ η κίνηση τους περιγράφεται από τους γνωστούς νόμους της κλασικής μηχανικής.

Τα σφαιρίδια περνούν μέσα από τις οπές είτε κατευθείαν, είτε μετά από σκέδαση στα άκρα των οπών. Μετράμε το πλήθος $\Delta n(x)$ των σφαιριδίων τα οποία σε ορισμένο χρονικό διάστημα, προσπίπτουν σε διαφορετικές θέσεις πάνω στην οθόνη.

Θεωρούμε $n$ να είναι το πλήθος των σφαιριδίων που εκπέμπονται από την πηγή σε ορισμένο χρονικό διάστημα. Τότε η πιθανότητα να προσπέσει ένα σφαιρίδιο σε ένα στοιχείο της επιφάνειας $\Delta\sigma$, το οποίο περιέχει το σημείο $(x, 0, 0)$ της οθόνης είναι:

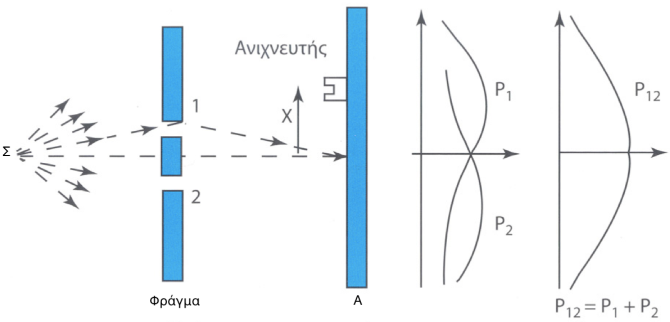
$$P(x)\Delta\sigma = \frac{\Delta n(x)}{n} \tag{17}$$

Η αντίστοιχη «πιθανότητα προσπτώσεως ανά μονάδα επιφάνειας» είναι:

$$P(x) = \frac{1}{n}\frac{\Delta n(x)}{\Delta\sigma} \tag{18}$$

Παρατηρούμε ότι η $P(x)$ είναι ανάλογη του αριθμού των σφαιριδίων που προσπίπτουν.

Από την παραπάνω εκδοχή του πειράματος έχουμε ότι όταν είναι ανοιχτές και οι δύο οπές, $O_1$ και $O_2$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ έχει τη μορφή της καμπύλης του σχήματος (2).




Σχήμα 2: Πείραμα των δύο οπών με σφαιρίδια

Στη συνέχεια θα δοκιμάσουμε να κλείσουμε τη μία από τις δύο οπές. Ας υποθέσουμε ότι θα κλείσουμε την $O_1$, τότε τα σφαιρίδια θα διέρχονται μόνο από την ανοιχτή οπή $O_2$ και θα λάβουμε μια διαφορετική καμπύλη την $P_2(x)$. Ομοίως θα εξετάσουμε την περίπτωση, οπού θα διατηρήσουμε ανοιχτή την οπή $O_1$ και θα κλείσουμε την $O_2$. Πάλι θα πάρουμε μία διαφορετική καμπύλη που θα έχει την μορφή της $P_1(x)$.

## Συμπεράσματα 1ου πειράματος

Τα συμπεράσματα που μπορούμε να πάρουμε από το παραπάνω πείραμα είναι τα εξής:

1. Μετρώντας το $\Delta n(x)$ σε διάφορα σημεία $(x, 0, 0)$ της οθόνης, έχουμε ότι ισχύει:

$$P_{12}(x) = P_1(x) + P_2(x) \tag{19}$$

Τα σφαιρίδια υπακούουν στους νόμους της Κλασικής Φυσικής. Η ολική πιθανότητα να φθάσει ένα σφαιρίδιο στην οθόνη είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων να περάσει από τη μια ή από την άλλη οπή.

2. Η ενέργεια φτάνει στην οθόνη κατά ασυνεχή ποσά. Κάθε σφαιρίδιο με μάζα $m$ και ταχύτητα $u$, που φτάνει την οθόνη ,μεταφέρει ενέργεια ίση με $E = \frac{1}{2}mu^2$. Η ολική ενέργεια που φτάνει στο επίπεδο αυτό είναι ίση με NE, όπου N ακέραιος αριθμός, ίσος με πλήθος των ολικών σφαιριδίων που προσπίπτουν.

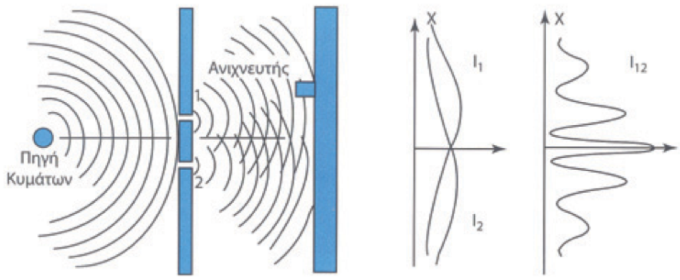
Τα συμπεράσματα αυτά μοιάζουν τετριμμένα και αναμενόμενα. Η σημασία τους θα φανεί όταν τα συγκρίνουμε με τα συμπεράσματα των ακόλουθων πειραμάτων.

## Πείραμα των δύο οπών για κύματα

Στην δεύτερη εκδοχή του πειράματος η πηγή μας, την οποία έχουμε τοποθετήσει στη θέση Σ, όπως και πριν, θα δημιουργεί μία περιοδική διαταραχή από την οποία θα παράγονται κύματα επιφάνειας. Για καλύτερη κατανόηση στο σχήμα που ακολουθεί η επιφάνεια του χαρτιού αναπαριστά την επιφάνεια ενός υγρού. Τα κύματα που παράγονται μεταδίδονται στην επιφάνεια του υγρού και στην συνέχεια προσπίπτουν στο φράγμα Φ. Αν το μήκος του κύματος είναι της ίδιας τάξεως μεγέθους με την απόσταση $O_1O_2$ τότε, κατά την αρχή του Huygens, τα σημεία $O_1$ και $O_2$ γίνονται δευτερογενείς πηγές του κύματος λόγω του φαινομένου της περίθλασης. Στην περίπτωση αυτή η ενέργεια φτάνει στην οθόνη συνεχώς και δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο μιας στοιχειώδους ενέργειας που μεταφέρεται από ένα διακεκριμένο φορέα, όπως το σφαιρίδιο του προηγούμενου πειράματος.

Στη συνέχεια θα κλείσουμε τη μία από τις δύο οπές, έστω ότι θα κλείσουμε την $O_2$ και θα αφήσουμε ανοιχτή μόνο την $O_1$. Τότε η ένταση του κύματος που προσπίπτει στην οθόνη δίνεται από την καμπύλη $I_1(x)$ του σχήματος (3). Ενώ παρατηρούμε ότι αν κρατήσουμε ανοιχτή μόνο την $O_2$, θα πάρουμε την καμπύλη $I_2(x)$. Οι καμπύλες αυτές μοιάζουν πολύ με τις καμπύλες $P_1(x)$ και $P_2(x)$ του προηγούμενου πειράματος.

Σημαντική διαφορά παρατηρείται στην περίπτωση κατά την οποία είναι ανοιχτές και οι δύο οπές, πράγμα που οφείλεται στην συμπεριφορά των κυμάτων όταν «συγκρούονται». Αν συναντηθούν δύο κορυφές ή δύο κοιλότητες τότε θα μας δώσουν μια μεγαλύτερη κορυφή ή κοιλότητα. Αν συναντηθούν μια κορυφή με μία κοιλότητα τότε θα αλληλοαναιρεθούν. Τα κύματα λέμε ότι συμβάλουν και το αποτέλεσμα ονομάζεται εικόνα συμβολής. Έτσι και στο πείραμα διακρίνουμε ότι στη περιοχή πίσω από το φράγμα έχουμε φαινόμενα συμβολής και η έντασή του κύματος στα διάφορα σημεία $(x, 0, 0)$ της οθόνης δίνεται από την καμπύλη $I_{12}(x)$ του σχήματος. Τα δύο αυτά κύματα συμβάλλουν και δημιουργούνται κροσσοί συμβολής, με άλλα λόγια υπάρχουν σημεία του κύματος που πάλλονται με μέγιστο ύψος και σημεία του κύματος που δεν πάλλονται καθόλου.




Σχήμα 3: Πείραμα των δύο οπών με κύματα

Έχουμε λοιπόν:

$$I_{12}(x) \neq I_1(x) + I_2(x) \tag{20}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο από τους γνωστούς νόμους της κλασικής κυματικής.

### Συμπεράσματα 2ου πειράματος

Τα συμπεράσματα μας από αυτή τη καινούρια εκδοχή του πειράματος είναι:

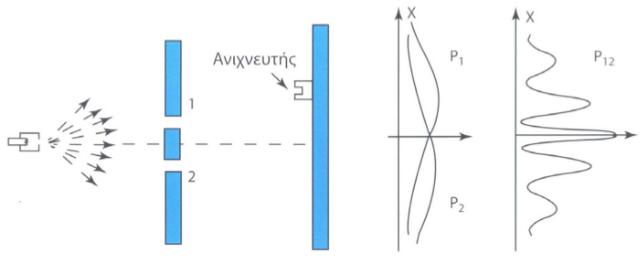
1. Εμφανίζονται φαινόμενα συμβολής
2. Η ενέργεια μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή καθώς φτάνει στην οθόνη με τρόπο συνεχή.

### Πείραμα των δύο οπών με ηλεκτρόνια

Στην τρίτη και τελευταία εκδοχή του πειράματός μας η πηγή θα εκπέμπει με τον ίδιο τρόπο σωματίδια του μικρόκοσμου ορισμένου είδους. Ας υποθέσουμε εδώ ότι εκπέμπει ηλεκτρόνια, που όλα έχουν την ίδια ενέργεια. Επιπλέον, διαθέτουμε ένα μετρητή ο οποίος μας βοηθά να προσδιορίσουμε το πλήθος των ηλεκτρονίων που προσπίπτουν στις διάφορες θέσεις $(x, 0, 0)$ της οθόνης.

Αντίθετα με τα δύο προηγούμενα, το συγκεκριμένο πείραμα δεν είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί. Ο λόγος είναι ότι, για να πραγματοποιηθούν τα φαινόμενα που θα περιγράψουμε, πρέπει όλη η διάταξη να έχει τόσο μικρές διαστάσεις ώστε η απόσταση μεταξύ των δύο οπών να είναι της τάξεως μερικών Angstrom.

Μιας και τα ηλεκτρόνια αποτελούν μια μικροσκοπική ποσότητα ύλης, σαν πολύ πολύ μικρές μπίλιες η διαίσθηση μας λέει πως θα μας δώσουν το ίδιο αποτέλεσμα με τα σωματίδια. Και όντως όταν εκτελούμε το πείραμα με μία οπή ανοιχτή λαμβάνουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Και σε αυτήν την περίπτωση η ενέργεια που φτάνει στην οθόνη γίνεται με ασυνεχή τρόπο και κάθε στοιχειώδες ποσό ενέργειας μεταφέρεται από ένα στοιχειώδη φορέα, δηλαδή το ηλεκτρόνιο. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ανάλογο με αυτό του αρχικού πειράματος και φαίνεται πως τα ηλεκτρόνια ακολουθούν την κλασική συμπεριφορά των σφαιριδίων.




Σχήμα 4: Πείραμα των δύο οπών με ηλεκτρόνια

Στην συνέχεια θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα προσπώσεως των ηλεκτρονίων ανά μονάδα επιφάνειας, δηλαδή το $P(x)$ με τον ίδιο τρόπο όπως στην αρχική εκδοχή του πειράματος. Για να το επιτύχουμε αυτό πρέπει πρώτα να μετρήσουμε το πλήθος $\Delta n(x)$ των ηλεκτρονίων τα οποία σε ορισμένο χρονικό διάστημα, φτάνουν στην οθόνη. Και σε αυτήν την περίπτωση θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες ανάλογα με το αν είναι ανοιχτές και οι δύο οπές ή μόνο μια από τις δύο. Όταν είναι ανοιχτή μόνο η μία οπή από της δυο, οι συναρτήσεις $P_1(x)$ και $P_2(x)$ παρουσιάζουν ομοιότητα με τις συναρτήσεις του σχήματος (2) από το πρώτο πείραμα. Όταν όμως στο πείραμα έχουμε ανοιχτές και τις δύο οπές, τότε η συνάρτηση $P_{12}(x)$ έχει μορφή όμοια με την $I_{12}(x)$ του σχήματος (3) από την δεύτερη εκδοχή του πειράματος. Αντί να παρατηρήσουμε το αναμενόμενο αποτέλεσμα παίρνουμε μια εικόνα συμβολής.

Καταλήγουμε επομένως να έχουμε την πλέον αξιοπερίεργη παρατήρηση. Από τη μία πλευρά, στη περίπτωση των σωματιδίων του μικρόκοσμου, η ενέργεια μεταφέρεται από διακεκριμένους στοιχειώδεις φορείς όπως στη περίπτωση των κλασικών σωματιδίων, κάτι το οποίο μας παραπέμπει στο συμπέρασμα ότι το φως τελικά έχει σωματιδιακή συμπεριφορά. Από την άλλη μεριά όμως εμφανίζονται φαινόμενα συμβολής, όπως στην περίπτωση των κλασικών κυμάτων, κάτι το οποίο θα έλεγε κανείς πως επιβεβαιώνει την κυματική φύση του φωτός.

Έχουμε ωστόσο και μια εξαιρετικά παράδοξη παρατήρηση καθώς σύμφωνα με τα παραπάνω συνεπάγεται ότι:

$$P_{12}(x) \neq P_1(x) + P_2(x) \tag{21}$$

Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα να φτάσει ένα ηλεκτρόνιο στη περιοχή του σημείου $(x, 0, 0)$ της οθόνης δεν ισούται με το άθροισμα της πιθανότητας να φτάσει περνώντας από την οπή $O_1$, συν την πιθανότητα να φτάσει περνώντας από την οπή $O_2$.

Το αποτέλεσμα αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με την εξής πρόταση:

**Πρόταση 1** *Κάθε ηλεκτρόνιο που φτάνει στην οθόνη είτε διέρχεται μέσω της οπής $O_1$ (και όχι μέσω της $O_2$) είτε διέρχεται μέσω της οπής $O_2$ (και όχι μέσω της $O_1$ ).*

Η πρόταση αυτή όμως, διαισθητικά μας φαίνεται αληθινή και, ακόμα ίσως και, τετριμμένη. Παρόλα αυτά η αντίθεση που παρατηρείται μεταξύ της προτάσεως αυτής και του παραπάνω συμπεράσματος, είναι αρκετά εύκολο να αποδειχθεί.

Αν δεχτούμε ότι η πρόταση είναι αληθής, τότε το ολικό πλήθος $\Delta(x)$ των ηλεκτρονίων που φτάνουν στην περιοχή του σημείου $(x, 0, 0)$ θα δινόταν από το άθροισμα του πλήθους $\Delta n_1(x)$ των ηλεκτρονίων που φτάνουν διερχόμενα από την $O_1$ και του πλήθους $\Delta n_2(x)$ των ηλεκτρονίων τα οποία έχουν διέλθει από την $O_2$. Τότε όμως, η πιθανότητα $P_{12}(x)$ θα έπρεπε να είναι ίση με $P_1(x)+P_2(x)$ κάτι το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τα αποτελέσματα του πειράματος. Επομένως υποχρεωτικά η πρόταση είναι ψευδής.

Εντούτοις, αν δεχτούμε ότι η πρόταση είναι ψευδής, τότε υπάρχουν οι εξής δύο δυνατότητες:

1. Ορισμένα ηλεκτρόνια να φτάνουν στην οθόνη χωρίς να έχουν περάσει μέσα από κάποια οπή του φράγματος.

   Αυτό είναι πραγματικά αδύνατον, διότι το φράγμα σταματάει όλα εκείνα τα ηλεκτρόνια που δεν διέρχονται από τις οπές.

2. Ορισμένα ηλεκτρόνια να διέρχονται και από τις δύο οπές. Το πλήθος όμως των ηλεκτρονίων είναι πάντα ακέραιος αριθμός. Ένα ηλεκτρόνιο ποτέ δεν μπορεί να κοπεί στα δύο και επομένως είναι αδύνατο μέρος ενός ηλεκτρονίου να περάσει μέσα από τη μία οπή και το υπόλοιπο να περάσει μέσα από την άλλη.

Για να ισχύει λοιπόν η (2), θα πρέπει μερικά ηλεκτρόνια να εκτελούν πολύπλοκη παλινδρομική κίνηση. Καμία θεωρία δεν εξηγεί τη μορφή της καμπύλης $I_{12}(x)$ με τέτοιες πολύπλοκες κινήσεις.

Φαίνεται πώς ένα σχετικά ευσταθές συμπέρασμα θα ήταν πως η παραπάνω πρόταση δεν είναι ούτε αληθής, αλλά ούτε και ψευδής, κάτι το οποίο μοιάζει πραγματικά παράδοξο.

## 3.4 Επέκταση πειράματος των δύο οπών - Η επίδραση της παρατήρησης

Από τα προηγούμενα πειραματικά δεδομένα δημιουργούνται πολλά ερωτηματικά, στα οποία και θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε.

Είναι δυνατό με κάποιο τρόπο να διακρίνουμε από ποια οπή έχουν περάσει τα ηλεκτρόνια;

Αν κάτι τέτοιο μπορούσε να γίνει, τότε από πειραματική σκοπιά η πρόταση 1 είναι σωστή;

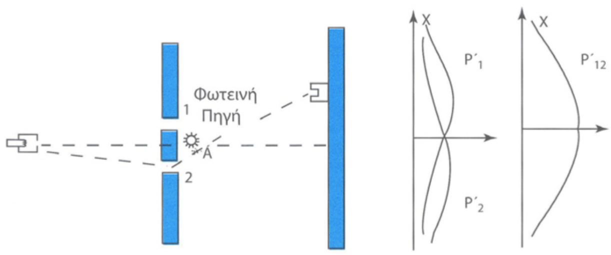
Αρχικά, παρατηρείται πως το φαινόμενο της συμβολής συνεχίζει να υφίσταται ακόμα και όταν η πηγή εκπέμπει ηλεκτρόνια με τόσο μικρό ρυθμό, ώστε σε κάθε χρονική στιγμή το πολύ ένα ηλεκτρόνιο να βρίσκεται σε κίνηση. Αυτό μας λέει ότι αν θεωρήσουμε πως έχουμε δυο διαφορετικά κύματα που συμβάλουν, τα $\Psi_1(x,t)$ και $\Psi_2(x,t)$, τότε το κάθε κύμα δεν αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό ηλεκτρόνιο, αλλά αντίθετα για κάθε ηλεκτρόνιο, υπάρχουν δύο διαφορετικά κύματα $\Psi_1$ και $\Psi_2$ που συμβάλουν.

Θα χρειαστεί να διερευνήσουμε περισσότερο τα παράξενα αυτά φαινόμενα και για αυτό θα προσπαθήσουμε να εξακριβώσουμε τι είδους κίνηση κάνει πραγματικά και από ποιά οπή διέρχεται το κάθε ηλεκτρόνιο. Για να το πετύχουμε αυτό πρέπει να τροποποιήσουμε το τελευταίο πείραμα μας με τον εξής τρόπο:

Σ' ένα σημείο $\Lambda$, πίσω από το φράγμα και ανάμεσα στις δύο οπές, τοποθετούμε μία ισχυρή φωτεινή πηγή. Όταν ένα ηλεκτρόνιο θα περνά στον χώρο πίσω από το φράγμα, τότε ένα ή περισσότερα φωτόνια από την πηγή $\Lambda$ θα σκεδαστούν πάνω του και στην συνέχεια θα παρατηρηθούν. Αν παρατηρηθούν φωτόνια που προέρχονται από την περιοχή της μίας από της δύο οπές, τότε θα ξέρουμε ότι το ηλεκτρόνιο αυτό πέρασε από την συγκεκριμένη οπή.

Με αυτό τον τρόπο, όταν ο μετρητής μας δίνει σήμα ότι κάποιο ηλεκτρόνιο έφτασε στην οθόνη, παρατηρούμε φωτόνια που προέρχονται είτε από την οπή $O_1$, είτε από την $O_2$, αλλά ποτέ και από τις δύο ταυτόχρονα.

Ας μετακινήσουμε τώρα τον μετρητή κατά μήκους του άξονα των $x$ και ας μετρήσουμε το πλήθος των παλμών $\Delta n_1(x)$ και $\Delta n_2(x)$, για τους οποίους εμφανίζονται φωτόνια προερχόμενα από τη οπή $O_1$ και $O_2$ αντιστοίχως.




Σχήμα 5: Παρατηρώντας τα ηλεκτρόνια

Παρατηρούμε εύκολα την ομοιότητα μεταξύ των καμπυλών των συναρτήσεων $\Delta n_1(x)$ και $\Delta n_2(x)$ με την μορφή των καμπυλών $P_1(x)$ και $P_2(x)$ του σχήματος. Επιπλέον, ο συνολικός αριθμός των παλμών δίνεται από τη σχέση: $\Delta n_{12}(x) = \Delta n_1(x) + \Delta n_2(x)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν πως για το τροποποιημένο πείραμα ισχύει το εξής:

$$P_{12}(x) = P_1(x) + P_2(x)$$

Εν τέλει, από την τροποποιημένη εκδοχή αυτού του πειράματος, έχουμε την πιο σημαντική παρατήρηση από όλες. *Εάν προσδιορίσουμε από ποιά οπή διήλθε το ηλεκτρόνιο η συνάρτηση $P_{12}(x)$ είναι διαφορετική από ότι αν δεν κάνουμε αυτόν τον προσδιορισμό.* Όταν παρατηρούμε τα ηλεκτρόνια αυτά συμπεριφέρονται όπως τα κλασικά σωματίδια.

Η διαφοροποίηση αυτή οφείλεται στο ότι η παρατήρηση η ίδια «επηρεάζει» τα ηλεκτρόνια και έτσι τροποποιείται η κίνησή τους.

Όταν ένα πειραματικό αποτέλεσμα μπορεί να πραγματοποιηθεί με πολλούς τρόπους, τότε:

1. Αν προσδιορίσουμε πειραματικά με ποιόν από τους δυνατούς τρόπους πραγματοποιείται το πείραμα, τότε παρατηρούμε ότι δεν έχουμε συμβολή.

2. Αν δεν προσδιορίσουμε με ποιόν τρόπο θα πραγματοποιηθεί το πείραμά μας, τότε παρατηρούμε ότι εμφανίζεται το φαινόμενο της συμβολής.

Δεν είναι δυνατό να υπάρξει μια συσκευή με την οποία να μπορούμε να προσδιορίσουμε από ποια οπή πέρασε το ηλεκτρόνιο χωρίς να το διαταράξουμε σε τέτοιο βαθμό ώστε να καταστρέψουμε τον κροσσό συμβολής.

Ας επιστρέφουμε τώρα στο ερώτημα μας: η πρόταση 1 είναι αληθής ή ψευδής;

Η πρόταση θα είναι όντως αληθής αν μπορούμε να προσδιορίσουμε την οπή από την οποία διέρχεται κάθε ηλεκτρόνιο.

Εάν όμως δεν προβούμε σε αυτόν τον προσδιορισμό, τότε η πρόταση δεν είναι ούτε αληθής, ούτε και ψευδής, αλλά χωρίς περιεχόμενο για τη σύγχρονη φυσική.

Η σύγχρονη φυσική απαιτεί να ορίζεται κάθε φυσικό μέγεθος με τρόπο τέτοιο ώστε να μπορούμε να το ορίσουμε περιγράφοντας μία αλληλουχία μετρήσεων με την οποία μπορεί, αρχικά, να μετρηθεί το φυσικό μέγεθος. Επιπλέον ο χαρακτηρισμός «αληθής» ή «ψευδής» μπορεί να αποδοθεί σε μία πρόταση μόνο με την περιγραφή μετρήσεων που επιτρέπουν να ελεγχθεί αν είναι ή όχι αληθής.

Επομένως, ας επαναδιατυπώσουμε την πρόταση ως εξής:

*Αν προσδιορίσουμε -φωτίζοντας καταλλήλως τα ηλεκτρόνια και παρατηρώντας την προέλευσή των φωτονίων που σκεδάζονται πάνω τους- την οπή από την οποία περνάει κάθε ηλεκτρόνιο, βρίσκουμε ότι κάθε ηλεκτρόνιο που φτάνει στην οθόνη, είτε έχει διέλθει από την οπή* $O_1$ *(και όχι από τη* $O_2$*) ή από την οπή* $O_2$ *(και όχι από τη* $O_1$*).*

Με τη σωστή αυτή διατύπωση, η πρόταση είναι αληθής, ενώ η προηγούμενη διατύπωση, στην οποία δεν αναφερόταν κάτι για τον τρόπο που μπορεί να προσδιοριστεί η οπή από την οποία διέρχεται το κάθε ηλεκτρόνιο, η πρόταση είναι *αόριστη*.

Το φαινόμενο κατά το οποίο το φως συμπεριφέρεται άλλοτε σαν κύμα και άλλοτε σαν σωματίδιο είναι γνωστό ως *κυματοσωματιδιακός δυϊσμός*. Υποατομικά σωματίδια, όπως τα ηλεκτρόνια, επιδεικνύουν και αυτά την ίδια συμπεριφορά. Όταν παρατηρούμε φωτόνια και ηλεκτρόνια η συμπεριφορά τους επηρεάζεται. Δεν είναι εφικτό να κάνουμε με κάποιον τρόπο την παρατήρησή μας αμελητέα ώστε να μην επηρεαστεί το παρατηρούμενο σύστημα. Στην Κβαντική αντίληψη ο παρατηρητής δεν είναι ποτέ ανεξάρτητος από αυτά που παρατηρεί.

# 4 Κβαντική Λογική

## 4.1 Θεωρίες Κρυφών Μεταβλητών

Παρά το γεγονός ότι η κβαντική θεωρία μας προσφέρει ερμηνείες για πολλά πειραματικά αποτελέσματα στη φύση, πολλοί είναι εκείνοι που έχουν θεωρήσει υπερβολική την τυχαιότητα που εμφανίζεται σε αυτήν. Όπως είδαμε, η άποψη που κυριαρχεί είναι πως πρόκειται για μια μη αιτιοκρατική θεωρία. Πολλοί θεωρούν ότι αυτό αποτελεί ατέλεια της θεωρίας η οποία θα πρέπει να διορθωθεί ώστε να αποκατασταθεί η αιτιοκρατία. Για το λόγο αυτό υιοθετήθηκε από ορισμένους φυσικούς η λεγόμενη *θεωρία κρυφών μεταβλητών*.

Ο Albert Einstein είναι ένας από τους πιο διάσημους υποστηρικτές της άποψης αυτής, μιας και ήταν αντίθετος στην πιθανοτική φύση της κβαντικής μηχανικής. Με το μέρος του συντάχθηκαν και άλλοι , κυρίως ο Planck παρόλο που η δική του δουλειά έδωσε τις βάσεις της κβαντικής φυσικής.

Εκτός από την τυχαιότητα που εμφανίζεται ένα ακόμα ανεξήγητο γεγονός προβλημάτιζε τους φυσικούς και αυτό ήταν το φαινόμενο του κβαντικού συσχετισμού (ή κβαντικής διεμπλοκής ή quantum entanglement), μια έννοια η οποία βρίσκεται στην καρδιά της κβαντικής θεωρίας και θα καταλάβουμε καλύτερα τι ακριβώς είναι μέσα από το παρακάτω πείραμα.

Το παράδοξο Einstein-Podolsky-Rosen είναι ένα νοητό πείραμα που πήρε την ονομασία EPR από τα αρχικά τους [11]. Το πείραμα πραγματοποιήθηκε το 1934-1935, σε μια περίοδο κατά την οποία ο Einstein και οι συνεργάτες του δούλευαν στο Princeton. Στόχος τους ήταν να αποδειχθεί πως η θεωρία τη κβαντικής μηχανικής είναι ελλιπής. Η δημοσίευσή του έγινε στο περιοδικό Physical Rewiew.

Το πείραμα αυτό εστιάζει στο spin ενός ηλεκτρονίου. Έχει αποδειχτεί από το πείραμα των Stern-Gerlach ότι τα σωματίδια στον μικρόκοσμο έχουν ένα ενδογενές χαρακτηριστικό που έχει ιδιότητες στροφορμής, το λεγόμενο spin (**ιδιοστρο-**

**φορμή**). Το spin είναι ένα κβαντισμένο μέγεθος και παίρνει μόνο δύο τιμές, «*πάνω*» και «*κάτω*», ανάλογα με τη φορά της περιστροφής του ηλεκτρονίου γύρω από τον εαυτό του.

Στο νοητό πείραμα έχουμε δύο συσχετισμένα ηλεκτρόνια με αντίθετα μεταξύ τους spin, δηλαδή το άθροισμά τους είναι συνολικά μηδέν. Να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι το συνολικό άθροισμα των τιμών του spin είναι μετρήσιμο (βλ. ορισμό 13), σε αντίθεση με την τιμή του καθενός ξεχωριστά. Στη συνέχεια του πειράματος απομακρύνουμε το ένα από τα δύο ηλεκτρόνια δημιουργώντας πολύ μεγάλη απόσταση μεταξύ τους. Το παράδοξο εμφανίζεται όταν μετρώντας την τιμή του spin στο ένα ηλεκτρόνιο ακαριαία μαθαίνουμε και την τιμή του spin για το απομακρυσμένο ηλεκτρόνιο, καθώς γνωρίζουμε το άθροισμά τους, το οποίο παραμένει σταθερό και ίσο με μηδέν. Το παράδοξο σε αυτό το σημείο είναι ότι πείραμα αυτό υπονοεί πως υπάρχει κάποιος τρόπος μετάδοσης πληροφορίας η οποία γίνεται πραγματικά ακαριαία.

Από την άλλη πλευρά, υπάρχει και η άποψη του Bohr σχετικά με το παραπάνω πείραμα. Θεωρεί πως τα ασυνήθιστα αποτελέσματά οφείλονται στις ιδιότητες του μικρόκοσμου, οι οποίες διαφέρουν από αυτές του μακρόκοσμου και στην συνέχεια δεν θα μας απασχολήσουν περαιτέρω.

## 4.2 Το Θεώρημα Kochen-Specker

Το θεώρημα Kochen-Specker προτάθηκε από τους S. Kochen και E. Specker το 1967. Στη βιβλιογραφία συναντάται συχνά και ως θεώρημα Bell-KS, διότι ο Bell το 1966 είχε προτείνει μια εναλλακτική διατύπωση που κατέληγε σε παρόμοια συμπεράσματα [12].

**Ορισμός 13** *Μια ποσότητα θα την χαρακτηρίζουμε ως* **μετρήσιμη** *(measurable,* σύμφωνα με την ορολογία στο [17]*) εάν μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της μέσω κάποιας πειραματικής διαδικασίας.*

*Παράδειγμα.* Στο νοητό πείραμα των δύο οπών αναφέραμε ότι η θέση του ηλεκτρονίου, σε κάθε χρονική στιγμή, δεν μπορεί να καθοριστεί, δηλαδή η θέση του ηλεκτρονίου είναι μη μετρήσιμη. Αντιθέτως, η πιθανότητα του να βρίσκεται το ηλεκτρόνιο σε μια θέση είναι μετρήσιμη.

Η Κβαντομηχανική βασιζόμενη σε αποτελέσματα των πειραματικών δεδομένων, κάνει τις εξής παραδοχές αναφορικά με το spin του ηλεκτρονίου στο άτομο του orthohelium[17]:

*I. Η προβολή $s(a,t)$ του spin στην κατεύθυνση $a \in S^2$, όπου $S^2$ είναι η μοναδιαία σφαίρα, την χρονική στιγμή $t$ είναι μετρήσιμη. Το $s(a,t)$ παίρνει τυχαία μια μόνο από τις τιμές $\{-1,0,1\}$ με κάποια πιθανότητα την κάθε μια.*

*II. Τα μήκη $|s(a_i,t)|^2$, για $i = 1,2,3$, των τριών προβολών του spin σε ένα τρισορθογώνιο σύστημα κατευθύνσεων $\{a_1,a_2,a_3\} \subset S^2$, είναι μετρήσιμα. Κάθε τέτοιο τρισορθογώνιο σύστημα κατευθύνσεων θα το ονομάζουμε* **σύστημα**. *Το άθροισμά των μηκών των προβολών για κάθε σύστημα και οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t$ είναι ίσο με 2.*

Οι παραπάνω ιδιότητες του spin θα ονομαστούν, από εδώ και στο εξής, *αξιώματα*.

Σύμφωνα με την κλασική μηχανική η ποσότητα spin θα έπρεπε να είναι συνάρτηση διαφόρων ποσοτήτων. Το βασικό ερώτημα που θα κάνουμε είναι: **Μπορεί το spin να θεωρηθεί ως συνάρτηση φυσικών μεταβλητών και ταυτόχρονα να ικανοποιεί τα αξιώματα I και II;**

Θα αποδείξουμε ότι η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι αρνητική. Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε (με την μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής) ότι η συμπεριφορά μίας τέτοιας συνάρτησης αντιβαίνει με τα αξιώματα I και II, και συνεπώς η ύπαρξή της είναι αδύνατη.

Έστω ότι το spin είναι μια κλασική συνάρτηση $\overrightarrow{spin}(t,\omega)$, όπου με $t$ συμβολίζουμε τον χρόνο και με $\omega$ συμβολίζουμε άλλες μεταβλητές που εκπροσωπούν φυσικές ποσότητες συμπεριλαμβανομένων και ποσοτήτων που ακόμη δεν γνωρίζουμε. Οι τελευταίες ονομάζονται στην βιβλιογραφία ως κρυφές μεταβλητές (**Hidden Variables**).

Για δεδομένο $\overrightarrow{spin}(t,\omega)$, θεωρούμε την προβολή του spin στην διεύθυνση $a$ να είναι $s(a,t,\omega)$, όπου $\omega \in \Omega$. Εφόσον το spin είναι συνάρτηση, τότε και το $s(a,t,\omega)$ είναι επίσης συνάρτηση. Ορίζουμε ως $\Omega$ τον χώρο στον οποίο ανήκουν όλες οι κρυφές μεταβλητές.

Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι το $\Omega$ δεν εξαρτάται μόνο από το ίδιο το σύστημα, αλλά και από τη διάταξη μέτρησης του spin, δηλαδή επηρεάζεται από τον ίδιο τον παρατηρητή.

Η συσχέτιση της $s(a,t,\omega)$ και των παρατηρούμενων μεγεθών γίνεται ως εξής: η ποσότητα που παρατηρούμε είναι οι τιμές της συνάρτησης $s(a,t)$, όπου

$$s(a,t) := \int_\Omega s(a,t,\omega)d\mu(\omega). \tag{22}$$

Δηλαδή, $s(a,t)$ είναι ο μέσος όρος της ποσότητας $s(a,t,\omega)$, όπου ο «*μέσος όρος*» δίνεται από ένα μέτρο πιθανοτήτων $\mu\omega$, το οποίο όμως, μη γνωρίζοντας την παράμετρο $\omega$, δεν γνωρίζουμε. Το $|s(a,t)|$ ορίζεται με παρόμοιο τρόπο. Αυτό που θα αποδείξουμε είναι ότι το $s(a,t)$ *δεν είναι συνάρτηση*.

Για δοσμένα ω και $t$, θα θεωρήσουμε την αντιστοίχηση:

$$S^2 \to \{0,1\}: \quad a \mapsto |s|(a,t). \tag{23}$$

Από το αξίωμα I έχουμε ότι το $|s(a,t)|$ μπορεί να παίρνει μόνο τις τιμές 0 και 1, ενώ από το II γνωρίζουμε ότι για κάθε σύστημα $\{a_1,a_2,a_3\}$ ακριβώς ένα από τα $|s(a_i)|$ ισούται με 0. Θα αναφερόμαστε στην ιδιότητα αυτή με τον τίτλο *βασική ιδιότητα*.

**Ορισμός 14** *Ορίζουμε ως γράφημα πάνω στη μοναδιαία σφαίρα ένα διατεταγμένο ζεύγος* $(V, E)$, *όπου* $V$ *είναι ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων της επιφάνειας της σφαίρας και το* $E$ *είναι ένα σύνολο από τόξα* $\widehat{AB}$, *όπου τα* $A$ *και* $B$ *ανήκουν στο* $V$ *και το* $\widehat{AB}$ *συμβολίζει ένα τόξο μεγίστου κύκλου της σφαίρας με άκρα τα* $A$ *και* $B$.

**Ορισμός 15** *Κατά την απόδειξη των ακόλουθων θεωρημάτων, θα κατασκευάσουμε γραφήματα πάνω στην μοναδιαία σφαίρα. Ένα τέτοιο γράφημα θα λέμε ότι είναι υλοποιήσιμο εάν ισχύουν τα εξής:*

1. *κάθε κορυφή του γραφήματος βρίσκεται πάνω στην μοναδιαία σφαίρα.*
2. *κάθε δύο κορυφές που συνδέονται με μια ακμή στο γράφημα έχουν αντίστοιχη επίκεντρη γωνία* $\pi/2$.

Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου αυτού αποδεικνύουμε το εξής θεώρημα.

**Θεώρημα 3** *Δεν υπάρχει απεικόνιση* $S^2 \to \{0, 1\}$, *όπου* $S^2$ *είναι η μοναδιαία σφαίρα, τέτοια ώστε για κάθε σύστημα* $\{a_1, a_2, a_3\}$ *η απεικόνιση αυτή να παίρνει την τιμή* $0$ *σε ακριβώς μία από τις κατευθύνσεις* $a_i$.

Το θεώρημα αυτό συνεπάγεται ότι δεν μπορεί να υπάρχει συνάρτηση $s(a, t)$ που ικανοποιεί τα αξιώματα. Το Θεώρημα 3 είναι άμεση συνέπεια του ακόλουθου τεχνικού θεωρήματος.

**Τεχνικό Θεώρημα.** *Είναι εφικτό να κατασκευαστεί ένα πεπερασμένο σύνολο* $\Gamma \subset S^2$ *το οποίο έχει* $117$ *κορυφές και την ακόλουθη ιδιότητα: «Για οποιαδήποτε απεικόνιση* $k$: $\Gamma \to \{0, 1\}$ *είτε υπάρχει ένα σύστημα* $\{a_1, a_2, a_3\} \subset \Gamma$ *στο οποίο η* $k$ *δεν θα παίρνει την τιμή* $0$ *ακριβώς μια φορά, είτε θα υπάρχει κάποιο* *ζεύγος καθέτων κατευθύνσεων* $\{a_1, a_2\} \subset \Gamma$, *στην οποία η* $k$ *είναι ίση με* 1.»

Να αναφέρουμε πως για το σύνολο των 117 κορυφών δεν γνωρίζουμε αν το πλήθος των κορυφών είναι το βέλτιστο που υπάρχει, αλλά λειτουργεί για την συγκεκριμένη απόδειξη που θα εφαρμόσουμε για το θεώρημα αυτό.

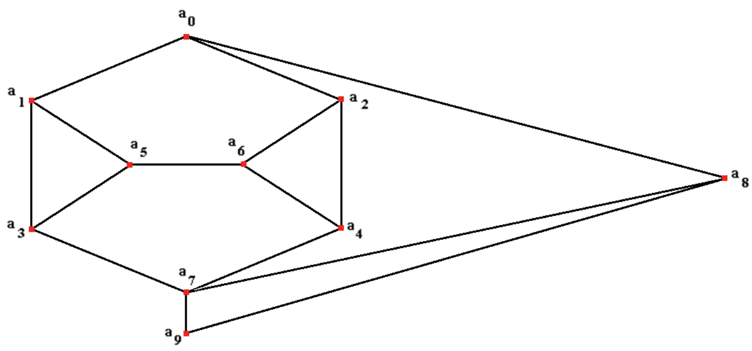
Άμεσο πόρισμα του παραπάνω θεωρήματος είναι ότι η απεικόνιση $s(a, t)$ δεν μπορεί να υπάρχει. Πράγματι, σε αντίθετη περίπτωση, θα έπρεπε να ικανοποιείται η *βασική ιδιότητα* που προαναφέραμε για κάθε σύστημα. Το τεχνικό θεώρημα όμως υποδεικνύει ότι υπάρχει σύστημα στο οποίο δύο ή παραπάνω από τα $|s|(a_i)$ ισούται με 0 ή ισοδύναμα ότι δεν ισχύει η *βασική ιδιότητα*, το οποίο οδηγεί σε αντίφαση.

Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο με την απόδειξη του τεχνικού θεωρήματος. Αρχικά αποδεικνύουμε δύο χρήσιμα λήμματα, τα οποία θα μας βοηθήσουν στην κατασκευή του συνόλου Γ του τεχνικού θεωρήματος [18].

**Λήμμα 2** *Έστω* $a$ *και* $b$ *σημεία πάνω στην* $S^2$ *τέτοια ώστε :* $sin\theta \in [0, 1/3]$ *, όπου* $\theta$ *είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των* $a$ *και* $b$*. Τότε μπορεί να υλοποιηθεί το ακόλουθο γράφημα για το οποίο θα ισχύει* $a_0 \mapsto a$ *και* $a_9 \mapsto b$*.*

*Απόδειξη.* Θα αποδείξουμε ότι εάν τα διανύσματα $u(a_0)$ και $u(a_9)$, που αντιστοιχούν στα σημεία $a_0$ και $a_9$ του γραφήματος (6) σχηματίζουν γωνία $\vartheta$, όπου $0 \leqslant sin\theta \leqslant 1/3$, τότε το γράφημα (6) είναι υλοποιήσιμο.

Έστω ότι η επίκεντρη γωνία $\vartheta$ μεταξύ των $u(a_0)$ και $u(a_9)$ είναι μια οποιαδήποτε οξεία γωνία. Από το γράφημα (6) γνωρίζουμε ότι το $u(a_8)$ είναι κάθετο στα $u(a_0)$, $u(a_7)$ και $u(a_9)$. Επιπλέον, το $u(a_7)$ είναι κάθετο στο $u(a_9)$, άρα το $u(a_7)$ πρέπει να βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζεται από τα $u(a_0)$ και $u(a_9)$. Η κατεύθυνση του $u(a_7)$ μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε, εάν $\varphi$ είναι η γωνία μεταξύ των $u(a_0)$ και $u(a_7)$, τότε:




Σχήμα 6: KS γράφημα 10 σημείων

$$\phi = \pi/2 - \theta \tag{24}$$

Στη συνέχεια ονομάζουμε $u(a_5) = \mathbf{i}$ και $u(a_6) = \mathbf{k}$ και επιλέγουμε ένα τρίτο διάνυσμα $\mathbf{j}$, τέτοιο ώστε τα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ να είναι ανά δύο κάθετα μεταξύ τους. Το $u(a_1)$ εφόσον είναι κάθετο στο $\mathbf{i}$ μπορεί, για κάποιο κατάλληλο πραγματικό αριθμό x, να γραφεί ως εξής:

$$u(a_1) = \frac{\mathbf{j} + x\mathbf{k}}{\sqrt{1 + x^2}} \tag{25}$$

Ομοίως, το $u(a_2)$ το οποίο είναι κάθετο στο $k$ μπορεί, για κάποιο κατάλληλο πραγματικό y, να γραφεί ως:

$$u(a_2) = \frac{\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{1 + y^2}} \tag{26}$$

Σύμφωνα με τις πληροφορίες που έχουμε από το γράφημα (6) και με την χρήση του εξωτερικού γινομένου [4] μπορούμε να γράψουμε τα $u(a_3)$ και $u(a_4)$ ως εξής:

---

[4] Έστω δύο διανύσματα, το $\vec{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ και το $\vec{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Ως εξωτερικό γινόμενο $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ορίζεται το διάνυσμα: $\vec{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \mathbf{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1)$. Το διάνυσμα $\vec{c}$ είναι κάθετο και στα δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

$$u(a_3) = u(a_5) \times u(a_1) = \frac{-x\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + x^2}} \tag{27}$$

$$u(a_4) = u(a_6) \times u(a_2) = \frac{y\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{1 + y^2}} \tag{28}$$

Επιπλέον, έχουμε ότι το $u(a_0)$ είναι κάθετο στα $u(a_1)$ και $u(a_2)$, επομένως:

$$u(a_0) = \frac{u(a_1) \times u(a_2)}{|u(a_1) \times u(a_2)|} = \frac{-xy\mathbf{i} + x\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1 + x^2 + x^2y^2}} \tag{29}$$

Και ομοίως το $u(a_7)$ είναι κάθετο στα $u(a_3)$ και $u(a_4)$:

$$u(a_7) = \frac{u(a_4) \times u(a_3)}{|u(a_4) \times u(a_3)|} = \frac{-\mathbf{i} - y\mathbf{j} - xy\mathbf{k}}{\sqrt{1 + y^2 + x^2y^2}} \tag{30}$$

Να υπενθυμίσουμε εδώ ότι το εσωτερικό γινόμενο [5] δύο μοναδιαίων διανυσμάτων ισούται ακριβώς με το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας και ισχύει:

$$u(a_0) \cdot u(a_7) = cos\phi = \frac{xy}{\sqrt{(1 + x^2 + x^2y^2)(1 + y^2 + x^2y^2)}} \tag{31}$$

Επομένως από την (24)

$$sin\theta = \frac{xy}{\sqrt{(1 + x^2 + x^2y^2)(1 + y^2 + x^2y^2)}} \tag{32}$$

Η παραπάνω ποσότητα επιτυγχάνει την μέγιστη τιμή της όταν $x = y = \pm 1$ και ισούται με $max = 1/3$. Άρα το γράφημα (6) είναι υλοποιήσιμο εάν

$$0 \leqslant \theta \leqslant arcsin(1/3) \Rightarrow 0 \leqslant sin\theta \leqslant 1/3 \tag{33}$$

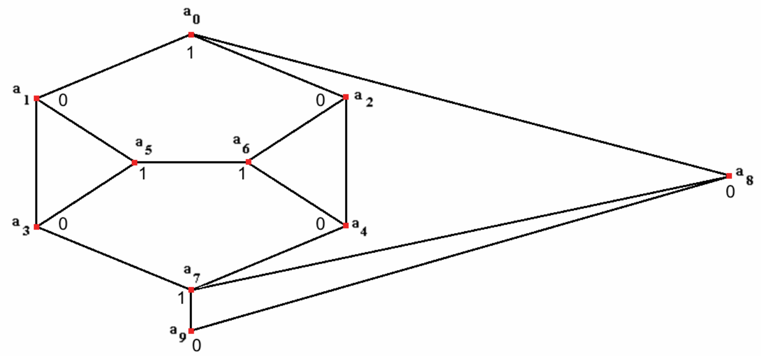
[5] Έστω δύο διανύσματα, το $\vec{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ και το $\vec{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Ως εσωτερικό γινόμενο αυτών των δύο διανυσμάτων ορίζεται το: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Μπορεί να γραφεί και ως: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta$, όπου $\theta$ είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του λήματος.

□

**Λήμμα 3** *Στις κορυφές $a_0$ και $a_9$ του γραφήματος (6) θα αποδίδεται πάντα είτε και στις δύο η τιμή 0 είτε και στις δύο η τιμή 1.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι στο γράφημα (6) αποδίδουμε στις κορυφές $a_0$ και $a_9$ διαφορετικές τιμές. Επιλέγουμε την τιμή 1 για το $a_0$ και το 0 για το $a_9$. Σύμφωνα με την βασική ιδιότητα θα αποδώσουμε τιμές και στις υπόλοιπες κορυφές με τον τρόπο που βλέπουμε στο σχήμα (7).



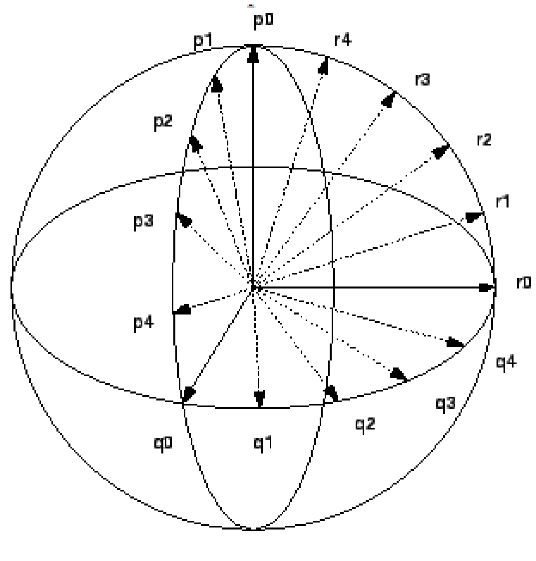

Σχήμα 7: KS γράφημα 10 σημείων με τιμές

Η ανάθεση αυτή παρατηρούμε πως καταλήγει σε άτοπο, καθώς στα $a_5$ και $a_6$, τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους, έχει αποδοθεί και στις δύο κορυφές η τιμή 1, κάτι το οποίο απαγορεύεται από τη βασική ιδιότητα. Επομένως, δύο σημεία τα οποία είναι πιο κοντά από $arcsin(1/3)$ δεν μπορούν να έχουν διαφορετικές τιμές και δύο σημεία με διαφορετικές τιμές δεν μπορούν να είναι πιο κοντά από $arcsin(1/3)$.

□

Θα ολοκληρώσουμε με την απόδειξη του τεχνικού θεωρήματος, υλοποιώντας το ζητούμενο σύνολο των 117 σημείων πάνω στην μοναδιαία σφαίρα.

*Απόδειξη τεχνικού θεωρήματος.* Επιλέγουμε ένα σύστημα τριών σημείων $p_0, q_0, r_0$, πάνω στην μοναδιαία σφαίρα. Σε κάθε ένα από τα 3 ελάσσοντα τεταρτοκύκλια επί της σφαίρας που ορίζουν ανά δύο τα σημεία $p_0, q_0, r_0$, επιλέγουμε επιπλέον 4 ισοκατανεμημένα σημεία. Συγκεκριμένα στο τόξο $(p_0, q_0)$ διαλέγουμε τα σημεία $p_i$ για $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, στο τόξο $(q_0, r_0)$ διαλέγουμε τα σημεία $q_i$ για $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ και τέλος στο τόξο $(r_0, p_0)$ διαλέγουμε τα σημεία $r_i$ για $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ (βλέπε Σχ (8)).

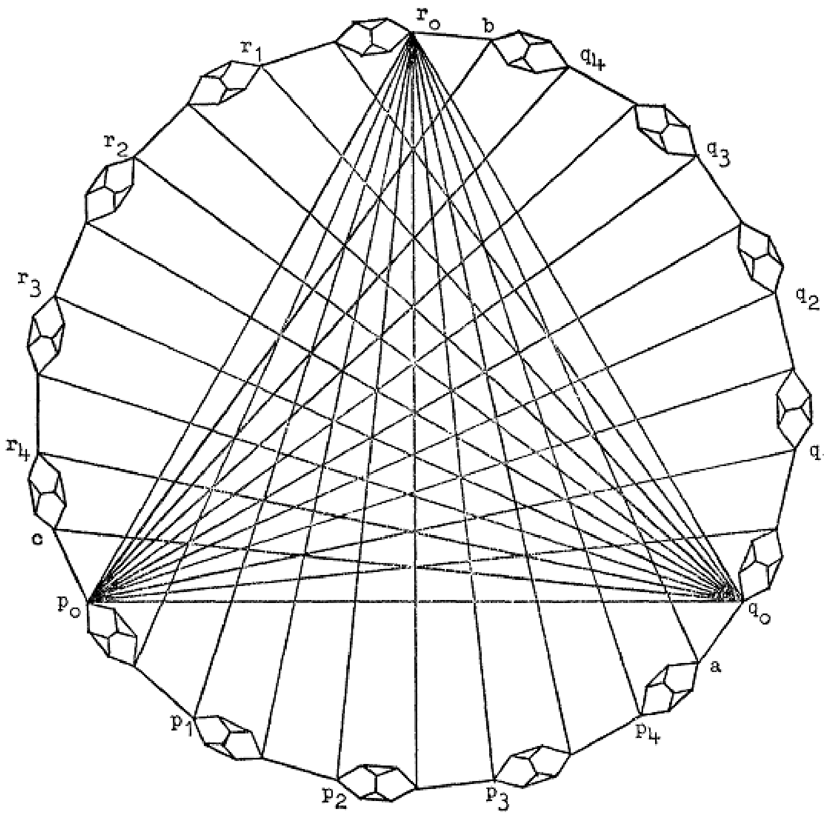



Σχήμα 8: Όλες οι κορυφές $a_0$ τοποθετημένες πάνω στη μοναδιαία σφαίρα.

Ο τρόπος επιλογής των 15 σημείων $p_i, q_i, r_i$, για $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, είναι τέτοιος ώστε κάθε δύο «γειτονικά» σημεία της σφαίρας να σχηματίζουν επίκεντρη γωνία $\theta = \pi/10$. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε 15 αντίγραφα του γραφήματος (6), έτσι ώστε σε κάθε αντίγραφο η κορυφή $a_9$ και η κορυφή $a_0$ του να ταυτίζονται με δύο τέτοια γειτονικά σημεία από τα $p_i, q_i, r_i$, για

$i \in \{0,1,2,3,4\}$. Η κατασκευή των αντιγράφων αυτών είναι εφικτή σύμφωνα με το Λήμμα 3 καθώς η γωνία ανάμεσα στα $a_0$ και $a_9$ είναι $\theta = \pi/10 \leqslant sin^{-1}(1/3)$.

Εάν από τα 15 αντίγραφα του (6) που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του (9) αφαιρέσουμε εκείνες τις κορυφές που ταυτίζονται μεταξύ τους θα καταλήξουμε στο ζητούμενο σύνολο των 117 κορυφών.




Σχήμα 9: KS γράφημα 117 σημείων

Ωστόσο, αν και το γράφημα αυτό είναι υλοποιήσιμο, δεν μπορούν να αποδοθούν τιμές στις κορυφές του σύμφωνα με την βασική ιδιότητα. Γνωρίζουμε ότι ένα αντίγραφο του (6), κατασκευασμένο έτσι ώστε η επίκεντρη γωνία μεταξύ των $a_0$ και $a_9$ να είναι $\theta = \pi/10$ απαιτεί οι κορυφές $a_0$ και $a_9$ να έχουν την ίδια τιμή. Επιπλέον, εφόσον το $a_9$ του ενός αντίγραφου ταυτίζεται με την κορυφή $a_0$ του επόμενου αντιγράφου πρέπει και το $a_9$ να έχει την ίδια τιμή με το $a_0$ του πρώτου αντιγράφου. Σκεπτόμενοι με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως όλες οι εμφανίσεις του $a_0$ πρέπει να έχουν την ίδια τιμή.

Το άτοπο προκύπτει άμεσα διότι γνωρίζουμε πως τα σημεία $p_0, q_0, r_0$ ταυτίζονται με τις κορυφές $a_0$, οπότε πρέπει να αποδοθεί σε όλα είτε η τιμή 0, είτε η τιμή 1. Αυτό όμως δεν είναι εφικτό διότι ακριβώς ένα από αυτά θα πρέπει να λαμβάνει την τιμή 0.

□

Στην αρχική απόδειξη του θεωρήματος από τους Kochen και Specker [15], που είδαμε αναλυτικά, έχουμε ένα γράφημα κατασκευασμένο στον τρισδιάστατο χώρο το οποίο αποτελείται από 117 κορυφές. Στην πορεία υπήρξαν αποδείξεις του θεωρήματος σε μεγαλύτερες διαστάσεις, αλλά με μικρότερο πλήθος κορυφών.

Η απόδειξη του Kernaghan το 1994 μας έδωσε ένα γράφημα 20 κορυφών στον τετραδιάστατο χώρο [13], ενώ ο Cabello το 1996 απέδειξε το θεώρημα πάλι στον τετραδιάστατο χώρο, με μόλις 18 κορυφές [8]. Οι αποδείξεις αυτές δημιουργούν αντιφάσεις στις τέσσερις διαστάσεις. Ωστόσο, τα αποτελέσματα αυτά είναι πιο αδύναμα σε σχέση με το αρχικό, διότι κάθε αντίφαση σε τρεις διαστάσεις είναι επίσης μια αντίφασή σε ανώτερες διαστάσεις, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει.

# Αναφορές


[1] Κ. Ε. Βαγιονάκης, *Εισαγωγή στην Κβαντική Μηχανική*, Εκδόσεις Παν. Ιωαννίων 2002.

[2] Χρ. Γ. Γεωργαλάς, *Εισαγωγή στην Κβαντομηχανική*, Εκδόσεις Παν. Πατρών 1977.

[3] Κ.Ι. Δημητρακόπουλος, *Σημειώσεις Μαθήματος Λογικής*, Εκδόσεις Παν. Αθηνών 1999.

[4] Θ. Μήτσης, *Σημειώσεις Γενικής Τοπολογίας*, Εκδόσεις Παν. Κρήτης 2009.

[5] Κ. Σκανδάλης, *Σημειώσεις του Μαθήματος Λογικής Μ205*, Εκδόσεις Παν. Κρήτης 2006.

[6] Στ. Τραχανάς, *Κβαντομηχανική Ι, ΙΙ ΙΙΙ*, Εκδόσεις Παν. Κρήτης 2009.

[7] Σ.Νεγρεπόντης - Θ.Ζαχαριάδης - Ν. Καλαμίδας - Β.Φαρμάκης, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Εκδόσεις Συμμετρία, 1997.

[8] A. Cabello, J. M. Estebaranz, and G. García Alcaine, *Bell-Kochen-Specker theorem: A proof with 18 vectors*

[9] H.B.Enderton , *Μια Μαθηματική Εισαγωγή στην Λογική*, Μετάφραση: Ιωάννης Παπαδόγγονας, Εκδόσεις Παν. Κρήτης, 2014.

[10] I. M. Bochenski, *A History of Formal Logic*, University of Notre Dame Press, 1961.

[11] J.Gribbin, *In search of Schrodinger's cat: Quantum physics and reality cover*, Bantam Books, 1984.

[12] J.S.Bell, *On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics*, Reviews of Modern Physics, 1966.

[13] M.Kernaghan, *Bell-Kochen-Specker Theorem for 20 Vectors*, Journal of Physics, 1994.

[14] Nefeli Vidali, A topological proof of the compactness theorem and the soundness and completeness theorem, 2017 [Εργασία στα πλαίσια του μεταπτυχιακού μαθήματος της Λογικής με καθηγητή τον κ.Κυρούση]

[15] S.Kochen and E.P.Specker , *The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics*, Journal of Mathematics and Mechanics, 17, 59-87, 1967.

[16] T. Hey and P. Walters , *The New Quantum Universe*, Cambridge University Press, 2003.

[17] Yu.I.Manin, *A Course in Mathematical Logic*, Springer, 1977.

[18] Stanford Encyclopedia of Philosophy , *The Kochen-Specker Theorem*, Stanford, 2000. https://plato.stanford.edu/entries/kochen-specker/
https://plato.stanford.edu/entries/kochen-specker/