Πανεπιστήμιο Κρήτης

# Η ατομική δομή του $H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ και ο δυισμός ανάμεσα στους $H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ και $\mathcal{BMO}\left(\mathbb{R}^d\right)$

*Εκπόνηση:*
Γιώργος Ψαρομήλιγκος

*Επιβλέπων:*
Μιχάλης Παπαδημητράκης

19 Οκτωβρίου 2015
Μεταπτυχιακή εργασία στα πλαίσια του προγράμματος "Μαθηματικά και εφαρμογές τους"

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

**Περιεχόμενα**

# Η ατομική δομή του $H^1(\mathbb{R}^d)$ και ο δυϊκός του χώρος $\mathcal{BMO}(\mathbb{R}^d)$

Η παρακάτω εργασία ορίζει τους χώρους $H^1(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{BMO}(\mathbb{R}^d)$ και αποδεικνύει οτι ο δυϊκός χώρος του πρώτου χώρου είναι ισόμορφος με τον δεύτερο. Η πρώτη απόδειξη αυτού του αποτελέσματος, δόθηκε απο τους **Charles Fefferman** και **Elias M. Stein** το 1972.

Στον δρόμο προς την απόδειξη, θα ορίσουμε στο **Κεφάλαιο 1** μερικές μεγιστικές συναρτήσεις οι οποίες θα έχουν μεγάλη σημασία για όλη την εργασία. Στο **Κεφάλαιο 2**, θα αποδείξουμε κάποια αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν απο τους ορισμούς αυτών των μεγιστικών συναρτήσεων.

Στη συνέχεια, στο **Κεφάλαιο 3** θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε δύο πολύ γνωστά θεωρήματα, την Διάσπαση κατα Whitney καθώς και μια Γενίκευση της Διάσπασης κατα Calderón-Zygmund. Στο **Κεφάλαιο 4**, θα μπούμε στο κυρίως θέμα. Θα οριστεί ο χώρος $H^1_{at}(\mathbb{R}^d)$ και θα αποδειχθεί οτι αυτός είναι ισόμορφος με τον χώρο $H^1(\mathbb{R}^d)$. Με αυτό το αποτέλεσμα, στο **Κεφάλαιο 5** αφού ορίσουμε τον χώρο $\mathcal{BMO}(\mathbb{R}^d)$ θα διατυπώσουμε μια απλή απόδειξη του εξής:

$$\left(H^1(\mathbb{R}^d)\right)^* \cong \mathcal{BMO}(\mathbb{R}^d)$$

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

**Ορισμοί 1.1.** Θα εργαστούμε στον πραγματικό χώρο διάστασης $d$, απο δώ και στο εξής $\mathbb{R}^d$. Ορίζουμε ώς μπάλα με κέντρο $x$ και ακτίνα $r$ την $B(x,r) \subseteq \mathbb{R}^d$. Επίσης, θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο ορισμό: για $x \in \mathbb{R}^d$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}, \quad \partial_x^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_d}}{\partial x_d^{\beta_d}}, \quad |\alpha| = a_1 + ... + \alpha_d, \quad \alpha \leq \beta \iff \alpha_i \leq \beta_i \ \ \forall\, i \in \{1, ..., d\}$$

Θα συμβολίζουμε με $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ τον χώρο του Schwartz. Αυτός περιλαμβάνει όλες τις συναρτήσεις $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ για τις οποίες ισχύει: $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|^2)^{\frac{k}{2}} \, |\partial^\alpha \phi(x)| < +\infty$ για όλα τα $k \in \mathbb{N}_0$, $\alpha = (\alpha_1, ...\alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$. Παρακάτω $\phi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Ορίζουμε τις εξής νόρμες του $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ : $p_k(\phi) = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^d, |a| \leq k} (1 + |x|^2)^{\frac{k}{2}} \, |\partial^\alpha \phi(x)|$ για $k \in \mathbb{N}_0$. Απο αυτές, επάγεται η ακόλουθη μετρική:

$$d(\phi, \psi) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \, \frac{p_k(\phi - \psi)}{1 + p_k(\phi - \psi)}$$

Εφοδιασμένος με αυτή την μετρική, ο $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ είναι μετρικός χώρος.

Συμβολίζουμε με $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ τον χώρο όλων των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών στον $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Τα στοιχεία αυτού του συνόλου τα λέμε ***ελεγχόμενες κατανομές*** ή απλά ***κατανομές***.
Έστω $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ και $\Phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Η συνάρτηση $\tau_x \Phi(y) := \Phi(y - x)$ ανήκει στον $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ ώς συνάρτηση του $y$.
Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ ορίζεται η συνάρτηση $f * \Phi(x)$ με πεδίο τιμών το $\mathbb{C}$ και τύπο:

$$f * \Phi(x) := f(\tau_x \widetilde{\Phi})$$

όπου $\widetilde{\Phi}(y) = \Phi(-y)$.

Η παραπάνω "συνέλιξη", ορίζεται και ώς κατανομή. Θα συμβολίζουμε την κατανομή με $f * \Phi$ και θα δίνεται απο τον τύπο:

$$f * \Phi(\psi) := f(\psi * \widetilde{\Phi})$$

όπου $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.
Τώρα, προχωράμε στον ορισμό μιας μεγιστικής συνάρτησης η οποία θα παίξει πολυ σημαντικό ρόλο. Έστω $\Phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ με $\int \Phi(x) \mathrm{d}x \neq 0$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση $M_\Phi f(x)$ με τύπο:

$$M_\Phi f(x) := \sup_{t > 0} |f * \Phi_t(x)|$$

όπου $\Phi_t(x) = \frac{1}{t^d} \Phi(\frac{x}{t})$.

Τώρα, θα χρειαστεί να ορίσουμε μια μεγιστική συνάρτηση που δέν εξαρτάται απο την $\Phi$. Έστω $\mathcal{F}$ μια πεπερασμένη συλλογη απο ημινόρμες $||\cdot||_{\alpha_i,\beta_i}$ τις οποίες ορίζουμε ως εξής:

$$||\phi||_{\alpha_i,\beta_i} := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|x^{\alpha_i}\,\partial^{\beta_i}\phi(x)\right|$$

Τότε ορίζω την συνάρτηση $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x)$ ώς :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x) := \sup_{\Psi\in\mathcal{S}_{\mathcal{F}}} M_{\Psi}f(x)$$

όπου $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ είναι το σύνολο:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \{\Phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \text{ όπου } ||\Phi||_{\alpha_i,\beta_i} \leq 1 \text{ για κάθε } i\in I \ \text{ με } I\subseteq\mathbb{N} \ \text{ πεπερασμένο}\}$$

# Κεφάλαιο 2

## Μεγιστικές συναρτήσεις και εφαρμογές τους

Προχωράμε σε κάποιους επιπλέον ορίσμους μεγιστικών συναρτήσεων, που θα μας χρειαστούν.

### Ορισμοί 2.1.

$$M_{\Phi}^{*}f(x) := \sup_{\substack{|x-y|<t \\ t>0}} |f * \Phi_t(y)| = \sup_{\substack{|y|<t \\ t>0}} |f * \Phi_t(x-y)| \quad \text{και}$$

$$M_{\Phi,d}f(x) := \sup_{y\in\mathbb{R}^d,\ t>0} |f * \Phi_t(x-y)| \Big(1 + \tfrac{|y|}{t}\Big)^{-(d+1)}$$

Για τυχάιο $t > 0$ προκύπτει: $|f * \Phi_t(x)| = |f * \Phi_t(x-0)| \leq \sup\limits_{|y|<t} |f * \Phi_t(x-y)|$

Οπότε έχουμε οτι:

$$M_{\Phi}f(x) \leq M_{\Phi}^{*}f(x) \quad (1)$$

Επίσης για $|y| < t$ έχουμε ότι:

$|f * \Phi_t(x-y)| \leq 2^{d+1} |f * \Phi_t(x-y)| \Big(1 + \tfrac{|y|}{t}\Big)^{-(d+1)}$ και άρα:

$$M_{\Phi}^{*}f(x) \leq 2^{d+1} M_{\Phi,d}f(x) \quad (2)$$

απο τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε οτι

$$M_{\Phi}f(x) \leq M_{\Phi}^{*}f(x) \leq 2^{d+1} M_{\Phi,d}f(x).$$

Προχωράμε στην διατύπωση του πρώτου Θεωρήματος που θα χρειαστούμε.

***Θεώρημα* 2.1.** *Για $\Phi$ όπως παραπάνω, υπάρχει μια συλλογή $\mathcal{F}$ απο ημινόρμες τετοια ώστε:*

$$M_{\Phi}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{F}}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$$

*και υπάρχουν σταθερές $c_{\Phi},\ c_{d,\Phi}$ τέτοιες ώστε:*

$$\big|\big|M_{\Phi}f\big|\big|_1 \leq c_{\Phi}\ \big|\big|\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f\big|\big|_1 \leq c_{d,\Phi}\ \big|\big|M_{\Phi}f\big|\big|_1$$

Πριν την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1, θα αποδείξουμε κάποια Λήμματα και πορίσματα αυτών :

***Λήμμα* 2.1.** *Έχουμε ότι:*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{\substack{|y|<at \\ t>0}} |f * \Phi_t(x-y)|\, \mathrm{d}x \ \leq\ c_d\,(1+a)^d \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{\substack{|y|<t \\ t>0}} |f * \Phi_t(x-y)|\, \mathrm{d}x$$

*για $a > 0$.*

*Απόδειξη.* Πρώτα θα αποδείξουμε ότι

$$\left|\left\{x : \sup_{\substack{|x-y|<at \\ t>0}} |f * \Phi_t(y)| > \beta\right\}\right| \ \leq\ c_d\,(1+a)^d \left|\left\{x : \sup_{\substack{|x-y|<t \\ t>0}} |f * \Phi_t(y)| > \beta\right\}\right| \quad (*)$$

για $a > 0$. (Αρκεί να το αποδείξουμε για $a > 1$ αφού για $a \leq 1$ είναι προφανές.)

Ορίζουμε:

$$\mathcal{O} := \left\{x : \sup_{\substack{|x-y|<t \\ t>0}} |f * \Phi_t(y)| > \beta\right\} \ \text{ και } \ \mathcal{C} := \left\{x : \sup_{\substack{|x-y|<at \\ t>0}} |f * \Phi_t(y)| > \beta\right\}$$

Ορίζω $\mathcal{A} := \mathcal{O}^c$.

Για $0 < \gamma < 1$ ορίζω $\mathcal{A}^* = \left\{x : \dfrac{|\mathcal{A} \cap B|}{|B|} \geq \gamma \text{ για κάθε } B \text{ όπου } B = B(x,r)\right\}$

Τότε το $\mathcal{A}^*$ ονομάζεται σύνολο των σημείων $x \in \mathbb{R}^d$ που έχουν καθολική γ-πυκνότητα ώς προς το $\mathcal{A}$.
Επίσης ορίζω $\mathcal{O}^* = \big(\mathcal{A}^*\big)^c$.
Έστω τώρα $x \in \mathcal{C}$. Τότε υπάρχει $\bar{x}$ και $t > 0$ με $|f * \Phi_t(\bar{x})| > \beta$ και $|x - \bar{x}| < at$.
Άρα, $B(\bar{x}, t) \subset \mathcal{O}$ αφού: αν $z \in \mathbb{R}^d$ με $|z - \bar{x}| < t$ τότε $\beta < |f * \Phi_t(\bar{x})| \leq \sup\limits_{|z-y|<t} |f * \Phi_t(y)|$.
Οπότε $z \in \mathcal{O}$ (1)
Εύκολα προκύπτει ότι $B(\bar{x}, t) \subset B$ όπου $B = B\big(x, (1+a)t\big)$ (2)
Από (1) και (2) παίρνουμε οτι $B(\bar{x}, t) \subset \mathcal{O} \cap B$ και άρα:

$$\big|\mathcal{O} \cap B\big| \geq \big|B(\bar{x}, t)\big| = t^d \big|B(0,1)\big| \quad (3)$$

Επίσης $\big|B\big| = (1+a)^d t^d \big|B(0,1)\big|$ (4)

Οπότε απο τις σχέσεις (3) και (4) παίρνουμε ότι $\dfrac{\big|\mathcal{O} \cap B\big|}{|B|} \geq \dfrac{1}{(1+a)^d}$ (5)

Συνεπώς, λόγω της (5) και αφού το σύνολο $\mathcal{A}$ είναι το συμπλήρωμα του $\mathcal{O}$ έχουμε ότι:

$$\frac{|\mathcal{A} \cap B|}{|B|} \leq 1 - \frac{1}{(1+a)^d}$$

Άρα για κάθε $\gamma$ με $\gamma > 1 - \dfrac{1}{(1+a)^d}$ έχουμε οτι $x \notin \mathcal{A}^*$ .

Δηλαδή $\mathcal{C} \subseteq \big(\mathcal{A}^*\big)^c = \mathcal{O}^*$ (6)

Έστω τώρα $x \in \mathbb{R}^d$ με $\dfrac{\big|\mathcal{A} \cap B\big|}{\big|B\big|} < \gamma$ για κάποια $B$ όπου $B = B(x,r)$ . Τότε αυτό είναι ισοδύναμο με:

$$\frac{\big|\mathcal{O} \cap B\big|}{\big|B\big|} > 1 - \gamma \quad \text{για κάποια } B(x,r)$$

Δηλαδή $\mathcal{O}^* = \left\{x : \dfrac{\big|\mathcal{O} \cap B\big|}{\big|B\big|} > 1 - \gamma \text{ για κάποια } B \text{ όπου } B = B(x,r)\right\}$ (7)

Άν τώρα θυμηθούμε τον ορισμό του μεγιστικού τελεστή των Hardy-Littlewood:

$$\mathcal{M}(f)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{B(x,r)} \int\limits_{B(x,r)} |f(x)| \,\mathrm{d}x$$

όπου $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$,

έχουμε οτι

$$\mathcal{M}(\mathcal{X}_O)(x) = \sup_{r>0} \frac{\left|\mathcal{O} \cap B(x,r)\right|}{\left|B(x,r)\right|}$$

Τότε βλέπουμε οτι απο την (7) και λόγω των παραπάνω έχουμε:

$$\mathcal{O}^* \;=\; \left\{x : \mathcal{M}(\mathcal{X}_O)(x) > 1-\gamma\right\} \quad (8)$$

Γνωρίζουμε οτι ο παραπάνω μεγιστικός τελεστής είναι *ασθενώς*-(1,1), δηλαδή:

$$\left|\left\{x : \mathcal{M}(f)(x) > \lambda\right\}\right| \leq \frac{c_d}{\lambda}\left|\left|f\right|\right|_1 \quad (9)$$

Οπότε απο τις (8) και (9), για $\lambda = 1-\gamma,\;\; f(x) = \mathcal{X}_O(x)$ έχουμε ότι:

$$\left|\mathcal{O}^*\right| \leq \frac{c_d}{1-\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathcal{X}_O(x) \,\mathrm{d}x = \frac{c_d}{1-\gamma}\left|\mathcal{O}\right| \quad (10)$$

Απο τις (6) και (10) και επειδή $\mathcal{O} = \mathcal{A}^c$ τότε:

$$\left|\mathcal{C}\right| \leq \frac{c_d}{1-\gamma}\left|\mathcal{A}^c\right| \quad (11)$$

Τώρα η (11) ισχύει για κάθε $\gamma$ με $\gamma > 1 - \dfrac{1}{(1+a)^d}$ άρα παίρνοντας όριο $\gamma \to 1 - \dfrac{1}{(1+a)^d}$ απο τα δεξιά, έχουμε την $(*)$.

Απο την Θεωρία μέτρου, έχουμε ότι:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left|g(x)\right| \,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{+\infty} \left|\left\{x : |g(x)| > \beta\right\}\right| \,\mathrm{d}\beta \quad (12)$$

Τέλος, ολοκληρώνοντας ώς προς $\beta$ την $(*)$ και λόγω της (12) έχουμε την απόδειξη του Λήμματος. □

***Πόρισμα* 2.1.** *Άν $M_\Phi^* f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ τότε $M_{\Phi,d} f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ και επιπλέον:*

$$\left|\left|M_{\Phi,d} f\right|\right|_1 \leq 4^{d+1}\, c_d \,\left|\left|M_\Phi^* f\right|\right|_1$$

*όπου η σταθερά $c_d$ εξαρτάται μόνο απο την διάσταση $d$.*

*Απόδειξη.* Για $y \in \mathbb{R}^d$ και $t > 0$ έχουμε:

$$\left|f*\Phi_t(x-y)\right|\Big(1+\tfrac{|y|}{t}\Big)^{-(d+1)} \;\le\; \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{(1-k)(d+1)} \sup_{\substack{|y|<2^k t\\ t>0}} \left|f*\Phi_t(x-y)\right| \;\;(*)$$

Γιατί, αν $|y|<t$ ο όρος $k=0$ του δεξιού μέλους της ανισότητας είναι μεγαλύτερος απο το αριστερό μέλος.

Τώρα αν $2^{k-1}t<|y|\le 2^k t$ για τυχαίο $k>0$ βλέπουμε ότι $\left(1+\dfrac{|y|}{t}\right)^{-(d+1)} \;\le\; 2^{(1-k)(d+1)}$ (1)

Επίσης $\left|f*\Phi_t(x-y)\right| \;\le\; \sup\limits_{\substack{|y|<2^k t\\ t>0}} \left|f*\Phi_t(x-y)\right|$ (2)

Απο (1) και (2) αποδείξαμε την $(*)$. Τώρα, ολοκληρώνουμε την $(*)$ κατά μέλη αφού πάρουμε supremum ώς προς $y$ και $t>0$ στο αριστερό μέλος:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^d\\ t>0}} \left|f*\Phi_t(x-y)\right|\Big(1+\tfrac{|y|}{t}\Big)^{-(d+1)}\,\mathrm{d}x \;\le\; \int\limits_{\mathbb{R}^d}\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{(1-k)(d+1)} \sup_{\substack{|y|<2^k t\\ t>0}} \left|f*\Phi_t(x-y)\right|\mathrm{d}x \quad (3)$$

Απο το **Λήμμα 2.1** είδαμε οτι $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup\limits_{\substack{|y|<2^k t\\ t>0}} \left|f*\Phi_t(x-y)\right|\mathrm{d}x \;\le\; c_d\,(1+2^k)^d \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup\limits_{\substack{|y|<t\\ t>0}} \left|f*\Phi_t(x-y)\right|\mathrm{d}x$

και αφου $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup\limits_{\substack{|y|<t\\ t>0}} \left|f*\Phi_t(x-y)\right|\mathrm{d}x = \left|\left|M_\Phi^* f\right|\right|_1 < +\infty$ απο την (3) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\left|\left|M_{\Phi,d}\, f\right|\right|_1 \le\; c_d \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{(1-k)(d+1)}(1+2^k)^d \left|\left|M_\Phi^* f\right|\right|_1 \\
&\le c_d \left|\left|M_\Phi^* f\right|\right|_1 \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{(1-k)(d+1)} 2^{(k+1)d} \\
&\le 2^{2d+1} c_d \left|\left|M_\Phi^* f\right|\right|_1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \\
&\le 4^{d+1} c_d \left|\left|M_\Phi^* f\right|\right|_1
\end{aligned}$$

□

***Λήμμα* 2.2.** *Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d$ και σταθεροποιημένο $M\ge 0$ . Τότε ορίζουμε την πεπερασμένη συλλογή $\mathcal{F}$ απο ημινόρμες $||\cdot||_{\alpha_i,\beta_i}$ με την ιδιότητα $|\alpha_i|\le|\alpha|+d+1$ και $|\beta_i|\le|\beta|+[M]+d+1$.*
*Για την σταθεροποιημένη $\Phi$ και τυχαία $\Psi\in\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ υπάρχει ακολουθία $\eta_k\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ τέτοια ώστε:*

$$\Psi(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\eta_k*\Phi_{2^{-k}}(x)$$

*Επιπλέον, υπάρχει $A>0$ με*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|x^a\,\partial^\beta\eta_k(x)\right|\le\frac{A}{2^{k\,M}}$$

*όπου το $A$ εξαρτάται απο τους πολυδείκτες $\alpha,\beta$, απο τις σταθερές $d,M$ καθώς και την $\Phi$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\chi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ με $\chi \equiv 1$ στην $B(0,1)$ και $\chi \equiv 0$ στο $B(0,2)^c$. Τότε, $\chi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ και επειδή ο μετασχηματισμός Fourier είναι ισομορφικός απο τον $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ επι του $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ υπάρχει $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ με $\widehat{\phi} = \chi$.

Έχουμε απο τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier ότι

$$\lim_{k\to+\infty} \widehat{\phi}\Big(\frac{\xi}{2^k}\Big) = \widehat{\phi}(0) = 1 \ \ (1)$$

Ορίζουμε τώρα $\widehat{\psi}_0$ και $\widehat{\psi}_k$ για $k \geq 1$ στον $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ έτσι ώστε $\widehat{\psi}_0(\xi) = \widehat{\phi}(\xi), \ \ \widehat{\psi}_k(\xi) = \widehat{\phi}\Big(\frac{\xi}{2^k}\Big) - \widehat{\phi}\Big(\frac{\xi}{2^{k-1}}\Big)$ για κάθε $k \geq 1$ και κάθε $\xi$.

Παρατηρούμε οτι αν $|\xi| < 2^{k-1}$ ή $|\xi| > 2^{k+1}$ έχουμε οτι $\widehat{\psi}_k(\xi) = 0$.

Άρα $supp\ \widehat{\psi}_0(\xi) \subseteq B(0,2)$ ενώ $supp\ \widehat{\psi}_k(\xi) \subseteq \{\xi : 2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}\}$ για $k \geq 1$ (2)

Επίσης εύκολα προκύπτει απο τον ορισμό των $\widehat{\psi}_k$ ότι:

$$\left|\partial^{\beta}\widehat{\psi}_k(\xi)\right| \ \leq \ \frac{c_\beta}{2^{k|\beta|}} \ \ (3)$$

όπου $c_\beta$ εξαρτάται μονό απο τον πολυδείκτη $\beta$.

Τώρα, βλέπουμε οτι: $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \widehat{\psi}_k(\xi) = \widehat{\phi}\Big(\frac{\xi}{2^N}\Big) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$ λόγω της (1) και άρα:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \widehat{\psi}_k(\xi) = 1 \ \ (4)$$

Οπότε μπορούμε λόγω της (4) να γράψουμε:

$$\widehat{\Psi}(\xi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \widehat{\psi}_k(\xi) \cdot \widehat{\Psi}(\xi).$$

Μπορούμε να έχουμε $\widehat{\Phi}(0) = 1$ δεδομένου οτι $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x)\mathrm{d}x = 1$. Για να το πετύχουμε αυτό, αρκεί να πάρουμε μια νέα $\Phi$ (την $\Phi$ πολλαπλασιασμένη με κατάλληλη σταθερα).Συνεπώς υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$|\xi| \ \leq \ \frac{1}{2^{k_0-1}} \ \Rightarrow \left|\widehat{\Phi}(\xi)\right| \ \geq \ \frac{1}{2} \ \ (5)$$

Αυτό μας οδηγεί στο να ορίσουμε τις συναρτήσεις $\widehat{\eta}_k$ ώς εξής:

$$\widehat{\eta}_k(\xi) = 0 \text{ για } k = 1,..,k_0 - 1 \text{ και}$$

$$\widehat{\eta}_k(\xi) = \frac{\widehat{\psi}_{k-k_0}(\xi)}{\widehat{\Phi}(2^{-k}\xi)} \cdot \widehat{\Psi}(\xi) \text{ για } k \ \geq \ k_0 \ \ (6)$$

Παρατηρούμε ότι $\widehat{\eta}_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ άρα και $\eta_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Οπότε, έχουμε τελικά απο την (4) και τον ορισμό των $\widehat{\eta}_k$ οτι:

$$\widehat{\Psi}(\xi) = \sum_{k=k_0}^{+\infty} \widehat{\eta}_k(\xi) \cdot \widehat{\Phi}(2^{-k}\xi) \ \ ,$$

απο το οποίο προκύπτει η αναπαράσταση της $\Psi$ στην εκφώνηση του θεωρήματος.

Τώρα, εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier για συναρτήσεις στον $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση :

$$\left|x^a\,\partial^\beta\eta_k(x)\right| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\widehat{x^a\,\partial^\beta\eta_k(x)}(\xi)\cdot e^{2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}\xi\right| = \frac{1}{(2\pi)^{|\alpha|}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\widehat{(-2\pi i x)^a\,\partial^\beta\eta_k(x)}(\xi)\cdot e^{2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}\xi\right| =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{|\alpha|}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\partial^a\left(\widehat{\partial^\beta\eta_k(x)}(\xi)\right)\cdot e^{2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}\xi\right| = \frac{1}{(2\pi)^{|\alpha|}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\partial^a\left[(2\pi i\xi)^\beta\,\widehat{\eta_k}(\xi)\right]\cdot e^{2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}\xi\right| \leq$$

$$\leq (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left|\partial^a\left(\xi^\beta\,\widehat{\eta_k}(\xi)\right)\right|\mathrm{d}\xi = (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|}\int\limits_{\{\xi:\,2^{k-k_0-1}\leq|\xi|\leq 2^{k-k_0+1}\}}\left|\partial^a\left(\xi^\beta\,\widehat{\eta_k}(\xi)\right)\right|\mathrm{d}\xi \quad (7)$$

Τώρα, απλοποιούμε τον τύπο των συναρτήσεων $\widehat{\eta}_k$ :

$$\widehat{\eta}_k(\xi) = g(2^{-k}\xi)\,\widehat{\Psi}(\xi)$$

όπου $g(\xi) := \dfrac{\widehat{\phi}\,(2^{k_0}\,\xi) - \widehat{\phi}\,(2^{k_0+1}\,\xi)}{\widehat{\Phi}(\xi)}$

Προχωράμε να εκτιμήσουμε την ποσότητα προς ολοκλήρωση στην σχέση (7):

$$\partial^a\left(\xi^\beta\,\widehat{\eta_k}(\xi)\right) = \sum_{\delta\leq\alpha,\,\beta} c_{\alpha,\delta}\left(\partial^\delta(\xi^\beta)\cdot\partial^{\alpha-\delta}\,\widehat{\eta}_k(\xi)\right)$$

Για να απλοποιήσουμε τις ποσότητες στην τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι $\partial^\delta(\xi^\beta) = c_{\delta,\beta}\,\xi^{\beta-\delta}$ και:

$$\partial^{\alpha-\delta}\,\widehat{\eta}_k(\xi) = \partial^{\alpha-\delta}\,g(2^{-k}\xi)\,\widehat{\Psi}(\xi) =$$

$$= \sum_{\varepsilon\leq\alpha-\delta} c_{\alpha,\delta,\varepsilon}\,\partial^\varepsilon\big(g(2^{-k}\xi)\big)\cdot\partial^{\alpha-\delta-\varepsilon}\,\widehat{\Psi}(\xi) =$$

$$= \sum_{\varepsilon\leq\alpha-\delta} c_{\alpha,\delta,\varepsilon}\cdot 2^{-k|\varepsilon|}\cdot\big(\partial^\varepsilon\,g\big)\big(2^{-k}\xi\big)\cdot\partial^{\alpha-\delta-\varepsilon}\,\widehat{\Psi}(\xi)$$

Χρησιμοποιοιώντας τα παραπάνω και το γεγονός ότι $\partial^\varepsilon\,g$ είναι φραγμένη απο σταθερά που εξαρτάται απο το $\varepsilon$ και την $\Phi$ έχουμε:

$$\left|\partial^a\left(\xi^\beta\,\widehat{\eta_k}(\xi)\right)\right| \leq \sum_{\delta\leq\alpha,\beta}\;\sum_{\varepsilon\leq\alpha-\delta} c_{\alpha,\beta,\delta,\varepsilon,\Phi}\left|\xi^{\beta-\delta}\cdot\partial^{\alpha-\delta-\varepsilon}\,\widehat{\Psi}(\xi)\right|$$

Άρα,

$$\int\limits_{\{\xi:\ 2^{k-k_0-1}\le|\xi|\le 2^{k-k_0+1}\}} \left|\partial^{a}\left(\xi^{\beta}\,\widehat{\eta_k}(\xi)\right)\right|\mathrm{d}\xi\ \le$$

$$\le\ \sum_{\delta\le\alpha,\,\beta}\ \sum_{\varepsilon\le\alpha-\delta} c_{\alpha,\beta,\delta,\varepsilon,\Phi} \int\limits_{\{\xi:\ 2^{k-k_0-1}\le|\xi|\le 2^{k-k_0+1}\}} \left|\xi^{\beta-\delta}\cdot\partial^{\alpha-\delta-\varepsilon}\,\widehat{\Psi}(\xi)\right|\mathrm{d}\xi\ \ (8)$$

Συνεχίζουμε για να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα στην σχέση (8):

$$\int\limits_{\{\xi:\ 2^{k-k_0-1}\le|\xi|\le 2^{k-k_0+1}\}} \left|\xi^{\beta-\delta}\cdot\partial^{\alpha-\delta-\varepsilon}\,\widehat{\Psi}(\xi)\right|\mathrm{d}\xi\le$$

$$\le \int\limits_{\{\xi:\ 2^{k-k_0-1}\le|\xi|\le 2^{k-k_0+1}\}} |\xi|^{|\beta-\delta|}\cdot\left|\partial^{\alpha-\delta-\varepsilon}\,\widehat{\Psi}(\xi)\right|\ \mathrm{d}\xi$$

Τώρα εισάγουμε έναν νέο πολυδείκτη $\gamma$ με την ιδιότητα $|\gamma|=[M]+1+d$. Οπότε, έχουμε:

$$\int\limits_{\{\xi:\ 2^{k-k_0-1}\le|\xi|\le 2^{k-k_0+1}\}} |\xi|^{|\beta-\delta|}\cdot\left|\partial^{\alpha-\delta-\varepsilon}\,\widehat{\Psi}(\xi)\right|\ \mathrm{d}\xi=$$

$$= \int\limits_{\{\xi:\ 2^{k-k_0-1}\le|\xi|\le 2^{k-k_0+1}\}} \frac{|\xi|^{|\beta-\delta|+|\gamma|}\cdot\left|\partial^{\alpha-\delta-\varepsilon}\,\widehat{\Psi}(\xi)\right|}{|\xi|^{\,|\gamma|}}\ \mathrm{d}\xi\ \ (9)$$

Θα εκτιμήσουμε την ποσότητα στον αριθμητή του κλάσματος της σχέσης (9):

$$|\xi|^{|\beta-\delta|+|\gamma|}\cdot\left|\partial^{\alpha-\delta-\varepsilon}\,\widehat{\Psi}(\xi)\right|\le\ \Big(\ |\xi_1|+..+|\xi_d|\ \Big)^{|\beta-\delta|+|\gamma|}\cdot\left|\partial^{\alpha-\delta-\varepsilon}\,\widehat{\Psi}(\xi)\right|\le$$

$$\le\ \sum_{|\zeta|\le|\beta-\delta|+|\gamma|} c_{\zeta,\beta,\gamma,\delta,d}\cdot|\xi^{\zeta}|\cdot\left|\partial^{\alpha-\delta-\varepsilon}\,\widehat{\Psi}(\xi)\right|\le \sum_{|\zeta|\le|\beta-\delta|+|\gamma|} c_{\zeta,\beta,\gamma,\delta,\alpha,\varepsilon,d}\cdot|\xi^{\zeta}|\cdot\left|\ \widehat{x^{\alpha-\delta-\varepsilon}\ \Psi(x)}\ (\xi)\right|\le$$

$$\le\ \sum_{|\zeta|\le|\beta-\delta|+|\gamma|} c^{'}_{\zeta,\beta,\gamma,\delta,\alpha,\varepsilon,d}\left|\ \ \widehat{\partial^{\zeta}\big[x^{\alpha-\delta-\varepsilon}\ \Psi(x)\big]}\ \ (\xi)\right|\ \ (10)$$

Προχωράμε τώρα στην εκτίμηση των προσθεταίων στην σχέση (10):

$$\left|\ \widehat{\partial^{\zeta}\big[x^{\alpha-\delta-\varepsilon}\ \Psi(x)\big]}\ (\xi)\right|\le\ \int\limits_{\mathbb{R}^d}\left|\partial^{\zeta}\big[x^{\alpha-\delta-\varepsilon}\ \Psi(x)\big]\ \right|\mathrm{d}x$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{R}^d}\Big|\sum_{\theta\le\zeta,\,\alpha-\delta-\varepsilon} c_{\zeta,\theta}\cdot x^{\alpha-\delta-\varepsilon-\theta}\cdot\partial^{\zeta-\theta}\,\Psi(x)\ \Big|\mathrm{d}x\le$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sum_{\theta \leq \zeta,\, \alpha-\delta-\varepsilon} c_{\zeta,\theta} \cdot \Big| x^{\alpha-\delta-\varepsilon-\theta} \cdot \partial^{\zeta-\theta}\, \Psi(x) \Big| \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1+|x|)^{d+1}} \sum_{\theta \leq \zeta,\, \alpha-\delta-\varepsilon} c_{\zeta,\theta} \cdot (1+|x|)^{d+1} \cdot \Big| x^{\alpha-\delta-\varepsilon-\theta} \cdot \partial^{\zeta-\theta}\, \Psi(x) \Big| \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \int\limits_{|x| \leq 1} \frac{1}{(1+|x|)^{d+1}} \sum_{\theta \leq \zeta,\, \alpha-\delta-\varepsilon} c_{\zeta,\theta,d} \cdot \Big| x^{\alpha-\delta-\varepsilon-\theta} \cdot \partial^{\zeta-\theta}\, \Psi(x) \Big| \mathrm{d}x \; +$$

$$+ \int\limits_{|x| > 1} \frac{1}{(1+|x|)^{d+1}} \sum_{\theta \leq \zeta,\, \alpha-\delta-\varepsilon} c_{\zeta,\theta,d} \cdot |x|^{d+1} \cdot \Big| x^{\alpha-\delta-\varepsilon-\theta} \cdot \partial^{\zeta-\theta}\, \Psi(x) \Big| \mathrm{d}x \quad (11)$$

Βλέπουμε ότι:

$$|x|^{d+1} \cdot \Big| x^{\alpha-\delta-\varepsilon-\theta} \cdot \partial^{\zeta-\theta}\, \Psi(x) \Big| \leq \sum_{|\lambda| \leq d+1} c_\lambda \cdot \big| x^{\lambda+\alpha-\delta-\varepsilon-\theta} \big| \cdot \big| \partial^{\zeta-\theta}\, \Psi(x) \big|$$

Τώρα, φτάνουμε στο εξής συμπέρασμα: Θεωρούμε την πεπερασμένη συλλογή $\mathcal{F}$ απο ημινόρμες $||\cdot||_{\alpha_i,\beta_i}$ όπου $\alpha_i$ όλοι οι πολυδείκτες με $|\alpha_i| \leq |\alpha| + d + 1$ και $\beta_i$ όλοι οι πολυδείκτες με $|\beta_i| \leq |\beta| + [M] + d + 1$. Για κάθε $\Psi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ βλέπουμε ότι:

$$\Big| x^{\alpha-\delta-\varepsilon-\theta} \cdot \partial^{\zeta-\theta}\, \Psi(x) \Big| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \Big| x^{\alpha-\delta-\varepsilon-\theta} \cdot \partial^{\zeta-\theta}\, \Psi(x) \Big| = \big|\big|\Psi\big|\big|_{\alpha-\delta-\varepsilon-\theta,\; \zeta-\theta} \leq 1$$

και

$$\big| x^{\lambda+\alpha-\delta-\varepsilon-\theta} \big| \cdot \big| \partial^{\zeta-\theta}\, \Psi(x) \big| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \Big| x^{\lambda+\alpha-\delta-\varepsilon-\theta} \cdot \partial^{\zeta-\theta}\, \Psi(x) \Big| = \big|\big|\Psi\big|\big|_{\lambda+\alpha-\delta-\varepsilon-\theta,\; \zeta-\theta} \leq 1$$

με την προυπόθεση οτι οι πολυδείκτες $\delta, \varepsilon, \zeta, \theta, \lambda$ ικανοποιούν τους περιορισμούς που έχουν προαναφερθεί.
Συνεπώς, τα δύο ολοκληρώματα στην σχέση (11) είναι πεπερασμένα και μικρότερα απο μια σταθερά $c$ η οποία εξαρτάται απο την διάσταση $d$ καθώς και τους πολυδείκτες $\alpha, \delta, \varepsilon, \zeta$.

Επομένως, λόγω αυτού του αποτελέσματος και της σχέσης (10) έχουμε ότι:

$$|\xi|^{|\beta-\delta|+|\gamma|} \cdot \Big| \partial^{\alpha-\delta-\varepsilon}\, \widehat{\Psi}(\xi) \Big| \leq c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,d}$$

Με την σειρά του, το τελευταίο αποτέλεσμα χρησιμεύει στην ακόλουθη εκτίμηση στην σχέση (9):

$$\int\limits_{\{\xi:\, 2^{k-k_0-1} \leq |\xi| \leq 2^{k-k_0+1}\}} \frac{|\xi|^{|\beta-\delta|+|\gamma|} \cdot \Big| \partial^{\alpha-\delta-\varepsilon}\, \widehat{\Psi}(\xi) \Big|}{|\xi|^{|\gamma|}} \, \mathrm{d}\xi \leq c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,d} \int\limits_{\{\xi:\, 2^{k-k_0-1} \leq |\xi| \leq 2^{k-k_0+1}\}} \frac{1}{|\xi|^{|\gamma|}} \, \mathrm{d}\xi \leq$$

$$\leq \ c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,d} \int\limits_{2^{k-k_0-1}}^{2^{k-k_0+1}} \frac{1}{r^{|\gamma|-d+1}} \,\mathrm{d}r = \frac{c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,d,M}}{2^{(k-k_0+1)(|\gamma|-d)}} \leq$$

$$\leq \ \frac{c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,d,M,k_0}}{2^{k\,M}}$$

όπου στην δεύτερη ανισότητα κάναμε αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες.
Επομένως, βάση των τελευταιών αποτελεσμάτων και της σχέσης (8) έχουμε:

$$\int\limits_{\{\xi:\ 2^{k-k_0-1}\leq|\xi|\leq 2^{k-k_0+1}\}} \left|\partial^a \left(\xi^\beta\, \widehat{\eta_k}(\xi)\right)\right| \mathrm{d}\xi \ \leq \frac{c_{\alpha,\beta,M,\Phi,d}}{2^{k\,M}}$$

Τέλος, απο την σχέση (7) έχουμε ότι:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|x^a\, \partial^\beta \eta_k(x)\right| \leq \frac{A}{2^{k\,M}}$$

όπου η σταθερά $A$ εξαρτάται απο την διάσταση $d$, το $M$ τους πολυδείκτες $\alpha, \beta$ καθώς και την $\Phi$.

□

***Πόρισμα* 2.2.** *Αν $M_\Phi^* f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ τότε υπάρχει συλλογή $\mathcal{F}$ απο ημινόρμες τέτοια ώστε:*

$$\left|\left|\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f\right|\right|_1 \leq c_{d,\Phi} \left|\left|M_\Phi^* f\right|\right|_1$$

*Απόδειξη.* Έστω $\Psi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}_\alpha}$ όπου $\mathcal{F}_\alpha$ η συλλογή ημινορμών απο το **Λήμμα 2.2** με $\beta = (0,..,0)$ και $M = 2d + 2$. Τότε:

$$M_\Psi f(x) = \sup_{t>0} \left|f * \Psi_t(x)\right| \leq \sup_{t>0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left| f * \left(\eta_k * \Phi_{2^{-k}}\right)_t (x)\right| =$$

$$= \sup_{t>0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \left(f * \Phi_{2^{-k}t}\right) * \left(\eta_k\right)_t (x)\right| =$$

$$= \sup_{t>0} \ \sum_{k=0}^{+\infty} \ \left| \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(f * \Phi_{2^{-k}t}\right)(x-y)\, \frac{1}{t^d}\, \eta_k\left(\frac{y}{t}\right) \mathrm{d}y\right| \leq$$

$$\leq \sup_{t>0} \ \frac{1}{t^d} \ \sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left|\left(f * \Phi_{2^{-k}t}\right)(x-y)\right| \cdot \left|\eta_k\left(\frac{y}{t}\right)\right| \mathrm{d}y \leq$$

$$\leq \sup_{t>0} \ \frac{1}{t^d} \ \sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} M_{\Phi,d} f(x) \cdot \left(1 + \frac{|y|}{2^{-k}t}\right)^{d+1} \cdot \left|\eta_k\left(\frac{y}{t}\right)\right| \mathrm{d}y$$

Στην τελευταία σχέση, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $y \to \frac{y}{t}$ έχουμε:

$$\frac{1}{t^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(1 + \frac{2^k |y|}{t}\right)^{d+1} \cdot \left|\eta_k\left(\frac{y}{t}\right)\right| \, \mathrm{d}y \; = \; \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(1 + 2^k|y|\right)^{d+1} \cdot \left|\eta_k\left(y\right)\right| \, \mathrm{d}y \le$$

$$\le \; 2^{k(d+1)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(1 + |y|\right)^{d+1} \cdot \left|\eta_k\left(y\right)\right| \, \mathrm{d}y \le \; 2^{k(d+1)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\left(1 + |y|\right)^{2d+2} \cdot \left|\eta_k\left(y\right)\right|}{\left(1+|y|\right)^{d+1}} \, \mathrm{d}y \;\; (1)$$

Τώρα, θα εκτιμήσουμε την ποσότητα στον αριθμητή του κλάσματος που εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα της σχέσης (1) :

Για $|y| \le 1$:

$$\left(1 + |y|\right)^{2d+2} \cdot \left|\eta_k\left(y\right)\right| \le \; 2^{2d+2} \left|\eta_k\left(y\right)\right| \;\; (2)$$

για $|y| > 1$:

$$\left(1 + |y|\right)^{2d+2} \cdot \left|\eta_k\left(y\right)\right| \le \; 2^{2d+2} \, |y|^{2d+2} \, \left|\eta_k\left(y\right)\right| \le \; 2^{2d+2} \sum_{|\alpha| \le 2d+2} c_\alpha \, |y^\alpha| \cdot \left|\eta_k\left(y\right)\right| \;\; (3)$$

Για κάθε πολυδείκτη $\alpha$ με $|\alpha| \le 2d+2$ χρησιμοποιούμε το **Λήμμα 2.2** για την συλλογή $\mathcal{F}_\alpha$ απο ημινόρμες και έχουμε για κάθε $\Psi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}_\alpha}$ :

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^d} \left|y^\alpha \, \eta_k(y)\right| \le \frac{A_{\alpha,d,\Phi}}{2^{k\,(2d+2)}} \;\; (4)$$

Επειδή το πλήθος των πολυδεικτών $\alpha$ με την ιδιότητα $|\alpha| \le 2d+2$ είναι πεπερασμένο, ορίζω

$$A_{d,\Phi} = \max_{|\alpha| \, \le \, 2d+2} \; A_{\alpha,d,\Phi} \quad \text{και} \quad \mathcal{F} = \bigcup_{|\alpha| \, \le \, 2d+2} \mathcal{F}_\alpha \, .$$

Άρα, υπάρχει σταθερά $A_{d,\Phi}$ που εξαρτάται απο την διάσταση $d$ και την $\Phi$ τέτοια ώστε οι ποσότητες στις σχέσεις (2) και (3) φράσονται απο:

$$\frac{A_{d,\Phi}}{2^{k\,(2d+2)}} \;\; (5)$$

για κάθε $\Psi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$.

Συνεπώς, στην σχέση (1) έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση, βάση της (5):

$$2^{k(d+1)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\left(1 + |y|\right)^{2d+2} \cdot \left|\eta_k\left(y\right)\right|}{\left(1+|y|\right)^{d+1}} \, \mathrm{d}y \le \; 2^{k(d+1)} \, \frac{A_{d,\Phi}}{2^{k\,(2d+2)}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\left(1+|y|\right)^{d+1}} \, \mathrm{d}y \le$$

$$\le \; \frac{A'_{d,\Phi}}{2^{k(d+1)}} \le \; \frac{A'_{d,\Phi}}{2^k} \;\; (6)$$

Παρακάτω θα πάρουμε άθροισμα ώς προς όλα τα $k \in \mathbb{N}$ και όπως είναι γνωστό μας ενδιαφέρει η

συμπεριφορά της σειράς στην "ουρά" δηλαδή για το άθροισμα απο έναν φυσικό αριθμό και πέρα. Αφού το αποτέλεσμα στην (6) ισχύει για $k \geq k_0$ το οποίο $k_0$ εμφανίστηκε στην απόδειξη του **Λήμματος 2.2**, μας δίνεται το δικαίωμα να παραλείψουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, το γέγονός ότι για $k < k_0$ δεν ισχύει η (6).
Συνεπώς, λόγω της (6) έχουμε:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) = \sup_{\Psi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} M_{\Psi} f(x) \ \leq \ \sup_{t>0} \ A^{'}_{d,\Phi} \cdot M_{\Phi,d} f(x) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2 \cdot A^{'}_{d,\Phi} \cdot M_{\Phi,d} f(x).$$

Τέλος απο το **Πόρισμα 2.1** έχουμε το ζητούμενο. □

***Λήμμα* 2.3.** *Για την* $\Phi$ *έχουμε ότι:*

$$\left|\left| M_{\Phi}^{*} f \right|\right|_1 \leq c_{d,\Phi} \left|\left| M_{\Phi} f \right|\right|_1$$

*Απόδειξη.* Αρχικά θα υποθέσουμε οτι: $\left|\left| M_{\Phi}^{*} f \right|\right|_1 < +\infty \ \ (*)$

Για την $\mathcal{F}$ που επιλέξαμε πριν και για $\lambda > 0$ ορίζουμε:

$$F_{\lambda} := \Big\{ x : \ \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) \leq \lambda \cdot M_{\Phi}^{*} f(x) \Big\}$$

Οπότε, λόγω αυτού του ορισμού και του **Πορίσματος 2.2** έχουμε τις ακόλουθες εκτιμησεις:

$$\int\limits_{F_{\lambda}^{c}} M_{\Phi}^{*} f(x) \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \int\limits_{F_{\lambda}^{c}} \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) \, \mathrm{d}x \ = \ \frac{\left|\left| \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f \right|\right|_1}{\lambda} \leq \frac{c_d \left|\left| M_{\Phi}^{*} f \right|\right|_1}{\lambda}$$

Αν διαλέξουμε $\lambda = 2c_d$ τότε:

$$\int\limits_{F_{\lambda}^{c}} M_{\Phi}^{*} f(x) \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{2} \left|\left| M_{\Phi}^{*} f \right|\right|_1$$

Συνεπώς,

$$\int\limits_{F_{\lambda}} M_{\Phi}^{*} f(x) \, \mathrm{d}x \ = \ \left|\left| M_{\Phi}^{*} f \right|\right|_1 - \int\limits_{F_{\lambda}^{c}} M_{\Phi}^{*} f(x) \, \mathrm{d}x \ \geq \ \left|\left| M_{\Phi}^{*} f \right|\right|_1 - \frac{1}{2} \left|\left| M_{\Phi}^{*} f \right|\right|_1 \ = \ \frac{1}{2} \left|\left| M_{\Phi}^{*} f \right|\right|_1$$

δηλαδή:

$$\left|\left| M_{\Phi}^{*} f \right|\right|_1 \leq \ 2 \int\limits_{F_{\lambda}} M_{\Phi}^{*} f(x) \, \mathrm{d}x \ \ (1)$$

Σταθεροποιούμε το $\lambda$ που επιλέξαμε παραπάνω και θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $F$ για το σύνολο $F_{\lambda}$.

Έστω τώρα $x \in \mathbb{R}^d$.

Άν $M_\Phi^* f(x) = 0$ τότε $\left| f * \Phi_{\bar{t}}(\bar{y}) \right| \geq \frac{1}{2}\, M_\Phi^* f(x)$ για κάθε $(\bar{y}, \bar{t})$ με $|x - \bar{y}| < \bar{t}$.

Άν $M_\Phi^* f(x) > 0$ τότε από τον ορισμό του supremum έχω ότι: $\exists\ (\bar{y}, \bar{t})$ με $|x - \bar{y}| < \bar{t}$ τέτοια ώστε:

$$\left| f * \Phi_{\bar{t}}(\bar{y}) \right| > \frac{1}{2}\, M_\Phi^* f(x) \ \ (2)$$

Τώρα έστω $r > 0$ αρκετά μικρό, το οποίο θα προσδιορίσουμε αργότερα. Τότε ορίζω την μπάλα $B$ με κέντρο $\bar{y}$ και ακτίνα $r\bar{t}$. Από το Θεώρημα Μέσης τιμής έχω οτι για $x' \in B$ υπάρχει $\xi$ όπου $\xi = (1-c)\bar{y} + cx'$ για κάποιο $c \in [0,1]$, τέτοιο ώστε:

$$\left| f * \Phi_{\bar{t}}\,(x') - f * \Phi_{\bar{t}}\,(\bar{y}) \right| \leq \left| x' - \bar{y} \right| \cdot \left| \nabla \big( f * \Phi_{\bar{t}} \big)\,(\xi) \right|.$$

Όμως $|x' - \bar{y}| \leq r\bar{t}$ και $|\xi - \bar{y}| \leq r\bar{t}$ άρα η παραπάνω ανισότητα γίνεται:

$$\left| f * \Phi_{\bar{t}}\,(x') - f * \Phi_{\bar{t}}\,(\bar{y}) \right| \leq r\bar{t} \sup_{|z-\bar{y}| \leq r\bar{t}} \left| \nabla \big( f * \Phi_{\bar{t}} \big)\,(z) \right|$$

και αφού $|x - \bar{y}| \leq \bar{t}$ τότε:

$$\left| f * \Phi_{\bar{t}}\,(x') - f * \Phi_{\bar{t}}\,(\bar{y}) \right| \leq r\bar{t} \sup_{|z-x| \leq (r+1)\bar{t}} \left| \nabla \big( f * \Phi_{\bar{t}} \big)\,(z) \right| =$$

$$= r\bar{t} \sup_{|z| \leq (r+1)\bar{t}} \left| \nabla \big( f * \Phi_{\bar{t}} \big)\,(x+z) \right| \ \ (3)$$

Επίσης, $\partial_{z_i} \big( f * \Phi_{\bar{t}} \big)\,(x) = \frac{1}{\bar{t}} \cdot f * \big( \partial_{z_i} \Phi \big)_{\bar{t}}(x)$ (4)

Επειδή ο $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ είναι μετρικός χώρος τότε κάθε ακολουθιακά συμπαγές σύνολο είναι και συμπαγές. Επομένως, το σύνολο συναρτήσεων $\mathscr{S}_i^* := \Big\{ \partial_{z_i} \Phi(x+h) :\ |h| \leq r+1 \Big\},\ i = 1, .., d$ είναι συμπαγές: Σταθεροποιώ ένα $i$ και παίρνω ακολουθία $\partial_{z_i} \Phi(x + h_n)$ με $|h_n| \leq r+1$. Τότε, υπάρχουν υποακολουθία $h_{n_k}$ και $h \in \mathbb{R}^d$ τέτοια ώστε $h_{n_k} \xrightarrow[n_k \to +\infty]{} h$. Επομένως:

$$\partial_{z_i} \Phi(x + h_{n_k}) \xrightarrow[n_k \to +\infty]{} \partial_{z_i} \Phi(x+h) \quad \text{στον } \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$$

Όμως $|h| \leq r+1$ και άρα $\partial_{z_i} \Phi(x+h) \in \mathscr{S}_i^*$. Συνεπώς η ένωση $\mathscr{S}^*$ των συνόλων αυτών είναι συμπαγές σύνολο, ως πεπερασμένη ένωση συμπαγών συνόλων. Τώρα, οι ημινόρμες $||\cdot||_{\alpha,\beta}$ της πεπερασμένης συλλογής $\mathcal{F}$ είναι εξ' ορισμού συνεχή συναρτησοειδή και άρα για το συμπαγές σύνολο $\mathscr{S}^*$ θα ισχύει το θεώρημα μέγιστης τιμής:

$$\Big| \Big| \partial_{z_i} \Phi(x+h) \Big| \Big|_{\alpha,\beta} \leq c_{\alpha,\beta,i}$$

Όμως οι πολυδείκτες $\alpha, \beta$ καθώς και τα $i$ είναι πεπερασμένα το πλήθος συνεπώς ορίζουμε ως $c$:

$$c := \max_{\alpha,\beta,i} c_{\alpha,\beta,i}$$

Οπότε, προκύπτει οτι $\dfrac{1}{c}\,\partial_{z_i}\Phi(x+h)\in\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ για κάθε $|h|\le r+1$. Επίσης:

$$f*\big(\partial_{z_i}\Phi\big)_{\bar t}(x+h\bar t)=f\Big(\,\tau_{x+h\bar t}\,\widetilde{\big(\partial_{z_i}\Phi_{\bar t}\big)}\,\Big)=f\Big(\,\tau_x\big(\tau_{h\bar t}\,\widetilde{\big(\partial_{z_i}\Phi_{\bar t}\big)}\,\big)\Big)=$$

$$=f\Big(\,\tau_x\big(\,\widetilde{\tau_{-h\bar t}\,\big(\partial_{z_i}\Phi_{\bar t}\big)}\,\big)\Big)=f\Big(\,\tau_x\big(\,\widetilde{\big(\tau_{-h}\,\partial_{z_i}\Phi\big)_{\bar t}}\,\big)\Big)=$$

$$=f\big(\,\tau_x\,\widetilde{\Psi_{\bar t}}\big)=f*\Psi_{\bar t}(x)$$

όπου $\Psi(x)=\tau_{-h}\,\partial_{z_i}\Phi(x)=\partial_{z_i}\Phi\,(x+h)$. Όμως παραπάνω είδαμε ότι $\dfrac{\Psi}{c}\in\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ για κάθε $|h|\le r+1$, συνεπώς:

$$\Big|f*\big(\partial_{z_i}\Phi\big)_{\bar t}(x+h\bar t)\Big|=\Big|f*\Psi_{\bar t}(x)\Big|\le c\,\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x)\ \text{ για } |h|\le r+1$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (4) και το τελευταίο αποτέλεσμα, προκύπτει ότι:

$$\Big|\nabla\big(f*\Phi_{\bar t}\,\big)(x+h\bar t)\Big|=\frac{1}{\bar t}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{d}\Big|f*\big(\partial_{z_i}\Phi\big)_{\bar t}(x+h\bar t)\Big|^2}\ \le\ \frac{c\sqrt{d}\,\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x)}{\bar t}$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $|h|\le r+1$ άρα:

$$\sup_{|z|\le(r+1)\bar t}\ \Big|\nabla\big(f*\Phi_{\bar t}\,\big)(x+z)\Big|\le\ \frac{c\sqrt{d}\,\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x)}{\bar t}\ \ (5)$$

Επιστρέφουμε τώρα στην (3) και χρησιμοποιώντας την (5) έχουμε:

$$\big|f*\Phi_{\bar t}\,(x')-f*\Phi_{\bar t}\,(\bar y)\big|\ \le\ r\,c\sqrt{d}\,\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x)$$

Αν περιοριστούμε στα $x\in F$ και χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό αυτού του συνόλου, η τελευταία σχέση δίνει:

$$\big|f*\Phi_{\bar t}\,(x')-f*\Phi_{\bar t}\,(\bar y)\big|\ \le\ 2\,r\,c\sqrt{d}\,c_d\,M_{\Phi}^{*}f(x)$$

Οπότε, άν επιλέξουμε $r=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2\,c\sqrt{d}\,c_d}$ (εξαρτάται απο την διάσταση $d$ και την $\Phi$) έχουμε ότι:

$$\Big|\,\big|f*\Phi_{\bar t}\,(x')\big|-\big|f*\Phi_{\bar t}\,(\bar y)\big|\,\Big|\ \le\ \big|f*\Phi_{\bar t}\,(x')-f*\Phi_{\bar t}\,(\bar y)\big|\le\ \frac{1}{4}\,M_{\Phi}^{*}f(x)$$

και λόγω της (2) έχουμε τελικά:

$$\big|f*\Phi_{\bar t}\,(x')\big|\ \ge\ \frac{1}{4}\,M_{\Phi}^{*}f(x)\ \ (6)$$

για $x\in F$ και για κάθε $x'\in B$.

Τώρα, ορίζουμε $B':=B(x,\,r\bar t+\bar t)$ και βλέπουμε οτι $B\subseteq B'$.

Αν σταθεροποιήσουμε $0<q<1$ τότε λόγω της (6) έχουμε:

$$\left[M_\Phi^* f(x)\right]^q \;\leq\; \frac{4^q}{|B|}\int\limits_B \left|f * \Phi_{\bar{t}}\,(x')\right|^q \mathrm{d}x' \;\; (7)$$

Επειδή $\dfrac{|B'|}{|B|} = \left(\dfrac{r+1}{r}\right)^d$, δηλαδή $\dfrac{1}{|B|} = \left(\dfrac{r+1}{r}\right)^d \dfrac{1}{|B'|}$ και λόγω της (7) έχουμε:

$$\left[M_\Phi^* f(x)\right]^q \;\leq\; 4\left(\frac{r+1}{r}\right)^d \frac{1}{|B'|}\int\limits_{B'} \left|f * \Phi_{\bar{t}}\,(x')\right|^q \mathrm{d}x' \leq$$

$$\leq\; c_d' \,\frac{1}{|B'|}\int\limits_{B'} \left|M_\Phi f\,(x')\right|^q \mathrm{d}x' \leq$$

$$\leq\; c_d' \sup_{\delta>0} \frac{1}{|B(x,\delta)|}\int\limits_{B(x,\delta)} \left|M_\Phi f\,(x')\right|^q \mathrm{d}x' =$$

$$=\; c_d' \;M\Big(\big(M_\Phi f\big)^q\Big)(x) \;\; (8)$$

όπου $M$ ο μεγιστικός τελεστής των Hardy-Littlewood και $c'_d = 4\left(\dfrac{r+1}{r}\right)^d$

Άρα απο την (1) και την (8) έχουμε:

$$\left|\left|M_\Phi^* f\right|\right|_1 \;\leq\; 2\big(c_d'\big)^{\frac{1}{q}} \int\limits_F \left[M\Big(\big(M_\Phi f\big)^q\Big)(x)\right]^{\frac{1}{q}} \mathrm{d}x \;\leq$$

$$\leq\; c_d'' \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left[M\Big(\big(M_\Phi f\big)^q\Big)(x)\right]^{\frac{1}{q}} \mathrm{d}x \;\; (9)$$

Όπως είναι γνωστό ο μεγιστικός τελεστής των Hardy-Littlewood είναι ισχυρά $(p,p)$ για $p>1$, δηλαδή για $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$

$$\left|\left|Mf\right|\right|_p \;\leq\; c_{p,d}\left|\left|f\right|\right|_p \;\; (10)$$

Αν πάρουμε $p = \dfrac{1}{q} > 1$ έχουμε:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left[\big(M_\Phi f\big)^q(x)\right]^p \mathrm{d}x \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^d} M_\Phi f(x)\mathrm{d}x < +\infty$$

δηλαδή, $\big(M_\Phi f\big)^q \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$

Οπότε, απο την (10) έχουμε ότι:

$$\left|\left|M\Big(\big(M_\Phi f\big)^q\Big)\right|\right|_p \;\leq\; c_{p,d}\left|\left|\big(M_\Phi f\big)^q\right|\right|_p \Rightarrow$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big[M\Big(\big(M_\Phi f\big)^{\,q}\Big)(x)\Big]^p \mathrm{d}x \;\leq\; c_{p,d}^p \int\limits_{\mathbb{R}^d} M_\Phi f(x)\mathrm{d}x \;=\; c_{p,d}^p \,\big|\big|M_\Phi f\big|\big|_1 \;\; (11)$$

Επομένως απο τις (9) και (11) προκύπτει ότι

$$\big|\big|M_\Phi^* f\big|\big|_1 \;\leq\; c_{q,d}^{'} \,\big|\big|M_\Phi f\big|\big|_1$$

Όπου η σταθερά $c_{q,d}^{'}$ εξαρτάται απο την διάσταση $d$, απο το σταθεροποιημένο $q$ που επιλέξαμε παραπάνω και την $\Phi$.

Τώρα, θα σκιαγραφίσουμε την απόδειξη στην περίπτωση που η $(*)$ δεν ισχύει αναγκαστικά.

Θεωρούμε μια παραλλαγή της $M_\Phi^*$ η οποία ορίζεται ώς εξής:

$$M_\Phi^{\varepsilon,L} f(x) := \sup_{|x-y|<t<\frac{1}{\varepsilon}} \big|f * \Phi_t(y)\big| \,\frac{t^L}{\big(\varepsilon + t + \varepsilon|y|\big)^L}$$

με $0 < \varepsilon \leq 1$ και $L > 0$ το οποίο θα προσδιορίσουμε σύντομα.

Αρχικά, ξέρουμε οτι εφόσον $f$ κατανομή, τότε υπάρχουν $k \geq 1$ και $C > 0$ τέτοια ώστε:

$$\big|f(\phi)\big| \leq C\, p_k(\phi) \qquad \text{για κάθε } \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$$

Συνεπώς,

$$\big|f * \phi(y)\big| \leq C\, p_k\big(\tau_y \widetilde{\phi}\big)$$

Όμως με απλές πράξεις έχουμε :

$$\big|f * \Phi_t(y)\big| \leq C\, \frac{\max\big\{t^k, t^{-k}\big\}}{t^d} \big(1+|y|^2\big)^{\frac{k}{2}}\, p_k\big(\Phi\big)$$

Οπότε μπορώ να επιλέξω $L$ αρκετά μεγάλο ώστε για κάθε $0 < \varepsilon \leq 1$ να έχω $M_\Phi^{\varepsilon,L} f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με πριν, καταλήγουμε στην ανισότητα:

$$\big|\big|M_\Phi^{\varepsilon,L} f\big|\big|_1 \;\leq\; c_L \,\big|\big|M_\Phi f\big|\big|_1$$

όπου $c_L$ εξαρτάται απο το σταθεροποιημένο $L$, απο την $\Phi$ και ίσως απο την $f$. Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ έχουμε οτι:

Αν $M_\Phi f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ τότε:

$$\big|\big|M_\Phi^* f\big|\big|_1 \;< +\infty$$

και άρα η $(*)$ μπορεί να παρακαμφθεί.

$\square$

Απο αυτά, εύκολα προκύπτει η απόδειξη του **Θεωρήματος 2.1**:

*Απόδειξη.* $\Rightarrow$ Αν $M_\Phi f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ τότε απο το **Λήμμα 2.3** έχουμε ότι:

$$M_\Phi^* f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \;\text{ και }\; \big|\big|M_\Phi^* f\big|\big|_1 \leq c_{d,\Phi}\, \big|\big|M_\Phi f\big|\big|_1 \;\; (1)$$

Τώρα, απο το **Πόρισμα** 2.2 βλεπουμε οτι άν ισχύει η (1) τότε:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d),$$

και

$$\big|\big|\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f\big|\big|_1 \ \leq \ c_{d,\Phi} \ \big|\big|M_\Phi f\big|\big|_1$$

$\Leftarrow$ Η συλλογή $\mathcal{F}$ είναι πεπερασμένη, οπότε μπορώ να βρώ μια σταθερά $c_\Phi$ που εξαρτάται μόνο από την $\Phi$ τέτοια ώστε:

$$\Big|\Big|\frac{\Phi}{c_\Phi}\Big|\Big|_{\alpha_i,\beta_i} \leq 1$$

για κάθε μια απο τις ημινόρμες της συλλογής $\mathcal{F}$.

Δηλαδή $\dfrac{\Phi}{c_\Phi} \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ και άρα:

$$\big|\big|M_\Phi f\big|\big|_1 \ \leq \ c_\Phi \ \big|\big|\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f\big|\big|_1$$

$\square$

**Παρατήρηση**

Έστω $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Αν υπάρχει $\Phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ με $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \Phi \neq 0$ τέτοια ώστε $M_\Phi f \in \mathcal{L}^1$ , τότε μπορούμε να βρούμε πεπερασμένη συλλογή $\mathcal{F}$ απο ημινόρμες, ανεξάρτητη απο την $\Phi$ (εξαρτάται μόνο απο την διάσταση $d$) με:

$$\big|\big|M_\Phi f\big|\big|_1 \leq c_\Phi \ \big|\big|\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f\big|\big|_1 \leq c_{d,\Phi} \ \big|\big|M_\Phi f\big|\big|_1$$

Προφανώς, για οποιαδήποτε άλλη $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ με $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \Psi \neq 0$ έχουμε:

$$\big|\big|M_\Psi f\big|\big|_1 \leq c_\Psi \ \big|\big|\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f\big|\big|_1 \leq c_{d,\Psi} \ \big|\big|M_\Psi f\big|\big|_1$$

και άρα υπάρχουν σταθερές $c, \ c^{'}$ που εξαρτώνται απο τις $\Phi, \Psi$ και την διάσταση $d$ τέτοιες ώστε:

$$c\,\big|\big|M_\Psi f\big|\big|_1 \leq \ \big|\big|M_\Phi f\big|\big|_1 \ \leq \ c^{'} \ \big|\big|M_\Psi f\big|\big|_1$$

***Πόρισμα*** **2.3.** *Έστω $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Τότε για $\Phi$ όπως παραπάνω έχουμε ότι:*

$$M_\Phi f \in \mathcal{L}^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$$

*Απόδειξη.* Σταθεροποιούμε ένα $x$ και έστω $y$ με $|y-x| < 1$. Έχουμε:

$$|f * \Phi_t(x)| \leq \sup_{|y-z|<1} |f * \Phi_t(z)| \leq \sup_{\substack{|y-z|<t' \\ t'>0}} |f * \left(\Phi_t\right)_{t'}(z)| = \sup_{\substack{|y-z|<tt' \\ tt'>0}} |f * \Phi_{tt'}(z)| = M_\Phi^* f(y)$$

και επομένως,

$$|f * \Phi_t(x)| \leq \frac{1}{|B_x|} \int\limits_{B_x} M_\Phi^* f(y) \mathrm{d}y$$

με $B_x = B(x, 1)$. Όπως ξέρουμε, $|B_x| = |B(0, 1)| =: c_d$ και άρα:

$$|f * \Phi_t(x)| \leq c_d \int\limits_{\mathbb{R}^d} M_\Phi^* f(y) \mathrm{d}y = c_d \left|\left|M_\Phi^* f\right|\right|_1$$

Όμως απο το **Λήμμα 2.3** και το **Θεώρημα 2.1**:

$$|f * \Phi_t(x)| \leq \ c_{d,\Phi} \left|\left|M_\Phi f\right|\right|_1$$

Παίρνουμε supremum ως προς $t > 0$:

$$M_\Phi f(x) \ \leq c_{d,\Phi} \left|\left|M_\Phi f\right|\right|_1$$

και αφού αύτο ισχύει για κάθε $x$ συνεπάγεται το ζητούμενο.

□

**Παρατήρηση**

Ορίζουμε μια νέα συλλογή από ημινόρμες, την $\mathcal{F}_M$ που ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{F}_M := \left\{ \left|\left| \cdot \right|\right|_{\alpha,\beta} \text{ για } |\alpha| \leq M, \ |\beta| \leq M \right\}$$

Με $M = \max\left\{ |\alpha_i\ |, |\beta_i| \ \right\}$ όπου $\left|\left| \cdot \right|\right|_{\alpha_i,\beta_i} \in \mathcal{F}$ .

Προφανώς έχουμε ότι $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_M$ και εύκολα προκύπτει ότι $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_M} \subseteq \mathcal{S}_\mathcal{F}$. Άρα:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}_M} f(x) \leq \mathcal{M}_\mathcal{F} f(x)$$

και επομένως,

$$\left|\left|\mathcal{M}_{\mathcal{F}_M} f\right|\right|_1 \ \leq \ \left|\left|\mathcal{M}_\mathcal{F} f\right|\right|_1$$

με την προυπόθεση οτι $\mathcal{M}_\mathcal{F} f \in \mathcal{L}^1$.

***Λήμμα* 2.4.** *Έστω μια πεπερασμένη συλλογή $\mathcal{F}$ απο ημινόρμες. Τότε, υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_M$.*

*Έστω $\phi \in C^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ με $supp\, \phi \subseteq B$ όπου $B$ μπάλα με ακτίνα $r$.*

*Έστω $f \in \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^d\right)$. Αν $|\partial^\alpha \phi| \leq \dfrac{c}{r^{d+|a|}}$ για κάθε $|\alpha| \leq M$ (και $c$ σταθερά που εξαρτάται μόνο απο το $M$) τότε:*

$$\left| \int\limits_B f(x)\phi(x) \mathrm{d}x \right| \leq c\, \mathcal{M}_{\mathcal{F}_M} f(\bar{x}) \leq c\, \mathcal{M}_\mathcal{F} f(\bar{x})$$

*για κάθε* $\bar{x} \in B$.

*Απόδειξη.* Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει απο την τελευταία παρατήρηση. Τώρα, για $\bar{x} \in B$ ορίζω:

$$\psi(y) := r^d\, \phi(\bar{x} - ry) \ \ (1\alpha)$$

Τότε βλέπουμε ότι:

$$\phi(y) = \psi_r(\bar{x} - y) \ \ (1\beta)$$

και άρα:

$$\Big|\int_B f(y)\phi(y)\mathrm{d}y\Big| = \Big|\int_B f(y)\psi_r(\bar{x} - y)\mathrm{d}y\Big| \ \ (2)$$

Επίσης, αν $x_0$ το κέντρο της $B$ τότε απο την (1α) και αφού $supp\, \phi \subseteq B$, για $\psi(y) \neq 0$ έχουμε:

$$\left|\frac{\bar{x} - x_0}{r} - y\right| \leq 1$$

και άρα

$$|y| \leq \left|\frac{\bar{x} - x_0}{r} - y\right| + \left|\frac{\bar{x} - x_0}{r}\right| \leq 2$$

Εξ' ορισμού, για κάθε $|\beta| \leq M$ έχουμε ότι $|\partial^\beta \psi(y)| \leq c$ και άρα για κάθε $|\alpha| \leq M$:

$$|y^\alpha\, \partial^\beta \psi(y)| \leq 2^{|\alpha|}\, c \leq 2^M\, c = c\,', \text{ άρα:}$$

$$\frac{\psi}{c\,'} \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}_M} \ \ (3)$$

Οπότε με χρήση της (3) έχουμε:

$$\Big|\int_B f(y)\psi_r(\bar{x} - y)\mathrm{d}y\Big| \leq c\,' \sup_{t>0} \Big|\int_B f(y)\frac{\psi_t(\bar{x} - y)}{c\,'}\mathrm{d}y\Big| =$$

$$= \ c\,'\, M_{\frac{\psi}{c'}} f(\bar{x}) \leq \ c\,' \sup_{\Phi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}_M}} M_\Phi f(\bar{x}) = c\,'\, \mathcal{M}_{\mathcal{F}_M} f(\bar{x})$$

□

# Κεφάλαιο 3

## Διάσπαση Whitney και γενίκευση της διάσπασης Calderón–Zygmund

Τώρα θα δούμε ένα θεώρημα, γνωστό και ώς **Διάσπαση κατά Whitney**.

***Θεώρημα* 3.1** . *Έστω $\mathcal{O}$ ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε, υπάρχει μια συλλογή κύβων $\mathcal{F} = \Big\{Q_1, Q_2, ..\Big\}$ τέτοια ώστε:*

***i)*** $\displaystyle\bigcup_k Q_k \ = \ \mathcal{O}$

***ii)*** $\overset{\circ}{Q}_k$ *ξένοι ανά δύο*

***iii)*** $diam\big(Q_k\big) \leq dist\big(Q_k\ ,\ \mathcal{O}^c\big) \leq 4\,diam\big(Q_k\big)$

*Απόδειξη.* Θα δούμε την απόδειξη περιγραφικά.

Έστω $M_k,\ k\ \in\ \mathbb{Z}$ η συλλογή απο κύβους με ακμή $\dfrac{1}{2^k}$ και κορυφές τα σημεία $\left(\dfrac{a_1}{2^k}\ , ...,\ \dfrac{a_d}{2^k}\right)$ όπου $a_1, ..., a_d \in \mathbb{Z}$.

Προφανώς αν $Q \in M_k$ έχουμε ότι $diam\big(Q\big) = \dfrac{\sqrt{d}}{2^k}$.

Ένας κύβος $Q$ της συλλογής $M_k$ περιέχει $2^d$ ακριβώς, κύβους της συλλογής $M_{k+1}$ οι οποίοι τέμνουν τις πλευρές του $Q$.

Ορίζουμε $\mathcal{O}_k := \Big\{x \in \mathbb{R}^d$ τέτοια ώστε $\dfrac{c}{2^k} < dist\big(x,\ \mathcal{O}^c\big) \leq \dfrac{c}{2^{k-1}}\Big\}$, όπου $c > 1$ σταθερά που θα επιλέξουμε αργότερα. Επίσης, βλέπουμε ότι $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_k \ = \ \mathcal{O}$.

Ορίζουμε αρχικά μια συλλογή κύβων $\mathcal{F}_0$. Αργότερα, θα πάρουμε την ζητούμενη συλλογή, εξάγωντας κάποιους κύβους.

Έχουμε,

$$\mathcal{F}_0 := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big\{Q \in M_k\ :\ Q \cap \mathcal{O}_k \neq \varnothing\Big\}$$

και τότε βλέπουμε ότι $\displaystyle\bigcup_{Q\in\mathcal{F}_0} Q = \mathcal{O}$.

Επιλέγουμε $c = 2\sqrt{d}$. Αν $Q \in \mathcal{F}_0$ απο τους ορισμούς των $diam$ και $dist$ παίρνουμε την ιδιότητα **iii)**.

Για να προχωρήσουμε στην απόδειξη της **ii)**, κάνουμε μια παρατήρηση:

Έστω $Q_{k_1} \in M_{k_1}$ και $Q_{k_2} \in M_{k_2}$ με $k_1 \neq k_2$. Τότε αν $\overset{\circ}{Q}_{k_1} \cap \overset{\circ}{Q}_{k_2} \neq \varnothing$, έχουμε οτι:

$$Q_{k_1} \subset Q_{k_2} \text{ ή } Q_{k_2} \subset Q_{k_1}$$

Ειδικότερα, έχουμε $Q_{k_1} \subset Q_{k_2}$ όταν $k_1 \geq k_2$.

Βάση αυτής της παρατήρησης, για κάθε $Q \in \mathcal{F}_0$ υπάρχει μοναδικός κύβος $Q\,' \in \mathcal{F}_0$ με $Q \subseteq Q\,'$ και $Q\,'$ ο μεγαλύτερος κύβος της συλλογής $\mathcal{F}_0$ με αυτή την ιδιότητα.

Οπότε, απο αυτούς τους "μεγιστικούς" κύβους $Q^{\,'}$ φτιάχνουμε την συλλογή $\mathcal{F}$ του **Θεωρήματος 3.1**, η οποία πληροί και τις τρείς ιδιότητες.

□

**Παρατήρηση**

Αν $Q_1, Q_2$ κύβοι της συλλογής $\mathcal{F}$, τότε λέμε οτι αυτοί "εφάπτονται" αν

$$\partial Q_1 \cap \partial Q_2 \neq \varnothing$$

Βάση αυτού του ορισμού, προχωράμε στο ακόλουθο πορισμα του **θεωρήματος 3.1**.

***Πόρισμα* 3.1.** ***1)*** *Αν $Q_1, Q_2 \in \mathcal{F}$ εφάπτονται, τότε:*

$$\frac{1}{4}\,diam(Q_2) \leq diam(Q_1) \leq 4\,diam(Q_2).$$

***2)*** *Αν $Q \in \mathcal{F}$ τότε υπάρχουν $N$ το πολύ κύβοι της συλλογής $\mathcal{F}$ που εφάπτονται με τον $Q$,*
*όπου $N = 12^d$.*
***3)*** *Έστω $1 < \beta < \dfrac{5}{4}$. Τότε απο την συλλογή $\mathcal{F}$ δημιουργούμε μια συλλογή $\mathcal{F}^*$ ώς εξής:*

*Αν $Q_k \in \mathcal{F},\ k \in \mathbb{N}$ με κέντρο $x_k$ και ακμή $\lambda_k$ θεωρούμε τον κύβο $Q_k^*$ με το ίδιο κέντρο και ακμή $\beta\,\lambda_k$*
*Τότε, για κάθε $x \in \mathcal{O}$ υπάρχουν $N$ το πολύ κύβοι $Q_k^*$ τέτοιοι ώστε $x \in Q_k^*$*
*(Αυτό θα το ονομάζουμε "Ιδιότητα της φραγμένης τομής")*

*Απόδειξη.* ***Προφανής.***

□

Προχωράμε τώρα σε μια γενίκευση της γνωστής διάσπασης κατα **Calderón–Zygmund**:

***Θεώρημα* 3.2.** *Έστω $f \in \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^d\right),\ \alpha > 0$ και μια συλλογή $\mathcal{F}$ απο ημινόρμες, έτσι ώστε $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f \in \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^d\right)$. Τότε υπάρχει μια διάσπαση της $f$ με $f = g + b$ όπου $b = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} b_k$ και μια συλλογή κύβων*

*$\left\{Q_k^*\right\}$ τέτοια ώστε:*
***1)*** *Η $g(x)$ είναι φραγμένη, με $|g(x)| \leq c\,\alpha$ για σ.κ x*
***2)*** *Για κάθε $b_k$ έχουμε ότι $supp\, b_k \subseteq Q_k^*$, $\int\limits_{Q_k^*} b_k(x)\mathrm{d}x = 0$ και*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} M_{\Phi}\, b_k(x)\mathrm{d}x \leq\ c_{d,\Phi} \int\limits_{Q_k^*} \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x)\mathrm{d}x$$

*Για $\Phi \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^d\right),\ supp\,\Phi \subseteq B(0,1)$ και $\int \Phi(x)\mathrm{d}x \neq 0$.*
***3)*** *Οι κύβοι $Q_k^*$ έχουν την ιδιότητα της φραγμένης τομής και*

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k^* = \big\{x \in \mathbb{R}^d : \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) > \alpha\big\}$$

*Απόδειξη.* Έστω $\mathcal{O} = \big\{x \in \mathbb{R}^d : \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) > \alpha\big\}$. Τότε απο διάσπαση κατά Whitney, υπάρχει συλλογή απο κύβους $\big\{Q_1, Q_2, ...\big\}$ με κέντρο $x_k$ και ακμή $\lambda_k$ τέτοιοι ώστε:

**i)** $\bigcup\limits_k Q_k \;=\; \mathcal{O}$

**ii)** $\overset{\circ}{Q}_k$ ξένοι ανά δύο

**iii)** $diam\big(Q_k\big) \le dist\big(Q_k\ ,\ \mathcal{O}^c\big) \le 4\, diam\big(Q_k\big)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Τώρα παίρνουμε $1 < \widetilde{\alpha} < \beta < \dfrac{5}{4}$ και επιλέγουμε το $\beta$ αρκετά κοντά στο 1, ώστε για τους κύβους $Q_k^*$ όπως τους ορίσαμε στο **Πόρισμα 3.1**, να ισχύει $\bigcup\limits_k Q_k^* \;=\; \mathcal{O}$. Επίσης οι $Q_k^*$ έχουν την ιδιότητα της φραγμένης τομής.

Οπότε, προφανώς $\bigcup\limits_k \widetilde{Q_k} \;=\; \mathcal{O}$ όπου $\widetilde{Q_k}$ κύβος με ακμή $\widetilde{\alpha}\,\lambda_k$ και κέντρο $x_k$.

Τώρα, μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση $\zeta$ με $\zeta(x) \ge 0,\ \zeta \in C^\infty\,(\mathbb{R}^d)$ τέτοια ώστε:
$\zeta \equiv 1$ στον κύβο με κέντρο 0 και ακμή 1 και $\zeta \equiv 0$ έξω από τον κύβο με κέντρο 0 και ακμή $\widetilde{\alpha}$.
Συνεχίζουμε, ορίζωντας τις συναρτήσεις $\zeta_k$. Άν $x_k$ το κέντρο του κύβου $Q_k$ και $\lambda_k$ η ακμή του ορίζουμε:

$$\zeta_k(x) := \zeta\Big(\frac{x - x_k}{\lambda_k}\Big),$$

οι οποίες είναι $C^\infty\,(\mathbb{R}^d)$ συναρτήσεις.
Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ότι $supp\ \zeta_k \subseteq \widetilde{Q_k}$.
Μετά ορίζουμε τις χρήσιμες για την απόδειξη συναρτήσεις $\eta_k$:

$$\eta_k(x) := \begin{cases} \dfrac{\zeta_k(x)}{\sum\limits_j \zeta_j(x)}, & \text{για } x \in \mathcal{O} \\[4ex] 0,\ \text{για } x \in \mathcal{O}^c \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα στον παρονομαστή είναι πάνω σε πεπερασμένα το πλήθος $j$, καθώς και ότι το άθροισμα είναι μεγαλύτερο του $0$, γιατί κάθε $x \in \mathcal{O}$ ανήκει σε τουλάχιστον ένα και σε $N$ το πολύ κύβους $Q_k^*$ (τα ίδια ισχύουν και για τους $\widetilde{Q_k}$ ως υποσύνολα των $Q_k^*$).

Άρα

$$\sum_j \zeta_j(x) \le N \ \ (1)$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $supp\, \eta_k \subseteq \widetilde{Q_k}$ καθώς και ότι αυτές οι συναρτήσεις δημιουργούν μια διαμέριση της μονάδας, δηλαδή:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \eta_k(x) = 1 \ \text{ για } x \in \mathcal{O} \ \ (2)$$

Από τον ορισμό των $\eta_k$ προκύπτει ότι για $|\gamma| \leq M$ (όπου $M \in \mathbb{N}$ όπως είδαμε στην παρατήρηση πρίν το **Λήμμα 2.4**), έχουμε:

$$|\partial^\gamma \, \eta_k(x)| \leq \frac{c_\gamma}{\lambda_k^{|\gamma|}} \ \ (3)$$

όπου $c_\gamma$ εξαρτάται από το $\gamma$ και την σταθεροποιημένη $\zeta$.

Άν για χάρη ευκολίας πάρουμε μια παραλλαγή των $\eta_k$ :

$$\widetilde{\eta_k}(x) := \frac{\eta_k(x)}{\int\limits_{\widetilde{Q_k}} \eta_k(y)\mathrm{d}y} \ \ (4)$$

Συνεπάγεται από τις (1), (3) και (4) ότι

$$|\partial^\gamma \widetilde{\eta_k}(x)| \leq \frac{c_\gamma N}{\lambda_k^{d+|\gamma|}} \ \ (5)$$

Τώρα προχωράμε στην κατασκευή των συναρτήσεων $b_k(x)$:

Αρχικά, ορίζουμε τις σταθερές $\mathscr{C}_k$ ως εξής:

$$\mathscr{C}_k := \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \widetilde{\eta_k}(x)\mathrm{d}x$$

οπότε ορίζω:

$$b_k(x) := \left[f(x) - \mathscr{C}_k\right] \eta_k(x)$$

Τότε, έχουμε ότι $\int\limits_{\mathbb{R}^d} b_k(x)\mathrm{d}x = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Τώρα, ορίζουμε:

$$g(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{C}_k\, \eta_k(x), & \text{για } x \in \mathcal{O} \\ \\ f(x), \ \text{για } x \in \mathcal{O}^c \end{cases}$$

Επομένως, από την σχέση (1) καθώς και από τον ορισμό των συναρτήσεων $b_k$ προκύπτει για $x \in \mathcal{O}$ ότι:

$$f(x) = g(x) + \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k(x)$$

Συνεχίζουμε, για να αποδείξουμε την ιδιότητα 1) του Θεωρήματος. Για να το πετύχουμε αυτό, θα δείξουμε πρώτα ότι $|\mathscr{C}_k| \leq c\alpha$ με $c$ σταθερά ανεξάρτητη του $k$.
Από την ιδιότητα 3) του **Θεωρήματος 3.1** προκύπτει ότι για κάθε $k$ υπάρχει $\bar{x} \in \mathcal{O}^c$ τέτοιο ώστε:

$$diam(Q_k) \leq dist(\bar{x}, Q_k) \leq 5diam(Q_k)$$

Δηλαδή,

$$\sqrt{d}\,\lambda_k \leq dist(\bar{x}, Q_k) \leq 5\,\sqrt{d}\,\lambda_k$$

Βάση αυτής της παρατήρησης, προχωράμε και ορίζουμε ως $B$ την μπάλα με κέντρο το $x_k$ και ακτίνα $6\,\sqrt{d}\,\lambda_k$. Τότε εύκολα βλέπουμε ότι

$$Q_k^* \subseteq B \ \ (6)$$

Επίσης, έχουμε $\bar{x} \in B$. Άρα χρησιμοποιούμε το **Λήμμα 2.4** με $\phi(x) = \widetilde{\eta_k}(x)$.
Βλέπουμε οτι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Λήμματος από τις σχέσεις (5) και (6) και αφού $\bar{x} \in B$ έχουμε:

$$\left|\mathscr{C}_k\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\widetilde{\eta_k}(x)\mathrm{d}x\right| \leq c_M \cdot N \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(\bar{x}) \ \ (7)$$

Τώρα, $\bar{x} \in \mathcal{O}^c$ και εξ' ορισμού του συνόλου $\mathcal{O}$ έχουμε ότι $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(\bar{x}) \leq \alpha$.
Συνεπώς, από την τελευταία παρατήρηση και την σχέση (7) έχουμε ότι:

$$|\mathscr{C}_k| \leq c_{M,d} \cdot \alpha \ \ (8)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, για $x^* \in Q_k^*$ έχουμε ότι:

$$|\mathscr{C}_k| \leq c'_{M,d} \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x^*) \ \ (9)$$

Άρα από τον ορίσμο της $g(x)$ για $x \in \mathcal{O}$ και τις σχέσεις (2) και (8) έχουμε ότι

$$|g(x)| \leq c_{M,d} \cdot \alpha \ \ (10)$$

Τώρα, θυμόμαστε απο την απόδειξη του **Θεωρήματος 2.1** ότι υπάρχει $c_\Phi$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{\Phi}{c_\Phi} \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \ \ (11)$$

Και αφού $f \in \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ έχουμε ότι:

$$\lim_{t\to 0^+}\left|f*\Phi_t(x)\right| = \left|f(x)\right| \quad \text{για σ.κ. } x$$

Οπότε, λόγω της (11) έχουμε για σχεδόν κάθε $x \in \mathcal{O}^c$ :

$$\left|f(x)\right| = \lim_{t\to 0^+}\left|f*\Phi_t(x)\right| \leq \sup_{t>0}\left|f*\Phi_t(x)\right| \leq c_\Phi \sup_{t>0}\left|f*\left(\frac{\Phi}{c_\Phi}\right)_t(x)\right| \leq c_\Phi\,\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x) \leq c_\Phi\,\alpha$$

Και άρα, απο τον ορισμό της $g$ έχουμε για σχεδόν κάθε $x \in \mathcal{O}^c$ :

$$|g(x)| \leq c_\Phi\,\alpha \;\; (12)$$

τώρα, παίρνουμε $c := \max\left\{c_{M,d}\ ,\ c_\Phi\right\}$ ( εξαρτάται απο την διάσταση $d$ και την $\Phi$) και απο τις (10), (12) έχουμε την ιδιότητα **1)** του θεωρήματος.

Προχωράμε για να αποδείξουμε την ανισότητα στην ιδιότητα **2)**.
Θα αποδείξουμε τα εξής:

$$\textbf{a)} \text{ για } x^* \in Q_k^*\,, \quad M_\Phi\, b_k(x^*) \leq c_{d,\Phi}\,\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x^*)$$

$$\textbf{b)} \text{ για } x \notin Q_k^*\,, \quad M_\Phi\, b_k(x) \leq c_{d,\Phi}^{'}\,\alpha\left(\frac{\lambda_k}{|x-x_k|}\right)^{d+1}$$

Για το **a)** παρατηρούμε ότι:

$$M_\Phi\, b_k(x^*) = M_\Phi\big(f\eta_k - \mathcal{C}_k\eta_k\big)(x^*) \leq M_\Phi\big(f\eta_k\big)(x^*) \,+\, M_\Phi\big(\mathcal{C}_k\eta_k\big)(x^*) \;\; (13)$$

Προχωράμε στην εκτίμηση αυτών των δύο ποσοτήτων. Για την δεύτερη ποσότητα έχουμε:

$$\sup_{t>0}\left|\big(\mathcal{C}_k\eta_k\big)*\Phi_t(x^*)\right| = \left|\mathcal{C}_k\right| \sup_{t>0}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\eta_k(y)\Phi_t(x^*-y)\mathrm{d}y\right| \;\; (14)$$

Όμως εξ' ορισμού $0 \leq \eta_k \leq 1$:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d}\eta_k(y)\Phi_t(x^*-y)\mathrm{d}y\right| \leq \int_{\mathbb{R}^d}\left|\Phi_t(x^*-y)\right|\mathrm{d}y = \int_{B(0,1)}\left|\Phi(y)\right|\mathrm{d}y \leq c_{d,\Phi} \;\; (15)$$

Όπου $c_{d,\Phi}$ σταθερα που εξάρτάται απο την διάσταση $d$ και απο την σταθεροποιημένη $\Phi$.
Άρα απο την (14), χρησιμοποιώντας τις (9) και (15) παίρνουμε ότι:

$$M_\Phi\big(\mathcal{C}_k\eta_k\big)(x^*) \leq c_{d,\Phi}^{'}\,\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x^*) \;\; (16)$$

Θα δείξουμε κάτι παρόμοιο για την πρώτη ποσότητα στην (13).

Ξέρουμε ότι

$$\big(f\eta_k\big) * \Phi_t(x^*) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(y)\eta_k(y)\Phi_t(x^* - y)\mathrm{d}y \ \ (17)$$

και θα πάρουμε τις περιπτώσεις $t \leq \lambda_k$ και $t > \lambda_k$.
Για $t \leq \lambda_k$ παρατηρούμε ότι για την συνάρτηση $\phi(y) := \eta_k(y)\Phi_t(x^* - y)$ έχουμε $supp\, \phi \subseteq B(x^*, t)$.
Επίσης, με χρήση των κανόνων παραγώγισης, αλλά και επειδή $t \leq \lambda_k$ :

$$\big|\partial^\gamma \phi\big| \leq \frac{c_{\gamma,\Phi}}{t^{|\gamma|+d}}$$

όπου η σταθερά $c_{\gamma,\Phi}$ εξαρτάται απο το $M$ και την $\Phi$. Άρα, κάνοντας χρήση του **Λήμματος 2.4** για την $\phi$ παίρνουμε:

$$\Bigg|\int\limits_{B(x^*,t)} f(y)\ \phi(y)\ \mathrm{d}y\Bigg| \leq\ c_{M,\Phi}\ \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x^*) \Rightarrow$$

$$\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(y)\ \eta_k(y)\ \Phi_t(x^* - y)\mathrm{d}y\Bigg| \leq\ c_{M,\Phi}\ \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x^*) \Rightarrow$$

$$\Big|\big(f\,\eta_k\big) * \Phi_t(x^*)\Big| \leq\ c_{M,\Phi}\ \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x^*) \ \text{ για } t \leq \lambda_k \ \ (18)$$

Τώρα για $t > \lambda_k$ παρατηρούμε ότι για την συνάρτηση $\phi(y) := \eta_k(y)\Phi_t(x^* - y)$ έχουμε:

$$supp\, \phi \subseteq B(x^*, \beta\sqrt{d}\lambda_k)$$

Επίσης, με χρήση των κανόνων παραγώγισης, αλλά και επειδή $t > \lambda_k$ :

$$\big|\partial^\gamma \phi\big| \leq \frac{c^{'}_{\gamma,\Phi}}{\lambda_k^{|\gamma|+d}} = \frac{c^{''}_{\gamma,\Phi}}{\big(\beta\sqrt{d}\lambda_k\big)^{|\gamma|+d}}$$

όπου η σταθερά $c^{''}_{\gamma,\Phi}$ εξαρτάται απο το $M$ και την $\Phi$. Άρα, κάνοντας χρήση του **Λήμματος 2.4** για την $\phi$ παίρνουμε τελικά:

$$\Big|\big(f\,\eta_k\big) * \Phi_t(x^*)\Big| \leq\ c^{'}_{M,\Phi}\ \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x^*) \ \text{ για } t > \lambda_k \ \ (19)$$

Και απο τις σχέσεις (18) και (19) για $c_\Phi := \max\{c^{'}_{M,\Phi}\ ,\ c_{M,\Phi}\}$ (το $M$ εξαρτάται απο την $\Phi$) παίρνουμε:

$$M_\Phi\big(f\eta_k\big) \leq\ c_\Phi\ \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x^*) \ \ (20)$$

και τελικά απο τις (13), (16) και (20) προκύπτει το **a)**, με $c_{d,\Phi} := c_\Phi +\ c^{'}_{d,\Phi}$.
Συνεχίζουμε και προχωράμε στην απόδειξη του **b)**. Όταν $x \notin Q_k^*$ τότε:

$$b_k * \Phi_t(x) = \int\limits_{\widetilde{Q_k}} b_k(y)\ \Phi_t(x-y)\mathrm{d}y = \int\limits_{\widetilde{Q_k}} b_k(y) \Big[\Phi_t(x-y) - \Phi_t(x-x_k)\Big]\mathrm{d}y \quad (21)$$

Με την τελευταία ισότητα να προκύπτει επειδή $\int\limits_{\widetilde{Q_k}} b_k(y)\mathrm{d}y = 0$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των $b_k$ καταλήγουμε απο την (21):

$$b_k * \Phi_t(x) = \int\limits_{\widetilde{Q_k}} f(y)\ \eta_k(y) \Big[\Phi_t(x-y) - \Phi_t(x-x_k)\Big]\mathrm{d}y \ - \int\limits_{\widetilde{Q_k}} \mathscr{C}_k\ \eta_k(y) \Big[\Phi_t(x-y) - \Phi_t(x-x_k)\Big]\mathrm{d}y$$

$$:= I_1 - I_2$$

Τώρα για το $I_1$ έχουμε:
Αν $y \in \widetilde{Q_k}$ τότε ορίζουμε:

$$\phi(y) := \eta_k(y) \Big[\Phi_t(x-y) - \Phi_t(x-x_k)\Big]$$

Απο τους κανόνες παραγώγισης και αφού $|x-y| \leq t$ (ή $|x-x_k| \leq t$ ) για κάθε $y \in \widetilde{Q_k}$ (λόγω του φορέα της $\Phi$) προκύπτει για την $\phi$ ότι:

$$|\partial^\gamma\ \phi(y)| \leq A_\gamma\ \frac{\lambda_k}{|x-x_k|^{d+1}}\ \frac{1}{\lambda_k^{|\gamma|}} = A_\gamma \left(\frac{\lambda_k}{|x-x_k|}\right)^{d+1} \frac{1}{\lambda_k^{|\gamma|+d}} \quad (22)$$

Οπότε, αν ορίσουμε ως $B$ την μπάλα με κέντρο το $x_k$ και ακτίνα $6\sqrt{d}\lambda_k$ είδαμε ότι υπάρχει $x^* \in \mathcal{O}^c$ τέτοιο ώστε $x^* \in B$.
Άρα, απο το **Λήμμα 2.4** έχουμε ότι:

$$|I_1| \leq A_{M,d} \left(\frac{\lambda_k}{|x-x_k|}\right)^{d+1} \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x^*) \leq A_{M,d} \left(\frac{\lambda_k}{|x-x_k|}\right)^{d+1} \cdot \alpha \quad (23)$$

αφού $x^* \in \mathcal{O}^c$.
Για το $I_2$ τώρα, απο την (22) για $\gamma = 0$ παίρνουμε:

$$|\phi(y)| \leq A_0\ \frac{\lambda_k}{|x-x_k|^{d+1}} \quad (24)$$

Οπότε απο την (9) και την (24) έχουμε:

$$|I_2| \leq c_{M,d}\, \big|\mathscr{C}_k\big| \int\limits_{\widetilde{Q_k}} \frac{\lambda_k}{|x-x_k|^{d+1}}\,\mathrm{d}y \ \leq\ c^*_{M,d}\, \alpha\, |\widetilde{Q_k}|\, \frac{\lambda_k}{|x-x_k|^{d+1}} \ \leq\ c^{**}_{M,d}\, \alpha \left(\frac{\lambda_k}{|x-x_k|}\right)^{d+1} \quad (25)$$

Άρα ορίζουμε $c^{'}_{M,d} := \max\{A_{M,d}\ ,\ c^{**}_{M,d}\}$. Ύστερα παίρνοντας απόλυτη τιμή στην (21) και supremum ως πρός $t > 0$, προκύπτει, χρησιμοποιώντας τις (23) και (25) η ιδιότητα **b)**.

Περνάμε τώρα στο τελευταίο στάδιο της απόδειξης της ιδιότητας **2)**. Έχουμε:

$$\int_{\mathbb{R}^d} M_\Phi\big(b_k\big)(x)\mathrm{d}x = \int_{Q_k^*} M_\Phi\big(b_k\big)(x)\mathrm{d}x \;+ \int_{\mathbb{R}^d \setminus Q_k^*} M_\Phi\big(b_k\big)(x)\mathrm{d}x \quad (26)$$

Για την πρώτη ποσότητα στην (26) χρησιμοποιούμε το **a)** και για την δεύτερη το **b)**.

$$\int_{\mathbb{R}^d} M_\Phi\big(b_k\big)(x)\mathrm{d}x \leq \int_{Q_k^*} c_{d,\Phi}\, \mathcal{M}_\mathcal{F} f(x)\mathrm{d}x \;+ \int_{\mathbb{R}^d \setminus Q_k^*} c_{d,\Phi}^{'}\, \alpha \left(\frac{\lambda_k}{|x-x_k|}\right)^{d+1} \mathrm{d}x =$$

$$= \; c_{d,\Phi} \int_{Q_k^*} \mathcal{M}_\mathcal{F} f(x)\mathrm{d}x \;+\; c_{d,\Phi}^{'} \;\alpha \int_{\mathbb{R}^d \setminus Q_k^*} \left(\frac{\lambda_k}{|x-x_k|}\right)^{d+1} \mathrm{d}x \quad (27)$$

Στην (27) θα εκτιμήσουμε την δεύτερη ποσότητα. Έχουμε αρχικά ότι

$$\left\{x \in \mathbb{R}^d \;:\; |x-x_k| \leq \frac{\sqrt{d}\,\lambda_k}{4}\right\} \subseteq Q_k^*$$

Άρα,

$$\mathbb{R}^d \setminus Q_k^* \;\subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^d \;:\; |x-x_k| > \frac{\sqrt{d}\,\lambda_k}{4}\right\} := \mathcal{C} \quad (28)$$

Επομένως το δεύτερο ολοκλήρωμα στην (27) γίνεται:

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus Q_k^*} \left(\frac{\lambda_k}{|x-x_k|}\right)^{d+1} \mathrm{d}x \leq \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{\lambda_k}{|x-x_k|}\right)^{d+1} \mathrm{d}x = \; c_d \;\; \lambda_k^{\,d} \;=\; c_d^{\,*} \;\; |Q_k^*| \quad (29)$$

Άρα απο τις (27) και (29) παίρνουμε τελικά:

$$\int_{\mathbb{R}^d} M_\Phi\, b_k(x)\, \mathrm{d}x \leq \; c_{d,\Phi} \int_{Q_k^*} \mathcal{M}_\mathcal{F} f(x)\, \mathrm{d}x \;+\; c_{d,\Phi}^{'} \;\, c_d^{\,*} \;\, \alpha \;\, |Q_k^*| \leq$$

$$= \;\; c_{d,\Phi} \int_{Q_k^*} \mathcal{M}_\mathcal{F} f(x)\, \mathrm{d}x \;+\; c_{d,\Phi}^{''} \int_{Q_k^*} \alpha\, \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \;\; c_{d,\Phi} \int_{Q_k^*} \mathcal{M}_\mathcal{F} f(x)\, \mathrm{d}x \;+\; c_{d,\Phi}^{''} \int_{Q_k^*} \mathcal{M}_\mathcal{F} f(x)\, \mathrm{d}x = \;\; c_{d,\Phi}^{'''} \int_{Q_k^*} \mathcal{M}_\mathcal{F} f(x)\, \mathrm{d}x$$

Με την προτελευταία ανισότητα να ισχύει επειδή $\mathcal{M}_\mathcal{F} f(x) \;>\; \alpha$ για $x \in Q_k^*$ και

$$c_{d,\Phi}^{'''} := \; c_{d,\Phi} \;+\; c_{d,\Phi}^{''}$$

□

# Κεφάλαιο 4

## Οι χώροι $H^1_{at}\left(\mathbb{R}^d\right)$ και $H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$

### Ορισμός 4.1.

Μια μιγαδική συνάρτηση $a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ λέγεται ***άτομο*** όταν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

**i)** ο φορέας της $a$ είναι μια μπάλα $B \subseteq \mathbb{R}^d$

**ii)** $|a| \leq \dfrac{1}{|B|}$

**iii)** $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^d} a(x)\,\mathrm{d}x = 0$

***Πόρισμα*** **4.1.** *Άν $a$ άτομο τότε $a \in \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ και:*

$$||a||_1 \leq 1$$

*Απόδειξη.* Απο τις ιδιότητες (1) και (2) έχουμε διαδοχικά:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \big|a(x)\big|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{B} \big|a(x)\big|\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_{B} \frac{1}{|B|}\,\mathrm{d}x = 1$$

□

***Λήμμα*** **4.1.** *Έστω $\Phi \in C^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ με $supp\,\Phi \subseteq B(0,1)$ και $\int \Phi(x)\mathrm{d}x \neq 0$. Αν $a$ άτομο έχουμε ότι:*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} M_\Phi\, a(x)\,\mathrm{d}x \leq c_{d,\Phi}$$

*Με $c_{d,\Phi}$ σταθερά, ανεξάρτητη απο το άτομο $a$ (εξαρτάται μόνο απο την $\Phi$ και το $d$).*

*Απόδειξη.* Έστω $B := B(\bar{x}, r)$ ο φορέας του ατόμου $a$ και $B^* := B(\bar{x}, 2r)$. Τότε για $x \in B^*$:

$$M_\Phi\, a(x) = \sup_{t>0} \big|a * \Phi_t(x)\big| = \sup_{t>0} \left|\int\limits_{\mathbb{R}^d} a(y)\,\Phi_t(x-y)\mathrm{d}y\right| \leq$$

$$\leq \sup_{t>0} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \big|a(y)\big|\,\big|\Phi_t(x-y)\big|\mathrm{d}y \leq \frac{1}{|B|}\sup_{t>0} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \big|\Phi_t(x-y)\big|\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{|B|} \int\limits_{B(0,1)} \big|\Phi(y)\big|\mathrm{d}y = \frac{c_\Phi}{|B|} \;\; (1)$$

Άρα λόγω της (1) παίρνουμε ότι

$$M_\Phi\, a(x) \ \leq\ \frac{c_\Phi}{|B|} \ \text{για } x \in B^* \Rightarrow$$

$$\int\limits_{B^*} M_\Phi\, a(x)\mathrm{d}x \leq\ c^{''}_{d,\Phi} \quad (2)$$

Για $x \notin B^*$ παρατηρούμε ότι:

$$a * \Phi_t(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} a(y)\ \Phi_t(x-y)\mathrm{d}y = \int\limits_{B} a(y)\ \Phi_t(x-y)\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{B} a(y)\ \Big[\Phi_t(x-y) - \Phi_t(x-\bar{x})\Big]\mathrm{d}y$$

με την τελευταία ισότητα να ισχύει λόγω της ιδιότητας **iii)** του ατόμου $a$.
Άρα,

$$\big|a * \Phi_t(x)\big| \ \leq\ \Bigg|\int\limits_{B} a(y)\ \Big[\Phi_t(x-y) - \Phi_t(x-\bar{x})\Big]\mathrm{d}y\Bigg| \ \leq\ \frac{1}{|B|}\int\limits_{B}\Big|\Phi_t(x-y) - \Phi_t(x-\bar{x})\Big|\mathrm{d}y \ \ (3)$$

Τώρα θα εκτιμήσουμε την ποσότητα στο τελευταίο ολοκλήρωμα. Επειδή $\Phi \in C^\infty\ (\mathbb{R}^d)$ από το Θεώρημα Μέσης τιμής, υπάρχει $\xi$ όπου $\xi = (1-c)y + c\bar{x}$ για κάποιο $c \in [0,1]$, τέτοιο ώστε:

$$\big|\Phi_t(x-y) - \Phi_t(x-\bar{x})\big| \leq \big|y-\bar{x}\big| \cdot \big|\nabla_y\big[\Phi_t(x-\xi)\big]\big| \leq r \cdot\ \big|\nabla_y\big[\Phi_t(x-\xi)\big]\big| \ \ (4)$$

Τώρα,

$$\Big|\nabla_y\big[\Phi_t(x-\xi)\big]\Big| \ \leq\ \frac{1}{t^{d+1}}\ \Big|\big(\nabla_y\ \Phi\big)\ \Big(\frac{x-\xi}{t}\Big)\Big| \ \ (5)$$

Όμως επειδή $|x-y| \leq t$ ( λόγω του φορέα της $\Phi$ ) και αφού $y \in B$ και $x \notin B^*$ τότε:

$$\Big|\frac{x-\xi}{t}\Big| \ \leq\ \frac{|\xi-y| + |y-x|}{t} \leq \frac{2\ |y-x|}{t} \leq 2$$

Άρα, αφού $\Phi \in C^\infty\ (\mathbb{R}^d)$ τότε υπάρχει $c^{'}_\Phi > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\Big|\big(\nabla_y \Phi\big)(y)\Big| \leq c^{'}_\Phi \text{ για κάθε } y \in B(0,2)$$

Οπότε με χρήση της (5) παίρνουμε ότι

$$\Big|\nabla_y\big[\Phi_t(x-\xi)\big]\Big| \ \leq\ \frac{c^{'}_\Phi}{t^{d+1}} \ \ (6)$$

Συνεπώς απο τις (4), (6) και επειδή $|x - \bar{x}| \leq 2t$ παίρνουμε την εκτίμηση που ζητούσαμε:

$$\Big|\Phi_t(x-y) - \Phi_t(x-\bar{x})\Big| \leq \; r \cdot \frac{c^*_{d,\Phi}}{|x-\bar{x}|^{d+1}} \quad (7)$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τις (3), (7) και παίρνωντας supremum ως προς $t > 0$ έχουμε για $x \notin B^*$:

$$M_\Phi \, a(x) \leq \; r \cdot \frac{c^*_{d,\Phi}}{|x-\bar{x}|^{d+1}}$$

Τώρα,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus B^*} M_\Phi \, a(x) \mathrm{d}x \;\leq\; c^*_{d,\Phi} \, r \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus B^*} \frac{1}{|x-\bar{x}|^{d+1}} \mathrm{d}x = \; c^*_{d,\Phi} \, r \; c_d \, \frac{1}{r} = \; c^{**}_{d,\Phi} \quad (8)$$

Αν θέσουμε $c_{d,\Phi} := \; c''_{d,\Phi} \; + \; c^{**}_{d,\Phi}$ τότε απο τις (2) και (8) παίρνουμε το ζητούμενο.

□

Τώρα προχωράμε στους ορισμούς των χώρων που θα μας απασχολήσουν:

## Ορισμοί 4.2.

Ορίζουμε τον εξής χώρο:

$$H^1_{at}\,(\mathbb{R}^d) := \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \, a_j : \;\; a_j \text{ άτομα}, \lambda_j \in \mathbb{C}\,, \sum_{j \in \mathbb{N}} \big|\lambda_j\big| \; < \; +\infty \right\}$$

Επίσης,

$$H^1\,(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) : \text{υπάρχει } \Phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \text{ με } \int \Phi(x)\,\mathrm{d}x \neq 0 \text{ τέτοια ώστε } M_\Phi f \in \mathcal{L}^1\,(\mathbb{R}^d) \right\}$$

Απο τους ορισμούς αυτούς προκύπτουν τα ακόλουθα πορίσματα:

***Πόρισμα* 4.2.** *Αν $a$ άτομο τότε:*

$$a \in H^1_{at}\,(\mathbb{R}^d) \text{ και επίσης } a \in H^1\,(\mathbb{R}^d)$$

*Απόδειξη.* Έχουμε ότι $a \in H^1_{at}\,(\mathbb{R}^d)$ εξ' ορισμου του συνόλου αυτού. Για το δεύτερο κομμάτι, χρησιμοποιούμε το **Λήμμα 4.1**. Είδαμε για $\Phi \in C^\infty\,(\mathbb{R}^d)$ με $supp\,\Phi \subseteq B(0,1)$ και $\int \Phi(x)\mathrm{d}x \neq 0$ :

$$\big|\big|M_\Phi \, a\big|\big|_1 \leq \; c_{d,\Phi}$$

Οπότε, απο τον ορισμό του χώρου $H^1\,(\mathbb{R}^d)$ έχουμε ότι $a \in H^1\,(\mathbb{R}^d)$.

□

Τώρα θα αποδείξουμε ότι και οι δύο χώροι που μόλις ορίσαμε είναι υποσύνολα του $\mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^d\right)$.

***Πόρισμα*** 4.3.

$$H^1_{at}\left(\mathbb{R}^d\right) \subseteq \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^d\right)$$

*Απόδειξη.* Έστω $f$ ένα στοιχείο αυτού του συνόλου. Τότε υπάρχουν $\lambda_j \in \mathbb{C}$ με $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j| < +\infty$ και $a_j$ άτομα τέτοια ώστε

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j\, a_j(x)$$

Άρα,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big| \mathrm{d}x \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j| \int\limits_{\mathbb{R}^d} |a_j(x)| \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j| < +\infty$$

Με την προτελευταία ανισότητα να προκύπτει απο το **Πόρισμα 4.1**.Τέλος, παρατηρούμε ότι το τελευταίο αποτέλεσμα ήταν ανεξάρτητο από την επιλογή των $\lambda_j$. Άρα:

$$\big|\big|f\big|\big|_1 \leq \inf\left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j| \;:\; f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j\, a_j \;\;,\quad a_j \text{ άτομα}\,,\, \lambda_j \in \mathbb{C} \right\}$$

□

***Πόρισμα*** 4.4.

$$H^{\,1}\left(\mathbb{R}^d\right) \subseteq \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^d\right)$$

*Απόδειξη.* Έστω $f \in H^{\,1}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Άρα $f \in \mathscr{S}\,'(\mathbb{R}^d)$ και υπάρχει $\Phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ με $\int \Phi(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$ τέτοια ώστε

$$M_\Phi f \in \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^d\right)$$

Τώρα, για $t > 0$ ορίζουμε τις συναρτήσεις $h_t$ με τύπο:

$$h_t(x) := f * \Phi_t(x)$$

Τότε έχουμε ότι $h_t \in \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ και απο το **Πόρισμα 2.3** έχουμε $h_t \in \mathcal{L}^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ και

$$\big|\big|h_t\big|\big|_\infty \leq \big|\big|M_\Phi f\big|\big|_\infty \leq c_{d,\Phi} \big|\big|M_\Phi f\big|\big|_1$$

Τώρα είδαμε ότι η $h_t$ μπορεί να οριστεί και σαν κατανομή. Δηλαδή, για $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ έχουμε:

$$h_t(\psi) = f * \Phi_t(\psi) := f(\psi * \widetilde{\Phi_t})$$

Τότε, από ιδιότητες των συναρτήσεων στον $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ έχουμε ότι:

$$\psi * \widetilde{\Phi_t} \xrightarrow[t \to 0^+]{} \psi \ \text{ στον } \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$$

συνεπώς από τον ορισμό μιας κατανομής έχουμε :

$$f(\psi * \widetilde{\Phi_t}) \xrightarrow[t \to 0^+]{} f(\psi) \ \text{ για κάθε } \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$$

Δηλαδή,

$$h_t(\psi) \xrightarrow[t \to 0^+]{} f(\psi) \ \text{ για κάθε } \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \ \ (1)$$

Επειδή $h_t \in \mathcal{L}^1 \ (\mathbb{R}^d)$ τότε υπάρχει η εξής σύνδεση μεταξύ της συνάρτησης $h_t$ και της κατανομής $h_t$:

$$h_t(\psi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} h_t(x) \ \psi(x) \mathrm{d}x \quad \text{για κάθε } \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \ \ (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι :

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} h_t(x) \ \psi(x) \mathrm{d}x \xrightarrow[t \to 0^+]{} f(\psi) \ \text{ για } \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \ \ (3)$$

Τώρα, όπως ξέρουμε:

$$\mathcal{L}^1 \ (\mathbb{R}^d) \ \subseteq \ \mathcal{M} \ (\mathbb{R}^d)$$

όπου $\mathcal{M} \ (\mathbb{R}^d)$ ο χώρος των πεπερασμένων μέτρων Borel.

Δηλαδή, $h_t$ “ $\in$ ” $\mathcal{M} \ (\mathbb{R}^d)$ υπό την έννοια οτι ορίζεται $\mu_{h_t} \in \mathcal{M} \ (\mathbb{R}^d)$ με:

$$\mu_{h_t}\big(E\big) = \int\limits_{E} h_t(x) \ \mathrm{d}x \text{ για κάθε } E \text{ σύνολο Borel.}$$

Για κάθε προσημασμένο μέτρο $\nu$, ξέρουμε απο την διάσπαση Jordan οτι υπάρχουν μοναδικά θετικά μέτρα $\nu^+$, $\nu^-$ τέτοια ώστε $\nu = \nu^+ - \nu^-$ και $\nu^+ \perp \nu^-$. Η τελευταία σχέση δηλώνει οτι το μέτρο $\nu^+$ είναι *ιδιάζων ως προς το* $\nu^-$ (και αντίστροφα), δηλαδή υπάρχουν μετρήσιμα $E, F$ με $E \cap F = \varnothing$, $E \cup F = \mathbb{R}^d$ και $\nu^+(E) = \nu^-(F) = 0$. Επίπλέον, αν $\lambda_1, \lambda_2$ θετικά μέτρα με $\nu = \lambda_1 - \lambda_2$ τότε για κάθε $A$ μετρήσιμο:

$$\nu^+(A) \leq \lambda_1(A) \quad \text{και} \quad \nu^-(A) \leq \lambda_2(A)$$

Ως ολική κύμανση ορίζεται το μέτρο $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$. Απο τα παραπάνω, προκύπτουν τα εξής:

$$\mu^+_{h_t}(E) = \int_E h_t^+(x)\,\mathrm{d}x \text{ για κάθε } E \text{ σύνολο Borel.}$$

$$\mu^-_{h_t}(E) = \int_E h_t^-(x)\,\mathrm{d}x \text{ για κάθε } E \text{ σύνολο Borel.}$$

όπου $h_t^+(x) = \max\{h_t(x), 0\}$ και $h_t^-(x) = -\min\{h_t(x), 0\}$.

Τώρα, $||\mu_{h_t}|| \leq ||h_t||_1 \leq \ ||M_\Phi f||_1$, αρα λόγω του Θεωρήματος Banach-Alaoglu, υπάρχει υποακολουθία $t_m \to 0^+$ και $\mu \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^d\right)$ τέτοιο ώστε:

$$\mu_{h_{t_m}} \xrightarrow[t_m \to 0^+]{w^*} \mu \ \ (i)$$

Επίσης, $||\mu|| \leq \ ||M_\Phi f||_1$.

Ξανά εφαρμόζουμε το παραπάνω θεώρημα για το μέτρο $\mu^+_{h_{t_m}}$. Τότε, υπάρχει υποακολουθία $t_{m_k} \to 0^+$ και $\mu_1 \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^d\right)$ τέτοιο ώστε:

$$\mu^+_{h_{t_{m_k}}} \xrightarrow[t_{m_k} \to 0^+]{w^*} \mu_1 \ \ (ii)$$

Τέλος, υπάρχει υποακολουθία $t_{m_{k_l}} \to 0^+$ και $\mu_2 \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^d\right)$ τέτοιο ώστε:

$$\mu^-_{h_{t_{m_{k_l}}}} \xrightarrow[t_{m_{k_l}} \to 0^+]{w^*} \mu_2 \ \ (iii)$$

Συνεπώς, απο την μοναδικότητα του $w^*$ ορίου έχουμε ότι $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Επίσης, η $w^*$ σύγκλιση, διασφαλίζει οτι τα $\mu_1$ και $\mu_2$ είναι θετικά μέτρα, ως $w^*$ όρια ακολουθιών θετικών μέτρων. Επίσης, για $A$ μετρήσιμο έχουμε οτι

$$\mu^+(A) \leq \mu_1(A) \quad \text{και} \quad \mu^-(A) \leq \mu_2(A) \ \ (4)$$

Επιστρέφουμε πίσω στην $w^*$ σύγκλιση. Οι σχέσεις $(i), (ii), (iii)$ δίνουν:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\, h_{t_{m_{k_l}}}(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[t_{m_{k_l}} \to 0^+]{} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \quad \text{για κάθε } \psi \in C_0\left(\mathbb{R}^d\right) \ \ (5)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\, h^+_{t_{m_{k_l}}}(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[t_{m_{k_l}} \to 0^+]{} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\,\mathrm{d}\mu_1(x) \quad \text{για κάθε } \psi \in C_0\left(\mathbb{R}^d\right) \ \ (6)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\, h^-_{h_{t_{m_{k_l}}}}(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[t_{m_{k_l}} \to 0^+]{} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\,\mathrm{d}\mu_2(x) \quad \text{για κάθε } \psi \in C_0\left(\mathbb{R}^d\right) \ \ (7)$$

Όμως ξέρουμε ότι $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq C_0(\mathbb{R}^d)$ άρα απο τις σχέσεις (3) και (5) παίρνουμε:

$$f(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \quad \text{για κάθε } \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \;\; (8)$$

Τώρα θα δείξουμε ότι το μέτρο $\mu$ είναι απόλυτα συνεχές. Επειδή το $|\mu|$ είναι θετικό πεπερασμένο μέτρο Borel, έχουμε:

$$|\mu|(E) = \sup\Big\{|\mu|(K), \;\; K \subset E \;\text{ συμπαγές}\Big\} \;\; (9)$$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $E$ σύνολο Borel, με $|E| < \dfrac{\varepsilon}{4\, c_{d,\Phi}\, \big|\big|M_\Phi f\big|\big|_1}$. Επίσης, έστω $K \subset E$ , $K$ συμπαγές. Τότε υπάρχει $U$ ανοιχτό σύνολο με $K \subseteq U$ τέτοιο ώστε $\big|U \setminus K\big| < \dfrac{\varepsilon}{4\, c_{d,\Phi}\, \big|\big|M_\Phi f\big|\big|_1}$. Τώρα, μπορούμε να βρούμε συνάρτηση $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ τέτοια ώστε:

$$\Psi \equiv 1 \text{ στο } K, \quad 0 \le \Psi \le 1 \text{ στο } U \setminus K \quad \text{και} \quad \Psi \equiv 0 \text{ στο } \mathbb{R}^d \setminus U.$$

Τότε, με χρήση της σχέσης $(4)$:

$$|\mu|(K) \le \mu_1(K) + \mu_2(K) \le \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(x)\, \mathrm{d}\mu_1(x) + \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(x)\, \mathrm{d}\mu_2(x) \;\; (10)$$

Επίσης,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Psi(x)\, h^+_{t_{m_{k_l}}}(x)\, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(x)\, h^-_{t_{m_{k_l}}}(x)\, \mathrm{d}x = \int_U \Psi(x)\, \big|h_{t_{m_{k_l}}}(x)\big|\, \mathrm{d}x \le \big|U\big|\, c_{d,\Phi}\, \big|\big|M_\Phi f\big|\big|_1 =$$

$$= \big(\, \big|U \setminus K\big| + \big|K\big|\, \big)\, c_{d,\Phi}\, \big|\big|M_\Phi f\big|\big|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Επειδή $\Psi \in C_0(\mathbb{R}^d)$, λόγω των $(6), (7)$ προκύπτει:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Psi(x)\, \mathrm{d}\mu_1(x) + \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(x)\, \mathrm{d}\mu_2(x) \le \frac{\varepsilon}{2} \;\; (11)$$

Συνεπώς, λόγω των $(10)$ και $(11)$ έχουμε $|\mu|(K) \le \dfrac{\varepsilon}{2}$. Επομένως βάση της $(9)$ προκύπτει: $|\mu|(E) \le \dfrac{\varepsilon}{2}$ και αρα:

$$|\mu(E)| \le |\mu|(E) < \varepsilon$$

δηλαδή το μέτρο $\mu$ είναι απόλυτα συνεχές και άρα υπάρχει $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ με

$$\mu(E) = \int_E g(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{για κάθε } E \text{ σύνολο Borel} \;\; (12)$$

Συνεπώς, η (8) μας δίνει αν χρησιμοποιήσουμε την (12) ότι:

$$f(\psi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{για κάθε } \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \quad (13)$$

Αυτό που λέει η σχέση (13) είναι οτι η κατανομή $f$ “προέρχεται” απο την συνάρτηση $g$. Όπως είναι γνωστό “ταυτίζουμε” τότε την $f$ με την $g$, δηλαδή $f$ “ $\in$ ” $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ μέσω της σχέσης (13).
Επίσης ορίζουμε: $||f||_1 := ||g||_1$. Αν θυμηθούμε ότι $||g||_1 = ||\mu||$ τότε:

$$||f||_1 \leq ||M_\Phi f||_1$$

□

**Ορισμός 4.3.** Μετά απο αυτά τα πορίσματα, ξανα-ορίζουμε τους βασικούς χώρους:

$$H^1_{at}(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \ : \ f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j\, a_j \ , \ a_j \text{ άτομα}, \lambda_j \in \mathbb{C}\, , \sum_{j \in \mathbb{N}} \left|\lambda_j\right| \ < \ +\infty \right\}$$

και για $f \in H^1_{at}(\mathbb{R}^d)$ ορίζουμε:

$$||f||_{H^1_{at}} := \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} |\lambda_j| \ : \ f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j\, a_j \ , \quad a_j \text{ άτομα}\, , \lambda_j \in \mathbb{C} \right\}$$

επίσης,

$$H^1(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \ : \ \text{υπάρχει } \Phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \text{ με } \int \Phi(x)\,\mathrm{d}x \neq 0 \text{ τέτοια ώστε } M_\Phi f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \right\}$$

και για $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$ ορίζουμε:

$$||f||_{H^1} := ||M_\Phi f||_1$$

Βάση της παρατήρησης μετά την απόδειξη του **Θεωρήματος 2.1** μπορούμε να ορίσουμε την ποσότητα $||f||_{H^1}$ να είναι οποιαδήποτε απο τις ποσότητες $||M_\Phi f||_1$ αφού όλες αυτές είναι ισοδύναμες. Η μόνη προυπόθεση είναι να υπάρχει τουλάχιστον μια $\Phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ με $\int \Phi(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$ τέτοια ώστε:

$$M_\Phi f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$$

Τώρα θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε τα δύο βασικά θεωρήματα. Αυτά θα δείξουν οτι οι δύο χώροι που μόλις ορίσαμε είναι "ίσοι" και οι νόρμες τους είναι ισοδύναμες.

***Θεώρημα* 4.1.**

$$H^1_{at}\left(\mathbb{R}^d\right) \subseteq H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$$

*και*

$$\left|\left|f\right|\right|_{H^1} \leq c_d \left|\left|f\right|\right|_{H^1_{at}}$$

*Απόδειξη.* Έστω $f \in H^1_{at}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Τότε υπάρχουν $\lambda_j \in \mathbb{C}$ με $\sum_{j\in\mathbb{N}}|\lambda_j| < +\infty$ και $a_j$ άτομα τέτοια ώστε

$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j\, a_j$$

Άρα για $\Phi \in C^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ με $supp\,\Phi \subseteq B(0,1)$ και $\int \Phi(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$ , έχουμε:

$$M_\Phi\, f(x) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j|\; M_\Phi\, a_j(x)$$

και συνεπώς,

$$\left|\left|M_\Phi\, f\right|\right|_1 \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j| \left|\left|M_\Phi\, a_j\right|\right|_1 \leq c_{d,\Phi} \sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j| \quad (1)$$

Με την τελευταία ανισότητα να προκύπτει απο το **Λήμμα 4.1**. Επομένως,

$$M_\Phi f \in \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^d\right)$$

Δηλαδή εξ' ορισμού έχουμε ότι

$$f \in H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$$

και απο την σχέση (1) έχουμε:

$$\left|\left|f\right|\right|_{H^1} = \left|\left|M_\Phi f\right|\right|_1 \leq c_{d,\Phi} \sum_{j\in\mathbb{N}} \left|\lambda_j\right|$$

Και επειδή το τελευταίο αποτέλεσμα ισχύει για κάθε επιλογή των $\lambda_j$ και $a_j$ , με την προϋπόθεση ότι $f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j\, a_j$, έχουμε:

$$\left|\left|f\right|\right|_{H^1} \leq c_{d,\Phi}\, \inf\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j| \;:\; f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j\, a_j \;,\;\; a_j \text{ άτομα}\,,\, \lambda_j \in \mathbb{C}\right\} = c_{d,\Phi} \left|\left|f\right|\right|_{H^1_{at}}$$

□

***Θεώρημα*** 4.2. *Έστω* $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

*Τότε υπάρχουν* $a_j$ *άτομα και* $\lambda_j \in \mathbb{C}$ *όπου* $\sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j| < +\infty$

*με*

$$||f - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, a_j||_{H^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

*και*

$$||f||_{H^1_{at}} \leq c_d^{'} \, ||f||_{H^1}$$

*Απόδειξη.* Επειδή $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$ τότε υπάρχει $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ με $\int \Psi(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$ τέτοια ώστε $M_\Psi f \in \mathcal{L}^1$. Απο τις παρατηρήσεις που έχουμε κάνει, το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει και για τυχαία $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ με $supp\,\Phi \subseteq B(0,1)$ και $\int \Phi(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$. Για την απόδειξη αυτή, επιλέγουμε $||f||_{H^1} := ||M_\Phi f||_1$ . Επίσης, απο το **Θεώρημα 2.1** υπάρχει πεπερασμένη συλλογή $\mathcal{F}$ απο ημινόρμες τέτοια ώστε $\mathcal{M}_\mathcal{F} f \in \mathcal{L}^1$. Συνεπώς, χρησιμοποιούμε το **Θεώρημα 3.2** με $\alpha = 2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Θα κρατήσουμε τον δείκτη $n$ στο πάνω δεξιά μέρος των συναρτήσεων ώστε να αποφευχθούν τυχόν συγχύσεις με τον μέχρι τώρα συμβολισμό. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

Υπάρχει διάσπαση της $f$ με $f = g^n + b^n$ όπου $b^n = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k^n$ και μια συλλογή κύβων $\{Q_k^{n*}\}$ τέτοια ώστε:

**1)** Η $g^n(x)$ είναι φραγμένη, με $|g^n(x)| \leq c2^n$ για σ.κ $x$

**2)** Για κάθε $b_k^n$ έχουμε ότι $supp\, b_k^n \subseteq Q_k^{n*}$ , $\int_{Q_k^{n*}} b_k^n(x)\mathrm{d}x = 0$

και

$$\int_{\mathbb{R}^d} M_\Phi\big(b_k^n\big)(x)\mathrm{d}x \leq \; c_d \int_{Q_k^{n*}} \mathcal{M}_\mathcal{F} f(x)\mathrm{d}x$$

Με $\Phi$ όπως παραπάνω.

**3)** Οι κύβοι $Q_k^{n*}$ έχουν την ιδιότητα της φραγμένης τομής και

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k^{n*} = \{x \in \mathbb{R}^d \text{ όπου } \mathcal{M}_\mathcal{F} f(x) > 2^n\} := \mathcal{O}^n$$

Αρχικά θα δείξουμε ότι

$$||f - g^n||_{H^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Έχουμε:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} M_\Phi\, b^n(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} M_\Phi\big(b_k^n\big)(x)\,\mathrm{d}x \quad (1)$$

Τώρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ το δεξί μέλος στην (1) δεν είναι ταυτοτικά 0 για $N = 12^d$ το πολύ $Q_k^{n*}$ , από την ιδιότητα της φραγμένης τομής. Άρα από την **2)** έχουμε:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} M_\Phi\big(b_k^n\big)(x)\,\mathrm{d}x \leq\; c_d\, N \int\limits_{\mathcal{O}^n} \mathcal{M}_\mathcal{F} f(x)\mathrm{d}x$$

Τώρα, $\mathcal{O}^{n+1} \subseteq \mathcal{O}^n$ και $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}^n = \varnothing$. Οπότε, αφού $\mathcal{M}_\mathcal{F} f(x) \geq 0$ απο γνωστό πόρισμα του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης, έχουμε:

$$\int\limits_{\mathcal{O}^n} \mathcal{M}_\mathcal{F} f(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad (2)$$

Άρα απο τις σχέσεις (1) και (2) παίρνω ότι $\big|\big|b_k^n\big|\big|_{H^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

δηλαδη,

$$\big|\big|f - g^n\big|\big|_{H^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Έπειτα, $|g^j| \leq c\, 2^j$ για κάθε $j \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς,

$$\big|g^{-m} * \Phi_t(x)\big| \leq \big|\big|g^{-m}\big|\big|_\infty \big|\big|\Phi_t\big|\big|_1 \leq \frac{c^{'}}{2^m}$$

Όπου $c^{'}$ εξαρτάται απο το $d$ και την $\Phi$. Επομένως,

$$\sup_{t>0} \big|g^{-m} * \Phi_t(x)\big| \leq \frac{c^{'}}{2^m}$$

Δηλαδή,

$$M_\Phi\,\big(g^{-m}\big)(x) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$

Συνεπώς, $\big|\big|M_\Phi\,\big(g^{-m}\big)\big|\big|_1 \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$ . Οπότε, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $g^{-m} \in\; H^1\,(\mathbb{R}^d)$ και

$$\big|\big|g^{-m}\big|\big|_{H^1} =\; \big|\big|M_\Phi\,\big(g^{-m}\big)\big|\big|_1 \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0 \quad (4)$$

Δηλαδή,

$$\left|\left|f-\sum_{j=-m}^{n}\left(g^{j+1}-g^{j}\right)\right|\right|_{H^1}=\left|\left|f-g^{n+1}+g^{-m}\right|\right|_{H^1}\leq\left|\left|f-g^{n+1}\right|\right|_{H^1}+\left|\left|g^{-m}\right|\right|_{H^1}\xrightarrow[m,n\to+\infty]{}0$$

Με το τελευταίο όριο να προκύπτει από τις σχέσεις (3) και (4).

Επομένως,

$$\left|\left|f-\sum_{j=-m}^{n}\left(g^{j+1}-g^{j}\right)\right|\right|_{H^1}\xrightarrow[m,n\to+\infty]{}0\quad(5)$$

Τώρα θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε τα άτομα και τους συντελεστές τους. Θέτουμε:

$$A_k^j(x)=b_k^j(x)-\eta_k^j(x)\,b^{j+1}(x)+\sum_{m\in\mathbb{N}}c_{k,m}^j\,\eta_m^{j+1}(x)$$

όπου

$$c_{k,m}^j=\frac{\displaystyle\int b_m^{j+1}(x)\,\eta_k^j(x)\;\mathrm{d}x}{\displaystyle\int\eta_m^{j+1}(x)\;\mathrm{d}x}$$

Παρατηρούμε τα εξής:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}b_k^j(x)=b^j(x)\quad,\quad\sum_{k\in\mathbb{N}}\eta_k^j(x)\,b^{j+1}(x)=b^{j+1}(x)$$

και

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}c_{k,m}^j=\frac{\displaystyle\int\sum_{k\in\mathbb{N}}b_m^{j+1}(x)\,\eta_k^j(x)\;\mathrm{d}x}{\displaystyle\int\eta_m^{j+1}(x)\;\mathrm{d}x}=\frac{\displaystyle\int b_m^{j+1}(x)\;\mathrm{d}x}{\displaystyle\int\eta_m^{j+1}(x)\;\mathrm{d}x}=0$$

Συνεπώς, για $x\in\mathcal{O}^{j+1}$ :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}}c_{k,m}^j\,\eta_m^{j+1}(x)=\sum_{m\in\mathbb{N}}\eta_m^{j+1}(x)\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}c_{k,m}^j\right)=0$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός οτι $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\eta_k^j(x)=1$ για $x\in\mathcal{O}^j$. Στο δεύτερο αποτέλεσμα η συνάρτηση έχει φορέα το $\mathcal{O}^{j+1}$, όμως $\mathcal{O}^{j+1}\subseteq\mathcal{O}^j$ και άρα η ισότητα συνεχίζει να ισχύει. Επίσης, στα τελευταία αποτέλεσμα κάναμε εναλλαγή άθροισης καθώς και ολοκληρώματος με άθροισμα, αφού οι όροι του αθροίσματος είναι πεπερασμένοι το πλήθος, για κάθε $x$.

Επίσης, έχουμε για $x\in\mathcal{O}^{j+1}$ :

$$b^j(x)-b^{j+1}(x)=b^j(x)-f(x)-\left(b^{j+1}(x)-f(x)\right)=\left(g^{j+1}-g^j\right)(x)$$

Επομένως, δείξαμε ότι για $x \in \mathcal{O}^{j+1}$ :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} A_k^j(x) = \big(g^{j+1} - g^j\big)(x)$$

Στην συνέχεια θα βρούμε τον φορέα των συναρτήσεων $A_k^j$. Παρατηρούμε, απο τον ορισμό των σταθερών $c_{k,m}^j$ ότι:

$$c_{k,m}^j \neq 0 \iff Q_m^{(j+1)*} \cap Q_k^{j*} \neq \varnothing$$

Τώρα, απο την ιδιότητα της φραγμένης τομής, ο κύβος $Q_k^{j*}$ τέμνεται με $12^d$, το πολυ, κύβους $Q_r^{j*}$. Κάθε ένας απο αυτούς περιέχει, το πολυ, $2^d$ κύβους της μορφής $Q_m^{(j+1)*}$. Άρα, για κάθε $k$ όπως παραπάνω, υπάρχουν, το πολύ, $24^d$ το πλήθος $m$ τέτοιοι ώστε $Q_m^{(j+1)*} \cap Q_k^{j*} \neq \varnothing$ . Για αυτά τα $m$ έχουμε:

$$\lambda\big(Q_m^{(j+1)*}\big) \leq \lambda\big(Q_r^{j*}\big) \leq 4\,\lambda\big(Q_r^{j*}\big) \;\; (6)$$

με την δεύτερη ανισότητητα να προκύπτει απο την **1η** ιδιότητα του **Πορίσματος 3.1**.
Συνεπώς έχουμε οτι:

$$supp\; A_k^j \subseteq supp\; \eta_k^j \bigcup_m supp\; \eta_m^{j+1} \subseteq B_k^j \;\; (7)$$

όπου $B_k^j = B(\, x_k^j \,,\, 4\sqrt{d}\,\beta\,\lambda_k^j\,)$
Μετά, θα δούμε πιο προσεκτικά τον ορισμό των $A_k^j$ :

$$A_k^j(x) = b_k^j(x) - \eta_k^j(x) \sum_{m \in \mathbb{N}} b_m^{j+1}(x) + \sum_{m \in \mathbb{N}} c_{k,m}^j\, \eta_m^{j+1}(x) =$$

$$= f(x)\,\eta_k^j(x) - c_k^j\,\eta_k^j(x) - f(x)\,\eta_k^j(x) \sum_{m \in \mathbb{N}} \eta_m^{j+1}(x) + \eta_k^j(x) \sum_{m \in \mathbb{N}} c_m^{j+1}\,\eta_m^{j+1}(x) + \sum_{m \in \mathbb{N}} c_{k,m}^j\, \eta_m^{j+1}(x)$$

Παίρνουμε υπόψιν ότι $f(x)\,\eta_k^j(x) = \mathcal{X}_{\mathcal{O}^{j+1}}(x)\; f(x)\,\eta_k^j(x) + \mathcal{X}_{(\mathcal{O}^{j+1})^c}(x)\; f(x)\,\eta_k^j(x)$ και με διαφορετική ομαδοποίηση έχουμε:

$$A_k^j(x) = \mathcal{X}_{(\mathcal{O}^{j+1})^c}(x)\; f(x)\,\eta_k^j(x) - c_k^j\,\eta_k^j(x) + f(x)\,\eta_k^j(x)\Big(\, \mathcal{X}_{\mathcal{O}^{j+1}}(x) - \sum_{m \in \mathbb{N}} \eta_m^{j+1}(x)\Big) +$$

$$+\, \eta_k^j(x) \sum_{m \in \mathbb{N}} c_m^{j+1}\,\eta_m^{j+1}(x) + \sum_{m \in \mathbb{N}} c_{k,m}^j\, \eta_m^{j+1}(x)$$

Όμως εξ' ορισμού έχουμε $\sum\limits_{m \in \mathbb{N}} \eta_m^{j+1}(x) = \mathcal{X}_{\mathcal{O}^{j+1}}(x)$ και άρα:

$$A_k^j(x) = \mathcal{X}_{(\mathcal{O}^{j+1})^c}(x)\; f(x)\,\eta_k^j(x) - c_k^j\,\eta_k^j(x) + \; \eta_k^j(x) \sum_{m \in \mathbb{N}} c_m^{j+1}\,\eta_m^{j+1}(x) + \sum_{m \in \mathbb{N}} c_{k,m}^j\, \eta_m^{j+1}(x) \;\; (8)$$

Απο την τελευταία σχέση θα προσπαθήσουμε να φράξουμε τις ποσότητες $|A_k^j(x)|$. Αρχικά,

$$|c_{k,m}^j| \leq \frac{\left|\displaystyle\int f(x)\,\eta_k^j(x)\;\mathrm{d}x\right|}{\left|\displaystyle\int \eta_m^{j+1}(x)\;\mathrm{d}x\right|} \;+\; |c_m^{j+1}| \cdot \frac{\left|\displaystyle\int \eta_k^j(x)\;\mathrm{d}x\right|}{\left|\displaystyle\int \eta_m^{j+1}(x)\;\mathrm{d}x\right|}$$

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία όπως στην σχέση $(8)$ στην απόδειξη του **Θεωρήματος 3.2** και βρίσκουμε σταθερά $c_{d,\Phi}^{'} > 0$ τέτοια ώστε:

$$\frac{\left|\displaystyle\int f(x)\,\eta_k^j(x)\;\mathrm{d}x\right|}{\left|\displaystyle\int \eta_m^{j+1}(x)\;\mathrm{d}x\right|} \;\leq\; c_{d,\Phi}^{'}\;2^j$$

Επίσης, απο προηγούμενες παρατηρήσεις έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{\left|\displaystyle\int \eta_k^j(x)\;\mathrm{d}x\right|}{\left|\displaystyle\int \eta_m^{j+1}(x)\;\mathrm{d}x\right|} \;\leq\; \frac{1}{12^d}\cdot \beta^d \cdot \left(\frac{\ell_k^j}{\ell_m^{j+1}}\right)^d \;\leq\; \frac{4^d\,\beta^d}{12^d} = \left(\frac{\beta}{3}\right)^d$$

με την τελευταία ανισότητα να προκύπτει απο την ιδιότητα **i)** του **Πορίσματος 3.1**. Άρα τελικά, υπάρχει σταθερά $c_{d,\Phi}^{''}$ τέτοια ώστε:

$$|c_{k,m}^j| \leq\; c_{d,\Phi}^{''}\;2^j$$

Επιπρόσθετα, για $x \in (\mathcal{O}^{j+1})^c$ έχουμε ότι:

$$\left|\mathcal{X}_{(\mathcal{O}^{j+1})^c}(x)\;f(x)\;\eta_k^j(x)\right| \leq |f(x)| \leq c_{d,\Phi}^{*}\;2^j$$

όπως είδαμε στην απόδειξη του **Θεωρήματος 3.2**. Επομένως, μπορούμε να βρούμε σταθερά $c_{d,\Phi}^{**}$ τέτοια ώστε:

$$|A_k^j(x)| \leq c_{d,\Phi}^{**}\;2^j \quad (9)$$

Τέλος, εύκολα βλέπουμε ότι $\displaystyle\int A_k^j(x)\;\mathrm{d}x = 0 \;\; (10)$. Οπότε, αν θέσουμε

$$a_k^j(x) = \frac{A_k^j(x)}{\lambda_k^j} \quad \text{όπου} \quad \lambda_k^j = c_{d,\Phi}^{**}\;2^j\,|B_k^j|$$

απο τις $(7), (9)$ και $(10)$ έχουμε οτι τα $a_k^j$ είναι άτομα και :

$$\sum_{j=-m}^{n}\left(g^{j+1} - g^j\right) = \sum_{j=-m}^{n}\sum_{k\in\mathbb{N}} A_k^j = \sum_{j=-m}^{n}\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k^j\,a_k^j$$

Άρα,

$$||f - \sum_{j=-m}^{n}\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k^j\,a_k^j||_{H^1} = \left|\left|f - \sum_{j=-m}^{n}\left(g^{j+1} - g^j\right)\right|\right|_{H^1} \xrightarrow[m,n\to+\infty]{} 0$$

Επίσης,

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} \left|\lambda_k^j\right| = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} c_{d,\Phi}^{**}\, 2^j \,|B_k^j| \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} c_{d,\Phi}^{***} \left|Q_k^j\right| = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_{d,\Phi}^{***} \left|\mathcal{O}^j\right|$$

γιατί τα σύνολα $Q_k^j$ έχουν ξένα εσωτερικά και η ένωση τους δίνει το σύνολο $\mathcal{O}^j$.

Συνεχίζουμε και έχουμε:

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_{d,\Phi}^{***} \left|\mathcal{O}^j\right| = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_{d,\Phi}^{***} \left|\left\{x \in \mathbb{R}^d \,:\; \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) > 2^j\right\}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left[\, c_{d,\Phi}^{***} \left|\left\{x \in \mathbb{R}^d \,:\; \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) > 2^j\right\}\right| \int_{2^{j-1}}^{2^j} 2 \,\mathrm{d}y\right] \leq$$

$$\leq\; 2\, c_{d,\Phi}^{***} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{2^{j-1}}^{2^j} \left|\left\{x \in \mathbb{R}^d \,:\; \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) > y\right\}\right| \mathrm{d}y$$

με την τελευταία ανισότητα να προκύπτει επειδή:

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d \,:\; \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) > 2^j\right\}\right| \leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}^d \,:\; \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) > y\right\}\right| \text{ για κάθε } 2^{j-1} \leq y \leq 2^j$$

Άρα,

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_{d,\Phi}^{***} \left|\mathcal{O}^j\right| \leq\; 2\, c_{d,\Phi}^{***} \int_0^{+\infty} \left|\left\{x \in \mathbb{R}^d \,:\; \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) > y\right\}\right| \mathrm{d}y \;=\; 2\, c_{d,\Phi}^{***} \left|\left|\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f\right|\right|_1$$

και άρα τελικά,

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} \left|\lambda_k^j\right| \leq\; 2\, c_{d,\Phi}^{***} \left|\left|\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f\right|\right|_1 < +\infty \;\; (11)$$

Δηλαδή έχουμε την ιδιότητα που χρειαζόμασταν για τους συντελεστές $\lambda_k^j$.

Συνεπώς, "ταυτίζουμε" την συνάρτηση $f$ με το άθροισμα $\sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty} \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k^j\, a_k^j$ υπο την έννοια της σύγκλισης κατά την $H^1$ νόρμα.

Τέλος, θα αποδείξουμε την ανισότητα που χρειάζομαστε ως προς τις νόρμες. Έστω

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j| \ : \text{όπου } f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j \, a_j \quad \text{κατά την } H^1 \text{ νόρμα} \right\}$$

και

$$\mathcal{B} = \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j| \ : \text{όπου } f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j \, a_j \quad \text{κατά σημείο} \right\}$$

Ξέρουμε οτι $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.
Απο την σχέση (11) προκύπτει ότι $\sup \mathcal{B} \leq 2 \, c^{***}_{d,\Phi} \big|\big|\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f\big|\big|_1$. Συνεπώς,

$$\inf \mathcal{A} \leq 2 \, c^{***}_{d,\Phi} \big|\big|\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f\big|\big|_1$$

Όμως:

$$\inf \mathcal{A} = \big|\big|f\big|\big|_{H^1_{at}}$$

Άρα:

$$\big|\big|f\big|\big|_{H^1_{at}} \leq 2 \, c^{***}_{d,\Phi} \, \big|\big|\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f\big|\big|_1$$

Τέλος, έχουμε ότι $\big|\big|\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f\big|\big|_1 \leq c'_{d,\Phi} \big|\big|M_{\Phi} f\big|\big|_1$ και άρα:

$$\big|\big|f\big|\big|_{H^1_{at}} \leq \ c_{d,\Phi} \big|\big|f\big|\big|_{H^1}$$

□

# Κεφάλαιο 5

## Ο Δυϊκός χώρος του $H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$

### Ορισμός 5.1.

Έστω $f \in \mathcal{L}^1_{loc}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Τότε ορίζω την συνάρτηση $\mathcal{M}f$ με τύπο:

$$\mathcal{M}f(x) := \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int\limits_B \left|f(y) - f_B\right| \mathrm{d}y$$

Όπου $B$ μπάλα και $f_B = \dfrac{1}{|B|} \displaystyle\int\limits_B f(y)\mathrm{d}y \in \mathbb{R}$.

Προφανώς από τον ορισμό για $x \in \mathbb{R}^d$ έχουμε ότι:

$$\mathcal{M}f(x) \in \left[0, +\infty\right]$$

**Ορισμός 5.2.** Ο χώρος $\mathcal{BMO}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{BMO}\left(\mathbb{R}^d\right) := \left\{ f \in \mathcal{L}^1_{loc}\left(\mathbb{R}^d\right) \ : \ \text{υπάρχει } c \geq 0 \text{ τέτοιο ώστε } \mathcal{M}f(x) \leq c \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^d \right\}$$

Ο χώρος αυτός λέγεται "Χώρος φραγμένης μέσης ταλάντωσης" (Bounded Mean Oscillation). Λέμε ότι δύο συναρτήσεις $f,\ g$ που ανήκουν στον χώρο $\mathcal{BMO}\left(\mathbb{R}^d\right)$ είναι ίσες όταν η διαφορά τους είναι μια σταθερά. Δηλαδή:

$$f = g \text{ στον } \mathcal{BMO}\left(\mathbb{R}^d\right) \ \Leftrightarrow \ f - g = c \text{ για κάποια σταθερά } c$$

Με αυτή την σύμβαση, ορίζεται η εξής νόρμα για μια συνάρτηση $f \in \mathcal{BMO}\left(\mathbb{R}^d\right)$

$$\left|\left|f\right|\right|_* := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathcal{M}f(x)$$

Τότε εύκολα προκύπτει ότι ο ορισμός είναι καλός και ότι ο χώρος $\mathcal{BMO}\left(\mathbb{R}^d\right)$ είναι γραμμικός με την νόρμα $\left|\left| \cdot \right|\right|_*$

Τώρα προχωράμε σε κάποιους ορισμούς συναρτήσεων:

Για $f, g \in \mathcal{BMO}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ορίζουμε τις συναρτήσεις $\min\{f,g\}$ και $\max\{f,g\}$ με τύπους:

$$\min\{f,g\}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{όταν } f(x) \leq g(x) \\ \\ g(x), & \text{όταν } f(x) \geq g(x) \end{cases}$$

$$\max\{f,g\}(x) := \begin{cases} g(x), & \text{όταν } f(x) \leq g(x) \\ \\ f(x), & \text{όταν } f(x) \geq g(x) \end{cases}$$

Εύκολα προκύπτει ότι ισχύουν οι εξής τύποι:

$$\min\{f,g\}(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x) + g(x) - \big|f(x) - g(x)\big|\Big)$$

και,

$$\max\{f,g\}(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x) + g(x) + \big|f(x) - g(x)\big|\Big)$$

Είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε τα πρώτα πορίσματα των ορισμών:

***Πόρισμα* 5.1.** *Αν $f \in \mathcal{BMO}\left(\mathbb{R}^d\right)$ τότε:*

$$|f| \in \mathcal{BMO}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

*και συνεπώς αν $g \in \mathcal{BMO}\left(\mathbb{R}^d\right)$ τότε:*

$$\min\{f,g\},\ \max\{f,g\} \in \mathcal{BMO}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

*Απόδειξη.* Έστω $x \in \mathbb{R}^d$ και $B$ μπάλα με $x \in B$. Τότε για κάθε $y \in B$:

$$\Big|\,|f(y)| - |f|_B\,\Big| \leq \Big|\,|f(y)| - |f_B|\,\Big| + \Big|\,|f_B| - |f|_B\,\Big| \leq \Big|\,f(y) - f_B\Big| + \Big|\,|f_B| - |f|_B\,\Big| \quad (1)$$

με την τελευταία ανισότητα να προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα.

Τώρα,

$$\Big|\,|f_B| - |f|_B\,\Big| =$$

$$= \left| \, \left|f_B\right| - \frac{1}{|B|} \int\limits_B |f(y)| \, \mathrm{d}y \, \right| = \frac{1}{|B|} \left| \int\limits_B |f(y)| - \left|f_B\right| \mathrm{d}y \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|B|} \int\limits_B \left| \, |f(y)| - \left|f_B\right| \, \right| \mathrm{d}y \leq \frac{1}{|B|} \int\limits_B \left| \, f(y) - f_B \, \right| \mathrm{d}y \;\; (2)$$

με την τελευταία ανισότητα να προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα.

Άρα από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{1}{|B|} \int\limits_B \left| \, \left|f(y)\right| - \left|f\right|_B \, \right| \mathrm{d}y \leq \frac{2}{|B|} \int\limits_B \left| \, f(y) - f_B \, \right| \mathrm{d}y$$

και άρα παίρνοντας supremum ως προς όλες τις μπάλες $B$ που περιέχουν το $x$ έχουμε:

$$\mathcal{M}|f|(x) \leq 2 \, \mathcal{M}f(x) \leq 2 \left|\left|f\right|\right|_*$$

αφού $f \in \mathcal{BMO}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Τέλος, αφού ο χώρος $\mathcal{BMO}\left(\mathbb{R}^d\right)$ είναι γραμμικός, έχουμε ότι:

$$f - g \in \mathcal{BMO}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

και άρα απο αυτά που μόλις είδαμε:

$$|f - g| \in \mathcal{BMO}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

Οπότε εύκολα προκύπτει οτι $\min\{f, g\}, \; \max\{f, g\} \in \mathcal{BMO}\left(\mathbb{R}^d\right)$. □

***Πόρισμα* 5.2.** *Έχουμε ότι:*

$$\mathcal{L}^\infty\left(\mathbb{R}^d\right) \subseteq \mathcal{BMO}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

*Απόδειξη.* Έστω $f \in \mathcal{L}^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$.
Τώρα, αν $x \in \mathbb{R}^d$ και $B$ μπάλα με $x \in B$ έχουμε:

$$\left|f_B\right| = \frac{1}{|B|} \int\limits_B f(y) \mathrm{d}y \leq \frac{1}{|B|} \int\limits_B \left|f(y)\right| \mathrm{d}y \leq \left|\left|f\right|\right|_\infty$$

$$\frac{1}{|B|} \int\limits_B \left| \, f(y) - f_B \, \right| \mathrm{d}y \leq \frac{1}{|B|} \int\limits_B \left|f(y)\right| \mathrm{d}y + \left|f_B\right| \leq 2 \left|\left|f\right|\right|_\infty$$

Οπότε:

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int\limits_B \Big| f(y) - f_B \Big| \, \mathrm{d}y \leq 2 \, \big|\big|f\big|\big|_\infty$$

Άρα $f \in \mathcal{BMO} \left(\mathbb{R}^d\right)$

$\square$

Τώρα, πριν προχωρήσουμε στα δύο βασικά θεωρήματα αυτού του κεφαλαίου, θα ορίσουμε ένα σύνολο που θα μας χρησιμεύσει. Ο χώρος $H^1_a \left(\mathbb{R}^d\right)$ ορίζεται ως εξής:

$$H^1_a \left(\mathbb{R}^d\right) := \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i \, a_i \;\; \text{όπου } a_i \text{ άτομα και } \lambda_i \in \mathbb{C} \; , \; I \text{ πεπερασμένο} \right\}$$

Είδαμε ότι αυτός ο χώρος είναι πυκνό υποσύνολο του $H^1 \left(\mathbb{R}^d\right)$ από το **Θεώρημα** 4.2.
Τώρα πάμε στο πρώτο μας Θεώρημα:

***Θεώρημα*** **5.1.** *Έστω $f \in \mathcal{BMO} \left(\mathbb{R}^d\right)$.*
*Τότε το γραμμικό συναρτησοειδές $\ell \; : \; H^1_a \left(\mathbb{R}^d\right) \to \mathbb{C}$ με τύπο:*

$$\ell(g) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x) \, g(x) \, \mathrm{d}x$$

*είναι καλώς ορισμένο και μπορεί να επεκταθεί γραμμικά στον χώρο $H^1 \left(\mathbb{R}^d\right)$. Επίσης, ισχύει:*

$$\big|\big|\ell\big|\big| \leq c \big|\big|f\big|\big|_*$$

*Απόδειξη.* Η απόδειξη θα χωριστεί σε δύο μέρη. Στο μέρος **a)** θα αποδείξουμε το θεώρημα για $f$ φραγμένη. Στο μέρος **b)** θα δείξουμε το θεώρημα για κάθε $g \in H^1_a \left(\mathbb{R}^d\right)$ και άρα αφού αυτό ο χώρος είναι πυκνό υποσύνολο του $H^1 \left(\mathbb{R}^d\right)$ μπορούμε να επεκτείνουμε το συναρτησοειδές σε όλο τον χώρο $H^1 \left(\mathbb{R}^d\right)$.

Ξεκινάμε με το μέρος **a)**
Έστω $g \in H^1 \left(\mathbb{R}^d\right)$. Τότε υπάρχουν $a_i$ άτομα και $\lambda_i \in \mathbb{C}$ με $\sum\limits_i |\lambda_i| < +\infty$ τέτοια ώστε:

$$\Big|\Big| g - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, a_i \, \Big|\Big|_{H^1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

από το **Θεώρημα** 4.2. Συνεπώς λόγω του **Πορίσματος** 4.4 :

$$\big|\big| g - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, a_i \, \big|\big|_1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \;\; (1)$$

και άρα υπάρχει υπακολουθία $n_k \to +\infty$ τέτοια ώστε:

$$g(x) = \lim_{n_k \to +\infty} \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i \, a_i(x) \ \text{ για σχεδόν κάθε } x \ \ (2)$$

Επομένως, από την (2) και επειδή η $f$ είναι φραγμένη, παίρνουμε από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης ότι:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{n_k \to +\infty} \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\, a_i(x)\, \mathrm{d}x$$

και από τις ιδιότητες των ατόμων $a_i$ έχουμε ότι $\int\limits_{\mathbb{R}^d} a_i(x)\, \mathrm{d}x = 0$ και άρα,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\, a_i(x)\, \mathrm{d}x = \int\limits_{B_i} \big[f(x) - f_{B_i}\big]\, a_i(x)\, \mathrm{d}x \ \ (3)$$

όπου $supp\ a_i \subseteq B_i$ . Συνεπώς, αφού $\big|a_i(x)\big| \le \dfrac{1}{|B_i|}$ παίρνουμε:

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x \right| \le \lim_{n_k \to +\infty} \sum_{i=1}^{n_k} \frac{|\lambda_i|}{|B_i|} \int\limits_{B_i} \big|f(x) - f_{B_i}\big|\, \mathrm{d}x \le$$

$$\le \lim_{n_k \to +\infty} \sum_{i=1}^{n_k} |\lambda_i| \cdot \big|\big|f\big|\big|_* = \big|\big|f\big|\big|_* \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_i| \le \big|\big|f\big|\big|_* \cdot \big|\big|g\big|\big|_{H^1_{at}} \le c \cdot \big|\big|f\big|\big|_* \cdot \big|\big|g\big|\big|_{H^1} \ \ (4)$$

Τώρα προχωράμε στο μέρος **b)**. Θα υποθέσουμε οτι η $f$ είναι συνάρτηση πραγματικών τιμών. Στην γενική περίπτωση η $f$ γράφεται σαν $Re(f) + i\, Im(f)$.

Ορίζουμε την συνάρτηση $f^{(k)}$ ώς εξής:

$$f^{(k)}(x) := -\min\{f(x) + k, 0\} - \max\{f(x) - k, 0\} + f(x)$$

Απο το **Πόρισμα 5.1**. έχουμε ότι $f^{(k)} \in \mathcal{BMO}\ (\mathbb{R}^d)$ και αν χρησιμοποιήσουμε τους ορισμούς των συναρτησεων $\min, \max$ έχουμε μια άλλη μορφή του τύπου της $f^{(k)}$ :

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} -k, \ \text{ όταν } f(x) \le -k \\ \\ f(x), \ \text{ όταν } -k \le f(x) \le k \\ \\ k, \ \text{ όταν } f(x) \ge k \end{cases}$$

Προφανώς, απο αυτόν τον τύπο βλέπουμε ότι $\big|f^{(k)}(x)\big| \le k$ για κάθε $x$ και επίσης ότι:

$$f^{(k)}(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(x) \text{ για σχεδόν κάθε } x \ \ (5)$$

Επιπλέον, έχουμε απο τις ιδιότητες της νόρμας $||\cdot||_*$ :

$$||f^{(k)}||_* \leq ||\min\{f+k,0\}||_* + ||\max\{f-k,0\}||_* + ||f||_* \leq$$

$$\leq ||f+k||_* + ||f-k||_* + ||f||_* \leq$$

$$\leq 3\,||f||_* \ \ (6)$$

Με τις τελευταίες ανισότητες να προκύπτουν απο το γεγονός οτι $f+c=f$ στον χώρο $\mathcal{BMO}\,(\mathbb{R}^d)$ όπου $c$ σταθερά.

Τώρα, έστω $g \in H^1_a\,(\mathbb{R}^d)$. Δηλαδή, $g(x) = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i\, a_i(x)$ με $I$ πεπερασμένο σύνολο δεικτών και $a_i$ άτομα, $\lambda_i \in \mathbb{C}$.
Χρησιμοποιώντας το μέρος **a)** για τις συναρτήσεις $f^{(k)}$ και την σχέση (6) έχουμε:

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^d} f^{(k)}(x)\; g(x)\; \mathrm{d}x \right| \leq 3\,||f||_* \cdot \sum_{i\in I} |\lambda_i| \ \ (7)$$

Θέλουμε στην (7) να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης. Παρατηρούμε ότι υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:
$\left|f^{(k)}(x)\; g(x)\right| \leq k_0\, \left|g(x)\right|$ για κάθε $x$ και για κάθε $k < k_0$
$\left|f^{(k)}(x)\; g(x)\right| \leq \left|f(x)\; g(x)\right|$ για σχεδόν κάθε $x$ και για κάθε $k \geq k_0$ (8)
Εύκολα έχουμε ότι $k_0 \cdot g(x) \in \mathcal{L}^1\,(\mathbb{R}^d)$ και:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\; g(x)\; \mathrm{d}x = \sum_{i\in I} \lambda_i \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\; a_i(x)\; \mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{i\in I} \lambda_i \int\limits_{B_i} \left[f(x) - f_{B_i}\right] a_i(x)\; \mathrm{d}x$$

αφού $supp\; a_i \subseteq B_i$ και $\int\limits_{\mathbb{R}^d} a_i(x)\mathrm{d}x = 0.$

Επομένως,

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\; g(x)\; \mathrm{d}x\right| \leq \sum_{i\in I} \frac{|\lambda_i|}{|B_i|} \int\limits_{B_i} \left|f(x) - f_{B_i}\right| \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \ ||f||_* \cdot \sum_{i \in I} |\lambda_i| < +\infty$$

Δηλαδή, $fg \in \mathcal{L}^1 \left(\mathbb{R}^d\right)$ και απο την (8) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης. Άρα παίρνουμε απο τις (5), (7) ότι:

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x \right| \leq 3\, ||f||_* \cdot \sum_{i \in I} |\lambda_i|$$

και επειδή αυτό ισχύει για κάθε επιλογή των $\lambda_i$ και των ατόμων $a_i$ που ο γραμμικός συνδυασμός τους δίνει την $g$, τότε:

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x \right| \leq 3\, ||f||_* \cdot ||g||_{H^1_{at}} \leq \ c' \cdot ||f||_* \cdot ||g||_{H^1} \ (9)$$

Τώρα για $g \in H^1_a \left(\mathbb{R}^d\right)$ ορίζουμε :

$$\ell(g) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

Θα επεκτείνουμε τον ορισμό σε ολόκληρο τον χώρο $H^1 \left(\mathbb{R}^d\right)$ :

Επειδή το $H^1_a \left(\mathbb{R}^d\right)$ είναι πυκνό υποσύνολο του $H^1 \left(\mathbb{R}^d\right)$ τότε για $g \in H^1 \left(\mathbb{R}^d\right)$ έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία $g_n \in H^1_a \left(\mathbb{R}^d\right)$ τέτοια ώστε:

$$||g_n - g||_{H^1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \ \ (10)$$

Συνεπώς, με χρήση της (9) και της (10) έχουμε:

$$\left|\ell(g_n) - \ell(g_m)\right| = \left|\ell(g_n - g_m)\right| \leq \ c' \cdot ||f||_* \cdot ||g_n - g_m||_{H^1} \xrightarrow[n,m \to +\infty]{} 0$$

Δηλαδή η $\ell(g_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στον πλήρη μετρικό χώρο $\mathbb{C}$, άρα συγκλίνει.
Οπότε, επεκτείνουμε το συναρτησοειδές ώς εξής, για $g \in H^1 \left(\mathbb{R}^d\right)$ :

$$\ell(g) := \lim_{n \to +\infty} \ell(g_n)$$

Ο ορισμός είναι καλός, απο τις παραπάνω παρατηρήσεις.

Τώρα, θα αποδείξουμε το μονοσήμαντο του ορισμού. Αν υπάρχουν $g_n,\ h_n \in H^1_a \left(\mathbb{R}^d\right)$ με

$$||g_n - g||_{H^1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\,, \quad ||h_n - g||_{H^1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

τότε απο την (10) έχουμε:

$$\big|\ell(g_n)-\ell(h_n)\big| = \big|\ell(g_n-h_n)\big| \le\ c^{'}\cdot \big|\big|f\big|\big|_{*}\cdot \big|\big|g_n-h_n\big|\big|_{H^{\,1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Άρα η ακολουθία $\Big(\ell(g_1),\ell(h_1),...,\ell(g_n),\ell(h_n),...\Big)$ είναι ακολουθία Cauchy στον πλήρη μετρικό χώρο $\mathbb{C}$ και άρα συγκλίνει σε κάποιον αριθμό $\alpha$. Επομένως, κάθε υποακολουθία της συγκλίνει στο $\alpha$ και ορίζουμε:

$$\ell(g) := \alpha = \lim_{n\to+\infty}\ell(g_n) = \lim_{n\to+\infty}\ell(h_n)$$

Τέλος, απο την (12) και τον ορισμό του $\ell(g)$ για $g\in H^{\,1}\,(\mathbb{R}^d)$ έχουμε:

$$\big|\ell(g)\big| \le\ c^{'}\cdot \big|\big|f\big|\big|_{*}\cdot \big|\big|g\big|\big|_{H^{\,1}}$$

δηλαδή,

$$\big|\big|\ell\big|\big| \le\ c^{'}\cdot \big|\big|f\big|\big|_{*}$$

□

Τώρα θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε το αντίστροφο του **Θεωρήματος 5.1**.

***Θεώρημα* 5.2.** *Έστω $\ell$ φραγμένο συναρτησοειδές στον χώρο $H^{\,1}\,(\mathbb{R}^d)$.*
*Τότε υπάρχει $f\in\mathcal{BMO}\,(\mathbb{R}^d)$ τέτοια ώστε:*

$$\ell(g) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

*για κάθε $g\in H^{1}_{a}\,(\mathbb{R}^d)$ και:*

$$\big|\big|f\big|\big|_{*} \le\ c\,\big|\big|\ell\big|\big|$$

*Απόδειξη.* Έστω $B\subseteq\mathbb{R}^d$ μπάλα. Ορίζουμε ώς $\mathcal{L}^2_B\,(\mathbb{R}^d)$ τον εξής χώρο:

$$\mathcal{L}^2_B\,(\mathbb{R}^d) := \Big\{\ g\in\mathcal{L}^2\,(\mathbb{R}^d)\ \text{ με }\ supp\,g\subseteq B\ \Big\}$$

Επίσης, ορίζουμε μια νόρμα για αυτόν τον χώρο, που δεν είναι άλλη απο την νόρμα του χώρου $\mathcal{L}^2\,(\mathbb{R}^d)$ περιορισμένη στην μπάλα $B$. Έτσι, για $g\in\mathcal{L}^2_B\,(\mathbb{R}^d)$ έχουμε:

$$\big|\big|g\big|\big|_{2,B} = \Bigg(\ \int\limits_{B}\big|g(x)\big|^2\,\mathrm{d}x\ \Bigg)^{\frac{1}{2}}$$

Επίσης ορίζουμε τον χώρο $\mathcal{L}^2_{B,0}\left(\mathbb{R}^d\right)$ :

$$\mathcal{L}^2_{B,0}\left(\mathbb{R}^d\right) := \left\{ \, g \in \mathcal{L}^2_B\left(\mathbb{R}^d\right) \;\text{ με }\; \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x = 0 \,\right\}$$

Βλέπουμε οτι ο χώρος αυτός είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου $\mathcal{L}^2_B\left(\mathbb{R}^d\right)$ αφού για δύο συναρτήσεις στον χώρο $\mathcal{L}^2_{B,0}\left(\mathbb{R}^d\right)$ , το άθροισμα τους ανήκει σε αυτόν, καθώς και το γινόμενο μιας συνάρτησης με έναν αριθμό, επίσης ανήκει στον χώρο αυτό. Τοτε ο χώρος $\mathcal{L}^2_{B,0}\left(\mathbb{R}^d\right)$ είναι χώρος Hilbert, ώς κλειστό υποσύνολο του πλήρους μετρικού χώρου $\mathcal{L}^2_B\left(\mathbb{R}^d\right)$ με νόρμα την $\big|\big|\cdot\big|\big|_{2,B}$ .

Τώρα, θα δούμε οτι $\mathcal{L}^2_{B,0}\left(\mathbb{R}^d\right) \subseteq H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ . Έστω $g \in \mathcal{L}^2_{B,0}\left(\mathbb{R}^d\right)$:
Γυρίζουμε στην απόδειξη του **Λήμματος 4.1**. Αν $B = B(\bar{x}, r)$ τότε ορίζω $B^* = B(\bar{x}, 2r)$.
Τότε αν $x \in B^*$ έχουμε:

$$\Big|g * \Phi_t(x)\Big|^2 = \Big|\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(y)\;\Phi_t(x-y)\;\mathrm{d}y\Big|^2 \leq \left[\,\big|\big|g\big|\big|_{2,B}\;\cdot\;\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Big|\Phi_t(x-y)\Big|^2\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\,\right]^2 \leq$$

$$\leq\; c_d\,\big|\big|g\big|\big|^2_{2,B}$$

Με την πρώτη ανισότητα να προκύπτει απο την ανισότητα Cauchy-Schwartz και η δεύτερη απο παρόμοια εκτίμηση όπως αυτή που κάναμε στο **Λήμμα 4.1**.
Συνεπώς,

$$\Big(M_\Phi\, g(x)\Big)^2 = \sup_{t>0}\Big(\big|g * \Phi_t(x)\big|\Big)^2 \leq\; c_d\,\big|\big|g\big|\big|^2_{2,B}$$

και άρα,

$$\int\limits_{B^*} M_\Phi\, g(x)\,\mathrm{d}x \leq \left[\;\int\limits_{B^*}\left(\;M_\Phi\, g(x)\right)^2\mathrm{d}x\;\right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq\; c_d^{'}\;\big|B^*\big|^{\frac{1}{2}}\;\big|\big|g\big|\big|_{2,B} \leq\; c_d^{''}\;\big|B\big|^{\frac{1}{2}}\;\big|\big|g\big|\big|_{2,B}\;\;(1)$$

Με την πρώτη ανισότητα να προκύπτει απο την ανισότητα Jensen και η τελευταια ανισότητα απο το γεγονός οτι οι μπάλα $B^*$ είναι ομόκεντρη με την μπάλα $B$ και έχει διπλάσια ακτίνα.

Αν $x \notin B^*$

$$\Big|g * \Phi_t(x)\Big| = \Big|\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(y)\;\Big[\Phi_t(x-y) - \Phi_t(x-\bar{x})\Big]\;\mathrm{d}y\;\Big| \leq$$

$$\leq \; \big|\big|g\big|\big|_{2,B} \; \cdot \; \left(\int\limits_B \Big|\Phi_t(x-y) - \Phi_t(x-\bar{x})\Big|^2 \, \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \;\; (2)$$

και όπως είδαμε στην απόδειξη του **Λήμματος 4.1.**

$$\Big|\Phi_t(x-y) - \Phi_t(x-\bar{x})\Big| \leq c_d \, \frac{r}{|x-\bar{x}|^{d+1}} \;\; \text{για κάθε } y \in B \;\; (3)$$

Άρα απο τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε ότι:

$$M_\Phi \, g(x) = \sup_{t>0} \Big|g * \Phi_t(x)\Big| \leq \; c_d \, \big|\big|g\big|\big|_{2,B} \; \big|B\big|^{\frac{1}{2}} \, \frac{r}{|x-\bar{x}|^{d+1}} \;\; (4)$$

και ολοκληρώνοντας ώς προς $x \in \mathbb{R}^d \setminus B^*$ :

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus B^*} M_\Phi \, g(x) \, \mathrm{d}x \leq \; c_d^* \; \big|B\big|^{\frac{1}{2}} \; \big|\big|g\big|\big|_{2,B} \;\; (5)$$

και απο τις σχέσεις (1) και (5) υπάρχει σταθερά $c_d$ τέτοια ώστε:

$$\big|\big|M_\Phi \, g\big|\big|_1 \leq \; c_d \; \big|B\big|^{\frac{1}{2}} \; \big|\big|g\big|\big|_{2,B}$$

και άρα τελικά απο το **Θεώρημα 2.1**. έχουμε ότι $g \in H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ και:

$$\big|\big|g\big|\big|_{H^1} \leq \; c_d \; \big|B\big|^{\frac{1}{2}} \; \big|\big|g\big|\big|_{2,B} \;\; (7)$$

Τώρα περιορίζουμε το συναρτησοειδές $\ell$ για συναρτήσεις στον χώρο $\mathcal{L}^2_{B,0}\left(\mathbb{R}^d\right)$ και το ονομάζουμε $\ell^B$. Προφανώς έχουμε ότι το $\ell^B$ ανήκει στον δυϊκό χώρο του $\mathcal{L}^2_{B,0}\left(\mathbb{R}^d\right)$ και όπως είδαμε αυτός ο χώρος είναι χώρος Hilbert. Επομένως από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz έχουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση $F^B \in \mathcal{L}^2_{B,0}\left(\mathbb{R}^d\right)$ τέτοια ώστε:

$$\ell^B(g) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} F^B(x) \; g(x) \, \mathrm{d}x = \int\limits_B F^B(x) \; g(x) \, \mathrm{d}x \;\; \text{για κάθε } g \in \mathcal{L}^2_{B,0}\left(\mathbb{R}^d\right) \;\; (8)$$

και

$$\big|\big|\ell^B\big|\big| = \big|\big|F^B\big|\big|_{2,B} \;\; (9)$$

Τώρα, έστω $g \in \mathcal{L}^2_{B,0}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Τότε, αφου το $\ell$ είναι φραγμένο συναρτησοειδές του χώρου $H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ και από την σχέση (7) έχουμε ότι:

$$\big|\ell(g)\big| \leq \; \big|\big|\ell\big|\big| \; \big|\big|g\big|\big|_{H^1} \leq \; \big|\big|\ell\big|\big| \; c_d \, \big|B\big|^{\frac{1}{2}} \; \big|\big|g\big|\big|_{2,B}$$

Δηλαδή,

$$\left|\ell^B(g)\right| \leq \ \left|\left|\ell\right|\right| c_d \left|B\right|^{\frac{1}{2}} \ \left|\left|g\right|\right|_{2,B}$$

Το οποίο μας δίνει, από τον ορισμό της νόρμας ενός φραγμένου συναρτησοειδούς:

$$\left|\left|\ell^B\right|\right| \leq \ \left|\left|\ell\right|\right| c_d \left|B\right|^{\frac{1}{2}}$$

Συνεπώς, από το τελευταίο αποτέλεσμα και με χρήση της (9) έχουμε:

$$\left|\left|F^B\right|\right|_{2,B} \leq \ \left|\left|\ell\right|\right| c_d \left|B\right|^{\frac{1}{2}} \ (10)$$

Οπότε για κάθε μπάλα $B$ παίρνουμε μια συνάρτηση $F^B$. Εμείς θέλουμε να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση $f$ η οποία θα ανήκει στον χώρο $\mathcal{BMO}\left(\mathbb{R}^d\right)$ και θα έχει την εξής ιδιότητα,
για κάθε μπάλα $B$ :

$$f(x) - F^B(x) = c \ \text{ για κάποια σταθερά } c \text{ και για σχεδόν κάθε } x \in B$$

Πρίν κατασκευάσουμε αυτή την $f$ θα κάνουμε μια απλή παρατήρηση:

Αν $B_1, \ B_2$ μπάλες με $B_1 \subseteq B_2$ τότε $F^{B_1}(x) - F^{B_2}(x) = c$ για κάποια σταθερά $c$ και
για σχεδόν κάθε $x \in B_1$. Γιατί:

$$\ell^{B_1}(g) = \int\limits_{B_1} F^{B_1}(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x \ \text{ για κάθε } g \in \mathcal{L}^2_{B_1,0}\left(\mathbb{R}^d\right) \ (11)$$

και

$$\ell^{B_2}(g) = \int\limits_{B_2} F^{B_2}(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x \ \text{ για κάθε } g \in \mathcal{L}^2_{B_2,0}\left(\mathbb{R}^d\right) \ (12)$$

Όμως, $\mathcal{L}^2_{B_1,0}\left(\mathbb{R}^d\right) \subseteq \mathcal{L}^2_{B_2,0}\left(\mathbb{R}^d\right)$ άρα από τις σχέσεις (11) και (12) έχουμε:

$$\ell^{B_1}(g) = \ell^{B_2}(g) \ \text{ για κάθε } g \in \mathcal{L}^2_{B_1,0}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

Δηλαδή,

$$\int\limits_{B_1} \left[F^{B_1}(x) - F^{B_2}(x)\right] g(x)\, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{για κάθε } g \in \mathcal{L}^2_{B_1,0}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

Επομένως, υπάρχει σταθερά $c$ τέτοια ώστε:

$$F^{B_1}(x) - F^{B_2}(x) = c \quad \text{για σχεδόν κάθε } x \in B_1 \quad (13)$$

Τώρα, έστω $B_j = B(0, j)$ για $j \in \mathbb{N}$.
Ορίζουμε τις εξής ποσότητες $c_j$, με $j \in \mathbb{N}$ :

$$c_j := F^{B_1}(x) - F^{B_j}(x) \quad \text{για σχεδόν κάθε } x \in B_1$$

Επειδή $B_1 \subseteq B_j$ τότε απο την προηγούμενη παρατήρηση οι ποσότητες $c_j$ είναι σταθερές.
Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f^{B_j}$ ως εξής:

$$f^{B_j}(x) := F^{B_j}(x) + c_j$$

Τώρα, αν $B_{j_1} \subseteq B_{j_2}$ έχουμε ότι :

$$f^{B_{j_1}}(x) = f^{B_{j_2}}(x) \quad \text{για σχεδόν κάθε } x \in B_{j_1}$$

Γιατί:
για σχεδόν κάθε $x \in B_{j_1}$ έχουμε $F^{B_{j_1}}(x) - F^{B_{j_2}}(x) = c$ συνεπώς:

$$f^{B_{j_1}}(x) - f^{B_{j_2}}(x) \ = \ c_{j_1} - c_{j_2} + c \ =$$

$$= \ F^{B_1}(x) - F^{B_{j_1}}(x) - F^{B_1}(x) + F^{B_{j_2}}(x) + c \ =$$

$$= \ -c + c \ = \ 0$$

Άρα μπορουμε να ορίσουμε μονοσήματα την συνάρτηση $f$ με τύπο:

$$f(x) = f^{B_j}(x) \quad \text{για } x \in B_j$$

Δηλαδή,

$$f(x) = F^{B_j}(x) + c_j \quad \text{για } x \in B_j \ \ (14)$$

Τώρα, έστω $x \in \mathbb{R}^d$ και μια μπάλα $B$ με $B \ni x$. Τότε υπάρχει μια μπάλα $B_j$ όπως πάνω, τέτοια ώστε $B \subseteq B_j$. Επομένως υπάρχει μια σταθερά $c$ τέτοια ώστε $F^{B_j}(x) - F^{B}(x) = c$ για σχεδόν κάθε $x \in B$.
Απο αυτό το γεγονός και την σχέση (14) έχουμε για σχεδόν κάθε $y \in B$ :

$$f(y) = F^{B}(y) + c + c_j \ \ (15)$$

και άρα:

$$f_B = \frac{1}{|B|} \int_B F^B(y) + c + c_j \, \mathrm{d}y = c + c_j \ \ (16)$$

με την τελευταία ισότητα να προκύπτει αφού $\int_B F^B(y) \, \mathrm{d}y = 0$ εξ' ορισμού.

Συνεπώς απο τις (15), (16) και την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε:

$$\frac{1}{|B|} \int_B \left| f(y) - f_B \right| \mathrm{d}y \ \leq \ \left( \int_B \frac{1}{|B|^2} \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_B \left| f(y) - f_B \right|^2 \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left( \frac{1}{|B|} \int\limits_B \left| F^B(y) \right|^2 \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{2}} \; \leq \; c_d \left|\left| \ell \right|\right| \; (17)$$

Με την τελευταία ανισότητα να προκύπτει απο την σχέση (10).
Επομένως παίρνωντας supremum ως προς όλες τις μπάλες $B$ με $B \ni x$ :

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int\limits_B \left| f(y) - f_B \right| \mathrm{d}y \; \leq \; c_d \left|\left| \ell \right|\right|$$

Δηλαδή $f \in \mathcal{BMO}\left(\mathbb{R}^d\right)$ και:

$$\left|\left| f \right|\right|_* \; \leq \; c_d \left|\left| \ell \right|\right|$$

Μέχρι τώρα έχουμε για κάθε μπάλα $B$:

$$\ell^B(g) = \int\limits_B F^B(x) \, g(x) \, \mathrm{d}x \;\; \text{για κάθε } g \in \mathcal{L}^2_{B,0}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

Δηλαδή,

$$\ell^B(g) = \int\limits_B f(x) \, g(x) \, \mathrm{d}x \;\; \text{για κάθε } g \in \mathcal{L}^2_{B,0}\left(\mathbb{R}^d\right) \;\; (18)$$

Με την τελευταία σχέση να προκύπτει απο την (15) καθώς και ότι $\int\limits_B g(x) \, \mathrm{d}x = 0.$

Τώρα, έστω $g \in H^1_a\left(\mathbb{R}^d\right)$. Τότε υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{C}$ και $a_i$ άτομα με $i \in I,$ με $I$ πεπερασμένο σύνολο δεικτών τέτοια ώστε:

$$g(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i \, a_i(x)$$

Αν $supp \; a_i \subseteq B_i$ τότε υπάρχει μπάλα $B$ τέτοια ώστε $\bigcup\limits_{i \in I} B_i \subseteq B$ και τελικά:

$$\int\limits_B \left| g(x) \right|^2 \mathrm{d}x = \int\limits_B \left| \sum_{i \in I} \lambda_i \, a_i(x) \right|^2 \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq |I| \cdot \sum_{i \in I} \frac{|\lambda_i|^2}{|B_i|^2} \; < +\infty$$

με την ανισότητα να προκύπτει απο την ανισότητα Cauchy-Schwartz καθώς και ότι $\left| a_i(x) \right| \leq \dfrac{1}{|B|}$ .

Επίσης,

$$\int\limits_B g(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{i \in I} \lambda_i \int\limits_B a_i(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

με την τελευταία ισότητα να προκύπτει απο το γεγονός ότι $\int\limits_B a_i(x)\, \mathrm{d}x = \int\limits_{B_i} a_i(x)\, \mathrm{d}x = 0.$

Δηλαδή, $g \in \mathcal{L}^2_{B,0}\left(\mathbb{R}^d\right)$ και άρα για την $g$ ισχύει η σχέση (18). Συνεπώς, έχουμε ότι το συναρτησοειδές $\ell$ που εξετάζουμε, έχει την εξής μορφή, για κάθε $g \in H^1_a\left(\mathbb{R}^d\right)$:

$$\ell(g) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x \quad (19)$$

Οπότε, αν $g_n \in H^1_a\left(\mathbb{R}^d\right)$ ακολουθία με $g_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} g$ στον χώρο $H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ τότε:

$$\ell(g) = \lim_{n \to +\infty} \ell(g_n)$$

Αφού το $\ell$ είναι φραγμένο (άρα και συνεχές) συναρτησοειδές στον χώρο $H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Τέλος,

$$\left|\left|f\right|\right|_* \leq c_d \left|\left|\ell\right|\right|$$

□

Τα **Θεωρήματα 5.1.** και **5.2.** μας έδειξαν οτι ο δυϊκός χώρος του $H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ είναι ισόμορφος με τον χώρο $\mathcal{BMO}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

## Βιβλιογραφία

**[1]** E.M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, σελίδες 87-112, 140-144, Princeton University Press, 1993, second edition.

**[2]** E.M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, σελίδες 167-169, Princeton University Press, 1970.

**[3]** Gerald B. Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley and Sons, INC, 1999, second edition.