# ΜΕΛΕΤΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΧΩΡΙΩΝ ΚΑΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΚΑΙ ΑΡΧΙΚΩΝ – ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Στους γονείς μου
στην Οδύσσεια
και στη Κατερίνα

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ Δ. ΑΚΡΙΒΗΣ**

# Πρόλογος

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους με βοήθησαν για την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας. Πρώτα από όλους τον δάσκαλο μου Καθηγητή Γ. Ακρίβη. Η καθοδήγηση του, αν και από μακρυά το μεγαλύτερο διάστημα, στήριξε την προσπάθεια μου. Το κενό που δημιούργησε η απουσία του συμπλήρωσε ο Επίκουρος Καθηγητής Χ. Μακριδάκης, του οποίου η βοήθεια ήταν αμέριστη και πολύπλευρη. Μάλιστα το Μέρος Α της εργασίας μου βασίζεται σε ένα πρόβλημα που μου έθεσε. Τόσο ο Γ. Ακρίβης όσο και ο Χ. Μακριδάκης διάβασαν επανηλειμμένα το αρχικό χειρόγραφο και συνέβαλλαν αποφασιστικά στη διαμόρφωση της τελικής μορφής με υποδείξεις, διορθώσεις και βελτιώσεις στις αποδείξεις των εκτιμήσεων.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ τον Καθηγητή Β. Δουγαλή και τον Επίκουρο Καθηγητή Ε. Βάβαλη που μαζί με τον Γ. Ακρίβη αποτέλεσαν την τριμελή συμβουλευτική επιτροπή η οποία παρακολουθούσε την εξέλιξη της διατριβής καθώς και τον Καθηγητή Ι. Παπαδάκη, τον Καθηγητή Ι. Αθανασόπουλο και τον Επίκουρο Καθηγητή Γ. Κοσσιώρη οι οποίοι, μαζί με τους αναφερόμενους παραπάνω καθηγητές, συμμετείχαν στην επταμελή εξεταστική επιτροπή και διάβασαν την διατριβή μου.

Οι μεταπτυχιακές μου σπουδές και η ερευνητική μου εργασία υποστηρίχθηκαν οικονομικά κατά καιρούς από το Πανεπιστήμιο Κρήτης (Μαθηματικό Τμήμα και Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (ΠΕΝΕΔ #1747, χρηματοδότηση Γ.Γ.Ε.Τ)) και από το Ινστιτούτο Υπολογιστικών Μαθηματικών του Ιδρύματος Τεχνολογίας και Έρευνας. Προς αυτά τα δύο ιδρύματα εκφράζω τις ευχαριστίες μου.

# Περίληψη

Σε αυτήν την εργασία μελετούμε αριθμητικές μεθόδους για την προσέγγιση της λύσεως ελλειπτικών διαφορικών εξισώσεων καθώς και προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών και αποδεικνύουμε εκτιμήσεις σφάλματος βέλτιστης τάξης.

Στα Κεφάλαια 1–4 αναλύουμε μεθόδους πεπερασμένων χωρίων για τη διακριτοποίηση γραμμικών ελλειπτικών εξισώσεων δεύτερης τάξεως σε ένα φραγμένο, κυρτό, πολυγωνικό χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Πιο συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 1 αναφέρουμε γνωστά αποτελέσματα για μεθόδους πεπερασμένων χωρίων όπου η προσεγγιστική λύση ανήκει στο χώρο των συνεχών, κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων σε έναν τριγωνισμό $T_h$ του $\Omega$. Επίσης, κατασκευάζουμε ένα σχήμα πεπερασμένων χωρίων όπου ζητούμε μία προσεγγιστική λύση στο χώρο των όχι κατ' ανάγκη συνεχών, κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων, δηλαδή το χώρο πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart και αποδεικνύουμε βέλτιστης τάξης εκτιμήσεις σφάλματος τόσο στην $H^1$ όσο και στην $L^2$ νόρμα. Οι μέθοδοι που θεωρούμε σε αυτό το κεφάλαιο βασίζονται σε έναν δυϊκό διαμερισμό του $T_h$ που αποτελείται από μη επικαλυπτόμενα χωρία.

Στα Κεφάλαια 2 και 3 θεωρούμε μεθόδους διακριτοποίησης, για την εξίσωση του Poisson και για μία γενική ελλειπτική εξίσωση, που προκύπτουν ως προσεγγίσεις της αντίστοιχης μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων μέσω κανόνων αριθμητικής ολοκλήρωσης. Η προσεγγιστική λύση που κατασκευάζουμε ανήκει είτε στο χώρο των συνεχών κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων είτε στο χώρο των Crouzeix–Raviart και αποδεικνύουμε βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος στην $H^1$ και $L^2$ νόρμα. Επιλέγοντας τώρα συγκεκριμένους κανόνες αριθμητικής ολοκλήρωσης οδηγούμαστε στα διακριτά σχήματα του Κεφαλαίου 1 καθώς και σε νέες μεθόδους πεπερασμένων χωρίων.

Στο Κεφάλαιο 4 διακριτοποιούμε την εξίσωση του Poisson σύμφωνα με τη μέθοδο που εισάγουμε στο Κεφάλαιο 2 και αποδεικνύουμε βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος στην $W^{1,\infty}$ ημινόρμα και $L^\infty$ νόρμα.

Στο δεύτερο μέρος αυτής της εργασίας θεωρούμε δύο προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών και αναλύουμε μεθόδους διακριτοποίησής

τους. Έτσι στο Κεφάλαιο 5 θεωρούμε ένα μη άκαμπτο πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής $Au'(t) = B(t, u(t)),\ t \in [0, t^\star]$, όπου $t^\star > 0$, $A$ είναι ένας αυτοσυζυγής θετικά ορισμένος, γραμμικός τελεστής σε ένα χώρο Hilbert $H$ και $B$ ένας πιθανόν μη γραμμικός τελεστής. Διακριτοποιούμε ως προς το χώρο με μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων και ως προς το χρόνο με γραμμικές άμεσες πολυβηματικές μεθόδους. Αποδεικνύουμε βέλτιστης τάξης εκτιμήσεις σφάλματος. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τα αφηρημένα αποτελέσματα στην εξίσωση του Rosenau στο $\mathbb{R}^n$, $n \leq 3$, σε μία γενικευμένη εξίσωση τύπου Sobolev σε μία χωρική διάσταση, σε μία ψευδοπαραβολική εξίσωση στον $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, και σε ένα σύστημα εξισώσεων τύπου Boussinesq.

Τέλος στο Κεφάλαιο 6 θεωρούμε ένα απλό παραβολικό πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση της θερμότητας στο $\Omega \times [0, T]$, όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα κυρτό, φραγμένο πολυγωνικό χωρίο και $T > 0$. Διακριτοποιούμε ως προς το χώρο με τις μεθόδους πεπερασμένων χωρίων που μελετήσαμε στο πρώτο μέρος αυτής της εργασίας. Ψάχνουμε μία λύση του ημιδιακριτού προβλήματος στο χώρο πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart. Στη συνέχεια διακριτοποιούμε τα ημιδιακριτά σχήματα ως προς το χρόνο με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler. Αποδεικνύουμε βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος στην $H^1$ και $L^2$ νόρμα για τα ημιδιακριτά και πλήρως διακριτά σχήματα που κατασκευάζουμε.

# Abstract

We analyse numerical methods for the approximation of the solution of elliptic partial differential equations and initial and boundary value problems and derive optimal order error estimates.

In Chapters 1–4 we analyse finite volume discretizations of elliptic differential equations of second order in a bounded, convex, polygonal domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Thus, in Chapter 1 we present known results for finite volume methods approximating from the standard finite element space of continuous piecewise linear functions in a triangulation $T_h$ of $\Omega$. Also we construct a finite volume scheme where we seek an approximate solution in the nonconforming finite element space of piecewise linear functions, i.e., the finite element space of Crouzeix–Raviart, and prove optimal order error estimates in the $H^1$ and $L^2$ norm. Both methods considered in this chapter are based on a dual partition of $T_h$ consisting of nonoverlapping regions.

In Chapters 2 and 3 we discretize $-\Delta u + \sigma u = f$ and a general elliptic differential equation with a discrete method which is an approximation of the corresponding finite element method by quadrature rules. We construct approximate solutions either in the standard finite element space of continuous, piecewise linear functions or in the nonconforming finite element space of Crouzeix–Raviart and establish optimal order error estimates in $H^1$ and $L^2$ norm. For specific choices of quadrature rules we get the discrete schemes of Chapter 1 as well as new finite volume methods.

In Chapter 4 we consider again Poisson's equation, discretize it as in Chapter 2, and derive optimal order error estimates in $W^{1,\infty}$ seminorm and $L^\infty$ norm.

The second part of this thesis is devoted to the discretization of two initial and boundary value problems. In Chapter 5 we consider a nonstiff initial value problem of the abstract form $Au'(t) = B(t, u(t)),\ t \in [0, t^\star]$, where $t^\star > 0$, $A$ is a linear, selfadjoint and positive definite operator in a Hilbert space $H$ and $B$ a possibly nonlinear operator. We discretize in space using finite element methods and in time by linear multistep methods and prove optimal order error estimates. Then we apply our abstract results to Rosenau's equation in $\mathbb{R}^n$, $n \leq 3$, to a generalized equation of

Sobolev type in one space dimension, to a pseudoparabolic equation in $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, and to a system of equations of Boussinesq type.

Finally, in Chapter 6 we consider an initial and boundary value problem for the heat equation in $\Omega \times [0, T]$, where $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is a bounded, convex, polygonal domain and $T > 0$. We use the finite volume methods considered in the first part of this thesis, to discretize in space and backward Euler's method to dicretize in time. The approximate solution at each time level is an element of the nonconforming finite element space of Crouzeix–Raviart. We prove optimal order error estimates in $H^1$ and $L^2$ norm for both the semidiscrete and fully discrete schemes.

# Περιεχόμενα

**Περίληψη** . . . . . vii
**Abstract** . . . . . ix
**Περιεχόμενα** . . . . . xi
**Πίνακας Συμβολισμών** . . . . . xv

**ΜΕΡΟΣ Α**

**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΧΩΡΙΩΝ ΓΙΑ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ**

**Εισαγωγή** . . . . . 3

**1. Μέθοδοι πεπερασμένων χωρίων για ελλειπτικές εξισώσεις. (Γνωστά και νέα αποτελέσματα)** . . . . . 7
1.1 Εισαγωγή . . . . . 7
1.2 Συμβολισμοί . . . . . 12
1.3 Η εξίσωση του Poisson (Συνεχή πεπερασμένα στοιχεία) . . . . . 17
1.4 Μία γενική ελλειπτική εξίσωση (Συνεχή πεπερασμένα στοιχεία) 20
1.5 Η εξίσωση του Poisson (Μη συνεχή πεπερασμένα στοιχεία) . . . . 24
1.6 Μία γενική ελλειπτική εξίσωση (Μη συνεχή πεπερασμένα στοιχεία) . . . . . 41

**2. Μία νέα προσέγγιση: Απλή ελλειπτική εξίσωση** . . . . . 63
2.1 Εισαγωγή . . . . . 63
2.2 Συμβολισμοί και προκαταρκτικά . . . . . 66
2.3 Ένα γενικό διακριτό πρόβλημα . . . . . 68
2.4 Εφαρμογές Ι: Μέθοδοι πεπερασμένων χωρίων με συνεχή πεπερασμένα στοιχεία . . . . . 75
2.5 Εφαρμογές ΙΙ: Μέθοδοι πεπερασμένων χωρίων με μη συνεχή πεπερασμένα στοιχεία . . . . . 81

**3. Μία νέα προσέγγιση: Ελλειπτικές εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές** . . . . . 89
3.1 Εισαγωγή . . . . . 89
3.2 Ένα γενικό διακριτό πρόβλημα . . . . . 92
3.3 Εφαρμογές Ι: Μέθοδοι πεπερασμένων χωρίων με συνεχή πεπερασμένα στοιχεία . . . . . 103
3.4 Εφαρμογές ΙΙ: Μέθοδοι πεπερασμένων χωρίων με μη συνεχή πεπερασμένα στοιχεία . . . . . 113

**4. Ομοιόμορφες εκτιμήσεις σφάλματος για την εξίσωση του Poisson** . . . . . 123
4.1 Εισαγωγή . . . . . 123
4.2 Συμβολισμοί και προκαταρκτικά . . . . . 124
4.3 Γενικές εκτιμήσεις σφάλματος . . . . . 127
4.4 Εφαρμογές Ι: Μέθοδοι πεπερασμένων χωρίων με συνεχή πεπερασμένα στοιχεία . . . . . 136
4.5 Εφαρμογές ΙΙ: Μέθοδοι πεπερασμένων χωρίων με μη συνεχή πεπερασμένα στοιχεία . . . . . 139

## ΜΕΡΟΣ Β

## ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

**Εισαγωγή** . . . . . 145

**5. Πολυβηματικές μέθοδοι για μη άκαμπτες διαφορικές εξισώσεις** . . . . 147
5.1 Εισαγωγή . . . . . 147
5.2 Προκαταρκτικά και το ημιδιακριτό πρόβλημα . . . . . 151
5.3 Πλήρως διακριτά σχήματα: Η μέθοδος του Euler . . . . . 161
5.4 Πλήρως διακριτά σχήματα: Άμεσες πολυβηματικές μέθοδοι . . . 166
5.5 Εφαρμογές . . . . . 177

**6. Μέθοδοι πεπερασμένων χωρίων για παραβολικά προβλήματα** . . . . . 201
6.1 Εισαγωγή . . . . . 165
6.2 Ένα ημιδιακριτό πρόβλημα σε επικαλυπτόμενο διαμερισμό . . . 203
6.3 Ένα πλήρως διακριτό πρόβλημα σε επικαλυπτόμενο διαμερισμό . . . . . 209
6.4 Ένα ημιδιακριτό πρόβλημα σε μη επικαλυπτόμενο διαμερισμό . . . . . 215

6.5 Ένα πλήρως διακριτό πρόβλημα σε μη επικαλυπτόμενο διαμερισμό . . . . . 184

**Βιβλιογραφία** . . . . . 189

## Πίνακας συμβολισμών

| | |
|---|---|
| $\mathcal{A}(K)$ | το σύνολο των τετράπλευρων υποχωρίων ενός τριγώνου $K$ αν συνδέσουμε ένα εσωτερικό σημείο $z_K$ με τα μέσα των πλευρών του. |
| $\mathcal{B}_c$ | δυϊκός διαμερισμός του $T_h$ που προκύπτει από χωρία του $\cup_K \mathcal{A}(K)$. |
| $\mathcal{B}_n$ | δυϊκός διαμερισμός του $T_h$ που προκύπτει από χωρία του $\cup_K \widetilde{T_h}(K)$. |
| $E_h(K)$ | οι πλευρές ενός τριγώνου $K \in T_h$. |
| $E_h$ | οι πλευρές του $T_h$. |
| $E_h^{\rm in}$ | οι πλευρές του $T_h$ που δεν είναι μέρος του $\partial\Omega$. |
| $E_h^\star(b_z)$ | $= \{\ell :\ \ell = e \cap b_z,\ e \in E_h(K),\ K \in T_h(V_z)\},\ b_z \in \mathcal{B}_c,$ $z \in Z_h^{\rm in}$. |
| $E_h^\star(V_z)$ | $= \cup_{K\in T_h(V_z)} E_h(K) \setminus \{e \in \cup_{K\in T_h(V_z)} E_h(K) :\ e \subset \partial V_z\},$ $V_z \in \mathcal{V}_c,\ z \in Z_h^{\rm in}$. |
| $e_z$ | η πλευρά του $K$ που βρίσκεται απέναντι από την $z \in Z_h(K)$. |
| $\mathbb{P}_\mu$ | ο χώρος πολυωνύμων δύο μεταβλητών βαθμού το πολύ $\mu \in \mathbb{N}$. |
| $S_h$ | όχι κατ' ανάγκη συνεχείς (nonconforming), κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις. |
| $S_h^0$ | $= \{v \in S_h :\ v(m_e) = 0,\ e \in E_h \setminus E_h^{\rm in}\}$. |
| $T_h$ | τριγωνισμός του $\Omega$. |
| $\widetilde{T_h}(K)$ | το σύνολο των τριγωνικών υποχωρίων ενός τριγώνου $K$ αν συνδέσουμε ένα εσωτερικό σημείο $z_K$ με τις κορυφές του. |
| $T_h(V_e)$ | τα τρίγωνα $K \in T_h$ που αποτελούν το $V_e$. |
| $T_h(V_z)$ | τα τρίγωνα $K \in T_h$ που αποτελούν το $V_z$. |
| $X_h$ | συνεχείς κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις. |
| $X_h^0$ | $= \{v \in X_h :\ v\vert_{\partial\Omega} = 0\}$. |
| $V_z$ | το σύνολο των τριγώνων με κοινή κορυφή $z \in Z_h$. |
| $V_e$ | το σύνολο των τριγώνων με κοινή πλευρά $e \in E_h$. |
| $\mathcal{V}_c$ | τα χωρία $V_z$. |
| $\mathcal{V}_n$ | τα χωρία $V_e$. |
| $Z_h(K)$ | οι κορυφές ενός τριγώνου $K \in T_h$. |
| $Z_h$ | οι κορυφές του $T_h$. |

| | |
|---|---|
| $Z_h^{\text{in}}$ | οι εσωτερικές κορυφές του $T_h$. |
| $z_e^N,\ z_e^S$ | οι δύο κορυφές του $T_h$ που είναι άκρα της $e \in E_h$. |

**ΜΕΡΟΣ Α**

# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΧΩΡΙΩΝ ΓΙΑ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

# Εισαγωγή

Στο πρώτο το μέρος της εργασίας αυτής θα μελετήσουμε μεθόδους πεπερασμένων χωρίων (finite volume) για γραμμικές ελλειπτικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξεως. Στο Κεφάλαιο 1 δίνουμε μία σύντομη περιγραφή του τρόπου κατασκευής αυτών των μεθόδων. Οι μέθοδοι πεπερασμένων χωρίων μπορούν να υλοποιηθούν με τη χρήση είτε πεπερασμένων διαφορών είτε πεπερασμένων στοιχείων. Έχουν ευρέως χρησιμοποιηθεί, κυρίως ως σχήματα πεπερασμένων διαφορών, για τη διακριτοποίηση προβλημάτων που συναντούμε στη μηχανική των ρευστών και γενικότερα σε προβλήματα νόμων διατήρησης. Εμείς εδώ θα επιλέξουμε να μελετήσουμε σχήματα των οποίων η λύση ανήκει σε ένα χώρο πεπερασμένων στοιχείων. Θα αναφέρουμε μερικά γνωστά αποτελέσματα για τη διακριτοποίηση ελλειπτικών διαφορικών εξισώσεων σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ με μεθόδους πεπερασμένων χωρίων . Η προσεγγιστική λύση σε αυτά τα σχήματα ανήκει στο χώρο των συνεχών κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων σε έναν τριγωνισμό $T_h$ του $\Omega$. Η μέθοδος βασίζεται σε έναν δυϊκό διαμερισμό του $T_h$ που προκύπτει ως εξής: Θεωρούμε ένα σημείο στο εσωτερικό κάθε τριγώνου. Συνδέοντας στη συνέχεια αυτό το σημείο με το μέσο κάθε πλευράς του τριγώνου παίρνουμε έναν λεπτότερο διαμερισμό του $\Omega$. Η ένωση τώρα αυτών των υποχωρίων με κοινή μία κορυφή του τριγωνισμού $T_h$ δίνει τα χωρία που αποτελούν τον δυϊκό διαμερισμό του $T_h$. Οι Bank και Rose, [5], και ο Cai, [13], έχουν μελετήσει αυτή τη μέθοδο για την εξίσωση του Poisson και για μία γενικότερη ελλειπτική εξίσωση, αντίστοιχα. Όμως, ενώ στην [5] υποθέτουν μόνο ότι ο $T_h$ είναι μη εκφυλισμένος, βλ. Ορισμό 1.2.1, στην [13] χρειάζεται κανείς να υποθέσει διάφορες (περιοριστικές) συνθήκες τόσο για τον αρχικό διαμερισμό $T_h$, όπως ότι τα τρίγωνα είναι οξυγώνια, όσο και για τον δυϊκό διαμερισμό του, βλ. §1.4. Πάντως στις [5] και [13] αποδεικνύονται βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος στην $H^1$ νόρμα.

Έχοντας υπόψιν τη μέθοδο των Bank, Rose και Cai, θα κατασκευάσουμε ένα σχήμα πεπερασμένων χωρίων, όπου η προσεγγιστική λύση ανήκει στο χώρο πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart. Όπως και προηγουμένως, η μέθοδος βασίζεται σε έναν δυϊκό διαμερισμό του

$T_h$ που προκύπτει παρόμοια: Θεωρούμε ένα σημείο στο εσωτερικό κάθε τριγώνου. Συνδέοντας στη συνέχεια αυτό το σημείο με τις κορυφές του τριγώνου παίρνουμε έναν λεπτότερο διαμερισμό του $\Omega$. Η ένωση τώρα αυτών των υποχωρίων με κοινή μία πλευρά του τριγωνισμού $T_h$ δίνει τα χωρία που αποτελούν τον δυϊκό διαμερισμό του $T_h$. Υποθέτοντας ότι ο $T_h$ είναι μη εκφυλισμένος, δείχνουμε βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος στην $H^1$ και $L^2$ νόρμα, για την προσέγγιση τόσο της εξίσωσης του Poisson όσο και μίας γενικότερης ελλειπτικής εξίσωσης.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στην περίπτωση της εξίσωσης του Poisson οι μέθοδοι πεπερασμένων χωρίων της [5] και αυτή που εισάγουμε εδώ στην §1.5 και οι αντίστοιχες μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων είναι ισοδύναμες με γραμμικά συστήματα που διαφέρουν μόνο στο δεξιό μέλος. Αυτή όμως η ιδιότητα δεν διατηρείται και στην περίπτωση ενός γενικότερου ελλειπτικού τελεστή. Πάντως όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 3, μπορούμε να θεωρήσουμε τις μεθόδους πεπερασμένων χωρίων ως προσέγγιση της αντίστοιχης μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων.

Στο Κεφάλαιο 2 θεωρούμε μία απλή ελλειπτική εξίσωση της μορφής

$$-\Delta u + \sigma u = f, \quad \text{στο } \Omega, \quad u = 0, \quad \text{στο } \partial\Omega. \tag{1}$$

και για έναν πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο $V_h$ του $H_0^1(\Omega)$, την αντίστοιχη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων: Ζητείται $u_h \in V_h$, τέτοια ώστε

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla \chi \, dx + \int_\Omega \sigma u_h \chi \, dx = \int_\Omega f \chi \, dx, \quad \forall \chi \in V_h. \tag{2}$$

Εισάγουμε μία μέθοδο διακριτοποίησης του (1) που αποτελεί προσέγγιση της (2). Έτσι προσεγγίζουμε τον δεύτερο όρο της (2) με $\int \sigma Q(u_h \chi)$ $dx$ και το δεξιό μέλος με $\int f Q(\chi)\, dx$, όπου $\int Q(w)\, dx$ ορίζει έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης στο $\Omega$. Για αυτή τη νέα μέθοδο δείχνουμε βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος στην $H^1$ και $L^2$ νόρμα. Επιλέγοντας στη συνέχεια συγκεκριμένους κανόνες αριθμητικής ολοκλήρωσης, παίρνουμε τα διακριτά σχήματα της [5] και της §1.5 καθώς και νέες μεθόδους πεπερασμένων χωρίων.

Στο Κεφάλαιο 3 τώρα θεωρούμε μία γενικότερη ελλειπτική εξίσωση της μορφής

$$-\mathrm{div}\,(A\nabla u) + \sigma u = f, \quad \text{στο } \Omega, \quad u = 0, \quad \text{στο } \partial\Omega. \tag{3}$$

Θεωρούμε και πάλι το αντίστοιχο πρόβλημα πεπερασμένων στοιχείων: Ζητείται $u_h \in V_h$, τέτοια ώστε

$$\int_\Omega A\nabla u_h \cdot \nabla \chi \, dx + \int_\Omega \sigma u_h \chi \, dx = \int_\Omega f \chi \, dx, \quad \forall \chi \in V_h. \tag{4}$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον τύπο ολοκλήρωσης του Green στην (4) σε κάθε ένα τρίγωνο $K$ ενός τριγωνισμού $T_h$ του $\Omega$, παίρνουμε

$$\sum_{K\in T_h}\Big\{\int_{\partial K}(A\nabla u_h)\cdot n\chi\,ds-\int_K \operatorname{div}(A\nabla u_h)\chi\,dx\Big\} + \int_\Omega \sigma u_h\chi\,dx=\int_\Omega f\chi\,dx,\quad \forall\chi\in V_h. \tag{5}$$

Κατ' αναλογία με το Κεφάλαιο 2, εισάγουμε μία μέθοδο διακριτοποίησης που αποτελεί προσέγγιση της (5). Έτσι προσεγγίζουμε τον πρώτο όρο της (5) με $\int(A\nabla u_h)\cdot n\,Q_2(\chi)\,ds$ και τους υπόλοιπους με $\int \operatorname{div}(A\nabla u_h)Q_1(\chi)\,dx$, $\int \sigma Q_1(u_h\chi)\,dx$ και $\int fQ_1(\chi)\,dx$, αντίστοιχα, όπου $\int Q_2(w)\,ds$, και $\int Q_1(w)\,dx$ ορίζουν κανόνες αριθμητικής ολοκλήρωσης σε μία και δύο διαστάσεις, αντίστοιχα. Μάλιστα στην περίπτωση που ο $Q_2$ ορίζει έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης ακριβή για γραμμικές συναρτήσεις, και ο $A$ είναι ένας $2\times 2$ πίνακας σταθερών, οι μέθοδοι που θεωρούμε στα Κεφάλαια 2 και 3 ταυτίζονται. Δείχνουμε ακόμα βέλτιστης τάξης εκτιμήσεις σφάλματος στην $H^1$ και $L^2$ νόρμα για το διακριτό σχήμα που εισάγουμε. Επιλέγοντας στη συνέχεια συγκεκριμένους κανόνες αριθμητικής ολοκλήρωσης σε μία και δύο διαστάσεις οδηγούμαστε στα διακριτά σχήματα των [13] και §1.6 καθώς και σε νέες μεθόδους πεπερασμένων χωρίων.

Τέλος στο Κεφάλαιο 4 αποδεικνύουμε βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος στην $L^\infty$ νόρμα για τη μέθοδο του Κεφαλαίου 2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

# Μέθοδοι πεπερασμένων χωρίων για ελλειπτικές εξισώσεις (Γνωστά και νέα αποτελέσματα)

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλύσουμε μεθόδους πεπερασμένων χωρίων (finite volume) για τη διακριτοποίηση της εξίσωσης του Poisson καθώς και μίας γενικότερης ελλειπτικής εξίσωσης. Ζητούμε προσεγγίσεις της λύσης καθενός από τα παραπάνω προβλήματα σε χώρους προσαρμοζόμενων ή μη προσαρμοζόμενων τμηματικά γραμμικών συναρτήσεων (conforming ή nonconforming piecewise linear spaces).

## 1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μέθοδος πεπερασμένων χωρίων (finite volume method) είναι μία ευρέως διαδεδομένη μέθοδος διακριτοποίησης νόμων διατήρησης και προβλημάτων μεταφοράς και διάχυσης. Η ιδιαιτερότητα που παρουσιάζει στον τρόπο κατασκευής της, σε σχέση με τις γνωστές μεθόδους των πεπερασμένων διαφορών και των πεπερασμένων στοιχείων, είναι ότι πρώτα διαμερίζουμε το $\Omega$ σε υποχωρία και θεωρούμε σε καθένα από αυτά μία ολοκληρωτική εξίσωση ισοδύναμη με την αρχική διαφορική εξίσωση. Διακριτοποιώντας στη συνέχεια αυτές τις νέες εξισώσεις κατασκευάζουμε προσεγγίσεις της λύσεως.

Δεν είναι σαφές πότε η μέθοδος των πεπερασμένων χωρίων παρουσιάστηκε για πρώτη φορά με αυτό το όνομα. Μέθοδοι όμως που βασίζονται σε παρόμοιες ιδέες αναφέρονται στο βιβλίο του Varga, [74], όπως επίσης είναι το σχήμα του Godunov, [35], το σχήμα του Preissmann, (Preissmann box scheme), [57], καθώς και το το σχήμα του Keller, (Keller box scheme), [45], [46], (βλ. [52, Chapter 6]). Φαίνεται όμως ότι ο όρος finite volume παρουσιάστηκε στην αρχή της δεκαετίας 1970 για τη διακριτοποίηση του πλήρους δυναμικού της αεροδυναμικής εξίσωσης,

$$\nabla \cdot \varrho(\nabla u) = 0, \quad \text{στο } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{1.1.1}$$

όπου η συνάρτηση $\varrho = \varrho(|\nabla u|)$ δίνεται από την εξίσωση του Bernoulli, (βλ. [52, Chapter 6]).

Θα περιγράψουμε τώρα τον τρόπο κατασκευής μίας μεθόδου πεπερασμένων χωρίων. Θεωρούμε έναν διαμερισμό του $\Omega$ σε υποχωρία $V \subset \Omega$ με κατά τμήματα ομαλό σύνορο, που καλούνται χωρία ελέγχου ή κύτταρα (control volumes ή cells ή boxes) και ολοκληρώνουμε την (1.1.1) σε κάθε $V$. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον τύπο ολοκλήρωσης του Gauss, οπότε προκύπτει η ακόλουθη ολοκληρωτική σχέση σε κάθε χωρίο ελέγχου $V$

$$\int_{\partial V} \varrho \nabla u \cdot n \, ds = 0, \tag{1.1.2}$$

όπου $n$ είναι το μοναδιαίο κανονικό εξωτερικό διάνυσμα στο σύνορο $\partial V$.

Στην κλασική μέθοδο πεπερασμένων χωρίων χρησιμοποιούμε πεπερασμένες διαφορές σε ένα τετραγωνικό ή τριγωνικό διαμεριμό του $\Omega$ για τη διακριτοποίηση της (1.1.2). Προκύπτουν όμως διάφορα σχήματα ανάλογα με το σημείο στο οποίο προσεγγίζουμε τη λύση $u$ της (1.1.1). Έτσι αν θεωρήσουμε ως χωρία ελέγχου $V$, τα στοιχεία ενός διαμερισμού του $\Omega$ σε ορθογώνια, τα σχήματα που προσεγγίζουν τη $u$ στο κέντρο του $V$ ονομάζονται σχήματα κέντρου κυττάρου (cell center), ενώ αν η προσέγγιση γίνεται στις κορυφές του $V$ καλούνται σχήματα κορυφής κυττάρου (cell vetrex) και σχήματα πλευράς κυττάρου (cell edge), αν γίνεται στο μέσο των πλευρών, (βλ. [52, Chapter 6]).

Μία άλλη κατηγορία σχημάτων πεπερασμένων διαφορών προκύπτει αν εκτός από τον αρχικό διαμερισμό του $\Omega$ θεωρήσουμε και έναν δυϊκό διαμερισμό, όπου και ανήκουν τα χωρία ελέγχου $V$. Ένα τέτοιο σχήμα είναι το κέντρου κορυφής (vetrex center) όπου οι κορυφές των τετραγώνων του αρχικού τετραγωνισμού είναι το κέντρο ενός τεραγώνου που ανήκει στον δυϊκό διαμερισμό. Ένα τέτοιο σχήμα παρουσιάστηκε από τους Dick, [26] και Hall, [41], (βλ. [52, Chapter 6]).

Πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με την ανάλυση σχημάτων πεπερασμένων διαφορών που προέρχονται από μία μέθοδο πεπερασμένων χωρίων. Πρώτοι οι McDonald, [50], και οι MacCormack και Paullay, [49], εισήγαγαν τη μέθοδο για τη διακριτοποίηση εξισώσεων δυναμικής των ρευστών σε δύο διαστάσεις και οι Rizzi και Inouye, [60], σε τρείς διαστάσεις. Σχήματα πεπερασμένων χωρίων χρησιμοποιούνται με επιτυχία ακόμα για τη διακριτοποίηση προβλημάτων μεταφοράς και διάχυσης (βλ. [52] και [62]), εξισώσεων τύπου Navier–Stokes, [25], καθώς και για υπερβολικά συστημάτα νόμων διατήρησης, βλ. παραδείγματος χάριν το βιβλίο των Godlewski και Raviart, [34], καθώς και τις αναφορές του.

Ένας άλλος τρόπος για να διακριτοποιήσουμε την (1.1.2) είναι με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων. Έτσι, ζητούμε μία συνάρτηση $u_h$ σε ένα χώρο πεπερασμένων στοιχείων τέτοια ώστε

$$\int_{\partial V} \varrho \nabla u_h \cdot n \, ds = 0, \tag{1.1.3}$$

Αν θεωρήσουμε λόγου χάριν έναν τριγωνισμό $T_h$ του $\Omega$, τα χωρία ελέγχου μπορεί να είναι τα ίδια τα τρίγωνα του $T_h$ ή να ανήκουν σε έναν δυϊκό διαμερισμό του $T_h$. Έτσι, οι Eymard, Gallouët και Herbin, [32], [43], οι Lazarov, Michev και Vassilevski, [48], [51], και ο Süli, [67], θεωρούν ως χωρία ελέγχου τα τρίγωνα του $T_h$ και κατασκευάζουν κατά τμήματα σταθερές προσεγγίσεις της $u$ με σχήματα κέντρου κυττάρου. Επίσης οι Bank και Rose, [5], και οι Cai, Mandel και McCormick, [13], [14], θεωρούν χωρία ελέγχου που ανήκουν σε έναν δυϊκό διαμερισμό του $T_h$ και κατασκευάζουν συνεχείς κατά τμήματα γραμμικές προσεγγίσεις της $u$ με σχήματα κορυφής κυττάρου.

Εμείς σε αυτήν την εργασία θα ασχοληθούμε με την ανάλυση σχημάτων πεπερασμένων χωρίων σε ένα τριγωνισμό $T_h$ του $\Omega$. Θεωρούμε χωρία ελέγχου που ανήκουν σε έναν δυϊκό διαμερισμό του $T_h$ και κατασκευάζουμε κατά τμήματα γραμμικές προσεγγίσεις. Σε αυτό το κεφάλαιο, καθώς και στα Κεφάλαια 2–4, θα μελετήσουμε τέτοιου είδους μεθόδους πεπερασμένων χωρίων για τη διακριτοποίηση ελλειπτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων της μορφής: Για δοσμένη συνάρτηση $f \in L^2(\Omega)$, ζητούμε να προσδιορίσουμε μία συνάρτηση $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(A\nabla u) + \sigma u &= f \quad \text{στο } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{στο } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

όπου $\Omega$ είναι ένα φραγμένο, κυρτό, πολυγωνικό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$ ένας δοσμένος πίνακας πραγματικών συναρτήσεων $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \le i, j \le 2$, και $\sigma$ μία ομαλή, μη αρνητική συνάρτηση στο $\Omega$, φραγμένη ομοιόμορφα από πάνω από μία σταθερά $\overline{\sigma}$. Υποθέτουμε ότι ο $A$ είναι ομοιόμορφα θετικά ορισμένος: Υπάρχει μία θετική σταθερά $\alpha_0$ τέτοια ώστε

$$\xi^T A(x)\xi \ge \alpha_0 \xi^T \xi, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \ \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{1.1.5}$$

Οι μέθοδοι που θα αναλύσουμε εδώ είναι βασίζονται στην "κλασική" μέθοδο των πεπερασμένων χωρίων. Ολοκληρώνοντας κατά μέρη τη διαφορική εξίσωση σε ένα τυχαίο υποχωρίο $V$ του $\Omega$, με ομαλό κατά τμήματα

σύνορο, προκύπτει μία ολοκληρωτική μορφή της αρχικής διαφορικής εξίσωσης,

$$-\int_{\partial V}(A\nabla u)\cdot n\,ds+\int_V \sigma u\,dx=\int_V f\,dx. \tag{1.1.6}$$

Με τη μέθοδο των πεπερασμένων χωρίων προσεγγίζουμε τη λύση του προβλήματος διακριτοποιώντας την παραπάνω ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης, σε έναν πεπερασμένο διαμερισμό υποχωρίων $V$ του $\Omega$. Θα ζητήσουμε προσεγγίσεις της λύσεως σε δύο χώρους. Ο πρώτος αποτελείται από συνεχείς, κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις και ο δεύτερος, πάλι από κατά τμήματα γραμμικές, αλλά όχι κατ' ανάγκη συνεχείς συναρτήσεις. Ο τελευταίος χώρος, είναι επίσης γνωστός ως χώρος των πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart, βλ. παραδείγματος χάριν, [24].

Πολλοί ερευνητές έχουν αναλύσει σχήματα πεπερασμένων διαφορών που προκύπτουν από μία μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για την προσέγγιση της λύσεως προβλημάτων ελλειπτικού τύπου σε τετραγωνικά και τριγωνικά πλέγματα. Παραδείγματος χάριν, οι Morton, Stynes και Süli, [53], [54], [66], [67], οι Ewing, Lazarov, Mishev, Vassilevski, [48], [31], [75], [51] και οι Eymard, Herbin, Gallouët, [43], [44], [15], [32].

Ακόμα πολλοί ερευνητές έχουν υλοποιήσει μεθόδους πεπερασμένων χωρίων (που ονομάζονται είτε box methods είτε finite volume element methods) για ελλειπτικές μερικές διαφορικές εξισώσεις σε τριγωνισμούς του $\Omega$ (πιο συγκεκριμένα οι προσεγγιστικές λύσεις ανήκουν στους γνωστούς χώρους των τμηματικά γραμμικών συναρτήσεων), βλ. παραδείγματος χάριν Bank και Rose, [5], Hackbusch, [38], Cai, Mandel και McCormick, [13] και [14] και Schmidt, [63]. Στις μεθόδους που θα μελετήσουμε εδώ για τη διακριτοποίηση της (1.1.6) θα χρησιμοποιούμε χώρους πεπερασμένων στοιχείων. Θα θεωρήσουμε λοιπόν έναν τριγωνισμό $T_h$ του $\Omega$ από τον οποίο θα κατασκευάσουμε δυϊκούς διαμερισμούς. Οι μέθοδοι που θα μελετήσουμε βασίζονται σε αυτούς τους δυϊκούς διαμερισμούς.

Θα θεωρήσουμε δύο διαφορετικούς δυϊκούς διαμερισμούς του $T_h$. Ο πρώτος, που θα τον καλούμε $\mathcal{B}_c$, αποτελείται από μη επικαλυπτόμενα χωρία. Κατασκευάζεται έτσι ώστε κάθε ένα χωρίο του $\mathcal{B}_c$ να συσχετίζεται με μία και μόνο μία κο ρυφή του $T_h$. Κατ' αναλογία, και τα χωρία του άλλου δυϊκού διαμερισμού, $\mathcal{B}_n$, που θεωρούμε είναι μη επικαλυπτόμενα και καθένα συσχετίζεται με μία και μόνο μία πλευρά του $T_h$. Τα χωρία των δύο παραπάνω δυϊκών διαμερισμών, $\mathcal{B}_c$ και $\mathcal{B}_n$, προκύπτουν κατά τον ακόλουθο τρόπο: Θεωρούμε σε κάθε τρίγωνο $K\in T_h$ ένα σημείο $z_K$ και διαμερίζουμε το $K$ σε τρία υποχωρία, είτε συνδέοοντας το $z_K$ με τα μέσα των πλευρών του $K$ είτε με τις κορυφές του. Στην πρώτη

περίπτωση η ένωση των υποχωρίων με κοινή μία κορυφή του $T_h$ δίνει τον $\mathcal{B}_c$ και στην δεύτερη περίπτωση ο $\mathcal{B}_n$ είναι η ένωση των υποχωρίων με κοινή μία πλευρά του $T_h$, βλ. §1.2.

Σαν ένα πρώτο βήμα της ανάλυσης μεθόδων πεπερασμένων χωρίων για την (1.1.4) θα μελετήσουμε στις §1.3 και §1.5 τις μεθόδους αυτές για τον απλούστερο ελλειπτικό τελεστή, $-\Delta$. Στη συνέχεια στις §1.4 και §1.6 αναλύουμε τις υπό εξέταση μεθόδους για την (1.1.4). Στην περίπτωση της μεθόδου πεπερασμένων χωρίων στον $\mathcal{B}_c$ θα ζητήσουμε προσεγγίσεις στο χώρο των συνεχών, κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων στον $T_h$. Για τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων στον $\mathcal{B}_n$ τώρα, θα ζητήσουμε προσεγγίσεις στο χώρο των όχι κατ' ανάγκη συνεχών, κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων στον $T_h$, δηλαδή στο χώρο πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart.

Η μέθοδος πεπερασμένων χωρίων στον $\mathcal{B}_c$ είχε αρχικά μελετηθεί από τους Bank και Rose για τον ελλειπτικό τελεστή $-\Delta$ και στη συνέχεια από τους Cai, Mandel και McCormick για το πρόβλημα (1.1.4) με $\sigma = 0$. Έτσι, θα περιγράψουμε τα αποτελέσματά τους στις παραγράφους 1.3 και 1.4. Στην [5], οι Bank και Rose, υποθέτοντας ότι ο $T_h$ είναι ένας μη εκφυλισμένος τριγωνισμός του $\Omega$, βλ. Ορισμό 1.2.1, αποδεικνύουν βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος στην $H^1$ νόρμα. Στην περίπτωση όμως ενός γενικότερου ελλειπτικού τελεστή ο Cai, βλ. [13], για να αποδείξει εκτιμήσεις σφάλματος βέλτιστης τάξης στην $H^1$ νόρμα υποθέτει ότι οι $T_h$ και $\mathcal{B}_c$ έχουν ορισμένες περιοριστικές ιδιότητες. Έτσι, στην κατασκευή του $\mathcal{B}_c$ επιλέγει ως $z_K$ είτε το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου, είτε το βαρύκεντρο, είτε το ορθόκεντρο, είτε το επίκεντρο (κέντρο περιγεγραμμένου κύκλου). Για να εξασφαλισθεί ότι το επίκεντρο και το ορθόκεντρο ενός τριγώνου $K \in T_h$ βρίσκεται μέσα στο $K$, πρέπει αυτό να είναι οξυγώνιο. Η σύγκλιση της μεθόδου επιτυγχάνεται όταν ισχύει ομοιόμορφα μία ελλειπτική ιδιότητα για μία βοηθητική διγραμμική μορφή, βλ. Θεώρημα 1.4.2. Στην [13] αποδεικνύεται ότι αυτή η ιδιότητα ισχύει υπό ορισμένες αρκετά περιοριστικές συνθήκες για τον τριγωνισμό $T_h$, βλ. Πρόταση 1.4.3, Λήμμα 1.4.1 και Θεώρημα 1.4.1.

Στη συνέχεια, στην παράγραφο 1.5, εισάγουμε μία νέα μέθοδο πεπερασμένων χωρίων η οποία βασίζεται στον δυϊκό διαμερισμό $\mathcal{B}_n$. Ως χώρο προσέγγισης θα χρησιμοποιήσουμε το χώρο πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart σε έναν μη εκφυλισμένο τριγωνισμό $T_h$. Στο Θεώρημα 1.5.1 αποδεικνύουμε βέλτιστης τάξεως εκτίμηση σφάλματος στην $H^1$ νόρμα. Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος βασίζεται στην αντίστοιχη απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.1 των Bank και Rose στην [5]. Ακόμα, υποθέτοντας ότι $f \in H^1(\Omega)$ καθώς και ότι στην κατασκευή του $\mathcal{B}_n$ επιλέγουμε για $z_K$ το βαρύκεντρο κάθε τριγώνου, στο Θεώρημα 1.5.2

αποδεικνύουμε μία βέλτιστης τάξεως εκτίμηση σφάλματος στην $L^2$ νόρμα. Στη συνέχεια μελετούμε τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων στον $\mathcal{B}_n$ για το πρόβλημα (1.1.4). Σε αντίθεση με τα αποτελέσματα της [13] για τη μέθοδο στον $\mathcal{B}_c$, για να αποδείξουμε σύγκλιση της μεθόδου, χρειάζεται να υποθέσουμε μόνο ότι ο $T_h$ είναι μη εκφυλισμένος τριγωνισμός. Έτσι στο Θεώρημα 1.6.1 αποδεικνύουμε βέλτιστης τάξεως εκτίμηση σφάλματος στην $H^1$ νόρμα. Επίσης, υπό τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.5.2 για την $f$ και τον $\mathcal{B}_n$, στο Θεώρημα 1.6.2 αποδεικνύουμε βέλτιστης τάξεως εκτίμηση σφάλματος και στην $L^2$ νόρμα.

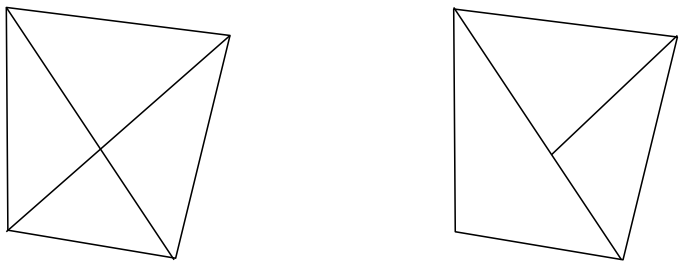
Μία σύντομη περιγραφή αυτού του κεφαλαίου είναι η ακόλουθη. Στην παράγραφο 1.2 εισάγουμε τον απαραίτητο συμβολισμό. Στις παραγράφους 1.3 και 1.4 παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα των εργασιών [5] και [13]. Στην παράγραφο 1.5 θεωρούμε την μέθοδο πεπερασμένων χωρίων που βασίζεται στον δυϊκό διαμερισμό $\mathcal{B}_n$ για τον ελλειπτικό τελεστή $-\Delta$. Οι προσεγγίσεις που κατασκευάζουμε ανήκουν στο χώρο των πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart. Στα Θεωρήματα 1.5.1 και 1.5.2 αποδεικνύουμε βέλτιστης τάξης εκτιμήσεις σφάλματος στην $H^1$ και $L^2$ νόρμα, αντίστοιχα. Τέλος, στην παράγραφο 1.6, θεωρούμε τη μέθοδο της προηγούμενης παραγράφου για το πρόβλημα (1.1.4). Στα Θεωρήματα 1.5.1 και 1.5.2 αποδεικνύουμε βέλτιστης τάξης εκτιμήσεις σφάλματος στην $H^1$ και $L^2$ νόρμα, αντίστοιχα. Στην [47], οι Κοσσιώρης, Μακριδάκης και Σουγανίδης χρησιμοποιούν μία παρόμοια μέθοδο με αυτή που εξετάζουμε στις §1.5 και §1.6, για να κατασκευάσουν προσεγγίσεις με τη μεθόδο πεπερασμένων χωρίων για εξισώσεις τύπου Hamilton–Jacobi. Κατά ανεξάρτητο τρόπο ο Chou, [19], κατασκεύασε και αυτός μία παρόμοια μέθοδο για εξισώσεις τύπου Stokes.

## 1.2 ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

Έστω $K \subset \mathbb{R}^2$. Συμβολίζουμε με $L^2(K)$ το χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων πραγματικών συναρτήσων στο $K$, με $(\cdot,\cdot)_K$ το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(K)$, και με $|\cdot|_{s,K}$ και $\|\cdot\|_{s,K}$ την ημινόρμα και την νόρμα, αντίστοιχα, του χώρου Sobolev $H^s(K)$, $s \in \mathbb{N}$. Ακόμα με $|\cdot|$ συμβολίζουμε είτε το εμβαδόν ενός χωρίου του $\mathbb{R}^2$ ή το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος.

**Ορισμός 1.2.1:** *Έστω $\Omega$ ένα δοσμένο χωρίο και $\{T_h\}_{0<h\leq 1}$ μία οικογένεια διαμερισμών του τέτοια ώστε*

$$\max\{\operatorname{diam} K : K \in T_h\} \leq h \operatorname{diam}\Omega$$



**ΣΧΗΜΑ 1**. Δύο διαμερισμοί. Ο αριστερός είναι τριγωνισμός ενώ ο δεξιός δεν είναι.

*Ονομάζουμε την οικογένεια* $\{T_h\}_{0<h\leq 1}$ *μη εκφυλισμένη* (*regular*), *αν υπάρχει* $\rho > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $K \in T_h$ *και* $h \in (0,1]$,

$$\rho_K \geq \rho \operatorname{diam} K. \tag{1.2.1}$$

*Η οικογένεια ονομάζεται ημιομοιόμορφη* (*quasiuniform*), *αν υπάρχει* $\gamma > 0$ *τέτοιο ώστε*

$$\min\{\rho_K : K \in T_h\} \geq \gamma h \operatorname{diam} \Omega,$$

*για κάθε* $h \in (0,1]$, *όπου* $\rho_K$ *είναι η διάμετρος του μεγαλύτερου κύκλου που περιέχεται στο* $K \in T_h$.

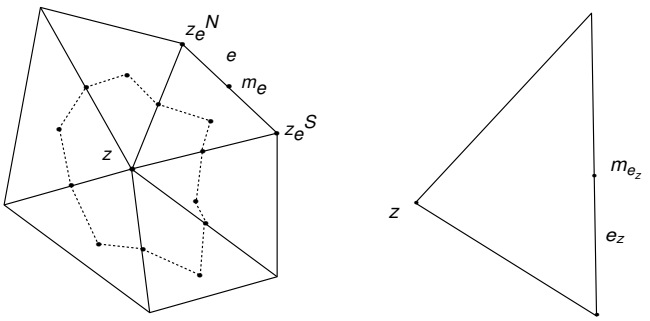
Οι διαμερισμοί του $\Omega$ που θα θεωρήσουμε σε αυτήν την εργασία αποτελούνται από τρίγωνα και καλούνται τριγωνισμοί. Δίνουμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό του τριγωνισμού, βλ. Σχήμα 1:

**Ορισμός 1.2.2:** *Έστω* $\Omega$ *ένα φραγμένο, κυρτό πολυγωνικό χωρίο του* $\mathbb{R}^2$. *Ονομάζουμε τριγωνισμό του* $\Omega$ *έναν διαμερισμό που αποτελείται από τρίγωνα και έχει την ιδιότητα ότι καμμία κορυφή του δεν βρίσκεται στο εσωτερικό μίας πλευράς κάποιου άλλου τριγώνου.*

Θεωρούμε, λοιπόν, ένα φραγμένο, κυρτό, πολυγωνικό χωρίο $\Omega$ και έναν τριγωνισμό $T_h$ του $\Omega$. Έστω $h_K$ η διάμετρος ενός τριγώνου $K \in T_h$ και $h = \max_{K\in T_h} h_K$. Υποθέτουμε ότι η οικογένεια τριγωνισμών $\{T_h\}_{0<h\leq 1}$ είναι μη εκφυλισμένη. Αυτή η υπόθεση για τον τριγωνισμό $T_h$ είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη του Zlámal ή αλλιώς συνθήκη ελάχιστης γωνίας, βλ. [76]: Υπάρχει μία θετική σταθερά $\vartheta_0$ τέτοια ώστε, για κάθε $K \in \cup_h T_h$,

$$\vartheta_K \geq \vartheta_0, \tag{1.2.2}$$

όπου με $\vartheta_K$ συμβολίζουμε τη μικρότερη γωνία του τριγώνου $K \in T_h$, δηλαδή οι γωνίες των τριγώνων είναι ομοιόμορφα φραγμένες από κάτω με μία θετική σταθερά.



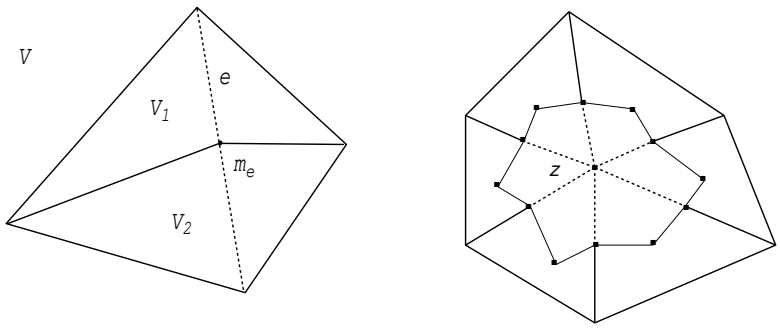

**ΣΧΗΜΑ 2**. *Αριστερά:* Ένα τυχαίο χωρίο $V_z$. Με διακεκομμένες γραμμές το σύνορο του αντίστοιχο χωρίου $b_z$. *Δεξιά:* Σε ένα τυχαίο τρίγωνο $K \in T_h$, σημειώνουμε την κορυφή $z$ και την αντίστοιχη πλευρά $e_z$.

Θεωρούμε τώρα την ακόλουθη νόρμα, $\|v\|_{s,h} = \left(\sum_{K\in T_h} \|v\|^2_{s,K}\right)^{1/2}$ και την ημινόρμα $|v|_{s,h} = \left(\sum_{K\in T_h} |v|^2_{s,K}\right)^{1/2}$, $s \in \mathbb{N}$. Για $K \in T_h$, συμβολίζουμε με $E_h(K)$ το σύνολο των πλευρών του $K$, με $Z_h(K)$ το σύνολο των κορυφών του, και θέτουμε $E_h = \cup_{K\in T_h} E_h(K)$ και $Z_h = \cup_{K\in T_h} Z_h(K)$. Ακόμα, έστω $E_h^{\rm in}$ το σύνολο των εσωτερικών πλευρών του τριγωνισμού $T_h$, δηλαδή $e \in E_h^{\rm in}$ αν και μόνο αν $e \in E_h$ και $e$ δεν είναι μέρος του $\partial\Omega$. Επίσης, συμβολίζουμε με $Z_h^{\rm in}$ το σύνολο των εσωτερικών κορυφών του $T_h$, δηλαδή $z \in Z_h^{\rm in}$ αν και μόνο αν $z \in Z_h$ και $z \notin \partial\Omega$, και με $m_e$ το μέσο της πλευράς $e \in E_h$.

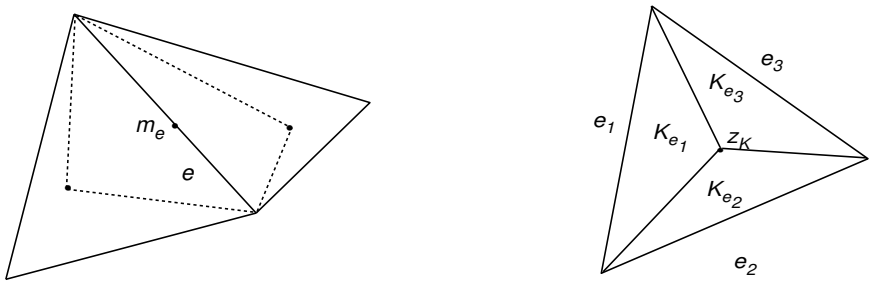
Με κάθε κορυφή $z \in Z_h^{\rm in}$ συσχετίζουμε ένα χωρίο $V_z \subset \Omega$, που αποτελείται από εκείνα τα τρίγωνα $K \in T_h$ τα οποία έχουν ως κοινή κορυφή την $z$ . Θέτουμε $\mathcal{V}_c = \{V_z : z \in Z_h^{\rm in}\}$ και συμβολίζουμε με $T_h(V_z)$ τα τρίγωνα που αποτελούν το χωρίο $V_z$. Ακόμα, συμβολίζουμε με $z_e^N$ και $z_e^S$ τις δύο κορυφές του $Z_h$ που είναι άκρα της πλευράς $e \in E_h$ και με $e_z$ την πλευρά $e_z \in E_h(K)$ που βρίσκεται απέναντι της κορυφής $z \in Z_h(K)$ (βλ. Σχήμα 2).

Επίσης, σε κάθε τρίγωνο $K \in T_h$ θεωρούμε ένα εσωτερικό σημείο $z_K$. Συνδέουμε, με ευθύγραμμα τμήματα, το $z_K$ με τα μέσα των πλευρών του $K$. Κατ' αυτόν τον τρόπο το $K$ διαμερίζεται σε τρία χωρία $A_z$, $z \in Z_h(K)$ (βλ. Σχήμα 3). Έστω $\mathcal{A}(K) = \{A_z : z \in Z_h(K)\}$. Με κάθε κορυφή $z \in Z_h^{\rm in}$ συσχετίζουμε ένα χωρίο $b_z \subset V_z$, το οποίο αποτελείται από τα υποχωρία $A_z$ του $V_z$, που έχουν ως κοινή κορυφή τη $z$ (βλ. Σχήμα 2) και θέτουμε $\mathcal{B}_c = \{b_z : z \in Z_h^{\rm in}\}$. Επίσης, συμβολίζουμε με $E_h^\star(b_z)$, όπου $b_z \in \mathcal{B}_c$, $z \in Z_h^{\rm in}$, το σύνολο $\{\ell : \ \ell = e \cap b_z, \ e \in E_h(K), \ K \in T_h(V_z)\}$ (βλ. Σχήμα 3).

Στη συνέχεια θεωρούμε το χώρο $X_h = \{v \in C^0(\overline{\Omega}) : \ v|_K$ είναι




**ΣΧΗΜΑ 3**. *Αριστερά:* Ένα τρίγωνο $K \in T_h$ διαμερισμένο σε τρία υποχωρία $A_z$. *Δεξιά:* Τα δύο χωρία $V_z$ και $b_z$. Με διακεκομμένες γραμμές το σύνολο $E_h^\star(b_z)$.




**ΣΧΗΜΑ 4**. *Αριστερά:* Ένα τυχαίο χωρίο $V_e$. Με διακεκομμένες γραμμές το αντίστοιχο χωρίο $b_e$. *Δεξιά:* Ένα τρίγωνο K διαμερισμένο σε τρία υποτρίγωνα $K_e$.

πολυώνυμο βαθμού το πολύ ένα σε κάθε $K \in T_h\}$. Ακόμα, συμβολίζουμε με $X_h^0$ τον υπόχωρο $\{v \in X_h : \ v|_{\partial\Omega} = 0\}$. Είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι οι συναρτήσεις $\psi_z$, $z \in Z_h$, για τις οποίες ισχύει

$$(1.2.3)\quad \operatorname{supp}\psi_z = V_z, \quad \psi_z(z) = 1 \quad \text{και} \quad \psi_z(p) = 0, \quad \forall p \in Z_h \setminus \{z\},$$

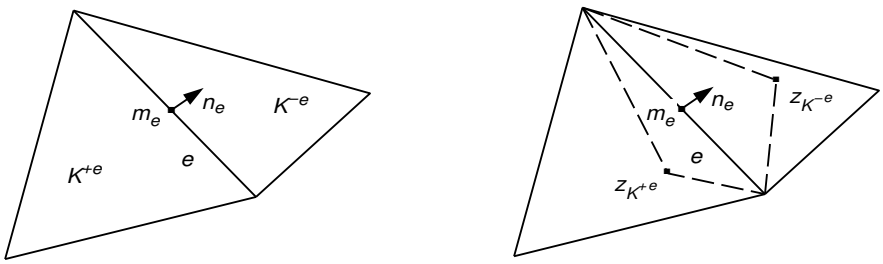
αποτελούν βάση του $X_h^0$. Επίσης, ο $X_h^0$ έχει την ακόλουθη προσεγγιστική ιδιότητα: υπάρχει μία σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε για κάθε $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (βλ., [21, Theorem 16.2]),

$$(1.2.4)\qquad \inf_{\chi \in X_h^0} \|v - \chi\|_{j,h} \le C\Big(\sum_{K \in T_h} h_K^{2(2-j)} \|v\|_{j,K}^2\Big)^{1/2}, \quad j = 0, 1.$$

Ακόμα, με κάθε πλευρά $e \in E_h^{\rm in}$ συσχετίζουμε ένα χωρίο $V_e$, το οποίο αποτελείται από τα δύο τρίγωνα του $T_h$ που έχουν κοινή πλευρά την $e$, και θέτουμε $\mathcal{V}_n = \{V_e : \ e \in E_h^{\rm in}\}$ (βλ. Σχήμα 4). Επίσης, συμβολίζουμε με $T_h(V_e)$ το σύνολο των τριγώνων $K \in T_h$, που αποτελούν το $V_e$.

Όπως και προηγουμένως, θεωρούμε τώρα ένα εσωτερικό σημείο $z_K$ του $K \in T_h$, το οποίο συνδέουμε με ευθύγραμμα τμήματα με τις κορυφές του $K$. Έτσι, διαμερίζουμε το $K$ σε τρία μικρότερα τρίγωνα $K_e$, $e \in E_h(K)$. Συμβολίζουμε με $\widetilde{T_h}(K)$ το σύνολο $\{K_e : e \in E_h(K)\}$ και με κάθε πλευρά $e \in E_h^{\rm in}$ συσχετίζουμε ένα χωρίο $b_e$, το οποίο αποτελείται από τα δύο τρίγωνα $K_e$, $K_e \in \widetilde{T_h}(K)$, $K \in T_h(V_e)$, με κοινή πλευρά $e$ και θέτουμε $\mathcal{B}_n = \{b_e : e \in E_h^{\rm in}\}$ (βλ. Σχήμα 4).

Στην περίπτωση που $e \in E_h(K) \setminus E_h^{\rm in}$, $K \in T_h$, συμβολίζουμε με $b_e$ το τρίγωνο του $\widetilde{T_h}(K)$ που έχει την $e$ πλευρά. Δοθέντων τώρα δύο τριγώνων $K_1$, $K_2 \in T_h$, με κοινή πλευρά $e \in E_h^{\rm in}$, συμβολίζουμε με $n_e$ το μοναδιαίο κάθετο εξωτερικό διάνυσμα στην πλευρά $e$ του $K_1$. Τότε, συμβολίζουμε το $K_1$ με $K^{+e}$ και το $K_2$ με $K^{-e}$ (βλ. Σχήμα 5). Ακόμα, θέτουμε $b_e^+ = K^{+e} \cap b_e$ και $b_e^- = K^{-e} \cap b_e$.

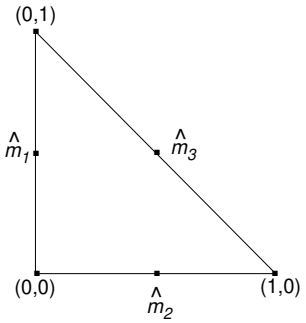



**ΣΧΗΜΑ 5**. Ένα τυχαίο χωρίο $V_e$. *Αριστερά:* Τα δύο τρίγωνα $K^{+e}$ και $K^{-e}$ με κοινή πλευρά $e$. *Δεξιά:* Το χωρίο $b_e$ που αντιστοιχεί στην πλευρά $e$ (με διακεκομμένες γραμμές).

Θεωρούμε, τώρα, το χώρο $S_h$ των πεπερασμένων στοιχείων που αποτελείται από τις όχι κατ' ανάγκη συνεχείς συναρτήσεις, οι οποίες περιορισμένες σε κάθε τρίγωνο $K \in T_h$ είναι γραμμικά πολυώνυμα και είναι συνεχείς στα σημεία $m_e$, $e \in E_h^{\rm in}$, βλέπε [24]. Επειδή, λοιπόν, τα στοιχεία του χώρου $S_h^0$ είναι συναρτήσεις που δεν είναι κατ' ανάγκη συνεχείς σε μία πλευρά $e \in E_h^{\rm in}$ τον ονομάζουμε χώρο μη προσαρμοζόμενων (nonconforming) τμηματικά γραμμικών συναρτήσεων. Ακόμα, συμβολίζουμε με $S_h^0$ τον υπόχωρο $\{v \in S_h : \ v(m_e) = 0, \ e \in E_h \setminus E_h^{\rm in}\}$. Επίσης παρατηρούμε ότι ο $S_h$ δεν είναι υπόχωρος του $H^1(\Omega)$. Για κάθε $K \in T_h$, συμβολίζουμε με $v_K$ τον περιορισμό της $v \in S_h$ στο $K$. Οι συναρτήσεις $\varphi_e$, $e \in E_h^{\rm in}$, τέτοιες ώστε

$$(1.2.5) \quad \operatorname{supp}\varphi_e = V_e, \ \varphi_e(m_e) = 1 \text{ και } \varphi_e(m_\ell) = 0, \ \forall \ell \in E_h \setminus \{e\},$$

αποτελούν βάση του $S_h^0$. Επίσης, ο $S_h^0$ έχει την ακόλουθη προσεγγιστική ιδιότητα: υπάρχει σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε για κάθε




**ΣΧΗΜΑ 6**. Το τρίγωνο αναφοράς $\widehat{K}$.

$v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (βλ., [21, Theorem 16.2]),

$$\inf_{\chi \in S_h^0} \|v - \chi\|_{j,h} \leq C\Big( \sum_{K \in T_h} h_K^{2(2-j)} \|v\|_{j,K}^2 \Big)^{1/2}, \quad j = 0, 1. \tag{1.2.6}$$

Θεωρούμε τώρα το τρίγωνο αναφοράς $\widehat{K}$, με κορυφές $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Συμβολίζουμε με $\widehat{e}_1$, $\widehat{e}_2$ και $\widehat{e}_3$ τις πλευρές του $\widehat{K}$, αρχίζοντας από την πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την κορυφή $(1,0)$ και συνεχίζοντας αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ωρολογίου. Ακόμα, συμβολίζουμε με $\widehat{m}_i$ το μέσον της πλευράς $\widehat{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, και με $\widehat{\varphi}_i$, $i = 1, 2, 3$, την γραμμική συνάρτηση του $\widehat{K}$ τέτοια ώστε $\widehat{\varphi}_i(\widehat{m}_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, (βλ. Σχήμα 6).

Στη συνέχεια, θέτουμε $\widehat{S}(\widehat{K}) := \mathrm{span}\{\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2, \widehat{\varphi}_3\}$ και για $e \in E_h(K)$ συμβολίζουμε με $A_{K,e}$ έναν αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό του $\widehat{K}$ στο $K \in T_h$, τέτοιον ώστε $m_e = A_{K,e}\widehat{m}_3$. Επίσης, για $\widehat{x} \in \widehat{K}$, θέτουμε $A_{K,e}\widehat{x} = a_{K,e}\widehat{x} + b_{K,e}$, με $a_{K,e}$ αντιστρέψιμο $2 \times 2$ πίνακα, και $b_{K,e} \in \mathbb{R}^2$. Για μία δοσμένη συνάρτηση $v \in S_h^0$, συμβολίζουμε με $\widehat{v}_{K,e}$ τη συνάρτηση του $\widehat{S}(\widehat{K})$ που ορίζεται ως $\widehat{v}_{K,e}(\widehat{x}) = v_K(A_{K,e}\widehat{x})$. Ακόμα συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}$ την Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^2$, καθώς επίσης και την παραγόμενη από αυτήν νόρμα πινάκων.

## 1.3 Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ POISSON (ΣΥΝΕΧΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ)

Ως ένα πρώτο βήμα της ανάλυσης μεθόδων πεπερασμένων χωρίων για τον γενικό ελλειπτικό τελεστή $A$, σε αυτή την παράγραφο καθώς και στην §1.5 θα μελετήσουμε μεθόδους πεπερασμένων χωρίων για τον απλούστερο

τελεστή $-\Delta$. Η προσεγγιστική λύση που ζητούμε εδώ ανήκει στον χώρο των συνεχών, κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων και στην §1.5 στον χώρο των πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart. Στη συνέχεια, στις παραγράφους 1.4 και 1.6 επεκτείνουμε τα αποτελέσματα των §1.3 και §1.5, αντίστοιχα.

Τα αποτελέσματα που αναφέρουμε σε αυτή την παράγραφο είναι γνωστά και οφείλονται στους Bank και Rose, [5].

Θεωρούμε το πρόβλημα: Ζητείται μία συνάρτηση $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$-\Delta u = f \quad \text{στο } \Omega \quad \text{και} \quad u = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega, \tag{1.3.1}$$

με $\Omega$ ένα φραγμένο, κυρτό, πολυγωνικό χωρίο στο $\mathbb{R}^2$ και $f \in L^2(\Omega)$. Η αντίστοιχη μέθοδος Galerkin/πεπερασμένων στοιχείων, με χώρο προσέγγισης τον $X_h^0$ είναι: Ζητείται $u_G \in X_h^0$, τέτοια ώστε

$$a(u_G, \chi) = (f, \chi)_\Omega, \quad \forall \chi \in X_h^0, \tag{1.3.2}$$

με $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, που ορίζεται ως

$$a(v, w) = (\nabla v, \nabla w)_\Omega. \tag{1.3.3}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (1.3.1)–(1.3.3) και (1.2.4), προκύπτει αμέσως η γνωστή εκτίμηση

$$\|\nabla(u - u_G)\|_{0,\Omega} \le Ch\|u\|_{2,\Omega}, \tag{1.3.4}$$

με σταθερά $C$ ανεξάρτητη του $h$.

Η κατασκευή της μεθόδου πεπερασμένων χωρίων στηρίζεται όχι σε μία (ολική) διγραμμική μορφή, όπως η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αλλά σε μία τοπική ιδιότητα της λύσεως: Θεωρούμε λοιπόν μία κορυφή $z \in Z_h^{\rm in}$ και το αντίστοιχο χωρίο $b_z \in \mathcal{B}_c$. Ολοκληρώνουμε μετά την (1.3.1) στο $b_z$ και εφαρμόζουμε τον τύπο ολοκλήρωσης του Green. Έτσι, λαμβάνουμε

$$-\int_{\partial b_z} \nabla u \cdot n \, ds = \int_{b_z} f \, dx. \tag{1.3.5}$$

Έχοντας υπόψιν την εξίσωση (1.3.5), θεωρούμε την ακόλουθη διακριτή μέθοδο για την (1.3.1): Ζητείται $u_B \in X_h^0$, τέτοια ώστε

$$-\int_{\partial b_z} \nabla u_B \cdot n \, ds = \int_{b_z} f \, dx, \quad \forall z \in Z_h^{\rm in}. \tag{1.3.6}$$

Η (1.3.6) έχει τοπικό χαρακτήρα, όμως μπορεί να γραφεί ισοδύναμα με τη βοήθεια της διγραμμικής μορφής $\overline{a}_{CN} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται ως

$$\overline{a}_{CN}(v, w) = -\sum_{z \in Z_h^{\rm in}} w(z) \int_{\partial b_z} \nabla v \cdot n \, ds. \tag{1.3.7}$$

Τότε, η (1.3.6) είναι ισοδύναμη με την

$$\overline{a}_{CN}(u_B, \chi) = \sum_{z \in Z_h^{\rm in}} \chi(z) \int_{b_z} f \, dx, \quad \forall \chi \in X_h^0. \tag{1.3.8}$$

*Παρατήρηση 1.3.1:* Λόγω της (1.3.8), μπορούμε να δούμε τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων (1.3.6) σαν μία μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων Petrov–Galerkin. Σε αυτές τις μεθόδους έχουμε διαφορετικούς χώρους προσέγγισης και δοκιμής. Εδώ $X_h^0$ είναι ο χώρος προσέγγισης και οι κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις στο $\mathcal{B}_c$ είναι οι συναρτήσεις δοκιμής.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα αποτελεί το βασικό εργαλείο της ανάλυσης στην [5], βλ. [5, Lemma 3].

**Λήμμα 1.3.1 (Bank & Rose):** *Έστω $v, w \in X_h^0$. Τότε*

$$\overline{a}_{CN}(v, w) = a(v, w). \quad \blacksquare \tag{1.3.9}$$

**Ύπαρξη:** Εύκολα παρατηρούμε ότι η επίλυση του (1.3.8) είναι ισοδύναμη με την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με πίνακα $\overline{A} = (\overline{a}_{i,j})_{i,j=1}^N$, όπου $N$ είναι η διάσταση του $X_h^0$, και $\overline{a}_{i,j} = \overline{a}_{CN}(\varphi_{e_i}, \varphi_{e_j})$, $e_i, e_j \in E_h^{\rm in}$, $i, j = 1, \ldots, N$. Συνεπώς, για να δείξουμε ύπαρξη της λύσεως $u_B$ του (1.3.8), αρκεί να δείξουμε μοναδικότητα. Θεωρούμε, λοιπόν το ακόλουθο βοηθητικό πρόβλημα: Ζητείται $v \in X_h^0$, τέτοια ώστε

$$\overline{a}_{CN}(v, \chi) = 0, \quad \forall \chi \in X_h^0.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το Λήμμα 1.3.1, λαμβάνουμε

$$\|\nabla v\|_{0,h}^2 = a(v, v) = \overline{a}(v, v) = 0.$$

Επομένως, $\nabla v = 0$. Άρα η $v$ είναι σταθερή σε κάθε τρίγωνο, και αφού $v \in X_h^0$, αναγκαστικά $v \equiv 0$ στο $\Omega$.

*Παρατήρηση 1.3.2:* Σύμφωνα με το Λήμμα 1.3.1, παρατηρούμε ότι ο υπολογισμός της προσέγγισης της μεθόδου πεπερασμένων χωρίων (1.3.8) και της μεθόδου Galerkin/πεπερασμένων στοιχείων (1.3.2) ανάγεται στην επίλυση γραμμικών συστημάτων με τον ίδιο πίνακα και διαφορετικό δεξιό μέλος.

Τέλος, θα αναφέρουμε μία γνωστή εκτίμηση της διαφοράς $u - u_B$, στην $H^1$–νόρμα. Σύμφωνα με τους Bank & Rose, βλ. [5, Theorem 1], έχουμε

**Θεώρημα 1.3.1 (Bank & Rose):** *Έστω $u$ η λύση του (1.3.1) και $u_B$ η λύση του (1.3.8). Τότε υπάρχει μία σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε*

$$|u - u_B|_{1,\Omega} \leq C\Big(\sum_{K\in T_h} h_K^2 |u|_{2,K}^2\Big)^{1/2}. \quad \blacksquare \tag{1.3.10}$$

## 1.4 ΜΙΑ ΓΕΝΙΚΗ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ (ΣΥΝΕΧΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ)

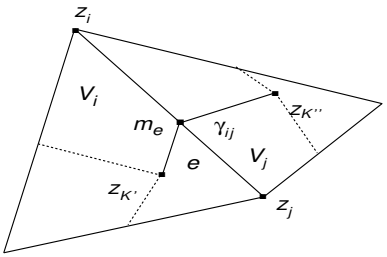
Σε αυτή την παράγραφο θα θεωρήσουμε μία μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για το πρόβλημα (1.1.4) με $\sigma = 0$, χρησιμοποιώντας ως χώρο προσέγγισης τον $X_h^0$. Τα αποτελέσματα που αναφέρουμε σε αυτή την παράγραφο οφείλονται στον Cai, [13]. Το βασικό αποτέλεσμα της [13] διατυπώνεται στο Θεώρημα 1.4.2, όπου δίνονται βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφαλμάτων στην $H^1$ νόρμα υπό (σοβαρούς) περιορισμούς για τον διαμερισμό $T_h$.

Θεωρούμε λοιπόν το ακόλουθο ελλειπτικό πρόβλημα συνοριακών τιμών: Ζητείται μία συνάρτηση $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A\nabla u) &= f \quad \text{στο } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{στο } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

όπου το χωρίο $\Omega$ και οι συνάρτησεις $A$ και $f$ έχουν τις ιδιότητες που αναφέρονται στην παράγραφο 1.1. Ολοκληρώνοντας την (1.4.1) στο $b_z$ και εφαρμόζοντας τον τύπο ολοκλήρωσης του Green, λαμβάνουμε

$$-\int_{\partial b_z} (A\nabla u)\cdot n\, ds = \int_{b_z} f\, dx, \quad \forall z \in Z_h^{\text{in}}. \tag{1.4.2}$$




**ΣΧΗΜΑ 7**. Η τομή $\gamma_{ij}$ των δύο χωρίων $V_i$ και $V_j$ που συσχετίζονται με τις κορυφές $z_i$ και $z_j$, αντίστοιχα.

Κατ' αναλογίαν προς την (1.3.6), θεωρούμε την ακόλουθη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για το (1.4.1): Ζητείται $u_B \in X_h^0$, τέτοια ώστε

$$-\int_{\partial b_z} (A\nabla u_B)\cdot n\, ds = \int_{b_z} f\, dx, \quad \forall z \in Z_h^{\rm in}. \tag{1.4.3}$$

Συνδυάζοντας τότε τις (1.4.2) και (1.4.3), έχουμε

$$-\int_{\partial b_z} (A\nabla (u-u_B))\cdot n\, ds = 0, \quad \forall z \in Z_h^{\rm in}. \tag{1.4.4}$$

Είναι χρήσιμο να γράψουμε το πρόβλημα (1.4.3) σε μεταβολική μορφή. Ορίζουμε εκ νέου την διγραμμική μορφή $\overline{a}_{CN} : H^1(\Omega)\times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$\overline{a}_{CN}(v,w) = -\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} w(z) \int_{\partial b_z} (A\nabla v)\cdot n\, ds. \tag{1.4.5}$$

Επίσης, θεωρούμε την διγραμμική μορφή $a : H^1(\Omega)\times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$a(v,w) = \sum_{K\in T_h} \int_K (A\nabla v)\cdot \nabla w\, dx. \tag{1.4.6}$$

Η (1.4.3) γράφεται ισοδύναμα

$$\overline{a}_{CN}(u_B, v) = \sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z) \int_{b_z} f\, dx, \quad \forall v \in X_h^0, \tag{1.4.7}$$

και η (1.4.4) γίνεται

$$\overline{a}_{CN}(u-u_B, v) = 0, \quad \forall v \in X_h^0. \tag{1.4.8}$$

Προκειμένου να αναλύσει το πρόβλημα (1.4.6), ο Cai, βλ. [13], εισάγει τον ακόλουθο συμβολισμό. Έστω δύο κορυφές $z_i$, $z_j \in Z_h(K)$, $K \in T_h$. Θέτουμε $\gamma_{ij} = V_{z_i} \cap V_{z_j}$, όπου $V_{z_i}$, $V_{z_j} \in \mathcal{V}_c$ και $Z_{ij}$ το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τις κορυφές $z_i$, $z_j$ (βλ. Σχήμα 7).

Έστω τώρα δύο τρίγωνα $K', K'' \in T_h$ με κοινή πλευρά την $Z_{ij}$. Ονομάζουμε τον δυικό διαμερισμό $\mathcal{B}_c$ του $T_h$ (βλ. §1.2) *συμμετρικό*, αν $\gamma_{ij} \cap K'$ και $\gamma_{ij} \cap K''$ είναι κάθετα στην $Z_{ij}$ και $|\gamma_{ij} \cap K'| = |\gamma_{ij} \cap K''|$. Ο $\mathcal{B}_c$ είναι *ουσιαστικά συμμετρικός (essentially symmetric),* αν είναι συμμετρικός εκτός από ορισμένα χωρία του $\mathcal{B}_c$ που η διάμετρος τους φράσσεται από $Ch$, με σταθερά $C$ ανεξάρτητη του $\Omega$ και του $h$. Τέλος, ο $\mathcal{B}_c$ ονομάζεται *μη συμμετρικός,* αν δεν είναι ούτε συμμετρικός, ούτε ουσιαστικά συμμετρικός. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, εάν στην κατασκευή του $\mathcal{B}_c$ επιλέξουμε ως $z_K$ είτε το ορθόκεντρο του τριγώνου $K \in T_h$, είτε το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου, είτε το βαρύκεντρο, τότε ο $\mathcal{B}_c$ είναι συμμετρικός, αν κάθε τρίγωνο $K \in T_h$ είναι ισόπλευρο. Επίσης είναι συμμετρικός, αν επιλέξουμε ως $z_K$ το επίκεντρο (κέντρο περιγεγραμμένου κύκλου) και τα τρίγωνα του $T_h$ είναι ισοσκελή ή δημιουργήθηκαν διχοτομώντας ορθογώνια ίδιου σχήματος. Συνδέοντας τώρα το σημείο $z_K$ με τις κορυφές του $K \in T_h$, παίρνουμε έναν νέο τριγωνισμό $\widetilde{T_h}$. Επίσης, ονομάζουμε τον διαμερισμό $\mathcal{B}_c$ *μη εκφυλισμένο*, εάν ο τριγωνισμός $\widetilde{T_h}$ είναι μη εκφυλισμένος (βλ. τον Ορισμό 1.2.1). Η διγραμμική μορφή $\overline{a}_{CN}$ θα λέγεται *ομοιόμορφα ελλειπτική* στον $X_h^0$, αν υπάρχει μία θετική σταθερά $\alpha_2$, ανεξάρτητη του $X_h^0$, τέτοια ώστε

$$\overline{a}_{CN}(v,v) \geq \alpha_2 |v|_{1,\Omega}, \quad \forall v \in X_h^0. \tag{1.4.9}$$

Τότε ισχύει,

**Πρόταση 1.4.1:** *Εάν ο τριγωνισμός $T_h$ είναι μη εκφυλισμένος, τότε επιλέγοντας για $z_K$ το βαρύκεντρο ή το επίκεντρο του τριγώνου $K$ οδηγούμαστε σε μη εκφυλισμένο $\mathcal{B}_c$.* ■

Συμβολίζουμε τώρα με $\vartheta_{K'}$ και $\vartheta_{K''}$ τις γωνίες των τριγώνων $K'$ και $K''$, αντίστοιχα, που βρίσκονται απέναντι από την κοινή πλευρά $e$ (βλ. Σχήμα 8).

**Πρόταση 1.4.2 ([13]):** *Υποθέτουμε ότι ο $T_h$ είναι μη εκφυλισμένος.*

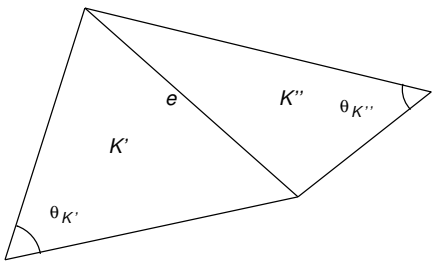
(i) *Αν το $z_K$ είναι το ορθόκεντρο του $K \in T_h$ και εάν υπάρχει μία θετική σταθερά $\vartheta$, τέτοια ώστε, για κάθε $K', K'' \in T_h$,*

$$\vartheta_{K'} \geq \vartheta \quad \text{και} \quad \vartheta_{K''} \geq \vartheta, \tag{1.4.10}$$

*τότε ο $\mathcal{B}_c$ είναι μη εκφυλισμένος.*

(ii) *Αν το $z_K$ είναι το επίκεντρο του $K \in T_h$ και εάν υπάρχει μία σταθερά θετική $\vartheta$, τέτοια ώστε, για κάθε $K', K'' \in T_h$,*

$$\text{είτε } \vartheta_{K'} = \frac{\pi}{2} \quad \text{είτε } \vartheta_{K'} \leq \frac{\pi}{2} - \vartheta \tag{1.4.11}$$




**ΣΧΗΜΑ 8**. Οι απέναντι γωνίες $\vartheta_{K'}$ και $\vartheta_{K''}$, σε σχέση με την κοινή πλευρά των αντίστοιχων τριγώνων $K'$ και $K''$.

*και*

$$\text{είτε } \vartheta_{K''} = \frac{\pi}{2} \quad \text{είτε } \vartheta_{K''} \leq \frac{\pi}{2} - \vartheta, \tag{1.4.12}$$

*τότε ο $\mathcal{B}_c$ είναι μη εκφυλισμένος.* ■

Ο Cai, υποθέτοντας ότι η διγραμμική μορφή $\overline{a}_{CN}$ είναι ομοιόμορφα ελλειπτική, αποδεικνύει εκτιμήσεις σφάλματος για τη μέθοδο (1.4.7), βλ. [13]. Πριν όμως διατυπώσουμε το αποτέλεσμα αυτό ως Θεώρημα 1.4.2, θα αναφέρουμε υπό ποιές υποθέσεις αποδεικνύεται στην [13] ότι η $\overline{a}_{CN}$ είναι ομοιόμορφα ελλειπτική.

**Πρόταση 1.4.3 [13]:** *Υποθέτουμε ότι $A = a(x)I$ και $a(x) \geq \alpha_0 > 0, x \in \Omega$. Τότε υπάρχει $h_0 > 0$ και μία θετική σταθερά $\alpha_\star$, που εξαρτάται μόνο από τα $h_0$ και $\alpha_0$, τέτοια ώστε για κάθε $h \leq h_0$ η $\overline{a}_{CN}$ είναι ομοιόμορφα ελλειπτική, και ισχύει η (1.4.9) με σταθερά $\alpha_2 = \alpha_\star$. Επιπλέον, αν $a(x) \equiv 1$, τότε ισχύει η (1.4.9) με $\alpha_2 = 1$ για κάθε $h > 0$.* ■

**Λήμμα 1.4.1:** *Έστω ότι ο πίνακας $A$ είναι σταθερός σε κάθε τρίγωνο $K \in \cup_h T_h$ και ικανοποιεί την (1.1.5). Εάν κάθε τρίγωνο είναι είτε ορθογώνιο είτε ισοσκελές, τότε η $\overline{a}_{CN}$ είναι ομοιόμορφα ελλειπτική.* ■

**Θεώρημα 1.4.1:** *Έστω ότι το $z_K$ είναι το επίκεντρο του $K$ για κάθε τρίγωνο $K \in T_h$. Υποθέτουμε ότι $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega),\ 1 \leq i, j \leq 2$, και ότι κάθε τρίγωνο $K \in T_h$ είναι είτε ορθογώνιο είτε ισοσκελές. Τότε υπάρχει $h_0 > 0$ και μία θετική σταθερά $\alpha_\star$, που εξαρτάται μόνο από το $h_0$, τέτοια ώστε η $\overline{a}_{CN}$ είναι ομοιόμορφα ελλειπτική, δηλαδή η $\overline{a}_{CN}$ ικανοποιεί την (1.4.9) με σταθερά $\alpha_2 = \alpha_\star$.* ■

Σύμφωνα με τον Cai, όταν η διγραμμική μορφή είναι ομοιόμορφα ελλειπτική, έχουμε, βλ. [13]:

**Θεώρημα 1.4.2 (Cai):** *Έστω $u \in H_0^2(\Omega)$ η λύση του (1.1.4) και $u_B$ η λύση του (1.4.3). Υποθέτουμε ακόμα ότι η $\overline{a}_{CN}$ είναι ομοιόμορφα*

*ελλειπτική στον $X_h^0$, καθώς και ότι ο $\mathcal{B}_c$ και ο $T_h$ είναι μη εκφυλισμένοι. Τότε, έχουμε*

$$|u - u_B|_{1,\Omega} \leq Ch\|u\|_{2,\Omega}. \tag{1.4.13}$$

*Υποθέτοντας ακόμα ότι $u \in H^3(\Omega)$ και ότι ο $\mathcal{B}_c$ είναι ουσιαστικά συμμετρικός, έχουμε*

$$|u - u_B|_{1,\Omega} \leq Ch^{3/2}\|u\|_{3,\Omega}. \tag{1.4.14}$$

*Αν επιπλέον ο $\mathcal{B}_c$ είναι συμμετρικός, έχουμε*

$$|u - u_B|_{1,\Omega} \leq Ch^2\|u\|_{3,\Omega}, \tag{1.4.15}$$

*όπου η σταθερά $C$ στις (1.4.13)–(1.4.15) είναι ανεξάρτητη του $h$.* ■

## 1.5 Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ POISSON (ΜΗ ΣΥΝΕΧΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ)

Όπως και στην §1.3, σαν ένα πρώτο βήμα της ανάλυσης μίας μεθόδου πεπερασμένων χωρίων για τον γενικό ελλειπτικό τελεστή $A$, θα κατασκευάσουμε και θα αναλύσουμε μία μεθόδο πεπερασμένων χωρίων για τον απλούστερο ελλειπτικό τελεστή $-\Delta$. Η μελέτη σε αυτή την παράγραφο ακολουθεί σε γενικές γραμμές αυτήν των Bank και Rose για το διακριτό σχήμα που παρουσιάσαμε στην §1.3, βλ. [5]. Ο χώρος στον οποίο θα ζητήσουμε την προσεγγιστική λύση είναι ο χώρος των πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart. Στη συνέχεια, στην §1.6 επεκτείνουμε τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου για το πρόβλημα (1.1.4).

Όπως και στην §1.3 για τη σύγκλιση του διακριτού σχήματος, υποθέτουμε μόνο ότι ο $T_h$ είναι ένας μη εκφυλισμένος τριγωνισμός, βλ. Ορισμό 1.2.1. Στο Θεώρημα 1.5.1 αποδεικνύουμε μία βέλτιστης τάξεως εκτίμηση σφάλματος στην $H^1$ νόρμα. Στο Θεώρημα 1.5.2 όμως, για να αποδείξουμε μία βέλτιστης τάξεως εκτίμηση σφάλματος στην $L^2$ νόρμα, υποθέτουμε ότι $f \in H^1(\Omega)$ καθώς και ότι στην κατασκευή του $\mathcal{B}_n$ επιλέγουμε για $z_K$ το βαρύκεντρο του $K \in T_h$.

Θεωρούμε, λοιπόν, το πρόβλημα (1.3.1). Πολλαπλασιάζοντας τώρα την (1.3.1) με ένα τυχαίο στοιχείο $w$ του $H_0^1(\Omega)$ και ολοκληρώνοντας κατά μέρη στο $\Omega$, προκύπτει η ακόλουθη μεταβολική μορφή του (1.3.1),

$$a(u, w) = (f, w)_\Omega, \quad \forall w \in H^1(\Omega), \tag{1.5.1}$$

με $a : (H^1(\Omega) + S_h) \times (H^1(\Omega) + S_h) \to \mathbb{R}$, που ορίζεται δια

$$a(v, w) = \sum_{K \in T_h} (\nabla v, \nabla w)_K. \tag{1.5.2}$$

Η αντίστοιχη μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων, με χώρο προσέγγισης τον $S_h^0$, είναι: Ζητείται $u_G \in S_h^0$, τέτοια ώστε

$$a(u_G, \chi) = (f, \chi)_\Omega, \quad \forall \chi \in S_h^0. \tag{1.5.3}$$

Είναι απλό να δούμε ότι (βλ., [12, Chapter 8.3]),

$$\|\nabla(u - u_G)\|_{0,h} \leq Ch\|u\|_{2,\Omega}, \tag{1.5.4}$$

με σταθερά $C$ ανεξάρτητη του $h$.

Για την κατασκευή μεθόδου πεπερασμένων χωρίων ολοκληρώνουμε την (1.3.1) στο $b_e$, και εφαρμόζουμε τον τύπο ολοκλήρωσης του Green. Έτσι, λαμβάνουμε

$$-\int_{\partial b_e} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \int_{b_e} f\, dx. \tag{1.5.5}$$

Έχοντας υπόψιν την εξίσωση (1.5.5), θεωρούμε την μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για την (1.3.1): Ζητείται $u_B \in S_h^0$, τέτοια ώστε

$$-\int_{\partial b_e} \frac{\partial u_B}{\partial n}\, ds = \int_{b_e} f\, dx, \quad \forall e \in E_h^{\text{in}}. \tag{1.5.6}$$

Για να δείξουμε ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσεως του (1.5.6), θα χρειαστούμε ορισμένα προκαταρκτικά αποτελέσματα τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε και για την ανάλυση του (1.3.1), παρακάτω σε αυτή την παράγραφο, αλλά και στο πιο γενικό πρόβλημα (1.1.4) στην επόμενη παράγραφο.

Θεωρούμε ένα τρίγωνο $K \in T_h$ και μία πλευρά $e \in E_h^{\text{in}} \cap E_h(K)$. Έστω $n_e$ το μοναδιαίο, κάθετο, εξωτερικό διάνυσμα στην πλευρά $e$ του $K$. Συμβολίζουμε με $K^{+e}$ το τρίγωνο $K$ και με $K^{-e}$ το άλλο τρίγωνο του $T_h$, που έχει με το $K$ κοινή πλευρά την $e$. Θέτουμε επίσης

$$\left[\frac{\partial \chi}{\partial n_e}\right] = \frac{\partial \chi_{K^{+e}}}{\partial n_e} - \frac{\partial \chi_{K^{-e}}}{\partial n_e} \quad \forall \chi \in S_h^0. \tag{1.5.7}$$

**Λήμμα 1.5.1:** *Έστω* $K \in T_h$, $e \in E_h^{\rm in} \cap E_h(K)$ *και* $v \in S_h^0$. *Τότε,*

$$\int_{\partial b_e} \frac{\partial v}{\partial n}\, ds = -\int_e \left[\frac{\partial v}{\partial n_e}\right]\, ds, \tag{1.5.8}$$

*με* $n_e$ *το μοναδιαίο, κάθετο, εξωτερικό διάνυσμα στην πλευρά* $e$ *του* $K$.
*Απόδειξη:* Έστω $v \in S_h^0$, $K \in T_h$ και $e \in E_h^{\rm in} \cap E_h(K)$. Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο ολοκλήρωσης του Green και το γεγονός ότι $\Delta v = 0$ σε κάθε $K \in T_h$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V_e} \frac{\partial v}{\partial n}\, ds &= \int_{\partial K^{+e}\setminus\{e\}} \frac{\partial v}{\partial n}\, ds + \int_{\partial K^{-e}\setminus\{e\}} \frac{\partial v}{\partial n}\, ds \\
&= \int_{\partial K^{+e}} \frac{\partial v}{\partial n}\, ds - \int_e \frac{\partial v_{K^{+e}}}{\partial n}\, ds + \int_{\partial K^{-e}} \frac{\partial v}{\partial n}\, ds \\
&\quad - \int_e \frac{\partial v_{K^{-e}}}{\partial n}\, ds \\
&= -\int_e \left[\frac{\partial v}{\partial n_e}\right]\, ds.
\end{aligned} \tag{1.5.9}$$

Ακόμα, επειδή η $v$ είναι ένα πολυώνυμο το πολύ πρώτου βαθμού στα $K^{+e} \setminus b_e$ και $K^{-e} \setminus b_e$, έχουμε

$$\int_{\partial(K^{+e}\setminus b_e)} \frac{\partial v}{\partial n}\, ds = 0 \quad \text{και} \quad \int_{\partial(K^{-e}\setminus b_e)} \frac{\partial v}{\partial n}\, ds = 0. \tag{1.5.10}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (1.5.9) και (1.5.10), λαμβάνουμε την (1.5.8). ■

Λόγω του Λήμματος 1.5.1 μπορούμε να ξαναγράψουμε την (1.5.6) ως: Ζητείται $u_B \in S_h^0$, τέτοια ώστε

$$\int_e \left[\frac{\partial u_B}{\partial n_e}\right]\, ds = \int_{b_e} f\, dx, \quad \forall e \in E_h^{\rm in}, \tag{1.5.11}$$

όπου $n_e$ είναι το μοναδιαίο, κάθετο, εξωτερικό διάνυσμα στην πλευρά $e$ του $K^{+e}$, βλ. (1.5.7) και το Σχήμα 5, σελ 16.

**Λήμμα 1.5.2:** *Έστω* $\chi, \psi \in S_h^0$. *Τότε,*

$$\sum_{e \in E_h^{\rm in}} \psi(m_e) \int_e \left[\frac{\partial \chi}{\partial n_e}\right]\, ds = a(\chi, \psi), \tag{1.5.12}$$

*με* $n_e$ *όπως στην* (1.5.7).

*Απόδειξη:* Αφού η συνάρτηση $\psi$ είναι στοιχείο του $S_h^0$, μπορούμε να την εκφράσουμε ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης του $\psi = \sum_{e\in E_h^{\rm in}} \psi(m_e)\varphi_e$, οπότε, λόγω και της (1.2.5),

$$\begin{aligned} a(\chi,\psi) &= \sum_{K\in T_h} (\nabla\chi,\nabla\psi)_K \\ &= \sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} \psi(m_e)(\nabla\chi,\nabla\varphi_e)_K \\ &= \sum_{e\in E_h^{\rm in}} \psi(m_e) \sum_{K\in T_h} (\nabla\chi,\nabla\varphi_e)_K \\ &= \sum_{e\in E_h^{\rm in}} \psi(m_e)\big\{(\nabla\chi,\nabla\varphi_e)_{K^{+e}} + (\nabla\chi,\nabla\varphi_e)_{K^{-e}}\big\}. \end{aligned} \tag{1.5.13}$$

Τώρα, για $e\in E_h^{\rm in}$ και $\chi\in S_h^0$, έχουμε

$$\begin{aligned} &(\nabla\chi,\nabla\varphi_e)_{K^{+e}} + (\nabla\chi,\nabla\varphi_e)_{K^{-e}} \\ &= \int_{\partial K^{+e}} \frac{\partial\chi}{\partial n}\varphi_e\,ds + \int_{\partial K^{-e}} \frac{\partial\chi}{\partial n}\varphi_e\,ds \\ &= \int_{\partial K^{+e}\setminus\{e\}} \frac{\partial\chi}{\partial n}\varphi_e\,ds + \int_{\partial K^{-e}\setminus\{e\}} \frac{\partial\chi}{\partial n}\varphi_e\,ds \\ &\quad + \left[\frac{\partial\chi}{\partial n_e}\right]\int_e \varphi_e\,ds. \end{aligned} \tag{1.5.14}$$

Αφού η $\varphi_e$ είναι ένα γραμμικό πολυώνυμο σε κάθε πλευρά των $K^{+e}$ και $K^{-e}$, παίρνουμε

$$\int_\ell \varphi_e\,ds = |\ell|\varphi_e(m_\ell), \quad \forall \ell\in E_h(K^{+e})\cup E_h(K^{-e}),$$

όπου με $|\ell|$ συμβολίζουμε το μήκος της πλευράς $\ell$. Επομένως, σύμφωνα με την (1.2.5), η παραπάνω σχέση δίνει

$$\int_{\partial V_e} \varphi_e\,ds = 0, \quad \int_e \varphi_e\,ds = |e|. \tag{1.5.15}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (1.5.13)–(1.5.15) λαμβάνουμε εύκολα την (1.5.12). ■

Θεωρούμε τώρα τη διγραμμική μορφή $\overline{a}_{NN} : (H^1(\Omega)+S_h)\times(H^1(\Omega)+S_h)\to\mathbb{R}$, που ορίζεται ως

$$\overline{a}_{NN}(v,w) = -\sum_{e\in E_h^{\rm in}} w(m_e)\int_{\partial b_e} \frac{\partial v}{\partial n} ds. \tag{1.5.16}$$

Η (1.5.6) γράφεται και ως

$$\overline{a}_{NN}(u_B,\chi)=\sum_{e\in E_h^{\rm in}}\chi(m_e)\int_{b_e} f\,dx,\quad \forall\chi\in S_h^0. \tag{1.5.17}$$

*Παρατήρηση 1.5.1:* Βλ. Παρατήρηση 1.3.1, όπου $X_h^0$ και $\mathcal{B}_c$ είναι τώρα $S_h^0$ και $\mathcal{B}_n$, αντίστοιχα.

**Ύπαρξη:** Εύκολα βλέπουμε ότι η επίλυση του (1.5.17) είναι ισοδύναμη με την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με πίνακα $\overline{A}=(\overline{a}_{i,j})_{i,j=1}^N$, όπου $N$ είναι η διάσταση του $S_h^0$, και $\overline{a}_{i,j}=\overline{a}_{NN}(\varphi_{e_i},\varphi_{e_j})$, $e_i,e_j\in E_h^{\rm in}$, $i,j=1,\ldots,N$. Επομένως, για να δείξουμε ύπαρξη της λύσεως $u_B$ του (1.5.17), αρκεί να δείξουμε μοναδικότητα. Θεωρούμε, λοιπόν, το ακόλουθο βοηθητικό πρόβλημα: Ζητείται $v\in S_h^0$, τέτοια ώστε

$$\overline{a}_{NN}(v,\chi)=0,\quad \forall\chi\in S_h^0.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τα Λήμματα 1.5.1 και 1.5.2, λαμβάνουμε εύκολα

$$\|\nabla v\|_{0,h}^2=a(v,v)=\sum_{e\in E_h^{\rm in}}v(m_e)\int_e\left[\frac{\partial v}{\partial n_e}\right]ds=\overline{a}_{NN}(v,v)=0,$$

οπότε $\nabla v=0$. Συνεπώς, η $v$ είναι σταθερή σε κάθε τρίγωνο και, επειδή $v\in S_h^0$, αναγκαστικά $v\equiv 0$ στο $\Omega$.

*Παρατήρηση 1.5.2:* Σύμφωνα με τα Λήμματα 1.5.1 και 1.5.2 παρατηρούμε ότι η μέθοδος πεπερασμένων χωρίων (1.5.17) και η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων Galerkin (1.5.2) οδηγούν σε γραμμικά συστήματα που έχουν τον ίδιο πίνακα και διαφέρουν μονάχα στο δεξιό μέλος.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ορισμένα προκαταρκτικά λήμματα.

**Λήμμα 1.5.3:** *Υπάρχουν θετικές σταθερές $C(\rho)$ και $C_\star(\rho)$, ανεξάρτητες του $h$, τέτοιες ώστε για κάθε $v\in H^1(K)$ και $K\in T_h$,*

$$C|v|_{1,K}^2\le|\widehat{v}_{K,e}|_{1,\widehat{K}}^2\le C^{-1}|v|_{1,K}^2 \tag{1.5.18}$$

*και*

$$C_\star\|v\|_{0,K}^2\le h_K^2\|\widehat{v}_{K,e}\|_{0,\widehat{K}}^2\le C_\star^{-1}\|v\|_{0,K}^2, \tag{1.5.19}$$

*όπου $e\in E_h(K)$ και $\rho$ είναι η σταθερά της σχέσης* (1.2.1).

*Απόδειξη:* Έστω $K \in T_h$, $e \in E_h(K)$ και $A_{K,e}$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός του $\widehat{K}$ στο $K$ με $m_e = A_{K,e}\widehat{m}_3$. Σύμφωνα με τα [21, Theorems 15.1 και 15.2], και τον συμβολισμό που εισαγάγαμε στην παράγραφο 1.2, υπάρχει σταθερά $C$ ανεξάρτητη του $K$ τέτοια ώστε για κάθε $v \in H^\ell(K)$, $\ell \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
|v|_{\ell,K} &\le |\det a_{K,e}|^{1/2}\|a_{K,e}^{-1}\|_{\mathbb{R}^2}^{\ell}|\widehat{v}_{K,e}|_{\ell,\widehat{K}},\\
|\widehat{v}_{K,e}|_{\ell,\widehat{K}} &\le |\det a_{K,e}|^{-1/2}\|a_{K,e}\|_{\mathbb{R}^2}^{\ell}|v|_{\ell,K},\\
\|a_{K,e}^{-1}\|_{\mathbb{R}^2} &\le C\rho_K^{-1}, \quad \|a_{K,e}\|_{\mathbb{R}^2} \le Ch_K.
\end{aligned}
\tag{1.5.20}
$$

Σύμφωνα τώρα με τον ορισμό του γραμμικού μετασχηματισμού $A_{K,e}$, στην παράγραφο 1.2, έχουμε

$$
|K| = \int_K dx = |\det a_{K,e}| \int_{\widehat{K}} d\widehat{x} = \frac{1}{2}|\det a_{K,e}|,
\tag{1.5.21}
$$

όπου και πάλι με $|\cdot|$ συμβολίζουμε το εμβαδόν ενός χωρίου στον $\mathbb{R}^2$. Επίσης, αφού $h_K$ είναι η διάμετρος του $K$, υπάρχει σταθερά $C_0$ ανεξάρτητη του $K$ τέτοια ώστε

$$
|K| \le C_0 h_K^2.
\tag{1.5.22}
$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (1.5.20)–(1.5.22) και (1.2.1), λαμβάνουμε

$$
|v|_{1,K}^2 \le C\rho^{-2}|\widehat{v}_{K,e}|_{1,\widehat{K}}^2
\tag{1.5.23}
$$

και

$$
\|v\|_{0,K}^2 \le Ch_K^2\|\widehat{v}_{K,e}\|_{0,\widehat{K}}^2.
\tag{1.5.24}
$$

Επομένως, ισχύουν οι πρώτες ανισότητες στις σχέσεις (1.5.18) και (1.5.19). Ακόμα, σύμφωνα με την (1.2.1), υπάρχει σταθερά $C$ τέτοια ώστε

$$
|K| \ge |B_K| \ge C\rho^2 h_K^2,
\tag{1.5.25}
$$

όπου $B_K$ είναι ο μεγαλύτερος κύκλος που περιέχεται στο $K$ (δηλαδή ο εγγεγραμμένος κύκλος). Χρησιμοποιώντας και πάλι τις (1.5.20), (1.5.25) και (1.5.21), λαμβάνουμε τις δεύτερες ανισότητες των σχέσεων (1.5.18) και (1.5.19). ■

**Λήμμα 1.5.4:** *Έστω* $v \in \widehat{S}(\widehat{K})$. *Τότε*

$$|v|^2_{1,\widehat{K}} = 2\big\{(v(\widehat{m}_3) - v(\widehat{m}_1))^2 + (v(\widehat{m}_3) - v(\widehat{m}_2))^2\big\}. \tag{1.5.26}$$

*Απόδειξη:* Αφού $v \in \widehat{S}(\widehat{K})$, έχουμε $v = \sum_{i=1}^3 v(\widehat{m}_i)\widehat{\varphi}_i$. Επομένως,

$$(\nabla v, \nabla v)_{\widehat{K}} = \sum_{i,j=1}^{3} v(\widehat{m}_i)v(\widehat{m}_j)(\nabla\widehat{\varphi}_i, \nabla\widehat{\varphi}_j)_{\widehat{K}}. \tag{1.5.27}$$

Επίσης, βλ. Σχήμα 6, σελ. 17,

$$\begin{aligned} &\widehat{\varphi}_1(\widehat{x},\widehat{y}) = -2\widehat{x} + 1, \quad \widehat{\varphi}_2(\widehat{x},\widehat{y}) = -2\widehat{y} + 1, \\ &\widehat{\varphi}_3(\widehat{x},\widehat{y}) = 2\widehat{x} + 2\widehat{y} - 1, \end{aligned} \qquad (\widehat{x},\widehat{y}) \in \widehat{K}. \tag{1.5.28}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} &(\nabla\widehat{\varphi}_1, \nabla\widehat{\varphi}_1)_{\widehat{K}} = 2, \quad (\nabla\widehat{\varphi}_1, \nabla\widehat{\varphi}_2)_{\widehat{K}} = 0, \\ &(\nabla\widehat{\varphi}_1, \nabla\widehat{\varphi}_3)_{\widehat{K}} = -2, \quad (\nabla\widehat{\varphi}_2, \nabla\widehat{\varphi}_1)_{\widehat{K}} = 0, \\ &(\nabla\widehat{\varphi}_2, \nabla\widehat{\varphi}_2)_{\widehat{K}} = 2, \quad (\nabla\widehat{\varphi}_2, \nabla\widehat{\varphi}_3)_{\widehat{K}} = -2 \\ &(\nabla\widehat{\varphi}_3, \nabla\widehat{\varphi}_1)_{\widehat{K}} = -2, \quad (\nabla\widehat{\varphi}_3, \nabla\widehat{\varphi}_2)_{\widehat{K}} = -2, \\ &(\nabla\widehat{\varphi}_3, \nabla\widehat{\varphi}_3)_{\widehat{K}} = 4. \end{aligned} \tag{1.5.29}$$

Συνεπώς, λόγω της (1.5.29), η (1.5.27) δίνει

$$\begin{aligned} (\nabla v, \nabla v)_{\widehat{K}} =& 2v^2(\widehat{m}_1) - 2v(\widehat{m}_1)v(\widehat{m}_3) + 2v^2(\widehat{m}_2) - 2v(\widehat{m}_2)v(\widehat{m}_3) \\ &- 2v(\widehat{m}_1)v(\widehat{m}_3) - 2v(\widehat{m}_2)v(\widehat{m}_3) + 4v^2(\widehat{m}_3) \\ =& 2\big\{(v(\widehat{m}_3) - v(\widehat{m}_1))^2 + (v(\widehat{m}_3) - v(\widehat{m}_2))^2\big\}, \end{aligned}$$

δηλαδή ισχύει η (1.5.26). ■

**Λήμμα 1.5.5:** *Έστω* $K \in T_h$ *και* $e \in E_h(K)$. *Τότε, για* $v \in S^0_h$,

$$C|v|^2_{1,K} \le \sum_{\ell \in E_h(K)\setminus\{e\}} (v(m_e) - v(m_\ell))^2 \le C^{-1}|v|^2_{1,K}, \tag{1.5.30}$$

*με σταθερά* $C$ *ανεξάρτητη των* $h$ *και* $K \in T_h$.
*Απόδειξη:* Συνδυάζοντας τα Λήμματα 1.5.3 και 1.5.4, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \in E_h(K)\setminus\{e\}} (v(m_e) - v(m_\ell))^2 &= \sum_{i=1}^{2} (\widehat{v}_{K,e}(\widehat{m}_3) - \widehat{v}_{K,e}(\widehat{m}_i))^2 \\ &= \frac{1}{2}|\widehat{v}_{K,e}|^2_{1,\widehat{K}} \le C|v|^2_{1,K}. \end{aligned}$$

Παρόμοια αποδεικύουμε και την αριστερή ανισότητα της (1.5.30). ■

**Λήμμα 1.5.6:** *Υπάρχει σταθερά $C$ τέτοια ώστε, για $v \in S_h^0$,*

$$C|v|_{1,h}^2 \leq \sum_{K\in T_h} \sum_{e,\, \ell\in E_h(K)} \big(v(m_\ell) - v(m_e)\big)^2 \leq C^{-1}|v|_{1,h}^2. \tag{1.5.31}$$

*Απόδειξη:* Έστω $K \in T_h$. Συμβολίζουμε με $e_1$, $e_2$, $e_3$ τις τρείς πλευρές του $K$. Εφαρμόζοντας τώρα το Λήμμα 1.5.5 σε κάθε πλευρά $e_i$, $i = 1, 2, 3$, έχουμε

$$C|v|_{1,K}^2 \leq \sum_{\ell\in E_h(K)\setminus\{e_i\}} \big(v(m_{e_i}) - v(m_\ell)\big)^2 \leq C^{-1}|v|_{1,K}^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Αθροίζοντας στη συνέχεια τις παραπάνω σχέσεις, για όλες τις πλευρές $e_i \in E_h(K)$, $i = 1, 2, 3$, παίρνουμε

$$3C|v|_{1,K}^2 \leq \sum_{e,\, \ell\in E_h(K)} \big(v(m_\ell) - v(m_e)\big)^2 \leq 3C^{-1}|v|_{1,K}^2.$$

Επομένως, αθροίζοντας ξανά, για όλα τα τρίγωνα $K \in T_h$, λαμβάνουμε την (1.5.31). ■

**Λήμμα 1.5.7:** *Θεωρούμε έναν τριγωνισμό $T_h$ ενός φραγμένου, κυρτού, πολυγωνικού χωρίου $\Omega$, που ικανοποιεί την (1.2.1). Τότε υπάρχει μία σταθερά $C(\rho)$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε, για κάθε $v \in L^2(\Omega)$, τέτοιο ώστε $v|_K \in H^1(K)$, για κάθε $K \in T_h$,*

$$\int_{\partial K} v^2 ds \leq C\big(\varepsilon^{-1/2} h_K^{-1} \|v\|_{0,K}^2 + \varepsilon^{1/2} h_K |v|_{1,K}^2\big),\ \forall K \in T_h, \tag{1.5.32}$$

*με $\varepsilon \in (0, 1)$.*

*Απόδειξη:* Σύμφωνα με [36, Theorem 1.5.1.10], υπάρχει σταθερά $C(\widehat{K})$ τέτοια ώστε

$$\int_{\partial \widehat{K}} w^2 d\widehat{s} \leq C\big(\varepsilon^{-1/2} \|w\|_{0,\widehat{K}}^2 + \varepsilon^{1/2} |w|_{1,\widehat{K}}^2\big), \quad \forall w \in H^1(\widehat{K}). \tag{1.5.33}$$

Θεωρούμε λοιπόν ένα τρίγωνο $K \in T_h$. Χρησιμοποιώντας τώρα την (1.5.33) και επαναλαμβάνοντας παρόμοια επιχειρήματα όπως στο Λήμμα 1.5.3, για μία συνάρτηση $v \in H^1(K)$, βλέπουμε ότι υπάρχει σταθερά $C(\rho)$, ανεξάρτητη του $K \in T_h$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}\int_{\partial K} v^2 ds &\leq C h_K (\varepsilon^{-1/2} h_K^{-2} \|v\|_{0,K}^2 + \varepsilon^{1/2} |v|_{1,K}^2) \\ &\leq C(\varepsilon^{-1/2} h_K^{-1} \|v\|_{0,K}^2 + \varepsilon^{1/2} h_K |v|_{1,K}^2).\end{aligned}$$

Επομένως, εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει η (1.5.32). ■

Στη συνέχεια διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε, βλ. [69, Proposition 4.13],

**Λήμμα 1.5.8 (Διακριτή ανισότητα των Poincaré–Friedrichs):** *Υπάρχει μία θετική σταθερά $C$ τέτοια ώστε*

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq C|v|_{1,h}, \quad \forall v \in S_h^0. \tag{1.5.34}$$

*Απόδειξη:* Συμβολίζουμε με $\mathcal{D}(\Omega)$ το χώρο των συναρτήσεων $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, οι οποίες έχουν συμπαγή φορέα στο $\Omega$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\Big|\int_\Omega v\varphi\, dx\Big| \leq C(\Omega,\rho)\|\varphi\|_{0,\Omega}|v|_{1,h}, \quad \forall v \in S_h^0,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{1.5.35}$$

με $\rho$ τη σταθερά στην (1.2.1). Επειδή ο $\mathcal{D}(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^2(\Omega)$, μπορούμε να δούμε ότι η (1.5.34) έπεται από την (1.5.35).

Έστω $w \in H_0^1(\Omega)$ η λύση του προβλήματος Dirichlet

$$\Delta w = \varphi, \quad \text{στο } \Omega,$$

όπου $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Έχουμε τότε ότι $w \in H^2(\Omega)$. Επιπλέον

$$\|w\|_{2,\Omega} \leq C(\Omega)\|\varphi\|_{0,\Omega}, \tag{1.5.36}$$

βλ., παραδείγματος χάριν, [36, Chapter 4].

Τότε για $v \in S_h^0$, έχουμε

$$\int_\Omega v\varphi\, dx = \sum_{K\in T_h}\int_K v\Delta w\, dx = \sum_{K\in T_h}\int_{\partial K} v\nabla w\cdot n\, ds - \int_K \nabla v\cdot\nabla w\, ds.$$

Επομένως,

$$\Big|\int_\Omega v\varphi\, dx\Big| \leq \|v\|_{1,h}\|w\|_{1,\Omega} + \Big|\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K} v\nabla w\cdot n\, ds\Big|. \tag{1.5.37}$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας εργαλεία που θα αναπτύξουμε αργότερα, μπορούμε να δείξουμε,

$$\Big|\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K} v\nabla w\cdot n\, ds\Big| \leq C(\Omega,\rho)h\|w\|_{2,\Omega}|v|_{1,h}, \tag{1.5.38}$$

βλ. ακόμα [12, Chapter 8], και [69, Proposition 4.13]. Συνδυάζοντας λοιπόν τις (1.5.35)–(1.5.38) λαμβάνουμε την επιθυμητή ανισότητα (1.5.34). ■

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε τη διαφορά $u - u_B$, σε μία εξαρτώμενη από τη διαμέριση $H^1$–νόρμα.

**Θεώρημα 1.5.1:** *Έστω $u$ η λύση του (1.3.1) και $u_B$ η λύση του (1.5.6). Τότε υπάρχει μία σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε*

$$\|u - u_B\|_{1,h} \leq C\Bigg(\sum_{K\in T_h} h_K^2 |u|_{2,K}^2\Bigg)^{1/2}. \tag{1.5.39}$$

*Απόδειξη:* Συνδυάζοντας τις (1.5.5) και (1.5.6), έχουμε

$$-\int_{\partial b_e} \frac{\partial(u - u_B)}{\partial n}\, ds = 0, \quad \forall e \in E_h^{\rm in}.$$

Επομένως,

$$\overline{a}_{NN}(u - u_B, v) = 0, \quad \forall v \in S_h^0. \tag{1.5.40}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τα Λήμματα 1.5.1, 1.5.2, 1.5.8 και την (1.5.40), έχουμε για κάθε $\chi \in S_h^0$

$$\begin{aligned} \|u_B - \chi\|_{1,h} &\leq C\|\nabla(u_B - \chi)\|_{0,h} \leq C \sup_{\substack{v\in S_h^0\\ v\neq 0}} \frac{a(u_B - \chi, v)}{|v|_{1,h}} \\ &= C \sup_{\substack{v\in S_h^0\\ v\neq 0}} \frac{\overline{a}_{NN}(u_B - \chi, v)}{|v|_{1,h}} = C \sup_{\substack{v\in S_h^0\\ v\neq 0}} \frac{\overline{a}_{NN}(u - \chi, v)}{|v|_{1,h}}. \end{aligned} \tag{1.5.41}$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας την ανισότητα των Cauchy–Schwarz, το Λήμμα 1.5.6, τον τύπο ολοκλήρωσης του Green και το γεγονός ότι το $\chi$ είναι ένα γραμμικό πολυώνυμο στο $K \in T_h$, παίρνουμε την ακόλουθη εκτίμηση για όλα τα $v, \chi \in S_h^0$

$$\begin{aligned} |\overline{a}_{NN}(u - \chi, v)|^2 &= \Big|\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e) \int_{\partial b_e} \frac{\partial(u - \chi)}{\partial n}\, ds\Big|^2 \\ &= \frac{1}{2}\Big|\sum_{K\in T_h} \sum_{e,\ell\in E_h(K)} (v(m_e) - v(m_\ell)) \int_{\partial b_e\cap\partial b_\ell} \frac{\partial(u - \chi)}{\partial n_e}\, ds\Big|^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{2}\Big(\sum_{K\in T_h}\sum_{e,\ell\in E_h(K)}\big(v(m_e)-v(m_\ell)\big)^2\Big)\\
&\qquad\times\sum_{K\in T_h}\sum_{e,\ell\in E_h(K)}\Big|\int_{\partial b_e\cap\partial b_\ell}\frac{\partial(u-\chi)}{\partial n_e}\,ds\Big|^2\\
&\le C|v|_{1,h}^2\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\Big|-\int_e\frac{\partial(u-\chi)}{\partial n}\,ds+\int_{K_e}\Delta(u-\chi)\,dx\Big|^2\\
&\le C|v|_{1,h}^2\sum_{K\in T_h}\Big(h_K\int_{\partial K}\Big|\frac{\partial(u-\chi)}{\partial n}\Big|^2ds+h_K^2|u|_{2,K}^2\Big),
\end{aligned}
$$

όπου με $n_e$ συμβολίζουμε το μοναδιαίο, κάθετο, εξωτερικό διάνυσμα στο σύνορο του $b_e\in\mathcal{B}_n$. Επομένως,

$$
\begin{aligned}
|\overline{a}_{NN}(u-\chi,v)|^2\le C|v|_{1,h}^2\sum_{K\in T_h}\Big(&h_K\int_{\partial K}\Big|\frac{\partial(u-\chi)}{\partial n}\Big|^2ds\\
&+h_K^2|u|_{2,K}^2\Big).
\end{aligned}
\tag{1.5.42}
$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ένα τρίγωνο $K\in T_h$. Σύμφωνα με το Λήμμα 1.5.7, για $\varepsilon=1/2$, και $u$, $\chi$ όπως παραπάνω, λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
h_K\int_{\partial K}\Big|\frac{\partial(u-\chi)}{\partial n}\Big|^2ds&\le Ch_K\big(h_K|u|_{2,K}^2+h_K^{-1}|u-\chi|_{1,K}^2\big)\\
&\le C\big(h_K^2|u|_{2,K}^2+\|u-\chi\|_{1,K}^2\big).
\end{aligned}
\tag{1.5.43}
$$

Αθροίζοντας τώρα την (1.5.43) για όλα τα τρίγωνα $K\in T_h$, έχουμε, για $\chi\in S_h^0$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h}h_K\Big|\int_{\partial K}\frac{\partial(u-\chi)}{\partial n}\Big|^2ds\\
&\le C\Big(\sum_{K\in T_h}h_K^2|u|_{2,K}^2+\|u-\chi\|_{1,h}^2\Big).
\end{aligned}
\tag{1.5.44}
$$

Στη συνέχεια, συνδυάζοντας τις (1.5.41), (1.5.42) και (1.5.44), παίρνουμε, για $\chi\in S_h^0$,

$$
\|u_B-\chi\|_{1,h}\le C\bigg(\sum_{K\in T_h}h_K^2|u|_{2,K}^2+\|u-\chi\|_{1,h}^2\bigg)^{1/2}.
$$

Χρησιμοποιώντας, τώρα την παραπάνω ανισότητα, για κάθε $\chi \in S_h^0$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\|u-u_B\|_{1,h} &\le \|u-\chi\|_{1,h} + \|u_B-\chi\|_{1,h}\\ &\le C\Bigg(\sum_{K\in T_h} h_K^2|u|_{2,K}^2 + \|u-\chi\|_{1,h}^2\Bigg)^{1/2}.\end{aligned}$$

Θεωρούμε, λοιπόν, τον τελεστή παρεμβολής $I : H^2(\Omega) \to S_h$, $Iu(m_e) = u(m_e)$, για κάθε $e \in E_h$. Τότε

$$\|u-u_B\|_{1,h} \le C\Bigg(\sum_{K\in T_h} h_K^2|u|_{2,K}^2 + \|u-Iu\|_{1,h}^2\Bigg)^{1/2}. \tag{1.5.45}$$

όπου, βλ. φερ' ειπείν [22, Theorem 5],

$$\|u-Iu\|_{1,h}^2 \le C\sum_{K\in T_h} h_K^2|u|_{2,K}^2. \tag{1.5.46}$$

Συνδυάζοντας λοιπόν τις (1.5.45) και (1.5.46) παίρνουμε την επιθυμητή σχέση (1.5.39). ■

Συμβολίζουμε τώρα με $\mathbb{P}_\mu$ το χώρο των πολυωνύμων δύο μεταβλητών βαθμού το πολύ $\mu \in \mathbb{N}$ και με $\mathcal{M}_G^\mu$ τον τελεστή προβολής από τον $L^2(G)$ στον $\mathbb{P}_\mu$, $G \subset \mathbb{R}^2$, που ορίζεται δια

$$\int_G w\mathcal{M}_G^\mu g\,ds = \int_G wg\,ds, \quad \forall w \in \mathbb{P}_\mu. \tag{1.5.47}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το Λήμμα των Bramble–Hilbert στη μορφή που δίνεται στην [22, Lemma 6], βλ. επίσης [24, Lemma 3], έχουμε για κάθε $K \in T_h$, $e \in E_h(K)$, και $\varphi, g \in H^1(K)$,

$$\left|\int_e \varphi(g-\mathcal{M}_e^0 g)ds\right| \le Ch_K|\varphi|_{1,K}|g|_{1,K}. \tag{1.5.48}$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη ιδιότητα. Εάν $g, w \in H^2(V)$ με $V = K_1 \cup K_2$, $K_1, K_2 \in T_h$ και $\partial K_1 \cap \partial K_2 = e \in E_h$, τότε

$$\int_e \nabla g \cdot n_1 w\,ds + \int_e \nabla g \cdot n_2 w\,ds = 0, \tag{1.5.49}$$

όπου $n_i$ είναι το μοναδιαίο, κάθετο, εξωτερικό διάνυσμα στην πλευρά $e$ του $K_i$, $i = 1, 2$. Πραγματικά, σύμφωνα με τον τύπο ολοκλήρωσης του Green έχουμε

$$\int_V \Delta g w \, dx = -\int_V \nabla g \cdot \nabla w \, dx + \int_{\partial V} \nabla g \cdot n \, w \, ds, \tag{1.5.50}$$

και

$$\begin{aligned} \int_{K_i} \Delta g w \, dx = &-\int_{K_i} \nabla g \cdot \nabla w \, dx \\ &+ \int_{\partial K_i} \nabla g \cdot n \, w \, ds, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{1.5.51}$$

από τις οποίες έπεται η (1.5.49). Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε τη διαφορά $u - u_B$, στην $L^2$–νόρμα.

**Θεώρημα 1.5.2:** *Έστω $u$ η λύση του (1.3.1) και $u_B$ η λύση του (1.5.6). Υποθέτουμε ότι $f \in H^1(\Omega)$ και επίσης ότι το εσωτερικό σημείο $z_K$ είναι το βαρύκεντρο του $K$, για κάθε τρίγωνο $K \in T_h$. Τότε, υπάρχει σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε*

$$\|u - u_B\|_{0,\Omega} \le Ch^2 \big( \|u\|_{2,\Omega} + \|f\|_{1,\Omega} \big). \tag{1.5.52}$$

*Απόδειξη:* Θεωρούμε το ακόλουθο βοηθητικό πρόβλημα: Έστω $u$ η λύση της (1.3.1) και $u_B$ η λύση της (1.5.6): Ζητείται $\varphi \in H^2(\Omega)$, τέτοια ώστε

$$-\Delta \varphi = u - u_B \quad \text{στο } \Omega \quad \text{και} \quad \varphi = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega. \tag{1.5.53}$$

Είναι γνωστό, βλ. λόγου χάριν [36, Chapter 4], ότι η $\varphi$ ικανοποιεί την ακόλουθη εκτίμηση ελλειπτικής ομαλότητας

$$\|\varphi\|_{2,\Omega} \le C \|u - u_B\|_{0,\Omega}. \tag{1.5.54}$$

Χρησιμοποιώντας την (1.5.48) και τον τύπο ολοκλήρωσης του Green, λαμβάνουμε εύκολα

$$\begin{aligned} \|u - u_B\|_{0,\Omega}^2 &= -(u - u_B, \Delta\varphi)_\Omega \\ &= a(u - u_B, \varphi) - \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} (u - u_B) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, ds \\ &= a(u - u_B, \varphi - v) + a(u - u_B, v) \\ &\quad - \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} (u - u_B) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, ds, \quad \forall v \in S_h^0. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\|u-u_B\|_{0,\Omega}^2 &= a(u-u_B,\varphi-v)+a(u-u_B,v)\\ &\quad -\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}(u-u_B)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds,\quad \forall v\in S_h^0.\end{aligned}\tag{1.5.55}$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε το δεξιό μέλος της (1.5.55). Είναι προφανές ότι

$$a(u-u_B,\varphi-v)\le \|u-u_B\|_{1,h}\|\varphi-v\|_{1,h},\quad \forall v\in S_h^0.\tag{1.5.56}$$

Ακόμα, λαμβάνοντας υπόψιν τα Λήμματα 1.5.2 και 1.5.1, καθώς και τις (1.3.1) και (1.5.17), έχουμε

$$\begin{aligned}a(u-u_B,v) &= \sum_{K\in T_h}\int_K \nabla u\nabla v\,dx-\overline{a}_{NN}(u_B,v)\\ &= \sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\nabla u\cdot n\,v\,ds+\sum_{K\in T_h}\int_K fv\,dx\\ &\quad -\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\int_{b_e} f\,dx\\ &= \sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\nabla u\cdot n\,v\,ds\\ &\quad +\sum_{K\in T_h}\int_K f(v-Q(v))\,dx,\quad \forall v\in S_h^0,\end{aligned}$$

όπου

$$Q(w)|_K=\sum_{e\in E_h(K)} w(m_e)q_{K_e},\quad K\in T_h,\tag{1.5.57}$$

με $K_e\in\widetilde{T_h}(K)$, τα τρίγωνα που διαμερίζουμε το $K\in T_h$, βλ. Σχήμα 4, σελ. 15, και $q_S$ η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου $S\subset\mathbb{R}^2$. Επομένως,

$$\begin{aligned}a(u-u_B,v) &= \sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\nabla u\cdot n\,v\,ds\\ &\quad +\sum_{K\in T_h}\int_K f(v-Q(v))\,dx,\quad \forall v\in S_h^0,\end{aligned}\tag{1.5.58}$$

Τώρα, θα εκτιμήσουμε τον πρώτο όρο στο δεξιό μέλος της (1.5.58),

$$\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K} v\nabla u\cdot n\,ds, \tag{1.5.59}$$

έχοντας υπόψιν το ανάλογο αποτέλεσμα [24, (3.24)]. Θεωρούμε την κοινή πλευρά $e$ δύο τριγώνων $K_1,\ K_2\in T_h$. Συμβολίζουμε με $v_{K_i}$ τον περιορισμό της $v\in V_h$ στο $K_i$, και με $n_i$ το μοναδιαίο, εξωτερικό, κάθετο διάνυσμα στην $e$ του $K_i$, $i=1,2$. Η συνεισφορά της $e$ στην έκφραση (1.5.59) δίνεται, όπως μπορούμε να δούμε έχοντας υπόψιν την (1.5.49), από

$$\int_e v_{K_1}(\nabla u\cdot n_1)+v_{K_2}(\nabla u\cdot n_2)\,ds=\int_e (v_{K_1}-v_{K_2})\nabla u\cdot n_1\,ds. \tag{1.5.60}$$

Επειδή $v_{K_1}(m_e)=v_{K_2}(m_e)$ και λόγω της (1.5.49), έχουμε για κάθε $v\in S_h^0$,

$$\begin{aligned}&\int_e (v_{K_1}-v_{K_2})\mathcal{M}_e^0(\nabla u\cdot n_1)\,ds=0\\ &\text{και}\quad \mathcal{M}_e^0(\nabla u\cdot n_1)=-\mathcal{M}_e^0(\nabla u\cdot n_2).\end{aligned} \tag{1.5.61}$$

Επομένως, λόγω των (1.5.60) και (1.5.61), έχουμε για κάθε $v\in S_h^0$

$$\begin{aligned}&\int_e v_{K_1}(\nabla u\cdot n_1)+v_{K_2}(\nabla u\cdot n_2)\,ds\\ &=\int_e (v_{K_1}-v_{K_2})(\nabla u\cdot n_1-\mathcal{M}_e^0(\nabla u\cdot n_1))\,ds\\ &=\int_e v_{K_1}(\nabla u\cdot n_1-\mathcal{M}_e^0(\nabla u\cdot n_1))\,ds\\ &\quad+\int_e v_{K_2}(\nabla u\cdot n_2-\mathcal{M}_e^0(\nabla u\cdot n_2))\,ds.\end{aligned} \tag{1.5.62}$$

Θεωρούμε τώρα μία πλευρά $e$ του $K\in T_h$ που να είναι μέρος του συνόρου $\partial\Omega$. Επειδή $v_K(m_e)=0$, έχουμε

$$\int_e v\mathcal{M}_e^0(\nabla u\cdot n)\,ds=0,\quad \forall v\in S_h^0.$$

Συνεπώς,

$$\int_e v\nabla u\cdot n\,ds=\int_e v(\nabla u\cdot n-\mathcal{M}_e^0(\nabla u\cdot n))\,ds,\quad \forall v\in S_h^0. \tag{1.5.63}$$

Τώρα, συνδυάζοντας τις (1.5.62) και (1.5.63), έχουμε

$$\begin{aligned}(1.5.64)\qquad &\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\nabla u\cdot nv\,ds\\ &=\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e(\nabla u\cdot n-\mathcal{M}_e^0\nabla u\cdot n)v\,ds,\quad \forall v\in S_h^0.\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας παρόμοια επιχειρήματα όπως στην (1.5.64), λαμβάνουμε ακόμα

$$\begin{aligned}(1.5.65)\qquad &\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e\varphi\mathcal{M}_e^0(\nabla u\cdot n)ds\\ &=\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e\nabla u\cdot n\varphi\,ds=0.\end{aligned}$$

Επομένως, λόγω των (1.5.64) και (1.5.65), παίρνουμε

$$\begin{aligned}&\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\nabla u\cdot nv\,ds\\ &=\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e(\nabla u\cdot n-\mathcal{M}_e^0\nabla u\cdot n)(v-\varphi)\,ds,\quad \forall v\in S_h^0.\end{aligned}$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την (1.5.48), λαμβάνουμε

$$(1.5.66)\qquad \Big|\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\nabla u\cdot nv\,ds\Big|\le Ch|u|_{2,\Omega}\|\varphi-v\|_{1,h},\quad \forall v\in S_h^0.$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε τον τελευταίο όρο της (1.5.58). Θέτουμε τώρα

$$(1.5.67)\qquad C_K(f)=\int_B f\omega_K\,dx,$$

όπου $B$ είναι ένας δίσκος στον $\mathbb{R}^2$, τέτοιος ώστε $B\subset\subset K$ και $\omega_K$ μία συνάρτηση αποκοπής ορισμένη στο $\overline{B}$. Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα των Bramble–Hilbert, στη μορφή που δίνεται στο [12, Lemma 4.3.8], λαμβάνουμε, έχοντας υπόψιν την (1.2.1),

$$(1.5.68)\qquad \|f-C_K(f)\|_{0,K}\le Ch_K|f|_{1,K},\quad \forall f\in H^1(K).$$

Αφού η $C_K(f)$ είναι σταθερή σε κάθε $K$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_K f(v-Q(v))\,dx &= \int_K (f-C_K(f))(v-Q(v))\,dx \\ &\quad + C_K(f)\int_K (v-Q(v))\,dx, \quad \forall v\in S_h^0.\end{aligned} \tag{1.5.69}$$

Επίσης, επειδή το σημείο $z_K$ είναι το βαρύκεντρο του $K\in T_h$, ισχύει

$$|\widetilde{K}_e| = \frac{|K|}{3}, \quad \forall K_e\in \widetilde{T_h}(K),\ \forall K\in T_h, \tag{1.5.70}$$

βλ. Σχήμα 4, σελ. 15. Επομένως, βλ. φερ' ειπείν [21, §25],

$$\begin{aligned}\int_K (w-Q(w))\,dx &= \int_K w\,dx - \sum_{e\in E_h(K)} w(m_e)|K_e| \\ &= \int_K w\,dx - \frac{|K|}{3}\sum_{e\in E_h(K)} w(m_e) = 0, \quad \forall w\in\mathbb{P}_2.\end{aligned} \tag{1.5.71}$$

Ακόμα, παίρνουμε εύκολα,

$$\begin{aligned}\|w-Q(w)\|_{0,K}^2 &= \int_K (w - \sum_{e\in E_h(K)} w(m_e)q_{K_e})\,dx \\ &= \sum_{e\in E_h(K)}\int_{K_e}(w-w(m_e))\,dx \le Ch_K^2|w|_{1,K}^2, \quad \forall w\in\mathbb{P}_2,\end{aligned} \tag{1.5.72}$$

με σταθερά $C$ ανεξάρτητη των $h$ και $K\in T_h$. Άρα, χρησιμοποιώντας τις (1.5.68)–(1.5.72) και το γεγονός ότι $f\in H^1(K)$, έχουμε

$$\begin{aligned}\Big|\int_K f(v-Q(v))\,dx\Big| &\le Ch_K^2|f|_{1,K}|v|_{1,K} \\ &\le Ch_K^2|f|_{1,K}(|\varphi-v|_{1,K}+|\varphi|_{1,K}), \quad \forall v\in S_h^0.\end{aligned} \tag{1.5.73}$$

Συνεπώς, συνδυάζοντας τις (1.5.58), (1.5.66) και (1.5.73), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}&|a(u-u_B,v)| \\ &\le Ch\|u\|_{2,\Omega} + \|f\|_{1,\Omega}(\|\varphi-v\|_{1,h}+h\|\varphi\|_{1,\Omega}),\ \forall v\in S_h^0.\end{aligned} \tag{1.5.74}$$

Τελικά, θα εκτιμήσουμε τον τελευταίο όρο της (1.5.55). Αφού $u-u_B\in L^2(\Omega)$, θα έχουμε $\varphi\in H^2(\Omega)$. Επομένως, χρησιμοποιώντας παρόμοια

επιχειρήματα με αυτά στην (1.5.64), λόγω των (1.5.49), (1.5.47), και του γεγονότος ότι $u_B \in S_h^0$ και $u \in H^2(\Omega)$, έχουμε

$$\begin{aligned}&\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\nabla\varphi\cdot n(u-u_B)\,ds\\&=\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e(\nabla\varphi\cdot n-\mathcal{M}_e^0\nabla\varphi\cdot n)(u-u_B)\,ds.\end{aligned}$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας την (1.5.48), παίρνουμε

$$\left|\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\nabla\varphi\cdot n(u-u_B)\,ds\right|\le Ch|\varphi|_{2,\Omega}\|u-u_B\|_{1,h}, \tag{1.5.75}$$

Άρα, επιλέγοντας $v = I\varphi$ στην (1.5.55) και χρησιμοποιώντας τις (1.5.56), (1.5.74), (1.5.75), (1.5.54), (1.5.39) και (1.5.46), έχουμε

$$\begin{aligned}\|u-u_B\|_{0,\Omega}^2 =&a(u-u_B,\varphi-I\varphi)+a(u-u_B,I\varphi)\\&-\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}(u-u_B)\varphi\cdot n\,ds\\\le&\|u-u_B\|_{1,h}\|\varphi-I\varphi\|_{1,h}\\&+Ch\big(\|u\|_{2,\Omega}+\|f\|_{1,\Omega}\big)\big(\|\varphi-I\varphi\|_{1,h}+h\|\varphi\|_{2,\Omega}\big)\\&+Ch|\varphi|_{2,\Omega}\|u-u_B\|_{1,h}\\\le&Ch^2\big(\|u\|_{2,\Omega}+\|f\|_{1,\Omega}\big)\|u-u_B\|_{0,\Omega}.\quad\blacksquare\end{aligned}$$

*Παρατήρηση 1.5.3:* Το μόνο σημείο στο Θεώρημα 1.5.2, όπου χρειαστήκαμε την υπόθεση ότι $f \in H^1(\Omega)$, είναι η εκτίμηση (1.5.68).

## 1.6 ΜΙΑ ΓΕΝΙΚΗ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ (ΜΗ ΣΥΝΕΧΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ)

Σε αυτή την παράγραφο θα κατασκευάσουμε και θα αναλύσουμε τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για το πρόβλημα (1.1.4), που θεωρήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Η μελέτη του διακριτού σχήματος βασίζεται σε αυτή του Cai για το διακριτό σχήμα που παρουσιάσαμε στην §1.4, βλ. [13]. Ο χώρος στον οποίο θα ζητήσουμε την προσεγγιστική λύση είναι ο χώρος των πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart.

Σε αντίθεση με την §1.4, βλ. [13], για τη σύγκλιση του διακριτού σχήματος, δεν υποθέτουμε παρόμοιες ιδιότητες για τους διαμερισμούς $T_h$ και $\mathcal{B}_n$, αλλά μόνο ότι ο $T_h$ είναι ένας μη εκφυλισμένος τριγωνισμός, βλ. Ορισμό 1.2.1. Στο Θεώρημα 1.6.1 αποδεικνύουμε μία βέλτιστης τάξεως εκτίμηση σφάλματος στην $H^1$ νόρμα. Στο Θεώρημα 1.6.2 όμως, για να αποδείξουμε μία βέλτιστης τάξεως εκτίμηση σφάλματος στην $L^2$ νόρμα, υποθέτουμε ότι $f \in H^1(\Omega)$ καθώς και ότι στην κατασκευή του $\mathcal{B}_n$ επιλέγουμε για $z_K$ το βαρύκεντρο του $K \in T_h$.

Θεωρούμε λοιπόν μία πλευρά $e \in E_h^{\text{in}}$ και το αντίστοιχο χωρίο $b_e \in \mathcal{B}_n$. Ολοκληρώνοντας την (1.1.4) στο $b_e$ και εφαρμόζοντας τον τύπο ολοκλήρωσης του Green, λαμβάνουμε

$$-\int_{\partial b_e} (A\nabla u)\cdot n\, ds + \int_{b_e} \sigma u\, dx = \int_{b_e} f\, dx, \quad \forall e \in E_h^{\text{in}}. \tag{1.6.1}$$

Θεωρούμε την εξής μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για το (1.1.4): Ζητείται $u_B \in S_h^0$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &-\int_{\partial b_e} (A\nabla u_B)\cdot n\, ds + u_B(m_e)\int_{b_e} \sigma\, dx \\ &= \int_{b_e} f\, dx, \quad \forall e \in E_h^{\text{in}}. \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

Όπως στην [5], για τη διακριτοποίηση του όρου $\sigma u$, δεν χρησιμοποιούμε το $\int_{b_e} u_B\sigma\, dx$, που είναι πιθανόν να οδηγήσει σε μη συμμετρικό πίνακα αλλά το $u_B(m_e)\int_{b_e}\sigma\, dx$, και έτσι αυτός ο όρος τελικά θα δώσει έναν διαγώνιο πίνακα. Συνδυάζοντας τώρα τις (1.6.1) και (1.6.2), έχουμε για κάθε $e \in E_h^{\text{in}}$,

$$-\int_{\partial b_e} (A\nabla(u-u_B))\cdot n\, ds + \int_{b_e} \sigma(u-u_B(m_e))dx = 0. \tag{1.6.3}$$

Ορίζουμε εκ νέου σε αυτήν την παράγραφο τις διγραμμικές μορφές $a, \overline{a}_{NN} : (H^1(\Omega)+S_h)\times(H^1(\Omega)+S_h) \to \mathbb{R}$, ως

$$\begin{aligned} a(v,w) &= \sum_{K\in T_h}\int_K (A\nabla v)\cdot\nabla w\, dx \quad \text{και} \\ \overline{a}_{NN}(v,w) &= -\sum_{e\in E_h^{\text{in}}} w(m_e)\int_{\partial b_e}(A\nabla v)\cdot n\, ds. \end{aligned} \tag{1.6.4}$$

Τώρα, μπορούμε να γράψουμε την (1.6.2) στη μορφή

$$\begin{aligned} &\overline{a}_{NN}(u_B, v) + \sum_{e \in E_h^{\text{in}}} v(m_e) u_B(m_e) \int_{b_e} \sigma \, dx \\ &= \sum_{e \in E_h^{\text{in}}} v(m_e) \int_{b_e} f \, dx, \quad \forall v \in S_h^0, \end{aligned} \tag{1.6.5}$$

και την (1.6.3) ως

$$\begin{aligned} &\overline{a}_{NN}(u - u_B, v) + \sum_{e \in E_h^{\text{in}}} v(m_e) \int_{b_e} \sigma(u - u_B(m_e)) dx \\ &= 0, \quad \forall v \in S_h^0. \end{aligned} \tag{1.6.6}$$

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ορισμένα προκαταρκτικά λήμματα. Επίσης, συμβολίζουμε με $\| \cdot \|_{1,\infty,K}$ τη νόρμα του χώρου $W^{1,\infty}(K)$, όπου $K \subset \mathbb{R}^2$, και, αν $B = (b_{ij})_{i,j=1}^2$ είναι ένας πίνακας συναρτήσεων, θέτουμε $\|B\|_{1,\infty,K} = \max_{1 \le i,j \le j} \|b_{ij}\|_{1,\infty,K}$.

**Λήμμα 1.6.1:** *Έστω $B(x) = (b_{ij}(x))_{i,j=1}^2$ ένας πίνακας συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι $b_{ij} \in W^{1,\infty}(K)$ για κάθε $K \in T_h$, $i, j = 1, 2$,*

$$\max_{x \in K} \|B(x)\|_{\mathbb{R}^2} \le C h_K, \quad \forall K \in T_h, \tag{1.6.7}$$

*και*

$$\|B\|_{1,\infty,K} \le C, \quad \forall K \in T_h, \tag{1.6.8}$$

*με μία σταθερά $C$ ανεξάρτητη του $K$. Τότε υπάρχει μία θετική σταθερά $C_1$ τέτοια ώστε, για κάθε $v \in S_h^0$,*

$$\left| \sum_{e \in E_h^{\text{in}}} v(m_e) \int_{\partial b_e} (B \nabla v) \cdot n \, ds \right| \le C_1 h |v|_{1,h}^2. \tag{1.6.9}$$

*Απόδειξη:* Έστω $v \in S_h^0$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα των Cauchy–Schwarz, το Λήμμα 1.5.6, τον τύπο ολοκλήρωσης του Green και το γεγονός ότι η $v$ είναι γραμμικό πολυώνυμο σε κάθε $K \in T_h$, μπορούμε

να εκτιμήσουμε το αριστερό μέλος της (1.6.9) ως εξής

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\int_{\partial b_e}(B\nabla v)\cdot n\,ds\Big|^2\\
&=\frac{1}{2}\Big|\sum_{K\in T_h}\sum_{e,\ell\in E_h(K)}(v(m_e)-v(m_\ell))\int_{\partial b_e\cap\partial b_\ell}(B\nabla v)\cdot n_e\,ds\Big|^2\\
&\le\frac{1}{2}\big(\sum_{K\in T_h}\sum_{e,\ell\in E_h(K)}(v(m_e)-v(m_\ell))^2\big)\\
&\qquad\times\sum_{K\in T_h}\sum_{e,\ell\in E_h(K)}\Big|\int_{\partial b_e\cap\partial b_\ell}(B\nabla v)\cdot n_e\,ds\Big|^2\\
&\le C|v|_{1,h}^2\sum_{K\in T_h}\big(h_K\int_{\partial K}\big|(B\nabla v)\cdot n\big|^2ds+h_K^2|v|_{1,K}^2\big),
\end{aligned}
$$

όπου με $n_e$ συμβολίζουμε το εξωτερικό, μοναδιαίο, κάθετο διάνυσμα στο σύνορο του $b_e\in\mathcal{B}_n$. Επομένως

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\int_{\partial b_e}(B\nabla v)\cdot n\,ds\Big|^2\\
&\le C|v|_{1,h}^2\sum_{K\in T_h}\big(h_K\int_{\partial K}\big|(B\nabla v)\cdot n\big|^2ds+h_K^2|v|_{1,K}^2\big).
\end{aligned}
\tag{1.6.10}
$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.5.7, τις (1.6.7), (1.6.8) και το γεγονός ότι $v\in S_h^0$, δηλαδή $|v|_{2,K}=0$, για κάθε $K\in T_h$, λαμβάνουμε εύκολα την ακόλουθη εκτίμηση για το $v\in S_h^0$, σε κάθε τρίγωνο $K\in T_h$,

$$
\begin{aligned}
&h_K\int_{\partial K}\big|(B\nabla v)\cdot n\big|^2ds\\
&\le Ch_K\{h_K\|B\|_{1,\infty,K}^2|v|_{1,K}^2+h_K^{-1}\max_{x\in K}\|B(x)\|_{\mathbb{R}^2}^2|v|_{1,K}^2\}\\
&\le Ch_K^2|v|_{1,K}^2.
\end{aligned}
\tag{1.6.11}
$$

Τελικά, συνδυάζοντας τις (1.6.10)–(1.6.11) παίρνουμε εύκολα την επιθυμητή σχέση (1.6.9). ■

**Λήμμα 1.6.2:** *Υπάρχει σταθερά $\alpha_1>0$ και $h_0>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $h\in(0,h_0)$ και για κάθε $v\in S_h^0$, έχουμε*

$$
\overline{a}_{NN}(v,v)\ge\alpha_1|v|_{1,h}^2.
\tag{1.6.12}
$$

*Απόδειξη:* Αφού ο $A$ ικανοποιεί την συνθήκη ελλειπτικότητας (1.1.5), για κάθε $v \in S_h^0$ έχουμε

$$\alpha_0 |v|_{1,K}^2 \le \left(A(z_K)\nabla v, \nabla v\right)_K, \quad \forall K \in T_h, \tag{1.6.13}$$

με τη σταθερά $\alpha_0$ της (1.1.5). Επομένως, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\operatorname{div}(A(z_K)\nabla v) = 0$, σε κάθε $K \in T_h$ και $v \in S_h^0$ και την (1.5.15), έχουμε

$$\begin{aligned}
a_0|v|_{1,h}^2 &\le \sum_{K\in T_h} \left(A(z_K)\nabla v, \nabla v\right)_K \\
&= \sum_{K\in T_h} \sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\left(A(z_K)\nabla v, \nabla \varphi_e\right)_K \\
&= \sum_{e\in E_h^{\rm in}} \left(A(z_{K^{+e}})\nabla v, \nabla \varphi_e\right)_{K^{+e}} v(m_e) \\
&\quad + \sum_{e\in E_h^{\rm in}} \left(A(z_{K^{-e}})\nabla v, \nabla \varphi_e\right)_{K^{-e}} v(m_e) \\
&= \sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\Big\{ \int_{\partial K^{+e}} (A(z_{K^{+e}})\nabla v)\cdot n\,\varphi_e\, ds \\
&\qquad\qquad - \int_{K^{+e}} \operatorname{div}(A(z_{K^{+e}})\nabla v)\varphi_e\, dx\Big\} \\
&\quad + \sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\Big\{ \int_{\partial K^{-e}} (A(z_{K^{-e}})\nabla v)\cdot n\,\varphi_e\, ds \\
&\qquad\qquad - \int_{K^{-e}} \operatorname{div}(A(z_{K^{-e}})\nabla v)\varphi_e\, dx\Big\} \\
&= \sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e) \int_{\partial K^{+e}} (A(z_{K^{+e}})\nabla v)\cdot n\,\varphi_e\, ds \\
&\quad + \sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e) \int_{\partial K^{-e}} (A(z_{K^{-e}})\nabla v)\cdot n\,\varphi_e\, ds \\
&= \sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e) \int_e (A(z_{K^{+e}})\nabla v_{K^{+e}} - A(z_{K^{-e}})\nabla v_{K^{-e}})\cdot n_e\, ds \\
&= \sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\Big\{ - \int_{\partial K^{+e}} (A(z_{K^{+e}})\nabla v)\cdot n\, ds \\
&\qquad\qquad - \int_{\partial K^{-e}} (A(z_{K^{-e}})\nabla v)\cdot n\, ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad + \int_e (A(z_{K^{+e}})\nabla v_{K^{+e}} - A(z_{K^{-e}})\nabla v_{K^{-e}})\cdot n_e\, ds\Big\} \\
&= -\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\Big\{\int_{\partial K^{+e}\setminus e} (A(z_{K^{+e}})\nabla v)\cdot n\, ds \\
&\qquad + \int_{\partial K^{-e}\setminus e} (A(z_{K^{-e}})\nabla v)\cdot n\, ds\Big\} \\
&= -\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\Big\{\int_{\partial b_e^+\setminus e} (A(z_{K^{+e}})\nabla v)\cdot n\, ds \\
&\qquad + \int_{\partial b_e^-\setminus e} (A(z_{K^{-e}})\nabla v)\cdot n\, ds\Big\},
\end{aligned}
$$

όπου $n_e$ το μοναδιαίο κάθετο εξωτερικό διάνυσμα στη πλευρά $e$ του $K^{+e}$. Συνεπώς

$$
\begin{aligned}
a_0|v|_{1,h}^2 \le -\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\Big\{&\int_{\partial b_e^+\setminus e} (A(z_{K^{+e}})\nabla v)\cdot n\, ds \\
&+ \int_{\partial b_e^-\setminus e} (A(z_{K^{-e}})\nabla v)\cdot n\, ds\Big\}.
\end{aligned} \tag{1.6.14}
$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Taylor υπάρχει σταθερά $C>0$, ανεξάρτητη του $K$, τέτοια ώστε

$$
\max_{x\in K} \|A(x)-A(z_K)\|_{\mathbb{R}^2} \le Ch_K \tag{1.6.15}
$$

και

$$
\begin{aligned}
&\sup_{x\in K}\max_{i,j=1,2}\Big|\frac{\partial(a_{ij}(x)-a_{ij}(z_K))}{\partial x_k}\Big| \\
&= \sup_{x\in K}\max_{i,j=1,2}\Big|\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_k}\Big| \le C, \quad k=1,2.
\end{aligned} \tag{1.6.16}
$$

Επιλέγουμε τώρα $B(x)=A(x)-A(z_K)$, με $x\in K$. Η $B$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 1.6.1. Τότε για $h$ κατάλληλα μικρό, σύμφωνα με την (1.6.14), έχουμε

$$
\overline{a}_{NN}(v,v) = -\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\int_{\partial b_e} (A\nabla v)\cdot n\, ds
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\Big(\int_{\partial b_e^+\setminus e}(A(z_{K^+e})\nabla v)\cdot n\,ds \\
&\qquad\qquad +\int_{\partial b_e^-\setminus e}(A(z_{K^-e})\nabla v)\cdot n\,ds\Big) \\
&\quad -\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\Big(\int_{\partial b_e^+\setminus e}(B\nabla v)\cdot n\,ds+\int_{\partial b_e^-\setminus e}(B\nabla v)\cdot n\,ds\Big) \qquad (1.6.17)\\
&= -\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\Big(\int_{\partial b_e^+\setminus e}(A(z_{K^+e})\nabla v)\cdot n\,ds \\
&\qquad\qquad +\int_{\partial b_e^-\setminus e}(A(z_{K^-e})\nabla v)\cdot n\,ds\Big) \\
&\quad -\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\int_{\partial b_e}(B\nabla v)\cdot n\,ds \ge \alpha_0|v|_{1,h}^2 - C_1 h|v|_{1,h}^2 \\
&\ge \alpha_1|v|_{1,h}^2,
\end{aligned}
$$

όπου $C_1$ είναι η σταθερά στην (1.6.9) και $\alpha_1$ είναι μία θετική σταθερά ανεξάρτητη του $h$. ■

Εισάγουμε τώρα την ακόλουθη νόρμα στον $S_h^0+H_0^1(\Omega)$,

$$
|||v|||_h=\big(|v|_{1,h}^2+\|\sqrt{\sigma}v\|_{0,\Omega}^2\big)^{1/2}, \qquad (1.6.18)
$$

την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

**Λήμμα 1.6.3:** *Υπάρχει μία θετική σταθερά $C$ και $h_0\in(0,1]$, τέτοια ώστε για κάθε $h\in(0,h_0)$ και κάθε $v\in S_h^0$, έχουμε*

$$
\overline{a}_{NN}(v,v)+\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v^2(m_e)\int_{b_e}\sigma\,dx\ge C|||v|||_h^2. \qquad (1.6.19)
$$

*Απόδειξη:* Έστω $v\in S_h^0$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.6.2 λαμβάνουμε εύκολα,

$$
\begin{aligned}
&\overline{a}_{NN}(v,v)+\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v^2(m_e)\int_{b_e}\sigma\,dx \\
&\ge \alpha_1|v|_{1,h}^2+\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v^2(m_e)\int_{b_e}\sigma\,dx
\end{aligned}
$$

(1.6.20)
$$\begin{aligned}
&\geq \alpha_1 |v|_{1,h}^2 + c \sum_{e\in E_h^{\rm in}} \int_{b_e} \sigma v^2 dx \\
&\quad - \sum_{e\in E_h^{\rm in}} \int_{b_e} \sigma(cv^2 - v^2(m_e))dx \\
&\geq c|||v|||_h^2 - \sum_{e\in E_h^{\rm in}} \int_{b_e} \sigma(cv^2 - v^2(m_e))dx
\end{aligned}$$

όπου $\alpha_1$ είναι η σταθερά του Λήμματος 1.6.2 και $c = \frac{1}{2}\min(1,\alpha_1)$. Επίσης, εφαρμόζοντας την αριθμητική γεωμετρική ανισότητα έχουμε

(1.6.21)
$$\begin{aligned}
&\sum_{e\in E_h^{\rm in}} \int_{b_e} \sigma(cv^2 - v^2(m_e))dx \\
&\leq \sum_{e\in E_h^{\rm in}} \int_{b_e} \sigma(\frac{1}{2}v^2 - v^2(m_e))dx \\
&\leq \sum_{e\in E_h^{\rm in}} \int_{b_e} \sigma(v - v(m_e))^2 dx \\
&\leq \overline{\sigma} \sum_{e\in E_h^{\rm in}} \int_{b_e} (v - v(m_e))^2 dx.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το γεγονός ότι η $v$ είναι ένα πολυώνυμο το πολύ βαθμού ένα σε κάθε $K \in T_h$, από την (1.6.21) παίρνουμε

(1.6.22)
$$\begin{aligned}
\sum_{e\in E_h^{\rm in}} \int_{b_e} \sigma(cv^2 - v^2(m_e))dx &\leq \overline{\sigma} \sum_{K\in T_h} \sum_{e\in E_h(K)} |v_K|_{1,K_e}^2 h_K^2 \\
&\leq \overline{\sigma} h^2 |v|_{1,h}^2 \leq \overline{\sigma} h^2 |||v|||_h^2.
\end{aligned}$$

Έστω τώρα $h$ κατάλληλα μικρό. Συνδυάζοντας τις (1.6.20), (1.6.22) και το Λήμμα 1.6.2, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μία θετική σταθερά $C$, τέτοια ώστε

$$\overline{a}_{NN}(v,v) + \sum_{e\in E_h^{\rm in}} v^2(m_e) \int_{b_e} \sigma\, dx \geq c|||v|||_h^2 - \overline{\sigma} h^2 |||v|||_h^2 \geq C|||v|||_h^2.$$

Άρα, ισχύει η (1.6.19). ■

**Ύπαρξη:** Αφού η επίλυση της (1.6.2) είναι ισοδύναμη με την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος, για να δείξουμε ύπαρξη αρκεί να αποδείξουμε μοναδικότητα. Η μοναδικότητα όμως έπεται εύκολα από το Λήμμα 1.6.3.

**Λήμμα 1.6.4:** *Έστω* $v \in \widehat{S}(\widehat{K})$. *Τότε*

$$\|v\|^2_{0,\widehat{K}} = \frac{1}{6}\sum_1^3 v^2(\widehat{m}_i). \tag{1.6.23}$$

*Απόδειξη:* Αφού η συνάρτηση $v$ είναι στοιχείο του $\widehat{S}(\widehat{K})$, μπορούμε να την εκφράσουμε ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης του $\widehat{S}(\widehat{K})$, οπότε $v = \sum_1^3 v(\widehat{m}_i)\widehat{\varphi}_i$. Επομένως,

$$\|v\|^2_{0,\widehat{K}} = \sum_{i,j=1}^3 v(\widehat{m}_i)v(\widehat{m}_j)(\widehat{\varphi}_i, \widehat{\varphi}_j)_{\widehat{K}}. \tag{1.6.24}$$

Για να δείξουμε την (1.6.23) πρέπει να υπολογίσουμε τα εσωτερικά γινόμενα $(\widehat{\varphi}_i, \widehat{\varphi}_j)_{\widehat{K}}$, για $i, j = 1, 2, 3$. Σύμφωνα με την (1.5.28) λαμβάνουμε εύκολα

$$\begin{aligned}
&(\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_1)_{\widehat{K}} = \frac{1}{6}, \quad (\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2)_{\widehat{K}} = 0, \quad (\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_3)_{\widehat{K}} = 0 \\
&(\widehat{\varphi}_2, \widehat{\varphi}_1)_{\widehat{K}} = 0, \quad (\widehat{\varphi}_2, \widehat{\varphi}_2)_{\widehat{K}} = \frac{1}{6}, \quad (\widehat{\varphi}_2, \widehat{\varphi}_3)_{\widehat{K}} = 0 \\
&(\widehat{\varphi}_3, \widehat{\varphi}_1)_{\widehat{K}} = 0, \quad (\widehat{\varphi}_3, \widehat{\varphi}_2)_{\widehat{K}} = 0, \quad (\widehat{\varphi}_3, \widehat{\varphi}_3)_{\widehat{K}} = \frac{1}{6}.
\end{aligned} \tag{1.6.25}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (1.6.24) και (1.6.25) παίρνουμε την (1.6.23). ■

**Λήμμα 1.6.5:** *Υπάρχει μία θετική σταθερά* $C$, *τέτοια ώστε για κάθε* $v \in S_h^0$ *και* $K \in T_h$ *έχουμε*

$$C\|v\|^2_{0,K} \le \sum_{e\in E_h(K)} h_e^2 v^2(m_e) \le C^{-1}\|v\|^2_{0,K}, \tag{1.6.26}$$

*όπου* $h_e = |e|$.

*Απόδειξη:* Έστω $v \in S_h^0$, $K \in T_h$ και $\ell \in E_h(K)$. Συνδυάζοντας τα Λήμματα 1.6.4 και 1.5.3, λαμβάνουμε εύκολα την αριστερή ανισότητα στην (1.6.26),

$$\begin{aligned}
\sum_{e\in E_h(K)} h_e^2 v^2(m_e) &\le h_K^2 \sum_{e\in E_h(K)} v^2(m_e) = h_K^2 \sum_{i=1}^3 \widehat{v}^2_{K,\ell}(\widehat{m}_i) \\
&= 6h_K^2 \|\widehat{v}_{K,\ell}\|^2_{0,\widehat{K}} \le C\|v\|^2_{0,K}.
\end{aligned}$$

Παρόμοια, χρησιμοποιώντας την (1.2.1), παίρνουμε και τη δεξιά ανισότητα,

$$\|v\|^2_{0,K} \le Ch_K^2 \|\widehat{v}_{K,\ell}\|^2_{0,\widehat{K}} = Ch_K^2 \sum_{i=1}^{3} \widehat{v}^2_{K,\ell}(\widehat{m}_i)$$
$$= Ch_K^2 \sum_{e\in E_h(K)} v^2(m_e) \le C\rho^{-2} \sum_{e\in E_h(K)} h_e^2 v^2(m_e). \quad \blacksquare$$

Έχοντας υπόψιν την (1.5.7), στη συνέχεια εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό. Θεωρούμε ένα τρίγωνο $K \in T_h$ και μία πλευρά $e \in E_h^{\rm in} \cap E_h(K)$. Συμβολίζουμε με $n_e$ το μοναδιαίο κάθετο εξωτερικό διάνυσμα στην πλευρά $e$ του $K$. Ακολουθώντας την παράγραφο 1.2, συμβολίζουμε με $K^{+e}$ το τρίγωνο $K$ και με $K^{-e}$ το άλλο τρίγωνο του $T_h$, που έχει κοινή πλευρά με το $K$ την $e$. Έστω λοιπόν,

$$\begin{aligned}[A(x)\nabla\chi]\cdot n_e =& (A(x)\nabla\chi_{K^{+e}})\cdot n_e \\ &- (A(x)\nabla\chi_{K^{-e}})\cdot n_e, \quad \forall x\in e,\ \forall \chi\in S_h^0.\end{aligned} \tag{1.6.27}$$

**Λήμμα 1.6.6:** *Έστω $v, w \in S_h^0$. Τότε*

$$\overline{a}_{NN}(v,w) = -\sum_{K\in T_h} \left(\mathrm{div}(A\nabla v), Q(w)\right)_K + \sum_{e\in E_h^{\rm in}} w(m_e)\int_e \big[A\nabla v\big]\cdot n_e\, ds,$$

*με $n_e$ όπως στην (1.5.7) και $Q$ όπως στην (1.5.57).*
*Απόδειξη:* Έστω $v \in S_h^0$, $K \in T_h$, $e \in E_h(K)\cap E_h^{\rm in}$ και $n_e$ το μοναδιαίο, κάθετο, εξωτερικό διάνυσμα στην πλευρά $e$ του $K$. Εφαρμόζοντας τον τύπο ολοκλήρωσης του Green έχουμε

$$\int_{\partial b_e} (A\nabla v)\cdot n\, ds = \int_{b_e} \mathrm{div}(A\nabla v)dx - \int_e \big[A\nabla v\big]\cdot n_e\, ds.$$

Λόγω τώρα του ορισμού (1.5.57) του τελεστή $Q$, η απόδειξη του λήμματος ολοκληρώνεται εύκολα. $\blacksquare$

**Λήμμα 1.6.7:** *Έστω $v, w \in S_h^0$. Τότε*

$$a(v,w) = \overline{a}_{NN}(v,w) - \sum_{K\in T_h} \left(\mathrm{div}(A\nabla v), w - Q(w)\right)_K + \sum_{K\in T_h}\int_{\partial K} (A\nabla v)\cdot nw\, ds - \sum_{e\in E_h^{\rm in}} w(m_e)\int_e \big[A\nabla v\big]\cdot n_e\, ds,$$

*με $n_e$ όπως στην (1.5.7) και $Q$ όπως στην (1.5.57).*
*Απόδειξη:* Εφαρμόζοντας τον τύπο ολοκλήρωσης του Green και το Λήμμα 1.6.6, έχουμε

$$\begin{aligned} a(v,w) &= \sum_{K\in T_h} (A\nabla v, \nabla w)_K \\ &= -\sum_{K\in T_h} (\mathrm{div}(A\nabla v), w)_K + \sum_{K\in T_h} \int_{\partial K} (A\nabla v)\cdot n\, w\, ds \\ &= \overline{a}_{NN}(v,w) - \sum_{K\in T_h} (\mathrm{div}(A\nabla v), w - Q(w))_K \\ &\quad + \sum_{K\in T_h} \int_{\partial K} (A\nabla v)\cdot n w\, ds - \sum_{e\in E_h^{\mathrm{in}}} w(m_e) \int_e \big[A\nabla v\big]\cdot n_e\, ds. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Θα εκτιμήσουμε τώρα τη διαφορά $u - u_B$ σε μία νόρμα εξαρτόμενη από τη διαμέριση, $|||\cdot|||_h$, βλ. (1.6.18).

**Θεώρημα 1.6.1:** *Έστω $u$ η λύση του (1.2.1) και $u_B$ η λύση του (1.6.2). Τότε, για $h$ κατάλληλα μικρό, έχουμε*

$$|||u - u_B|||_h \le C\Big(\sum_{K\in T_h} h_K^2 \|u\|_{2,K}^2\Big)^{1/2}, \tag{1.6.28}$$

*με σταθερά $C$ ανεξάρτητη του $h$.*
*Απόδειξη:* Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.6.3 και την (1.6.6), έχουμε, για $\chi \in S_h^0$,

$$\begin{aligned} |||u_B - \chi|||_h &\le C \sup_{\substack{v\in S_h^0 \\ v\neq 0}} \Big\{ \frac{\overline{a}_{NN}(u_B - \chi, v)}{|||v|||_h} \\ &\qquad + \frac{\sum_{e\in E_h^{\mathrm{in}}} v(m_e)(u_B-\chi)(m_e)\int_{b_e}\sigma\, dx}{|||v|||_h}\Big\} \\ &= C \sup_{\substack{v\in S_h^0 \\ v\neq 0}} \Big\{ \frac{\overline{a}_{NN}(u - \chi, v)}{|||v|||_h} \\ &\qquad + \frac{\sum_{e\in E_h^{\mathrm{in}}} v(m_e)\int_{b_e}\sigma(u-\chi(m_e))\, dx}{|||v|||_h}\Big\}. \end{aligned} \tag{1.6.29}$$

Ακόμα, με την ανισότητα των Cauchy–Schwarz λαμβάνουμε εύκολα την

ακόλουθη εκτίμηση

$$\begin{aligned}(1.6.30)\qquad &\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\int_{b_e}\sigma(u-\chi(m_e))\,dx\\ &\le \Big(\sum_{e\in E_h^{\rm in}}\int_{b_e}\sigma^2(u-\chi(m_e))^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\sum_{e\in E_h^{\rm in}}|b_e|\,v^2(m_e)\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (1.2.1), έχουμε

$$(1.6.31)\qquad |b_e|\le C_0\max(h^2_{K^+e},h^2_{K^-e})\le C_0\rho^{-2}h_e^2,\quad \forall e\in E_h^{\rm in},$$

με $C_0$ τη σταθερά της (1.5.22). Τότε από την (1.6.32), και τα Λήμματα 1.6.5 και 1.5.8, παίρνουμε, για $v\in S_h^0$,

$$\begin{aligned}(1.6.32)\qquad \sum_{e\in E_h^{\rm in}}|b_e|v^2(m_e)&=\frac{1}{2}\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}|b_e|v^2(m_e)\\ &\le C\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}h_e^2v^2(m_e)\le C\|v\|^2_{0,\Omega}\\ &\le C|v|^2_{1,h}\le C\|v\|_h^2.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας επίσης τις (1.6.30) και (1.6.32), λαμβάνουμε για $v,\chi\in S_h^0$

$$\begin{aligned}(1.6.33)\qquad &\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\int_{b_e}\sigma(u-\chi(m_e))\,dx\\ &\le C|||v|||_h\bigg(\sum_{e\in E_h^{\rm in}}\int_{b_e}\sigma^2(u-\chi(m_e))^2\,dx\bigg)^{1/2}.\end{aligned}$$

Ακόμα, χρησιμοποιώντας την ανισότητα των Cauchy–Schwarz, το Λήμμα 1.5.6, τον τύπο ολοκλήρωσης του Green και το γεγονός ότι η $\chi$ είναι πολυώνυμο το πολύ βαθμού ένα σε κάθε $K\in T_h$ καθώς και ότι $a_{ij}\in$

$C^1(\overline{\Omega})$, $i,j=1,2$, έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση για $v,\chi\in S_h^0$,

$$
\begin{aligned}
|\overline{a}_{NN}(u-\chi,v)|^2 &= \Big|\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\int_{\partial b_e}(A(\nabla(u-\chi))\cdot n\,ds\Big|^2\\
&= \frac{1}{2}\Big|\sum_{K\in T_h}\sum_{e,\ell\in E_h(K)}(v(m_e)-v(m_\ell))\int_{\partial b_e\cap\partial b_\ell}(A(\nabla(u-\chi))\cdot n_e\,ds\Big|^2\\
&\le \frac{1}{2}\Big(\sum_{K\in T_h}\sum_{e,\ell\in E_h(K)}(v(m_e)-v(m_\ell))^2\Big)\\
&\quad\times\sum_{K\in T_h}\sum_{e,\ell\in E_h(K)}\Big|\int_{\partial b_e\cap\partial b_\ell}(A(\nabla(u-\chi))\cdot n_e\,ds\Big|^2\\
&\le C\|\nabla v\|_{0,h}^2\sum_{K\in T_h}\Big(h_K\int_{\partial K}\big|(A(\nabla(u-\chi))\cdot n\big|^2ds+h_K^2\|u\|_{2,K}^2\\
&\qquad\qquad+h_K^2|u-\chi|_{1,K}^2\Big),
\end{aligned}
$$

όπου $n_e$ είναι το μοναδιαίο, κάθετο, εξωτερικό διάνυσμα στο σύνορο του $b_e\in\mathcal{B}_n$. Επομένως,

$$
\begin{aligned}
&|\overline{a}_{NN}(u-\chi,v)|^2\\
&\le C\|\nabla v\|_{0,h}^2\sum_{K\in T_h}\Big(h_K\int_{\partial K}\big|(A(\nabla(u-\chi))\cdot n\big|^2ds\\
&\qquad\qquad+h_K^2\|u\|_{2,K}^2+h_K^2|u-\chi|_{1,K}^2\Big).
\end{aligned}
\tag{1.6.34}
$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.5.7 και το γεγονός ότι $a_{ij}\in C^1(\overline{\Omega})$, $i,j=1,2$, λαμβάνουμε εύκολα την ακόλουθη εκτίμηση

$$
\begin{aligned}
&h_K\int_{\partial K}\big|(A(\nabla(u-\chi))\cdot n\,\big|^2ds\\
&\le C\big(h_K^2\|u\|_{2,K}^2+|u-\chi|_{1,K}^2\big),
\end{aligned}
\tag{1.6.35}
$$

με $\chi\in S_h^0$ και $K\in T_h$. Αθροίζοντας τώρα την (1.6.35) σε κάθε $K\in T_h$, έχουμε, για $\chi\in S_h^0$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h}h_K\int_{\partial K}\big|(A(\nabla(u-\chi))\cdot n\big|^2ds\\
&\le C\Big(\sum_{K\in T_h}h_K^2\|u\|_{2,K}^2+|u-\chi|_{1,h}^2\Big).
\end{aligned}
\tag{1.6.36}
$$

Συνδυάζοντας λοιπόν τις (1.6.34) και (1.6.36), λαμβάνουμε, για $v, \chi \in S_h^0$,

$$
\begin{aligned}
&|\overline{a}_{NN}(u-\chi, v)|^2 \\
&\leq C\left(\sum_{K\in T_h} h_K^2 \|u\|_{2,K}^2 + |u-\chi|_{1,h}^2\right)|v|_{1,h}^2 \\
&\leq C\left(\sum_{K\in T_h} h_K^2 \|u\|_{2,K}^2 + |u-\chi|_{1,h}^2\right)|||v|||_h^2.
\end{aligned} \tag{1.6.37}
$$

Επομένως, από τις (1.6.33) και (1.6.37) παίρνουμε, για $v, \chi \in S_h^0$,

$$
\begin{aligned}
&\overline{a}_{NN}(u-\chi, v) + \sum_{e\in E_h^{\text{in}}} v(m_e)\int_{b_e} \sigma(u-\chi(m_e))\,dx \\
&\leq C\Bigg(\sum_{K\in T_h} h_K^2 \|u\|_{2,K}^2 + |u-\chi|_{1,h}^2 \\
&\qquad + \sum_{e\in E_h^{\text{in}}} \int_{b_e} \sigma^2 (u-\chi(m_e))^2 dx\Bigg)^{1/2} |||v|||_h.
\end{aligned} \tag{1.6.38}
$$

Συνεπώς, σύμφωνα με τις (1.6.29) και (1.6.38), έχουμε

$$
\begin{aligned}
|||u_B - \chi|||_h^2 \leq C\big(&\sum_{K\in T_h} h_K^2 \|u\|_{2,K}^2 + |u-\chi|_{1,h}^2 \\
&+ \sum_{e\in E_h^{\text{in}}} \int_{b_e} \sigma^2 (u-\chi(m_e))^2\,dx\big).
\end{aligned} \tag{1.6.39}
$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (1.6.39) και τον ορισμό της $|||\cdot|||_h$, λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
|||u - u_B|||_h^2 \leq C\big(&\sum_{K\in T_h} h_K^2 \|u\|_{2,K}^2 + \|u-\chi\|_{1,h}^2 \\
&+ \sum_{e\in E_h^{\text{in}}} \int_{b_e} \sigma^2 (u-\chi(m_e))^2 dx\big).
\end{aligned}
$$

Άρα, για $\chi = Iu$, η παραπάνω σχέση δίνει

$$
\begin{aligned}
|||u - u_B|||_h^2 \leq C\big(&\sum_{K\in T_h} h_K^2 \|u\|_{2,K}^2 + \|u-Iu\|_{1,h}^2 \\
&+ \sum_{e\in E_h^{\text{in}}} \int_{b_e} \sigma^2 (u-Iu(m_e))^2 dx\big).
\end{aligned} \tag{1.6.40}
$$

Χρησιμοποιώντας τώρα μία γνωστή προσεγγιστική ιδιότητα του τελεστή $I$, βλ. παραδείγματος χάριν [22, Theorem 5], λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{e\in E_h^{\rm in}}\int_{b_e}\sigma^2(u-Iu(m_e))^2dx\\
&\le \overline{\sigma}^2\sum_{e\in E_h^{\rm in}}\int_{b_e}(u-Iu(m_e))^2dx\\
&\le \overline{\sigma}^2\sum_{e\in E_h^{\rm in}}(\operatorname{diam} b_e)^2|u|^2_{1,b_e}\\
&\le \overline{\sigma}^2\rho^{-2}\sum_{K\in T_h}h_K^2|u|^2_{1,K}.
\end{aligned}\tag{1.6.41}$$

Επομένως, από τις (1.6.40), (1.6.41) και (1.5.46) έπεται ότι υπάρχει σταθερά $C$ τέτοια ώστε

$$|||u-u_B|||_h^2\le C\sum_{K\in T_h}h_K^2\big\|u\big\|^2_{2,K}. \quad \blacksquare$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε τη διαφορά $u-u_B$ στην $L^2$–νόρμα.

**Θεώρημα 1.6.2:** *Έστω $u$ η λύση του (1.2.1) και $u_B$ η λύση του (1.6.2). Υποθέτουμε ότι $f\in H^1(\Omega)$, $a_{ij}\in C^2(\overline{\Omega})$, $1\le i,j\le 2$, $\sigma\in C^1(\overline{\Omega})$ καθώς και ότι το εσωτερικό σημείο $z_K$ είναι το βαρύκεντρο του $K$, για κάθε $K\in T_h$. Τότε υπάρχει μία σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε*

$$\|u-u_B\|_{0,\Omega}\le Ch^2\big(\|u\|_{2,\Omega}+\|f\|_{1,\Omega}\big).\tag{1.6.42}$$

*Απόδειξη:* Θεωρούμε το ακόλουθο βοηθητικό πρόβλημα: Έστω $u$ η λύση του (1.1.4) και $u_B$ η λύση του (1.6.2). Ζητείται $\varphi\in H^2(\Omega)$, τέτοια ώστε

$$-\operatorname{div}(A^T\nabla\varphi)+\sigma\varphi=u-u_B \quad \text{στο } \Omega \quad \text{και} \quad \varphi=0 \quad \text{στο } \partial\Omega.\tag{1.6.43}$$

Είναι γνωστό ότι το πρόβλημα (1.6.43) έχει μοναδική λύση, καθώς και ότι ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση (ελλειπτική ομαλότητα),

$$\|\varphi\|_{2,\Omega}\le C\|u-u_B\|_{0,\Omega}.\tag{1.6.44}$$

Χρησιμοποιώντας την (1.6.44) και τον τύπο ολοκλήρωσης του Green, λαμβάνουμε εύκολα

$$\|u-u_B\|^2_{0,\Omega}=-(u-u_B,\operatorname{div}(A^T\nabla\varphi))_\Omega+(u-u_B,\sigma\varphi)_\Omega$$

$$
\begin{aligned}
&= a(u-u_B,\varphi) - \sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}(u-u_B)(A^T\nabla\varphi)\cdot n\,ds + (u-u_B,\sigma\varphi)_\Omega\\
&= a(u-u_B,\varphi-v) + (u-u_B,\sigma(\varphi-v))_\Omega + a(u-u_B,v)\\
&\quad + (u-u_B,\sigma v)_\Omega - \sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}(u-u_B)(A^T\nabla\varphi)\cdot n\,ds,\quad \forall v\in S_h^0.
\end{aligned}
$$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
\|u-u_B\|_{0,\Omega}^2 &= a(u-u_B,\varphi-v)\\
&\quad + (u-u_B,\sigma(\varphi-v))_\Omega + a(u-u_B,v) + (u-u_B,\sigma v)_\Omega\\
&\quad - \sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}(u-u_B)(A^T\nabla\varphi)\cdot n\,ds,\quad \forall v\in S_h^0.
\end{aligned}
\tag{1.6.45}
$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε το δεξιό μέλος της (1.6.45). Είναι προφανές ότι

$$
\begin{aligned}
&a(u-u_B,\varphi-v) + (\sigma(u-u_B),\varphi-v)_\Omega\\
&\le C\|u-u_B\|_{1,h}\|\varphi-v\|_{1,h},\quad \forall v\in S_h^0.
\end{aligned}
\tag{1.6.46}
$$

Ακόμα, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.6.7, την (1.1.4) και τον τύπο ολοκλήρωσης του Green, έχουμε

$$
\begin{aligned}
&a(u-u_B,v) + (\sigma(u-u_B),v)_\Omega\\
&= \sum_{K\in T_h}\int_K A\nabla u\nabla v\,dx - a(u_B,v) + (\sigma(u-u_B),v)_\Omega\\
&= \sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}(A\nabla u)\cdot n\,v\,ds + \sum_{K\in T_h}\int_K f\,v\,dx\\
&\quad - \overline{a}_{NN}(u_B,v) - (\sigma u_B,v)_\Omega\\
&\quad + \sum_{K\in T_h}\big(\mathrm{div}(A\nabla u_B),v-Q(v)\big)_K\\
&\quad - \sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}(A\nabla u_B)\cdot n v\,ds\\
&\quad + \sum_{e\in E_h^{\mathrm{in}}} v(m_e)\int_e [A\nabla u_B]\cdot n_e\,ds,\quad \forall v\in S_h^0,
\end{aligned}
\tag{1.6.47}
$$

με $Q$ όπως στην (1.5.57). Επίσης, εφαρμόζοντας παρόμοια επιχειρήματα όπως στη (1.5.64), λαμβάνουμε

$$
\int_e [A\nabla u]\cdot n_e\,ds = 0,\quad \forall e\in E_h^{\mathrm{in}}.
\tag{1.6.48}
$$

Σύμφωνα τώρα με την (1.6.48) και λόγω του γεγονότος ότι $v(m_e) = 0$ για όλα τα $e \in E_h \setminus E_h^{\rm in}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} &\sum_{K\in T_h} \int_{\partial K} (A\nabla(u-u_B))\cdot n\, v\, ds \\ &\quad - \sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e) \int_e [A\nabla(u-u_B)]\cdot n_e\, ds \\ &= \sum_{K\in T_h} \int_{\partial K} (A\nabla(u-u_B))\cdot n\, (v - v(m_e))\, ds, \quad \forall v \in S_h^0. \end{aligned} \tag{1.6.49}$$

Επομένως, λόγω των (1.6.49) και (1.6.5), η (1.6.47) δίνει

$$\begin{aligned} &a(u-u_B, v) + (\sigma(u-u_B), v)_\Omega \\ &= \sum_{K\in T_h} \int_K f(v - Q(v))dx \\ &\quad - \sum_{K\in T_h} \int_K \sigma(u_B v - Q(u_B v))dx \\ &\quad + \sum_{K\in T_h} (\mathrm{div}(A\nabla u_B), v - Q(v))_K \\ &\quad + \sum_{K\in T_h} \int_{\partial K} (A\nabla(u-u_B)\cdot n\, (v - v(m_e))\, ds, \quad \forall v \in S_h^0. \end{aligned} \tag{1.6.50}$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε το δεξιό μέλος της (1.6.50). Λαμβάνοντας υπόψιν την (1.5.71) και το γεγονός ότι η $C_K(f)$, την οποία ορίσαμε στην
(1.5.67), είναι σταθερή στο $K$, μπορούμε να γράψουμε τους δύο πρώτους όρους των αθροισμάτων στην (1.6.50) ως

$$\begin{aligned} &\int_K f(v - Q(v))\, dx - \int_K \sigma(vu_B - Q(vu_B))\, dx \\ &= \int_K (f - C_K(f))(v - Q(v))\, dx + C_K(f) \int_K (v - Q(v))\, dx \\ &\quad + \int_K (\sigma - \sigma(z_K))(u_B v - Q(u_B v))\, dx \\ &\quad + \sigma(z_K) \int_K (u_B v - Q(u_B v))\, dx \end{aligned}$$

$$= \int_K (f - C_K(f))(v - Q(v))\,dx + \int_K (\sigma - \sigma(z_K))(u_B v - Q(u_B v))\,dx, \quad \forall v \in S_h^0.$$

Συνεπώς, αφού $f \in H^1(K)$ και $\sigma \in C^1(\overline{\Omega})$, λόγω των (1.5.68)–(1.5.73), έχουμε

$$\begin{aligned} &\Big|\int_K f(v - Q(v))\,dx + \int_K \sigma(v u_B - Q(v u_B))\,dx\Big| \\ &\le C h_K^2 |f|_{1,K}(|\varphi - v|_{1,K} + |\varphi|_{1,K}) \\ &\quad + C h_K^2 \max_{x\in K} |\nabla\sigma(x)| \int_K |\nabla(u_B v)|\,dx \\ &\le C h_K^2 (\|u\|_{2,\Omega} + \|f\|_{1,\Omega} + \|u - u_B\|_{1,K}) \\ &\quad \times (\|\varphi\|_{1,K} + \|\varphi - v\|_{1,K}), \quad \forall v \in S_h^0. \end{aligned} \tag{1.6.51}$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε τον τρίτο όρο του δεξιού μέλους της (1.6.50). Λόγω των (1.5.71), (1.5.72) και του γεγονότος ότι $a_{ij} \in C^2(\overline{\Omega})$, $1 \le i, j \le 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} &\sum_{K\in T_h} (\mathrm{div}(A\nabla u_B), v - Q(v))_K \\ &= \sum_{K\in T_h} (\mathrm{div}(A\nabla u_B) - \mathrm{div}(A\nabla u_B)(z_K), v - Q(v))_K \\ &\quad + \sum_{K\in T_h} (\mathrm{div}(A\nabla u_B)(z_K), v - Q(v))_K \\ &= \sum_{K\in T_h} (\mathrm{div}(A\nabla u_B) - \mathrm{div}(A\nabla u_B)(z_K), v - Q(v))_K \\ &\le C h^2 |u_B|_{1,h} |v|_{1,h} \\ &\le C h^2 (\|u\|_{1,\Omega} + \|u - u_B\|_{1,h})(\|\varphi\|_{1,\Omega} + \|\varphi - v\|_{1,h}), \quad \forall v \in S_h^0. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} &\sum_{K\in T_h} (\mathrm{div}(A\nabla u_B), v - Q(v))_K \\ &\le C h^2 (\|u\|_{1,\Omega} + \|u - u_B\|_{1,h}) \\ &\quad \times (\|\varphi\|_{1,\Omega} + \|\varphi - v\|_{1,h}), \quad \forall v \in S_h^0. \end{aligned} \tag{1.6.52}$$

Ακόμα παρατηρούμε ότι

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A\nabla(u-u_B)\cdot n\,(v-v(m_e))\,ds\\
&\quad=\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A-A(m_e))\nabla(u-u_B)\cdot n\\
&\qquad\qquad\times (v-v(m_e))\,ds\\
&\quad+\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A(m_e)\nabla(u-u_B))\cdot n\\
&\qquad\qquad\times (v-v(m_e))\,ds,\quad \forall v\in S_h^0.
\end{aligned}
\tag{1.6.53}
$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το Λήμμα 1.5.7, λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e ((A-A(m_e))\nabla(u-u_B))\cdot n\\
&\qquad\qquad\times (v-v(m_e))\,ds\Big|\\
&\quad\le C\sum_{K\in T_h} h_K(h_K^{-1/2}\|\nabla(u-u_B)\|_{0,K}+h_K^{1/2}\|u\|_{2,K})\\
&\qquad\qquad\times (h_K^{-1/2}\|v-v(m_e)\|_{0,K}+h_K^{1/2}|v|_{1,K})\\
&\quad\le C\sum_{K\in T_h} h_K(\|\nabla(u-u_B)\|_{0,K}|v|_{1,K}+h_K\|u\|_{2,K}|v|_{1,K})\\
&\le Ch\|\nabla(u-u_B)\|_{0,h}|v|_{1,h}+Ch^2\|u\|_{2,\Omega}|v|_{1,h},\quad \forall v\in S_h^0.
\end{aligned}
\tag{1.6.54}
$$

Έχοντας υπόψιν την (1.5.49), παίρνουμε εύκολα για $v,w\in H^2(V)$ με $V=K_1\cup K_2$, $K_1,K_2\in T_h$ και $\partial K_1\cap\partial K_2=e\in E_h$, ότι

$$
\int_e (A(m_e)\nabla v)\cdot n_1\,w\,ds+\int_e (A(m_e)\nabla v)\cdot n_2\,w\,ds=0,
\tag{1.6.55}
$$

όπου $n_i$ είναι το μοναδιαίο, κάθετο, εξωτερικό διάνυσμα στην πλευρά $e$ του $K_i$, $i=1,2$. Επαναλαμβάνοντας λοιπόν παρόμοια επιχειρήματα όπως στις (1.5.64) και (1.5.65), έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A(m_e)\nabla u)\cdot n\,v\,ds\\
&\quad=\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e [(A(m_e)\nabla u)\cdot n\\
&\qquad\qquad-\mathcal{M}_e^0((A(m_e)\nabla u)\cdot n)]v\,ds,\quad \forall v\in S_h^0,
\end{aligned}
\tag{1.6.56}
$$

και

$$\begin{aligned}&\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e \varphi\mathcal{M}_e^0((A(m_e)\nabla u)\cdot n)ds\\ &=\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A(m_e)\nabla u)\cdot n\varphi\, ds=0.\end{aligned}\tag{1.6.57}$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\int_e (v-v(m_e))\,ds=0,\quad \forall e\in E_h,$$

και τις (1.6.56), (1.6.57) και (1.5.48), παίρνουμε

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A(m_e)\nabla(u-u_B))\cdot n(v-v(m_e))\,ds\Big|\\ &=\Big|\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e ((A(m_e)\nabla u)\cdot n-\mathcal{M}_e^0((A(m_e)\nabla u)\cdot n)\\ &\qquad\qquad\times (v-v(m_e))\,ds\Big|\\ &=\Big|\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A(m_e)\nabla u\cdot n-\mathcal{M}_e^0(A(m_e)\nabla u\cdot n)\\ &\qquad\qquad\times (v-v(m_e)-\varphi+\varphi(m_e))\,ds\Big|\\ &\le C\sum_{K\in T_h} h_K\|u\|_{2,K}|v-\varphi|_{1,K}\le Ch\|u\|_{2,\Omega}\|v-\varphi\|_{1,h},\quad \forall v\in S_h^0.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A(m_e)\nabla(u-u_B))\cdot n(v-v(m_e))\,ds\Big|\\ &\le Ch\|u\|_{2,\Omega}\|v-\varphi\|_{1,h},\quad \forall v\in S_h^0.\end{aligned}\tag{1.6.58}$$

Άρα, συνδυάζοντας τις (1.6.50)–(1.6.54) και (1.6.58), έχουμε

$$\begin{aligned}&|a(u-u_B,v)+(u-u_B,\sigma v)_\Omega|\\ &\le Ch\big(\|u-u_B\|_{1,h}+h\big(\|u\|_{2,\Omega}+\|f\|_{1,\Omega}\big)\big)\\ &\qquad\times\big(\|\varphi\|_{1,\Omega}+\|\varphi-v\|_{1,h}\big),\quad \forall v\in S_h^0.\end{aligned}\tag{1.6.59}$$

Επειδή τώρα, $u, \varphi \in H^2(\Omega)$ και εφαρμόζοντας παρόμοια επιχειρήματα όπως στην (1.5.64), παίρνουμε

$$\begin{aligned}&\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}(A^T\nabla\varphi)\cdot n(u-u_B)\,ds\\ &=\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e\big((A^T\nabla\varphi)\cdot n-\mathcal{M}_e^0((A^T\nabla\varphi)\cdot n)\big)\\ &\qquad\times(u-u_B)\,ds.\end{aligned}\tag{1.6.60}$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν την προσεγγιστική ιδιότητα της $\mathcal{M}_e^0$, (1.5.48), στην παραπάνω σχέση, παίρνουμε

$$\left|\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}(A^T\nabla\varphi)\cdot n(u-u_B)\,ds\right|\le Ch|\varphi|_{2,\Omega}\|u-u_B\|_{1,h}.\tag{1.6.61}$$

Επομένως, επιλέγοντας $v=I\varphi$ στην (1.6.45) και χρησιμοποιώντας τις (1.6.46), (1.6.59), (1.6.61), (1.6.28), (1.6.44) και (1.5.46), παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|u-u_B\|_{0,\Omega}^2&=a(u-u_B,\varphi-v)+(u-u_B,\sigma(\varphi-v))_\Omega\\ &\quad+a(u-u_B,v)+(u-u_B,\sigma v)_\Omega\\ &\quad-\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}(u-u_B)(A^T\nabla\varphi)\cdot n\,ds\\ &\le C\|u-u_B\|_{1,h}\|\varphi-I\varphi\|_{1,h}+Ch|\varphi|_{2,\Omega}\|u-u_B\|_{1,h}\\ &\quad+Ch\big(\|u-u_B\|_{1,h}+h\big(\|u\|_{2,\Omega}+\|f\|_{1,\Omega}\big)\big)\big(\|\varphi\|_{1,\Omega}+\|\varphi-I\varphi\|_{1,h}\big)\\ &\le Ch^2\big(\|u\|_{2,\Omega}+\|f\|_{1,\Omega}\big)\|u-u_B\|_{0,\Omega}.\quad\blacksquare\end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# Μία νέα προσέγγιση: Απλή ελλειπτική εξίσωση

Σε αυτό το κεφάλαιο κατασκευάζουμε και μελετούμε μεθόδους πεπερασμένων χωρίων σε επικαλυπτόμενους καθώς και σε μη επικαλυπτόμενους διαμερισμούς ενός φραγμένου, κυρτού, πολυγωνικού χωρίου $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ για τη προσέγγιση μίας απλής ελλειπτικής εξίσωσης. Η προσεγγιστική λύση που παίρνουμε ανήκει στο χώρο των συνεχών, κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων ή στο χώρο των μη προσαρμοζόμενων (nonconforming) κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων, δηλαδή στο χώρο πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart. Θα δείξουμε ότι αυτές οι μέθοδοι μπορούν να θεωρηθούν εφαρμογές μίας διακριτής μεθόδου που προκύπτει ως προσέγγιση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων μέσω ενός κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης. Θα αποδείξουμε βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος στην $L^2$ και στην $H^1$ νόρμα, για αυτή τη γενική μέθοδο. Επομένως, οι αντίστοιχες εκτιμήσεις σφάλματος των σχημάτων πεπερασμένων χωρίων προκύπτουν ως απλές εφαρμογές των αποτελεσμάτων για τη γενική διακριτή μέθοδο.

## 2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο κατασκευάζουμε και μελετούμε μεθόδους πεπερασμένων χωρίων για τη διακριτοποίηση ελλειπτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων της μορφής: Για δοσμένη συνάρτηση $f \in L^2(\Omega)$, ζητείται μία συνάρτηση $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} -\Delta u + \sigma u &= f \quad \text{στο } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{στο } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

όπου $\Omega$ είναι ένα φραγμένο, κυρτό, πολυγωνικό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ και $\sigma \in C^1(\overline{\Omega})$ μία μη αρνητική συνάρτηση.

Στο Κεφάλαιο 1, θεωρήσαμε μεθόδους πεπερασμένων χωρίων στους μη επικαλυπτόμενους διαμερισμους του $\Omega$, $\mathcal{B}_c$ και $\mathcal{B}_n$. Στο Κεφάλαιο 2 κατασκευάζουμε επίσης μεθόδους πεπερασμένων χωρίων στους επικαλυπτόμενους διαμερισμούς $\mathcal{V}_c$ και $\mathcal{V}_n$, βλέπε §1.2. Αυτές οι μέθοδοι, καθώς και άλλες, προκύπτουν από μία διακριτή μέθοδο τέτοια που οι μέθοδοι πεπερασμένων χωρίων για τους διαμερισμούς $\mathcal{V}_c$, $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{B}_n$ και $\mathcal{B}_c$ να είναι απλές εφαρμογές της.

Η διακριτή μέθοδος που θεωρούμε στην παράγραφο 2.2 προκύπτει ως προσέγγιση της ανάλογης μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων για το πρόβλημα (2.1.1) μέσω ενός κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης στο $\Omega$, ο οποίος ορίζεται μέσω ενός τελεστή $Q$. Η διακριτή λύση που κατασκευάζουμε ανήκει σε ένα χώρο συναρτήσεων πεπερασμένης διάστασης $V_h$, του οποίου ειδικές περιπτώσεις είναι ο χώρος των συνεχών κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων καθώς και ο χώρος πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart, βλ. [24]. Για τη διακριτή μέθοδο της §2.2 αποδεικνύουμε μία βέλτιστης τάξεως εκτίμηση σφάλματος στην $H^1$ νόρμα. Επίσης, υποθέτοντας ότι ο κανόνας ολοκλήρωσης είναι ακριβής για γραμμικές συναρτήσεις καθώς και ότι $f \in H^1(\Omega)$ αποδεικνύουμε μία βέλτιστης τάξεως εκτίμηση σφάλματος στην $L^2$ νόρμα.

Στην παράγραφο 2.4 θεωρούμε δύο μεθόδους πεπερασμένων χωρίων με χώρο προσέγγισης τις συνεχείς (ή αλλιώς προσαρμοζόμενες (conforming)), κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις. Η πρώτη μέθοδος είναι αυτή που αναλύσαμε στην §1.3. Θεωρώντας τώρα έναν κανόνα ολοκλήρωσης ακριβή για κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις, δείχνουμε ότι το διακριτό σχήμα της §1.3 γράφεται στη μορφή της διακριτής μεθόδου που εισάγουμε στην §2.2. Η εκτίμηση σφάλματος στην $H^1$ νόρμα η οποία προκύπτει από την εφαρμογή του Θεωρήματος 2.3.1 είναι η ίδια που δίνει και το Θεώρημα 1.3.1. Όμως, η ανάλυση στο Θεώρημα 2.3.1 είναι διαφορετική από αυτήν του Θεωρήματος 1.3.1. Επίσης, η εκτίμηση σφάλματος στην $L^2$ νόρμα που παίρνουμε εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.3.2 δεν αποδεικνύεται στην [5]. Η δεύτερη τώρα μέθοδος πεπερασμένων χωρίων προκύπτει εάν θεωρήσουμε τον $\mathcal{V}_c$ αντί του $\mathcal{B}_c$. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγουμε τον υπολογισμό ενός νέου διαμερισμού του $\Omega$, αφού ο $\mathcal{V}_c$ έχει ως στοιχεία του τρίγωνα του δοσμένου διαμερισμού $T_h$. Θεωρώντας τώρα έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης ακριβή για κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις, δείχνουμε ότι αυτό το νέο διακριτό σχήμα μπορεί να γραφεί στη μορφή της διακριτής μεθόδου της §2.2. Επομένως, για αυτή τη νέα μέθοδο πεπερασμένων χωρίων ισχύουν οι εκτιμήσεις σφάλματος που παίρνουμε από τα θεωρήματα της §2.3.

Στη συνέχεια, στην παραγράφο 2.5, θεωρούμε και πάλι δύο μεθόδους πεπερασμένων χωρίων με χώρο προσέγγισης, αυτή τη φορά, τις όχι κατ'

ανάγκη συνεχείς (μη προσαρμοζόμενες (nonconforming)), κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις, δηλαδή το χώρο πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart. Η πρώτη μέθοδος είναι αυτή που αναλύσαμε στην §1.5. Θεωρώντας τώρα έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης, διαφορετικό από τους προηγούμενους, ακριβή για κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις, δείχνουμε ότι το διακριτό σχήμα της §1.5 γράφεται στη μορφή της μεθόδου της §2.2. Η εκτίμηση σφάλματος στην $H^1$ νόρμα που προκύπτει από την εφαρμογή του Θεωρήματος 2.3.1 είναι η ίδια που δίνει και το Θεώρημα 1.5.1. Όμως, η ανάλυση στο Θεώρημα 2.3.1 είναι διαφορετική από αυτήν του Θεωρήματος 1.5.1. Επίσης, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι αποδείξεις των Θεωρημάτων 1.5.2 και 2.3.2 είναι παρόμοιες. Η δεύτερη τώρα μέθοδος πεπερασμένων χωρίων προκύπτει εάν θεωρήσουμε τον $\mathcal{V}_n$ αντί του $\mathcal{B}_n$. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγουμε τον υπολογισμό ενός νέου διαμερισμού του $\Omega$, αφού ο $\mathcal{V}_n$ έχει ως στοιχεία του τρίγωνα του δοσμένου διαμερισμού $T_h$. Θεωρώντας τώρα έναν άλλο κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης, ο οποίος αυτή τη φορά είναι ακριβής για κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις, δείχνουμε ότι αυτό το νέο διακριτό σχήμα μπορεί να γραφεί στη μορφή της μεθόδου της §2.2. Επομένως, για αυτή τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων ισχύουν οι εκτιμήσεις σφάλματος που παίρνουμε από τα θεωρήματα της §2.3.

Μία σύντομη περίληψη αυτού του κεφαλαίου είναι η ακόλουθη. Στην παράγραφο 2.2 θεωρούμε έναν τριγωνισμό $T_h$ του $\Omega$ και έναν πεπερασμένης διάστασης χώρο συναρτήσεων, $V_h$. Θεωρούμε ακόμα έναν τελεστή $Q$ που έχει ορισμένες προσεγγιστικές ιδιότητες και με τη βοήθεια του οποίου διατυπώνουμε ένα σχήμα που αποτελεί προσέγγιση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων για την (2.1.1). Στην §2.3 μελετούμε αυτό το σχήμα και στα Θεωρήματα 2.3.1 και 2.3.2 δείχνουμε βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος στην $H^1$ και $L^2$ νόρμα, αντίστοιχα. Στην §2.4 θεωρούμε δύο μεθόδους πεπερασμένων χωρίων με χώρο προσέγγισης τις συνεχείς, κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις. Στην πρώτη χρησιμοποιούμε τον δυϊκό διαμερισμό $\mathcal{B}_c$ του $T_h$ και στη δεύτερη τον $\mathcal{V}_c$. Δείχνουμε ότι και τα δύο σχήματα είναι ειδικές περιπτώσεις της μεθόδου που αναλύσαμε στην §2.1, οπότε ισχύουν για αυτά οι εκτιμήσεις σφάλματος που δείχνουμε στην §2.3. Στην §2.5 θεωρούμε δύο μεθόδους πεπερασμένων χωρίων με χώρο προσέγγισης το χώρο πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart. Στην πρώτη χρησιμοποιούμε τον δυϊκό διαμερισμό $\mathcal{B}_n$ του $T_h$ και στη δεύτερη τον $\mathcal{V}_n$. Τέλος, δείχνουμε ότι και τα δύο σχήματα είναι ειδικές περιπτώσεις της μεθόδου που αναλύσαμε στην §2.3, οπότε ισχύουν και για αυτά οι εκτιμήσεις σφάλματος που δείχνουμε στην §2.3.

## 2.2 ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ

Θεωρούμε μία οικογένεια χώρων συναρτήσεων $\{V_h\}_{0<h\leq 1}$ πεπερασμένης διάστασης, όπου οι συναρτήσεις $v \in V_h$ είναι ορισμένες στο $\Omega$ και $v|_K \in \mathbb{P}_1$ για κάθε $K \in T_h$, με $\mathbb{P}_1$ το χώρο των πολυωνύμων δύο μεταβλητών βαθμού το πολύ ένα. Υποθέτουμε ότι ο $V_h$ έχει την ακόλουθη ιδιότητα προσέγγισης: υπάρχει σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε για κάθε $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,

$$\inf_{\chi\in V_h} \|v-\chi\|_{j,h} \leq C\Big(\sum_{K\in T_h} h_K^{2(2-j)}\|v\|_{j,K}^2\Big)^{1/2}, \quad j=0,1. \tag{2.2.1}$$

*Παρατήρηση 2.2.1:* Ο $V_h$ είναι ένας χώρος πεπερασμένης διάστασης, του οποίου στοιχεία προσεγγίζουν τα στοιχεία του $H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$. Στη περίπτωση που χρησιμοποιούμε προσαρμοζόμενα, δηλαδή συνεχή, πεπερασμένα στοιχεία, τότε $V_h \subset H_0^1(\Omega)$. Αλλά, στην πιο γενική περίπτωση, των μη προσαρμοζόμενων πεπερασμένων στοιχείων, ο $V_h$ δεν περιέχεται στον $H_0^1(\Omega)$. Έτσι θα χρειαστεί να υποθέσουμε κάποιες κατάλληλες συνθήκες συμβατότητας, βλ. επίσης [24, Hypothesis H2 και Remark 2]. Στην περίπτωση που ο $V_h$ είναι ο χώρος των συνεχών, κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων, δηλαδή ο $X_h^0$, είναι απλό να δούμε ότι η (2.2.1) ικανοποιείται, βλέπε (1.2.4).

**Υπόθεση 2.2.1:** Υποθέτουμε τις ακόλουθες συνθήκες συμβατότητας για το χώρο $V_h$:

(i) Αν $e$ είναι η κοινή πλευρά των τριγώνων $K_1, K_2 \in T_h$, τότε ισχύει

$$\int_e (v_{K_1} - v_{K_2})\, ds = 0, \quad \forall v \in V_h, \tag{2.2.2}$$

όπου $v_K$ είναι ο περιορισμός της $v$ στο $K \in T_h$.

(ii) Σε κάθε πλευρά $e$ ενός τριγώνου $K \in T_h$, που είναι τμήμα του συνόρου του $\Omega$, ισχύει

$$\int_e v\, ds = 0, \quad \forall v \in V_h. \tag{2.2.3}$$

Ακόμα υποθέτουμε ότι τα στοιχεία του χώρου $V_h$ ικανοποιούν την ανισότητα των Poincaré–Friedrichs, δηλαδή

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq C|v|_{1,h}, \quad \forall v \in V_h. \tag{2.2.4}$$

*Παρατήρηση 2.2.2:* Είναι προφανές ότι οι υποθέσεις (2.2.2)–(2.2.4) ικανοποιούνται όταν $V_h \subset H_0^1(\Omega)$. Επίσης, στην περίπτωση που ο $V_h$ αποτελείται από μη προσαρμοζόμενες κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις, δηλαδή είναι ο χώρος πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart, ισχύουν οι (2.2.2)–(2.2.3), βλ. [24, §5], όπως και η (2.2.4), βλ. Λήμμα 1.5.8.

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε τη διγραμμική μορφή $a : (H^1(\Omega)+V_h)\times (H^1(\Omega)+V_h) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής

$$a(v,w) = \sum_{K\in T_h} \int_K \nabla v \cdot \nabla w \, dx. \tag{2.2.5}$$

Μπορούμε, λοιπόν, να γράψουμε την (2.1.1) στην ακόλουθη μορφή: Ζητείται $u \in H_0^1(\Omega)$, τέτοια ώστε

$$a(u,w) + (\sigma, uw)_\Omega = (f,w)_\Omega, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \tag{2.2.6}$$

Το αντίστοιχο πρόβλημα πεπερασμένων στοιχείων είναι: Ζητείται $u_h \in V_h$, τέτοια ώστε

$$a(u_h,\chi) + (\sigma, u_h\chi)_\Omega = (f,\chi)_\Omega, \quad \forall \chi \in V_h. \tag{2.2.7}$$

Θεωρούμε τώρα έναν τελεστή $Q$, $Q|_K : H^2(K) \to L^2(K)$, $K \in T_h$, ο οποίος έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\int_K w\,dx = \int_K Q(w)\,dx, \quad \forall w \in \mathbb{P}_0,\ K \in T_h, \tag{2.2.8}$$

$$\begin{aligned} &\|w - Q(w)\|_{0,K} \le Ch_K |w|_{1,K} \quad \forall w \in H^1(K), \\ &\int_K |w - Q(w)|\,dx \le Ch_K \int_K |\nabla w|\,dx, \quad \forall w \in H^1(K) \text{ και} \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

$$Q(w^2) \ge 0, \quad \forall w \in H^2(K), \tag{2.2.10}$$

όπου $\mathbb{P}_0$ είναι ο χώρος τον σταθερών συναρτήσεων δύο μεταβλητών. Ένα παράδειγμα τελεστή $Q$, που πληροί τις (2.2.8)–(2.2.10) είναι,

$$Q(v)|_K = \frac{1}{3}(v(z_1) + v(z_2) + v(z_3)), \tag{2.2.11}$$

όπου $z_i$, $i = 1,2,3$, είναι οι κορυφές του τριγώνου $K$. Ο $Q$ ορίζει έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης στο $K$,

$$\int_K w\,dx \approx \int_K Q(w)\,dx.$$

## 2.3 ΕΝΑ ΓΕΝΙΚΟ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Σε αυτή την παράγραφο θα εισάγουμε μία διακριτή μέθοδο για το πρόβλημα (2.1.1) και θα δείξουμε βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος σε μία $H^1$ νόρμα εξαρτώμενη από τη διαμέριση, καθώς και στην $L^2$ νόρμα.

Έχοντας υπόψιν την (2.2.7), θεωρούμε το ακόλουθο διακριτό πρόβλημα: Ζητείται $u_Q \in V_h$, τέτοια ώστε

$$a(u_Q, \chi) + (\sigma, Q(u_Q\chi))_\Omega = (f, Q(\chi))_\Omega, \quad \forall \chi \in V_h. \tag{2.3.1}$$

Συνεπώς, θεωρούμε ένα διακριτό πρόβλημα, ανάλογο του (2.2.7), όπου προσεγγίζουμε το δεξιό μέλος $\int_K f\chi\,dx$ της (2.2.7), με $\int_K fQ(\chi)\,dx$ και παρόμοια τον άλλο όρο που σχετίζεται με τη συνάρτηση $\sigma$. Στην συνέχεια θα δείξουμε ύπαρξη της λύσεως $u_Q$ του (2.3.1).

*Παρατήρηση 2.3.1:* Επιλέγουμε να προσεγγίσουμε τον όρο $(\sigma u, \chi)_\Omega$ με $(\sigma, Q(u_Q\chi))_\Omega$ και όχι $(\sigma, u_Q Q(\chi))_\Omega$, διότι τότε για τους συγκεκριμένους τελεστές που θα θεωρήσουμε αργότερα ενδέχεται να οδηγηθούμε σε έναν μη συμμετρικό πίνακα.

**Ύπαρξη:** Εύκολα παρατηρούμε ότι το πρόβλημα (2.3.1) είναι ισοδύναμο με ένα $N \times N$ γραμμικό σύστημα όπου $N$ είναι η διάσταση του $V_h$. Συνεπώς, μοναδικότητα της λύσεως $u_Q$ του (2.3.1) συνεπάγεται ύπαρξή της. Θεωρούμε, λοιπόν, το ακόλουθο βοηθητικό πρόβλημα: Ζητείται $v \in V_h$, τέτοια ώστε

$$a(v, \chi) + (\sigma, Q(v\chi))_\Omega = 0, \quad \forall \chi \in V_h.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (2.2.10) και το γεγονός ότι $\sigma \geq 0$, έχουμε

$$\|\nabla v\|_{0,h}^2 \leq a(v, v) + (\sigma, Q(v^2))_\Omega = 0.$$

Άρα, $\nabla v = 0$. Επομένως, η $v$ είναι σταθερή σε κάθε τρίγωνο, και λόγω των (2.2.2) και (2.2.3), αναγκαστικά $v \equiv 0$ στο $\Omega$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε μία εκτίμηση σφάλματος βέλτιστης τάξεως στην $H^1$ νόρμα.

**Θεώρημα 2.3.1:** *Έστω $u$ η λύση του (2.1.1) και $u_Q$ η λύση του (2.3.1). Τότε, για $h$ κατάλληλα μικρό, υπάρχει σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε*

$$\|u - u_Q\|_{1,h} \leq C\Big(\sum_{K\in T_h} h_K^2 \|u\|_{2,K}^2\Big)^{1/2}. \tag{2.3.2}$$

*Απόδειξη:* Λόγω της (2.2.4) είναι προφανές ότι

$$\begin{aligned} &\|u_Q-\chi\|_{1,h}^2 \\ &\le C|a(u_Q-\chi,u_Q-\chi)+(\sigma,(u_Q-\chi)^2)_\Omega|, \quad \forall \chi\in V_h. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας την ανισότητα των Cauchy–Schwarz, έχουμε

$$\begin{aligned} &|a(u_Q-\chi,v)+(\sigma,(u_Q-\chi)v)_\Omega| \\ &=|a(u_Q-u,v)+(\sigma,(u_Q-u)v)_\Omega \\ &\quad +a(u-\chi,v)+(\sigma,(u-\chi)v)_\Omega| \\ &\le |a(u_Q-u,v)+(\sigma,(u_Q-u)v)_\Omega| \\ &\quad +C\|u-\chi\|_{1,h}\|v\|_{1,h}, \quad \forall v,\chi\in V_h. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε τον πρώτο όρο στο δεξιό μέλος της (2.3.4). Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green, τις (2.1.1) και (2.3.1), έχουμε

$$\begin{aligned} &a(u-u_Q,v)+(\sigma,(u-u_Q)v)_\Omega \\ &=\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K} v\nabla u\cdot n\,ds+(f,v-Q(v))_\Omega \\ &\quad -(\sigma,u_Qv-Q(u_Qv))_\Omega, \quad \forall v\in V_h. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Τώρα θα εκτιμήσουμε τον πρώτο όρο στο δεξιό μέλος της (2.3.5). Η Υπόθεση 2.2.1 και παρόμοια επιχειρήματα όπως αυτά της απόδειξης της (1.5.64) δίνουν

$$\begin{aligned} &\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K} v\nabla u\cdot n\,ds \\ &=\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e v(\nabla u\cdot n-\mathcal{M}_e^0(\nabla u\cdot n))\,ds, \quad \forall v\in V_h, \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

όπου $\mathcal{M}_e^0$ ο τελεστής που ορίσαμε στην (1.5.47). Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την (1.5.48) έχουμε

$$\left|\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K} v\nabla u\cdot n\,ds\right|\le C\sum_{K\in T_h} h_K|u|_{2,K}|v|_{1,K}, \quad \forall v\in V_h. \tag{2.3.7}$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε τον δεύτερο και τον τρίτο όρο του δεξιού μέλους της (2.3.5). Χρησιμοποιώντας την ανισότητα των Cauchy–Schwarz και την (2.2.9), λαμβάνουμε

$$|(f, v - Q(v))_\Omega| \le C\Big(\sum_{K\in T_h} h_K^2 \|f\|_{0,K}^2\Big)^{1/2} \|v\|_{1,h}, \quad \forall v \in V_h, \tag{2.3.8}$$

και

$$\begin{aligned} &|(\sigma, u_Q v - Q(u_Q v))_\Omega| \\ &\le C\|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{K\in T_h} h_K \int_K |\nabla(u_Q v)|\, dx \\ &\le C \sum_{K\in T_h} h_K |u_Q|_{1,K} |v|_{1,K} \\ &\le C\Big(\sum_{K\in T_h} h_K^2 (\|u\|_{1,K}^2 + \|u-\chi\|_{1,K}^2)\Big)^{1/2} \|v\|_{1,h} \\ &\quad + h\|u_Q - \chi\|_{1,h} \|v\|_{1,h}, \quad \forall v, \chi \in V_h, \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

όπου $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ είναι η νόρμα του χώρου $L^\infty(\Omega)$. Επομένως, συνδυάζοντας τις (2.3.7)–(2.3.9), εκτιμούμε την (2.3.5) κατά τον ακόλουθο τρόπο

$$\begin{aligned} &|a(u-u_Q, v) + (\sigma, (u-u_Q)v)_\Omega| \\ &\le C\Big(\sum_{K\in T_h} h_K^2 \|u\|_{2,K}^2\Big)^{1/2} \|v\|_{1,h} + \|u-\chi\|_{1,h}\|v\|_{1,h} \\ &\quad + Ch\|u_Q - \chi\|_{1,h}\|v\|_{1,h}, \ \forall v, \chi \in V_h. \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Τότε, λόγω των (2.3.3), (2.3.4) και (2.3.10), για $v = u_Q - \chi$, και $h$ κατάλληλα μικρό, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \|u_Q - \chi\|_{1,h} \le C\Big(\sum_{K\in T_h} h_K^2 \|u\|_{2,K}^2\Big)^{1/2} \\ + C\|u-\chi\|_{1,h}, \quad \forall \chi \in V_h. \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Τελικά, συνδυάζοντας τις (2.2.1) και (2.3.11), λαμβάνουμε εύκολα το επιθυμητό αποτέλεσμα (2.3.2). ■

Στη συνέχεια, υποθέτοντας ότι $f \in H^1(\Omega)$, θα αποδείξουμε μία εκτίμηση σφάλματος βέλτιστης τάξεως στην $L^2$ νόρμα.

**Θεώρημα 2.3.2:** *Έστω $u$ η λύση του (2.1.1) και $u_Q$ η λύση του (2.3.1). Υποθέτουμε ότι $f \in H^1(\Omega)$ και ότι ο τελεστής $Q$, που θεωρήσαμε στην §2.2, ορίζει έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης ακριβή για γραμμικά πολυώνυμα, δηλαδή*

$$\int_K w\,dx = \int_K Q(w)\,dx, \quad \forall w \in \mathbb{P}_1,\ \forall K \in T_h. \tag{2.3.12}$$

*Τότε υπάρχει μία σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε*

$$\|u - u_Q\|_{0,\Omega} \le Ch^2\big(\|u\|_{2,\Omega} + \|f\|_{1,\Omega}\big). \tag{2.3.13}$$

*Απόδειξη:* Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα: Ζητείται $\varphi \in H^2(\Omega)$, τέτοια ώστε

$$-\Delta\varphi + \sigma\varphi = u - u_Q \quad \text{στο } \Omega \quad \text{και} \quad \varphi = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega. \tag{2.3.14}$$

Είναι γνωστό, βλ. [36, Chapter 4], ότι το πρόβλημα (2.3.14) έχει μοναδική λύση και ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση "ελλειπτικής ομαλότητας"

$$\|\varphi\|_{2,\Omega} \le C\|u - u_Q\|_{0,\Omega}. \tag{2.3.15}$$

Χρησιμοποιώντας την (2.3.14) και τον τύπο ολοκλήρωσης του Green, λαμβάνουμε εύκολα

$$\begin{aligned}
\|u - u_Q\|^2_{0,\Omega} &= -(u - u_Q, \Delta\varphi)_\Omega + (u - u_Q, \sigma\varphi)_\Omega \\
&= a(u - u_Q, \varphi) - \sum_{K\in T_h} \int_{\partial K} \nabla\varphi \cdot n\,(u - u_Q)\,ds + (u - u_Q, \sigma\varphi)_\Omega \\
&= a(u - u_Q, \varphi - v) + (\sigma, (u - u_Q)(\varphi - v))_\Omega + a(u - u_Q, v) \\
&\quad + (\sigma, (u - u_Q)v)_\Omega - \sum_{K\in T_h} \int_{\partial K} \nabla\varphi \cdot n\,(u - u_Q)\,ds, \quad \forall v \in V_h.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\|u - u_Q\|^2_{0,\Omega} &= a(u - u_Q, \varphi - v) + (\sigma, (u - u_Q)(\varphi - v))_\Omega \\
&\quad + a(u - u_Q, v) + (\sigma, (u - u_Q)v)_\Omega \\
&\quad - \sum_{K\in T_h} \int_{\partial K} \nabla\varphi \cdot n\,(u - u_Q)\,ds, \quad \forall v \in V_h.
\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε το δεξιό μέλος της (2.3.16). Προφανώς

$$
\begin{aligned}
&a(u-u_Q,\varphi-v)+b(\sigma,(u-u_Q)(\varphi-v))\\
&\le C\|u-u_Q\|_{1,h}\|\varphi-v\|_{1,h},\quad \forall v\in V_h.
\end{aligned}
\tag{2.3.17}
$$

Ακόμα, σύμφωνα με την (2.3.5), έχουμε

$$
\begin{aligned}
&a(u-u_Q,v)+(\sigma,(u-u_Q)v)_\Omega\\
&=\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\nabla u\cdot n\,v\,ds+(f,v-Q(v))_\Omega\\
&\quad-(\sigma,u_Qv-Q(u_Qv))_\Omega,\quad \forall v\in V_h.
\end{aligned}
$$

Στην (2.3.10) εκτιμήσαμε το δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης. Όμως, για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.2 θα χρειαστούμε μία διαφορετική εκτίμηση από αυτήν της (2.3.10). Χρησιμοποιώντας τώρα το γεγονός ότι $\varphi\in H^2(\Omega)$ καθώς και παρόμοια επιχειρήματα όπως στην (1.5.65), λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e\varphi\mathcal{M}_e^0(\nabla u\cdot n)\,ds\\
&=\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e\nabla u\cdot n\,\varphi\,ds=0.
\end{aligned}
\tag{2.3.18}
$$

Έτσι, συνδυάζοντας τις (2.3.6) και (2.3.18), έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\nabla u\cdot n\,v\,ds\\
&=\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e(v-\varphi)(\nabla u\cdot n-\mathcal{M}_e^0(\nabla u\cdot n))\,ds,\quad \forall v\in V_h.
\end{aligned}
$$

Εφαρμόζοντας λοιπόν στην προηγούμενη σχέση την προσεγγιστική ιδιότητα (1.5.48) της $\mathcal{M}_e^0$ παίρνουμε

$$
\left|\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\nabla u\cdot n\,v\,ds\right|\le Ch|u|_{2,\Omega}|\varphi-v|_{1,h},\quad \forall v\in V_h.
\tag{2.3.19}
$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε τον δεύτερο και τον τρίτο όρο στο δεξιό μέλος της (2.3.5). Λόγω του γεγονότος ότι $f\in H^1(\Omega)$ και ο τελεστής $Q$

ικανοποιεί την (2.3.12), μπορούμε να έχουμε καλύτερης τάξεως εκτίμηση από αυτήν των (2.3.8) και (2.3.9). Θεωρούμε τώρα την ποσότητα

$$C_K(f) = \int_B f\omega_K \, dx,$$

όπου $B$ είναι ένας δίσκος στον $\mathbb{R}^2$, τέτοιος ώστε $B \subset\subset K$ και $\omega_K$ είναι μία ομαλή συνάρτηση αποκοπής, με φορέα το $\overline{B}$, βλ. και την (1.5.67). Επίσης, σε κάθε τρίγωνο $K \in T_h$, θεωρούμε ένα εσωτερικό σημείο $z_K$. Αφού η $C_K(f)$ είναι σταθερή σε κάθε $K$, λόγω της (2.3.12), έχουμε, για $v \in V_h$,

$$\begin{aligned}
&\int_K f(v - Q(v))\,dx + \int_K \sigma(u_Q v - Q(u_Q v))\,dx \\
&= \int_K (f - C_K(f))(v - Q(v))\,dx \\
&\quad + C_K(f)\int_K (v - Q(v))\,dx \\
&\quad + \int_K (\sigma - \sigma(z_K))(u_Q v - Q(u_Q v))\,dx \\
&\quad + \int_K \sigma(z_K)(u_Q v - Q(u_Q v))\,dx \\
&= \int_K (f - C_K(f))(v - Q(v))\,dx \\
&\quad + \int_K (\sigma - \sigma(z_K))(u_Q v - Q(u_Q v))\,dx \\
&\quad + \int_K \sigma(z_K)(u_Q v - Q(u_Q v))\,dx.
\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

Ακόμα, λόγω της (2.3.12), είναι προφανές ότι

$$\Big|\int_K (w - Q(w))\,dx\Big| \le C h_K^2 |w|_{2,1,K}, \quad \forall w \in H^2(K), \tag{2.3.21}$$

όπου $|\cdot|_{2,1,K}$ είναι η ημινόρμα του χώρου Sobolev $W^{2,1}(K)$. Έτσι, χρησιμοποιώντας την ανισότητα των Cauchy–Schwarz, τις (1.5.68), (2.3.20),

(2.3.21), (2.2.9), και το γεγονός ότι $f \in H^1(K)$ και $\sigma \in C^1(\overline{\Omega})$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_K f(v - Q(v))\,dx + \int_K \sigma(u_Q v - Q(u_Q v))\,dx\Big| \\
&\le Ch_K^2 |f|_{1,K} |v|_{1,K} \\
&\quad + Ch_K^2 \|\nabla\sigma(x)\|_{L^\infty(K)} \int_K |\nabla(u_Q v)|\,dx \\
&\quad + Ch_K^2 |\sigma(z_K)| \int_K |\nabla u_Q|\,|\nabla v|\,dx \\
&\le Ch_K^2 (\|f\|_{1,K} + \|u - u_Q\|_{1,K}) \\
&\qquad \times (\|\varphi\|_{1,K} + \|\varphi - v\|_{1,K}), \quad \forall v \in V_h.
\end{aligned}
\tag{2.3.22}
$$

Επομένως, συνδυάζοντας τις (2.3.5), (2.3.19) και (2.3.22), λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
&|a(u - u_Q, v) + b(\sigma, (u - u_Q)v)| \\
&\le Ch(\|u\|_{2,\Omega} + \|f\|_{1,\Omega} + \|u - u_Q\|_{1,h}) \\
&\qquad \times (\|\varphi - v\|_{1,h} + h\|\varphi\|_{1,\Omega}), \quad \forall v \in V_h.
\end{aligned}
\tag{2.3.23}
$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε τον τελευταίο όρο της (2.3.16). Αφού $u - u_Q \in L^2(\Omega)$, έχουμε ότι $\varphi \in H^2(\Omega)$. Τότε, χρησιμοποιώντας ανάλογα επιχειρήματα όπως στην (1.5.75), παίρνουμε

$$
\Big|\sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} (u - u_Q) \nabla\varphi \cdot n\,ds\Big| \le Ch|\varphi|_{2,\Omega} \|u - u_Q\|_{1,h},
\tag{2.3.24}
$$

Επομένως, συνδυάζοντας τις (2.3.16), (2.3.17), (2.3.23), (2.3.24) και (2.3.2), λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
&\|u - u_Q\|_{0,\Omega}^2 \le C\|u - u_Q\|_{1,h} \|\varphi - v\|_{1,h} \\
&+ Ch(\|u\|_{2,\Omega} + \|f\|_{1,\Omega} + \|u - u_Q\|_{1,h}) \\
&\qquad \times (\|\varphi - v\|_{1,h} + h\|\varphi\|_{2,\Omega}) \\
&\le Ch\big(\|u\|_{2,\Omega} + \|f\|_{1,\Omega}\big)\big(\|\varphi - v\|_{1,h} + h\|\varphi\|_{2,\Omega}\big), \quad \forall v \in V_h.
\end{aligned}
$$

Τελικά, χρησιμοποιώντας την (2.2.1) και την (2.3.15), έχουμε

$$
\|u - u_Q\|_{0,\Omega}^2 \le Ch^2\big(\|u\|_{2,\Omega} + \|f\|_{1,\Omega}\big)\|u - u_Q\|_{0,\Omega}. \quad \blacksquare
$$

*Παρατήρηση 2.3.2:* Το μόνο σημείο στο Θεώρημα 2.3.2, στο οποίο χρειαστήκαμε ότι $f \in H^1(\Omega)$, είναι η εκτίμηση (2.3.22).

## 2.4 Εφαρμογες Ι: Μεθοδοι πεπερασμενων χωριων με συνεχη πεπερασμενα στοιχεια

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε δύο σχήματα πεπερασμένων χωρίων για την (2.1.1), χρησιμοποιώντας ως προσεγγιστικό χώρο τις συνεχείς, κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις σε έναν δοσμένο τριγωνισμό $T_h$, δηλαδή τον $X_h^0$, βλ. §1.2. Εύκολα παρατηρούμε ότι ο $X_h^0$ πληροί την (2.2.1), βλέπε (1.2.4), όπως και τις (2.2.2)–(2.2.4), βλ. Παρατήρηση 2.2.2.

Η Μέθοδος Ι είναι το διακριτό σχήμα της §1.3, δηλαδή μία μέθοδος πεπερασμένων χωρίων στο διαμερισμό $\mathcal{B}_c$ του $\Omega$, και η Μέθοδος ΙΙ είναι ένα σχήμα πεπερασμένων χωρίων στο διαμερισμό $\mathcal{V}_c$ του $\Omega$. Θεωρούμε έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης ακριβή για κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις, μέσω ενός κατάλληλου τελεστή $Q$, ο οποίος εύκολα βλέπουμε ότι ικανοποιεί τις υποθέσεις (2.3.10)–(2.3.12). Επίσης, με τη βοήθεια των Λημμάτων 2.4.1 και 2.4.2 δείχνουμε ότι τα σχήματα πεπερασμένων χωρίων που παίρνουμε στις Μεθόδους Ι και ΙΙ, (2.4.2) και (2.4.12), αντίστοιχα, μπορούν να γραφούν στη μορφή (2.3.1). Έτσι, για τις μεθόδους πεπερασμένων χωρίων που θεωρούμε εδώ ισχύουν οι εκτιμήσεις σφάλματος που δείξαμε στην παράγραφο 2.3, βλ. Θεωρήματα 2.3.1–2.3.2.

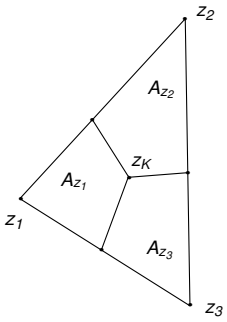
Τα αποτελέσματα της Μεθόδου Ι είναι ήδη γνωστά από τις παραγράφους 1.3 και 1.4, ενώ αυτά της Μεθόδου ΙΙ παρουσιάζονται εδώ για πρώτη φορά. Ακόμα παρατηρούμε ότι η Μέθοδος ΙΙ έχει μία ουσιαστική διαφορά από αυτήν της Μεθόδου Ι. Έτσι, ενώ στην Μέθοδο Ι η λύση του συνεχούς και του διακριτού προβλήματος ικανοποιούν παρόμοιες εξισώσεις, βλ. (2.4.1) και (2.4.2), δεν συμβαίνει το ίδιο με την Μέθοδο ΙΙ, βλ. (2.4.11) και (2.4.12).

**Μέθοδος Ι:** Όπως αναφέραμε στην §1.3, οι Bank και Rose, στην [5], θεωρούν μία μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για την (2.1.1) στον μη επικαλυπτόμενο δυϊκό διαμερισμό $\mathcal{B}_c$. Ως προσεγγιστικό χώρο χρησιμοποιούν τον $X_h^0$. Η μέθοδος κατασκευάζεται κατά τον ακόλουθο τρόπο: Θεωρούμε μία κορυφή $z \in Z_h^{\rm in}$ και το αντίστοιχο χωρίο $b_z \in \mathcal{B}_c$. Μετά ολοκληρώνουμε την (2.1.1) στο $b_z$ και εφαρμόζουμε τον τύπο ολοκλήρωσης του Green. Έτσι, λαμβάνουμε

$$-\int_{\partial b_z} \nabla u \cdot n \, ds + \int_{b_z} \sigma u \, dx = \int_{b_z} f \, dx. \tag{2.4.1}$$

Έχοντας υπόψιν τη σχέση (2.4.1), θεωρούμε την ακόλουθη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για την (2.1.1): Ζητείται $u_h \in X_h^0$, τέτοια ώστε

$$-\int_{\partial b_z} \nabla u_h \cdot n \, ds + u_h(z) \int_{b_z} \sigma \, dx = \int_{b_z} f \, dx, \quad \forall z \in Z_h^{\rm in}. \tag{2.4.2}$$




**ΣΧΗΜΑ 9**. Διαμερισμός του τριγώνου $K$ σε τρία υποχωρία $A_z$.

Θεωρούμε τώρα τη διγραμμική μορφή $\overline{a}_{CN}(\cdot,\cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, όπως αυτή ορίζεται στην (1.3.7), δηλαδή

$$\overline{a}_{CN}(v,w) = -\sum_{z \in Z_h^{\rm in}} w(z) \int_{\partial b_z} \nabla v \cdot n \, ds. \tag{2.4.3}$$

Τότε μπορούμε να γράψουμε την (2.4.2) στη μορφή

$$\begin{aligned} &\overline{a}_{CN}(u_h,\chi) + \sum_{z \in Z_h^{\rm in}} u_h(z)\chi(z) \int_{b_z} \sigma \, dx \\ &= \sum_{z \in Z_h^{\rm in}} \chi(z) \int_{b_z} f \, dx, \quad \forall \chi \in X_h^0. \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η λύση $u_h$ του (2.4.4) ικανοποιεί τη μεταβολική εξίσωση (2.3.1), για κατάλληλο τελεστή $Q$.

Θεωρούμε έναν τελεστή $Q$, που ορίζεται ως

$$Q(w)|_K = \sum_{z \in Z_h(K)} w(z) q_{A_z}, \quad K \in T_h, \tag{2.4.5}$$

όπου $A_z \in \mathcal{A}(K)$, τα χωρία στα οποία διαμερίζουμε το $K$, βλ. Σχήμα 9, και $q_S$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του χωρίου $S \subset \mathbb{R}^2$.

Εύκολα βλέπουμε ότι ο $Q$ ικανοποιεί τις (2.2.8)–(2.2.10). Ακόμα, λόγω της (2.2.8), παρατηρούμε ότι ο $Q$ ορίζει έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης, ακριβή για κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις. Επίσης,

έχουμε εύκολα

$$
\begin{aligned}
(f, Q(v))_\Omega &= \sum_{K\in T_h} \int_K f\, Q(v)\, dx \\
&= \sum_{K\in T_h} \int_K f \sum_{z\in Z_h(K)} v(z) q_{A_z}\, dx \\
&= \sum_{K\in T_h} \sum_{z\in Z_h(K)} v(z) \int_{A_z} f\, dx \\
&= \sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z) \int_{b_z} f\, dx, \quad \forall f\in L^2(\Omega),\ \forall v\in X_h^0.
\end{aligned} \tag{2.4.6}
$$

Έτσι, λόγω των (2.4.6), (2.4.4) και του Λήμματος 1.3.1, έχουμε ότι η λύση $u_h$ της (2.4.4) ικανοποιεί τη σχέση

$$
\begin{aligned}
&a(u_h,\chi) + (\sigma, Q(u_h\chi))_\Omega \\
&= \overline{a}_{CN}(u_h,\chi) + \sum_{z\in Z_h^{\rm in}} u_h(z)\chi(z) \int_K \sigma\, dx \\
&= \sum_{z\in Z_h^{\rm in}} \chi(z) \int_{b_z} f\, dx = (f, Q(\chi))_\Omega, \quad \forall \chi\in X_h^0.
\end{aligned} \tag{2.4.7}
$$

Άρα, εάν η $u$ είναι λύση της (2.1.1) και $u_h$ η λύση της (2.4.4), σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.1, έχουμε

$$
\|u-u_h\|_{1,h} \le C\Big(\sum_{K\in T_h} h_K^2 \|u\|_{2,K}^2\Big)^{1/2}. \tag{2.4.8}
$$

Επιλέγοντας για $z_K$ το βαρύκεντρο του $K\in T_h$ στην κατασκευή του δυϊκού διαμερισμού $\mathcal{B}_c$ παρατηρούμε ότι ο τελεστής $Q$, που θεωρήσαμε στην (2.4.5), πληροί την (2.3.12), διότι

$$
\begin{aligned}
\int_K Q(w)\, dx &= \sum_{z\in Z_h(K)} w(z)|A_z| = \frac{|K|}{3} \sum_{z\in Z_h(K)} w(z) \\
&= \int_K w\, dx, \quad \forall w\in \mathbb{P}_1.
\end{aligned} \tag{2.4.9}
$$

Συνεπώς, ο $Q$ ορίζει έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης ακριβή για κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις. Υποθέτοντας, ακόμα, ότι $f\in H^1(\Omega)$, λόγω του Θεωρήματος 2.3.2, έχουμε

$$
\|u-u_h\|_{0,\Omega} \le Ch^2\big(\|u\|_{2,\Omega} + \|f\|_{1,\Omega}\big). \tag{2.4.10}
$$

*Παρατήρηση 2.4.1:* Η εκτίμηση στην $H^1$ νόρμα, (2.4.8), αποδεικνύεται, βλ. Θεώρημα 1.3.1, από τους Bank & Rose, με διαφορετικό τρόπο. Η εκτίμηση στην $L^2$ νόρμα είναι νέο αποτέλεσμα.

**Μέθοδος ΙΙ:** Θα θεωρήσουμε τώρα μία μέθοδο πεπερασμένων χωρίων στον δυϊκό διαμερισμό $\mathcal{V}_c$, βλ. §1.2. Το υπολογιστικό όφελος από τη χρήση του $\mathcal{V}_c$ σε σχέση με τον $\mathcal{B}_c$ είναι προφανές, γιατί, δεδομένου του $T_h$, δεν χρειάζεται να υπολογίζουμε έναν νέο διαμερισμό για το $\Omega$, βλ. §1.2. Θα χρησιμοποιήσουμε, όπως και στην Μέθοδο Ι, ως χώρο προσέγγισης τον $X_h^0$. Θεωρούμε λοιπόν μία κορυφή $z \in Z_h^{\rm in}$ και το αντίστοιχο χωρίο $V_z \in \mathcal{V}_c$. Ολοκληρώνουμε την (2.1.1) στο $V_z$, και εφαρμόζουμε τον τύπο ολοκλήρωσης του Green. Έτσι, λαμβάνουμε

$$-\int_{\partial V_z} \nabla u \cdot n \, ds + \int_{V_z} \sigma u \, dx = \int_{V_z} f \, dx. \tag{2.4.11}$$

Θεωρούμε τώρα την ακόλουθη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για την (2.1.1): Ζητείται $u_h \in X_h^0$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &-\int_{\partial V_z} \nabla u_h \cdot n \, ds + \frac{2}{3} u_h(z) \int_{V_z} \sigma \, dx \\ &= \frac{2}{3} \int_{V_z} f \, dx, \quad \forall z \in Z_h^{\rm in}. \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

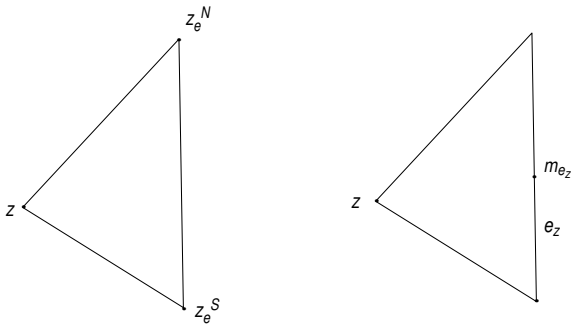
Σε αντίθεση με τη Μέθοδο Ι, στο διακριτό σχήμα που θεωρούμε τώρα δεν διατηρείται η μορφή της (2.4.11). Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί από το γεγονός ότι τα χωρία $V_{z_1}$ και $V_{z_2}$ για γειτονικές κορυφές $z_1,\ z_2 \in Z_h^{\rm in}$ επικαλύπτονται. Όμως, ο λόγος αυτός από μόνος του δεν ερμηνεύει την ύπαρξη των συγκεκριμένων συντελεστών $2/3$ στον δεύτερο όρο και στο δεξιό μέλος της (2.4.12)· πλήρη ερμηνεία θα δοθεί στην ανάλυση που ακολουθεί.

Θεωρούμε τώρα τη διγραμμική μορφή $\overline{a}_{CO} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, που ορίζεται ως

$$\overline{a}_{CO}(v, w) = -\sum_{z \in Z_h^{\rm in}} w(z) \int_{\partial V_z} \nabla v \cdot n \, ds. \tag{2.4.13}$$

Τότε, μπορούμε να ξαναγράψουμε την (2.4.12) στη μορφή

$$\begin{aligned} &\overline{a}_{CO}(u_h, \chi) + \frac{2}{3} \sum_{z \in Z_h^{\rm in}} u_h(z) \chi(z) \int_{V_z} \sigma \, dx \\ &= \frac{2}{3} \sum_{z \in Z_h^{\rm in}} \chi(z) \int_{V_z} f \, dx, \quad \forall \chi \in X_h^0. \end{aligned} \tag{2.4.14}$$




**ΣΧΗΜΑ 10**. *Αριστερά:* Οι δύο κορυφές $z_e^S$ και $z_e^N$ της $e$. *Δεξιά:* Σε ένα τυχαίο τρίγωνο $K \in T_h$, σημειώνουμε τη κορυφή $z$ και την αντίστοιχη πλευρά $e_z$.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ένα αποτέλεσμα ανάλογο του Λήμματος 2.4.1.

**Λήμμα 2.4.2:** *Έστω $v, w \in X_h^0$. Τότε*

$$\overline{a}_{CO}(v,w) = 2a(v,w). \tag{2.4.15}$$

*Απόδειξη:* Αφού η συνάρτηση $w$ είναι στοιχείο του $X_h^0$, μπορούμε να την εκφράσουμε ως γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων βάσης του, οπότε $w = \sum_{z \in Z_h^{\rm in}} w(z)\psi_z$. Άρα, λόγω της (1.2.3),

$$\begin{aligned} a(v,w) &= \sum_{K\in T_h} (\nabla v, \nabla w)_K = \sum_{K\in T_h} \sum_{z\in Z_h^{\rm in}} w(z)(\nabla v, \nabla \psi_z)_K \\ &= \sum_{z\in Z_h^{\rm in}} w(z) \sum_{K\in T_h} (\nabla v, \nabla \psi_z)_K \\ &= \sum_{z\in Z_h^{\rm in}} w(z) \sum_{K\in T_h(V_z)} (\nabla v, \nabla \psi_z)_K. \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

Τώρα, για $z \in Z_h^{\rm in}$, $K \in T_h(V_z)$ και $v \in X_h^0$, έχουμε

$$(\nabla v, \nabla \psi_z)_K = \int_{\partial K} \psi_z \nabla v \cdot n \, ds = \sum_{e\in E_h(K)} \nabla v \cdot n \int_e \psi_z \, ds. \tag{2.4.17}$$

Αφού $\psi_z$ είναι ένα γραμμικό πολυώνυμο σε κάθε πλευρά του $K$, λαμβάνουμε

$$\int_e \psi_z \, ds = \frac{|e|}{2}(\psi_z(z_e^S) + \psi_z(z_e^N)), \quad \forall e \in E_h(K), \tag{2.4.18}$$

όπου με $|e|$ συμβολίζουμε το μήκος της πλευράς $e$, και $z_e^S$ και $z_e^N$ είναι οι δύο κορυφές που βρίσκονται στα άκρα της $e$, βλ. Σχήμα 10.

Συνεπώς, σύμφωνα με την (1.2.3), η παραπάνω σχέση δίνει

$$\int_{e_z} \psi_z \, ds = 0 \quad \text{και} \quad \int_{\ell} \psi_z \, ds = \frac{|e|}{2}, \quad \text{για } \ell \in E_h(K) \setminus \{e_z\}, \tag{2.4.19}$$

όπου $e_z$ είναι η πλευρά του $K$ που βρίσκεται απέναντι από την κορυφή $z$, βλ. Σχήμα 10 . Συνδυάζοντας τώρα τις (2.4.17)–(2.4.19), έχουμε

$$\begin{aligned} \int_K \nabla v \cdot \nabla \psi_z \, dx &= \frac{1}{2} \sum_{e \in E_h(K) \setminus \{e_z\}} \int_e \nabla v \cdot n \, ds \\ &= -\frac{1}{2} \int_{e_z} \nabla v \cdot n \, ds. \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

Επομένως, αθροίζοντας την (2.4.20) για όλα τα $K \in T_h(V_z)$ και συνδυάζοντάς την με την (2.4.16) λαμβάνουμε την (2.4.15). ■

Θεωρούμε τώρα έναν τελεστή $Q$, που ορίζεται ως

$$Q(w)|_K = \frac{1}{3} \sum_{z \in Z_h(K)} w(z), \quad K \in T_h. \tag{2.4.21}$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι ο $Q$ πληροί τις (2.2.8)–(2.2.10). Ακόμα, λόγω της (2.2.8) βλέπουμε ότι ο $Q$ ορίζει έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης ακριβή για κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις. Επίσης,

$$\begin{aligned} (f, Q(v))_\Omega &= \sum_{K \in T_h} \int_K f Q(v) \, dx \\ &= \frac{1}{3} \sum_{K \in T_h} \int_K f \sum_{z \in Z_h(K)} v(z) q_K \, dx \\ &= \frac{1}{3} \sum_{z \in Z_h^{\text{in}}} \sum_{K \in T_h(V_z)} v(z) \int_K f \, dx \\ &= \frac{1}{3} \sum_{z \in Z_h^{\text{in}}} v(z) \int_{V_z} f \, dx, \quad \forall f \in L^2(\Omega), \ \forall v \in X_h^0. \end{aligned} \tag{2.4.22}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις (2.4.22), (2.4.14) και το Λήμμα 2.4.2 για τη λύση $u_h$ της (2.4.14), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} &a(u_h, \chi) + (\sigma, Q(u_h \chi))_\Omega \\ &= \frac{1}{2} \overline{a}_{CO}(u_h, \chi) + \frac{1}{3} \sum_{z \in Z_h^{\text{in}}} u_h(z) \chi(z) \int_{V_z} \sigma \, dx \\ &= \frac{1}{3} \sum_{z \in Z_h^{\text{in}}} \chi(z) \int_{V_z} f \, dx = (f, Q(\chi))_\Omega, \quad \forall \chi \in X_h^0. \end{aligned} \tag{2.4.23}$$

Συνεπώς, εάν $u$ είναι η λύση της (2.1.1) και $u_h$ η λύση της (2.4.11), λόγω του Θεωρήματος 2.3.1, έχουμε

$$\|u-u_h\|_{1,h} \le C\Big(\sum_{K\in T_h} h_K^2 \|u\|_{2,K}^2\Big)^{1/2}. \tag{2.4.24}$$

Είναι προφανές ότι ο τελεστής $Q$ που ορίζεται στην (2.4.21), πληροί την (2.3.12), αφού

$$\int_K Q(w)\,dx = \frac{|K|}{3}\sum_{z\in Z_h(K)} w(z) = \int_K w\,dx, \quad \forall w\in \mathbb{P}_1. \tag{2.4.25}$$

Συνεπώς ο $Q$ ορίζει έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης ακριβή για κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις. Υποθέτοντας τώρα ότι $f\in H^1(\Omega)$, λόγω του Θεωρήματος 2.3.2, λαμβάνουμε

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega} \le Ch^2\big(\|u\|_{2,\Omega}+\|f\|_{1,\Omega}\big). \tag{2.4.26}$$

## 2.5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΙΙ: ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΧΩΡΙΩΝ ΜΕ ΜΗ ΣΥΝΕΧΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Σε αυτή τη παράγραφο θα θεωρήσουμε δύο μεθόδους πεπερασμένων χωρίων για την (2.1.1), χρησιμοποιώντας ως χώρο προσέγγισης τις μη προσαρμοζόμενες (nonconforming), κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις σε έναν δοσμένο τριγωνισμό $T_h$, δηλαδή το χώρο $S_h^0$. Εύκολα βλέπουμε ότι ο $S_h^0$ πληροί την (2.2.1), βλ. (1.2.6), καθώς και τις (2.2.2)–(2.2.4), βλ. Παρατήρηση 2.2.2.

Η Μέθοδος ΙΙΙ είναι το διακριτό σχήμα της §1.5, δηλαδή μία μέθοδος πεπερασμένων χωρίων στο διαμερισμό $\mathcal{B}_n$ του $\Omega$, και η Μέθοδος IV είναι ένα διακριτό σχήμα πεπερασμένων χωρίων στο διαμερισμό $\mathcal{V}_n$ του $\Omega$. Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο θεωρούμε έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης ακριβή για κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις. Ακόμα, όπως και στην §2.4, με τη βοήθεια των Λημμάτων 2.5.1 και 2.5.2 δείχνουμε ότι τα σχήματα πεπερασμένων χωρίων που παίρνουμε στις Μεθόδους ΙΙΙ και IV, (2.5.2) και (2.4.13), αντίστοιχα, γράφονται στη μορφή (2.3.1). Έτσι, και για τις μεθόδους πεπερασμένων χωρίων που θεωρούμε εδώ ισχύουν οι εκτιμήσεις σφάλματος που δείξαμε στην παράγραφο 2.3, βλ. Θεωρήματα 2.3.1–2.3.2.

Τα αποτελέσματα της Μεθόδου ΙΙΙ είναι ήδη γνωστά από τις παραγράφους 1.5 και 1.6, ενώ αυτά της Μεθόδου IV παρουσιάζονται εδώ για

πρώτη φορά. Ακόμα παρατηρούμε ότι η Μέθοδος IV έχει μία ουσιαστική διαφορά από αυτήν της Μεθόδου III. Έτσι, ενώ στην Μέθοδο III η λύση του συνεχούς και του διακριτού προβλήματος ικανοποιούν παρόμοιες εξισώσεις, βλ. (2.5.1) και (2.5.2), δεν συμβαίνει το ίδιο με την Μέθοδο IV, βλ. (2.5.12) και (2.5.13).

**Μέθοδος III:** Στην §1.5 θεωρήσαμε μία μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για την (2.1.1), με $\sigma = 0$, στον μη επικαλυπτόμενο δυϊκό διαμερισμό $\mathcal{B}_n$. Ως προσεγγιστικό χώρο χρησιμοποιήσαμε τον $S_h^0$. Για λόγους πληρότητας περιγράφουμε πάλι τη μέθοδο αυτή: Θεωρούμε μία πλευρά $e \in E_h^{\rm in}$ και το αντίστοιχο χωρίο $b_e \in \mathcal{B}_n$. Ολοκληρώνοντας λοιπόν τις (2.1.1) στο $b_e$ και εφαρμόζοντας τον τύπο του Green, λαμβάνουμε

$$-\int_{\partial b_e} \nabla u \cdot n \, ds + \int_{b_e} \sigma u \, dx = \int_{V_e} f \, dx. \tag{2.5.1}$$

Έχοντας υπόψιν τη σχέση (2.5.1), θεωρούμε τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για την (2.1.1): Ζητείται $u_h \in S_h^0$, τέτοια ώστε

$$-\int_{\partial b_e} \nabla u_h \cdot n \, ds + u_h(m_e) \int_{b_e} \sigma \, dx = \int_{b_e} f \, dx, \quad \forall e \in E_h^{\rm in}. \tag{2.5.2}$$

Θεωρούμε τώρα τη διγραμμική μορφή $\overline{a}_{NN} : (H^1(\Omega) + S_h) \times (H^1(\Omega) + S_h) \to \mathbb{R}$, όπως αυτή ορίστηκε στην (1.5.16), δηλαδή

$$\overline{a}_{NN}(v, w) = -\sum_{e \in E_h^{\rm in}} w(m_e) \int_{\partial b_e} \nabla v \cdot n \, ds. \tag{2.5.3}$$

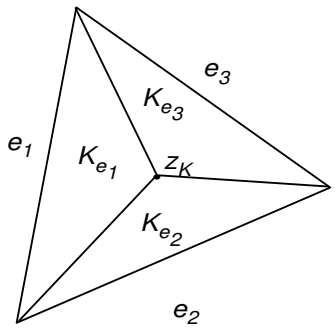
Τότε, η (2.5.2) γράφεται

$$\begin{aligned} &\overline{a}_{NN}(u_h, \chi) + \sum_{e \in E_h^{\rm in}} u_h(m_e)\chi(m_e) \int_{b_e} \sigma \, dx \\ &= \sum_{e \in E_h^{\rm in}} \chi(m_e) \int_{b_e} f \, dx, \quad \forall \chi \in S_h^0. \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η $u_h$ είναι λύση του (2.3.1), για μία κατάλληλη επιλογή τελεστή $Q$. Όμως, για να το δείξουμε αυτό θα χρειαστούμε το παρακάτω Λήμμα το οποίο αποτελεί συνέπεια των Λημμάτων 1.5.1 και 1.5.2.

**Λήμμα 2.5.1:** *Έστω $v, w \in S_h^0$. Τότε*

$$\overline{a}_{NN}(v, w) = a(v, w). \quad \blacksquare \tag{2.5.5}$$




**ΣΧΗΜΑ 11**. Διαμερισμός του τριγώνου $K \in T_h$ στα υποχωρία $K_e$.

Θεωρούμε τώρα έναν τελεστή $Q$, που ορίζεται ως

$$Q(w)|_K = \sum_{e \in E_h(K)} w(m_e) q_{K_e}, \quad K \in T_h, \tag{2.5.6}$$

όπου $K_e \in \widetilde{T_h}(K)$ είναι τα μικρότερα τρίγωνα στα οποία έχουμε διαμερίσει το $K$, βλ. Σχήμα 11, και συμβολίζουμε με $q_S$ τη χαρακτηριστική συνάρτηση ενός χωρίου $S \subset \mathbb{R}^2$.

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ο $Q$ πληροί τις (2.2.8)–(2.2.10). Ακόμα, λόγω της (2.2.8), παρατηρούμε ότι ο $Q$ ορίζει έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης, ακριβή για κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις. Επίσης, εύκολα βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
(f, Q(v))_\Omega &= \sum_{K \in T_h} \int_K f Q(v)\, dx \\
&= \sum_{K \in T_h} \int_K f \sum_{e \in E_h(K)} v(m_e) q_{K_e}\, dx \\
&= \sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} v(m_e) \int_{K_e} f\, dx \\
&= \sum_{e \in E_h^{\mathrm{in}}} v(m_e) \int_{b_e} f\, dx, \quad \forall f \in L^2(\Omega),\ \forall v \in S_h^0.
\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Άρα, λόγω των (2.5.7), (2.5.4) και του Λήμματος 2.5.1, για τη λύση $u_h$

της (2.5.4), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} & a(u_h,\chi)+(\sigma,Q(u_h\chi))_\Omega \\ & = \overline{a}_{NN}(u_h,\chi)+\sum_{e\in E_h^{\rm in}} u_h(m_e)\chi(m_e)\int_{b_e}\sigma\,dx \\ & = \sum_{e\in E_h^{\rm in}}\chi(m_e)\int_{b_e} f\,dx=(f,Q(\chi))_\Omega,\quad \forall\chi\in S_h^0. \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

Επομένως, αν $u$ είναι η λύση της (2.1.1) και $u_h$ η λύση της (2.5.4), λόγω του Θεωρήματος 2.3.1, έχουμε

$$\|u-u_h\|_{1,h}\le C\big(\sum_{K\in T_h} h_K^2\|u\|_{2,K}^2\big)^{1/2}. \tag{2.5.9}$$

Επιλέγοντας τώρα για $z_K$ το βαρύκεντρο του $K\in T_h$ στην κατασκευή του δυϊκού διαμερισμού $\mathcal{B}_n$, παρατηρούμε ότι ο τελεστής $Q$, που θεωρήσαμε στην (2.5.6), πληροί την (2.3.12), αφού

$$\begin{aligned} \int_K Q(w)\,dx &= \sum_{e\in E_h(K)} w(m_e)|K_e| = \frac{|K|}{3}\sum_{e\in E_h(K)} w(m_e) \\ &= \int_K w\,dx,\quad \forall w\in\mathbb{P}_1. \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

Επομένως, ο $Q$ ορίζει έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης ακριβή για κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις. Υποθέτοντας ακόμα ότι $f\in H^1(\Omega)$, λόγω του Θεωρήματος 2.3.2, έχουμε

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega}\le Ch^2\big(\|u\|_{2,\Omega}+\|f\|_{1,\Omega}\big). \tag{2.5.11}$$

*Παρατήρηση 2.5.1:* Οι εκτιμήσεις (2.5.9) και (2.5.11) έχουν αποδειχτεί αρχικά στα Θεωρήματα 1.6.1 και 1.6.2, αντίστοιχα. Όμως, η απόδειξη της (2.5.9) γίνεται διαφορετικά από ότι στο Θεώρημα 1.6.1.

**Μέθοδος IV:** Θα θεωρήσουμε τώρα μία μέθοδο πεπερασμένων χωρίων στον δυϊκό διαμερισμό $\mathcal{V}_n$, για την (2.1.1). Το υπολογιστικό όφελος από τη χρήση του $\mathcal{V}_n$ και όχι του $\mathcal{B}_n$ είναι προφανές, γιατί, δεδομένου του $T_h$, δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε έναν νέο διαμερισμό του $\Omega$, βλ. §1.2. Ως χώρο προσέγγισης θα χρησιμοποιήσουμε, όπως και στην Μέθοδο ΙΙΙ τον $S_h^0$. Θεωρούμε λοιπόν μία πλευρά $e\in E_h^{\rm in}$ και το αντίστοιχο χωρίο

$V_e \in \mathcal{V}_n$. Ολοκληρώνοντας την (2.1.1) στο $V_e$ και εφαρμόζοντας τον τύπο ολοκλήρωσης του Green, λαμβάνουμε

$$-\int_{\partial V_e} \nabla u \cdot n \, ds + \int_{V_e} \sigma u \, dx = \int_{V_e} f \, dx. \tag{2.5.12}$$

Θεωρούμε τώρα την ακόλουθη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για την (2.1.1): Ζητείται $u_h \in S_h^0$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &-\int_{\partial V_e} \nabla u_h \cdot n \, ds + \frac{1}{3} u_h(m_e) \int_{V_e} \sigma \, dx \\ &= \frac{1}{3} \int_{V_e} f \, dx, \quad \forall e \in E_h^{\text{in}}. \end{aligned} \tag{2.5.13}$$

Όπως και στη Μέθοδο ΙΙ, το διακριτό σχήμα που θεωρούμε τώρα δεν διατηρεί κατά βάση τη μορφή της (2.5.12), λόγω του ότι τα χωρία $V_{e_1}$ και $V_{e_2}$ για γειτονικές πλευρές $e_1$, $e_2 \in E_h^{\text{in}}$ επικαλύπτονται. Όμως, ο λόγος αυτός από μόνος του δεν ερμηνεύει την ύπαρξη του συγκεκριμένου συντελεστή $1/3$ στον δεύτερο όρο και στο δεξιό μέλος της (2.5.13)· πλήρη ερμηνεία θα δοθεί ανάλυση που ακολουθεί.

Στη συνέχεια θεωρούμε τη διγραμμική μορφή $\overline{a}_{NO} : (H^1(\Omega) + S_h) \times (H^1(\Omega) + S_h) \to \mathbb{R}$, που ορίζεται ως

$$\overline{a}_{NO}(v, w) = -\sum_{e \in E_h^{\text{in}}} w(m_e) \int_{\partial V_e} \nabla v \cdot n \, ds. \tag{2.5.14}$$

Τότε, μπορούμε να γράψουμε την (2.5.13) ως

$$\begin{aligned} &\overline{a}_{NO}(u_Q, \chi) + \frac{1}{3} \sum_{e \in E_h^{\text{in}}} u_h(m_e) \chi(m_e) \int_{V_e} \sigma \, dx \\ &= \frac{1}{3} \sum_{e \in E_h^{\text{in}}} \chi(m_e) \int_{V_e} f \, dx, \quad \forall \chi \in S_h^0. \end{aligned} \tag{2.5.15}$$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ένα αποτέλεσμα ανάλογο του Λήμματος 2.5.1.

**Λήμμα 2.5.2:** *Έστω $v, w \in S_h^0$. Τότε*

$$\overline{a}_{NO}(v, w) = a(v, w). \tag{2.5.16}$$

*Απόδειξη:* Λόγω της 1.5.9, έχουμε

$$\overline{a}_{NO}(v,w) = \overline{a}_{NN}(v,w).$$

Έτσι, σύμφωνα με το Λήμμα 2.5.1, η απόδειξη της (2.5.16) είναι άμεση. ■

Θεωρούμε τώρα τον τελεστή $Q$, που ορίζεται ως

$$Q(w)|_K = \frac{1}{3}\sum_{e\in E_h(K)} w(m_e), \quad K\in T_h. \tag{2.5.17}$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ο $Q$ πληροί τις (2.2.8)–(2.2.10). Ακόμα, λόγω της (2.2.8), παρατηρούμε ότι ο $Q$ ορίζει έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης, ακριβή για κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις. Επίσης βλέπουμε εύκολα ότι

$$\begin{aligned}
(f,Q(v))_\Omega &= \sum_{K\in T_h}\int_K f\,Q(v)\,dx\\
&= \frac{1}{3}\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)} v(m_e)\int_K f\,dx\\
&= \frac{1}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\sum_{K\in T_h(V_e)}\int_K f\,dx\\
&= \frac{1}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\int_{V_e} f\,dx,\ \ \forall f\in L^2(\Omega),\ \ \forall v\in S_h^0,
\end{aligned} \tag{2.5.18}$$

όπου $T_h(V_e)$ είναι το σύνολο των τριγώνων του $T_h$ που αποτελούν το $V_e$. Άρα, λόγω των (2.5.18), (2.5.15) και του Λήμματος 2.5.2, για τη λύση $u_h$ του (2.5.15), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&a(u_h,\chi) + (\sigma, Q(u_h\chi))_\Omega\\
&\quad= \overline{a}_{NO}(u_h,\chi) + \frac{1}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} u_h(m_e)\chi(m_e)\int_{V_e}\sigma\,dx\\
&\quad= \frac{1}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}}\chi(m_e)\int_{V_e} f\,dx = (f,Q(\chi))_\Omega, \quad \forall\chi\in S_h^0.
\end{aligned} \tag{2.5.19}$$

Συνεπώς, αν $u$ είναι η λύση της (2.1.1) και $u_h$ η λύση της (2.5.15), λόγω του Θεωρήματος 2.3.1, λαμβάνουμε

$$\|u-u_h\|_{1,h} \le C\Big(\sum_{K\in T_h} h_K^2\|u\|_{2,K}^2\Big)^{1/2}. \tag{2.5.20}$$

Είναι προφανές ότι ο τελεστής $Q$, που ορίζεται στην (2.5.17), πληροί την (2.3.12), διότι

$$\int_K Q(w)\,dx = \frac{|K|}{3} \sum_{e \in E_h(K)} w(m_e) = \int_K w\,dx, \quad \forall w \in \mathbb{P}_1. \tag{2.5.21}$$

Άρα, ο $Q$ ορίζει έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης ακριβή για κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις. Υποθέτοντας τώρα ότι $f \in H^1(\Omega)$, λόγω του Θεωρήματος 2.3.2, λαμβάνουμε

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 \big(\|u\|_{2,\Omega} + \|f\|_{1,\Omega}\big). \tag{2.5.22}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# Μία νέα προσέγγιση στις μεθόδους πεπερασμένων χωρίων: Ελλειπτικές εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές

Στο κεφάλαιο αυτό θα επεκτείνουμε τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3 και για ελλειπτικές εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές. Η ανάλυση των μεθόδων πεπερασμένων χωρίων του προβλήματος αυτού, βλ. (3.1.1), όπως είναι γνωστό, βλ. [13] και §1.6, παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες οι οποίες δεν αντιμετωπίζονται με άμεση επέκταση των τεχνικών για την εξίσωση του Poisson. Το κύριο αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου είναι η εισαγωγή ενός νέου διακριτού προβλήματος το οποίο, σε αντιστοιχία της προσέγγισης του Κεφαλαίου 2, περιγράφει τις τέσσερις μεθόδους πεπερασμένων χωρίων που θεωρήσαμε στο Κεφάλαιο 2. Ως συνέπεια της ανάλυσης εκτός των άλλων βελτιώνονται σημαντικά τα αποτελέσματα της εργασίας [13] για την κλασική μέθοδο πεπερασμένων χωρίων.

## 3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο κατασκευάζουμε και μελετούμε μεθόδους πεπερασμένων χωρίων για τη διακριτοποίηση ελλειπτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων της μορφής: Για δοσμένη συνάρτηση $f \in L^2(\Omega)$, ζητείται μία συνάρτηση $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(A\nabla u) + \sigma u &= f \quad \text{στο } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{στο } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

όπου $\Omega$ είναι ένα φραγμένο, κυρτό, πολυγωνικό χωρίο του $\mathbb{R}^2$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$ είναι ένας δεδομένος πίνακας συναρτήσεων πραγματικών τιμών, $a_{ij} \in C^2(\overline{\Omega})$, $1 \le i, j \le 2$, και $\sigma \in C^1(\overline{\Omega})$ μία μη αρνητική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι ο $A$ ικανοποιεί την (1.1.5), δηλαδή υπάρχει μία θετική

σταθερά $\alpha_0$ τέτοια ώστε

$$\xi^T A(x)\xi \geq \alpha_0 \xi^T \xi, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \ \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{3.1.2}$$

Στο Κεφάλαιο 1 θεωρήσαμε δύο μεθόδους πεπερασμένων χωρίων για την (3.1.1), στους διαμερισμούς $\mathcal{B}_c$ και $\mathcal{B}_n$. Κατ' αναλογία προς το προηγούμενο κεφάλαιο, θα κατασκευάσουμε μεθόδους πεπερασμένων χωρίων για την
(3.1.1), και στους επικαλυπτόμενους διαμερισμούς $\mathcal{V}_c$ και $\mathcal{V}_n$. Η ανάλυση αυτών των μεθόδων θα γίνει και πάλι με ενιαίο τρόπο. Έτσι θα θεωρήσουμε μία διακριτή μέθοδο παρόμοια με την (2.3.1). Μάλιστα στην περίπτωση που ο πίνακας $A$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας, δηλαδή η (3.1.1) είναι η (2.1.1), η διακριτή μέθοδος που δίνουμε εδώ ταυτίζεται με την (2.3.1). Οι μέθοδοι πεπερασμένων χωρίων που θα θεωρήσουμε προκύπτουν ως απλές εφαρμογές αυτής της μεθόδου.

Καταλήγουμε στη διακριτή μέθοδο που μελετούμε στην παράγραφο 3.2, προσεγγίζοντας την αντίστοιχη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων μέσω κανόνων αριθμητικής ολοκλήρωσης που ορίζονται από τους τελεστές $Q_1$ και $Q_2$. Ο $Q_1$ ορίζει έναν κανόνα ολοκλήρωσης σε δύο διαστάσεις και έχει τις ίδιες ιδιότητες με τον τελεστή $Q$ που θεωρήσαμε στο Κεφάλαιο 2, και ο $Q_2$ ορίζει έναν κανόνα ολοκλήρωσης σε μία διάσταση και έχει και αυτός παρόμοιες ιδιότητες με τον $Q_1$. Η διακριτή λύση που κατασκευάζουμε ανήκει στο χώρο πεπερασμένων στοιχείων $V_h$ του Κεφαλαίου 2. Για τη μέθοδο της §3.2 αποδεικνύουμε εκτιμήσεις σφάλματος στην $H^1$ και $L^2$ νόρμα. Για να δείξουμε την εκτίμηση σφάλματος στην $L^2$ νόρμα, όπως και στο Θεώρημα 2.3.2, υποθέτουμε ότι $f \in H^1(\Omega)$ καθώς και ότι ο κανόνας ολοκλήρωσης που ορίζει ο $Q_1$ είναι ακριβής για γραμμικές συναρτήσεις.

Στην παράγραφο 3.3 θεωρούμε δύο μεθόδους πεπερασμένων χωρίων με χώρο προσέγγισης τις συνεχείς (ή αλλιώς προσαρμοζόμενες (conforming)), κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις. Η πρώτη μέθοδος είναι αυτή που αναλύσαμε στην §1.4. Θεωρώντας τώρα ως $Q_1$ τον τελεστή $Q$ που ορίσαμε στην (2.4.5), και $Q_2$ έναν τελεστή που ορίζει έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης σε κάθε πλευρά $e \in E_h$, ακριβή για γραμμικές συναρτήσεις, αποδεικνύουμε ότι αυτή η μέθοδος γράφεται στη μορφή της διακριτής μεθόδου της §3.2. Επομένως, για τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων της §1.4 ισχύουν οι εκτιμήσεις σφάλματος που παίρνουμε από τα θεωρήματα της §3.2. Η εκτίμηση σφάλματος στην $H^1$ νόρμα που προκύπτει από την εφαρμογή του Θεωρήματος 3.2.1 είναι η ίδια που δίνει και το Θεώρημα 1.4.2. Επιπλέον, για την απόδειξή του δεν χρειάζεται να υποθέσουμε περιοριστικές συνθήκες για τον τριγωνισμό

$T_h$ και τον δυϊκό διαμερισμό $\mathcal{B}_c$, ενώ τέτοιες συνθήκες απαιτούνται στην εργασία [13], βλ. §1.4. Επίσης, η εκτίμηση σφάλματος στην $L^2$ νόρμα που παίρνουμε εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.2.2 δεν αποδεικνύεται στην παράγραφο 1.4. Η δεύτερη τώρα μέθοδος πεπερασμένων χωρίων προκύπτει εάν θεωρήσουμε τον $\mathcal{V}_c$ αντί του $\mathcal{B}_c$. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγουμε τον υπολογισμό ενός νέου διαμερισμού του $\Omega$, αφού ο $\mathcal{V}_c$ έχει ως στοιχεία του τρίγωνα του δοσμένου διαμερισμού $T_h$. Θεωρώντας, τώρα, δύο άλλους κανόνες ολοκλήρωσης κατασκευάζουμε μία μέθοδο πεπερασμένων χωρίων στον $\mathcal{V}_c$. Μάλιστα ο κανόνας ολοκλήρωσης σε δύο διαστάσεις είναι ο ίδιος με αυτόν που ορίσαμε στην Μέθοδο II στο Κεφάλαιο 2 (βλ. (2.4.21)). Επομένως, για αυτή τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων ισχύουν οι εκτιμήσεις σφάλματος που παίρνουμε από τα θεωρήματα της §3.2. Στην περίπτωση της εξίσωσης του Poisson, (2.1.1), το διακριτό σχήμα που κατασκευάζουμε εδώ ανάγεται σε αυτό που θεωρήσαμε στην §2.4.

Στη συνέχεια, στην παραγράφο 3.4 θεωρούμε και πάλι δύο μεθόδους πεπερασμένων χωρίων με χώρο προσέγγισης, αυτή τη φορά, τις όχι κατ' ανάγκη συνεχείς (μη προσαρμοζόμενες (nonconforming)), κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις, δηλαδή το χώρο πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart. Η πρώτη μέθοδος είναι αυτή που αναλύσαμε στην §1.6. Θεωρώντας τώρα δύο κατάλληλους κανόνες ολοκλήρωσης σε μία και δύο διαστάσεις, δείχνουμε ότι αυτή η μέθοδος γράφεται στη μορφή του διακριτού σχήματος της §3.2. Μάλιστα ο κανόνας ολοκλήρωσης σε δύο διαστάσεις είναι ο ίδιος με αυτόν που ορίσαμε στην Μέθοδο III, §2.5, για τη διακριτοποίηση της (2.1.1). Επομένως, για τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων της §1.6 ισχύουν οι εκτιμήσεις σφάλματος που παίρνουμε από τα θεωρήματα της §3.2. Η εκτίμηση σφάλματος στην $H^1$ νόρμα που προκύπτει από την εφαρμογή του Θεωρήματος 3.2.1 είναι η ίδια που δίνει και το Θεώρημα 1.6.1. Όμως, η ανάλυση στο Θεώρημα 3.2.1 είναι διαφορετική από αυτήν του Θεωρήματος 1.6.1. Οι αποδείξεις των Θεωρημάτων 1.6.2 και 3.2.2 είναι παρόμοιες. Η δεύτερη τώρα μέθοδος πεπερασμένων χωρίων προκύπτει εάν θεωρήσουμε τον $\mathcal{V}_n$ αντί του $\mathcal{B}_n$. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγουμε τον υπολογισμό ενός νέου διαμερισμού του $\Omega$, αφού ο $\mathcal{V}_n$ έχει ως στοιχεία του τρίγωνα του δοσμένου διαμερισμού $T_h$. Θεωρώντας τώρα έναν νέο κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης σε δύο διαστάσεις αλλά τον ίδιο σε μία διάσταση, κατασκευάζουμε μία μέθοδο πεπερασμένων χωρίων στον $\mathcal{V}_n$. Επομένως, για αυτή τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων ισχύουν οι εκτιμήσεις σφάλματος που παίρνουμε από τα θεωρήματα της §3.2. Στην περίπτωση της εξίσωσης του Poisson, (2.1.1), το διακριτό σχήμα που κατασκευάζουμε εδώ ανάγεται σε αυτό που θεωρήσαμε στην §2.5.

## 3.2 Ενα γενικο διακριτο προβλημα

Θεωρούμε μία οικογένεια τριγωνισμών $\{T_h\}_{0<h\leq 1}$ του $\Omega$ που ικανοποιεί την (1.2.1) καθώς και μία οικογένεια χώρων συναρτήσεων $\{V_h\}_{0<h\leq 1}$ πεπερασμένης διάστασης που έχει τις ιδιότητες (2.2.1)–(2.2.4) τις οποίες υποθέτουμε στο Κεφάλαιο 2. Ορίζουμε εκ νέου σε αυτό το κεφάλαιο τη διγραμμική μορφή $a : (H^1(\Omega) + V_h) \times (H^1(\Omega) + V_h) \to \mathbb{R}$ ως εξής

$$a(v,w) = \sum_{K\in T_h} \int_K A\nabla v \cdot \nabla w \, dx. \tag{3.2.1}$$

Γράφουμε, λοιπόν, την (3.1.1) στην ακόλουθη μορφή: Ζητείται $u \in H_0^1(\Omega)$, τέτοια ώστε

$$a(u,v) + (\sigma, uv)_\Omega = (f,v)_\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.2.2}$$

Σύμφωνα με τον τύπο ολοκλήρωσης του Green, η (3.2.2) δίνει

$$\begin{aligned} &\sum_{K\in T_h} \sum_{e\in E_h(K)} \int_e (A\nabla u)\cdot n \, v \, ds - (\mathrm{div}(A\nabla u), v)_\Omega + (\sigma, uv)_\Omega \\ &= (f,v)_\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Θεωρούμε τώρα έναν τελεστή $Q_1$, $Q_1|_K : H^2(K) \to L^2(K)$, ο οποίος έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

$$\int_K w\, dx = \int_K Q_1(w)\, dx, \quad \forall w \in \mathbb{P}_0, \ K \in T_h, \tag{3.2.4}$$

$$\begin{aligned} &\|w - Q_1(w)\|_{0,K} \leq C h_K |w|_{1,K} \quad \forall w \in H^1(K), \\ &\int_K |w - Q_1(w)|\, dx \leq C h_K \int_K |\nabla w|\, dx, \quad \forall w \in H^1(K), \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

και

$$Q_1(w^2) \geq 0, \quad \forall w \in H^2(K), \tag{3.2.6}$$

όπου $\mathbb{P}_0$ είναι ο χώρος τον σταθερών συναρτήσεων δύο μεταβλητών. Δηλαδή ο $Q_1$ είναι ο τελεστής $Q$ που θεωρούμε στο Κεφάλαιο 2. Θεωρούμε τώρα τον τελεστή $Q_2$, $Q_2|_e : C(e) \to L^2(e)$. Υποθέτουμε ότι ο $Q_2$ ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες

$$\int_e w\, ds = \int_e Q_2(w)\, ds, \quad \forall e \in E_h, \ \forall w \in \mathbb{P}_1, \tag{3.2.7}$$

$$\int_e (w - Q_2(w))^2 \, ds \le C h_e^2 \int_e |\nabla w|^2 \, ds, \quad \forall w \in H^2(K),\ \forall e \in E_h(K),\ K \in T_h, \tag{3.2.8}$$

και αν $w \in H^2(V)$ με $V = K_1 \cup K_2$, $K_1, K_2 \in T_h$ και $K_1 \cap K_2 = e \in E_h^{\text{in}}$, τότε

$$\int_e (A\nabla w)\cdot n_1 Q_2(v)\, ds + \int_e (A\nabla w)\cdot n_2 Q_2(v)\, ds = 0, \quad \forall v \in V_h, \tag{3.2.9}$$

όπου $n_i$ είναι το μοναδιαίο κάθετο εξωτερικό διάνυσμα στην πλευρά $e$ του $K_i$, $i = 1, 2$, $h_e$ είναι το μήκος της πλευράς $e$ και $\mathbb{P}_1$ ο χώρος των πολυωνύμων δύο μεταβλητών βαθμού το πολύ ένα. Ένα παράδειγμα ενός τελεστή $Q_2$, που πληροί τις (3.2.7)–(3.2.8), είναι

$$Q_2(w)|_e = w(m_e) q_e, \quad e \in E_h(K),\ \forall w \in H^2(K),\ K \in T_h, \tag{3.2.10}$$

όπου $m_e$ είναι το μέσον της πλευράς $e$ και $q_S$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $S \subset R^2$, δηλαδή ο $Q_2$ ορίζει έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης στην πλευρά $e$, ακριβή για γραμμικές συναρτήσεις. Επίσης μπορούμε να δούμε ότι για το πρόβλημα (3.1.1) ισχύει η ανάλογη σχέση της (1.5.49). Έτσι αν $w, \widetilde{w} \in H^2(V)$ με $V = K_1 \cup K_2$, $K_1, K_2 \in T_h$ και $K_1 \cap K_2 = e \in E_h^{\text{in}}$, τότε

$$\int_e (A\nabla w)\cdot n_1 \, \widetilde{w}\, ds + \int_e (A\nabla w)\cdot n_2 \, \widetilde{w}\, ds = 0, \tag{3.2.11}$$

όπου $n_i$ είναι το μοναδιαίο κάθετο εξωτερικό διάνυσμα στην πλευρά $e$ του $K_i$, $i = 1, 2$. Επομένως ο τελεστής $Q_2$ που θεωρούμε στην (3.2.10), λόγω της (3.2.11), ικανοποιεί την

$$w(m_e) \int_e (A\nabla v)\cdot n_1 \, ds + w(m_e) \int_e (A\nabla v)\cdot n_2 \, ds = 0, \quad \forall v \in V_h, \tag{3.2.12}$$

και κατά συνέπεια την (3.2.9).

Τώρα, έχοντας υπόψιν την (3.2.3), θεωρούμε το ακόλουθο διακριτό πρόβλημα: Ζητείται $u_h \in V_h$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &\sum_{K\in T_h} \sum_{e\in E_h(K)} \int_e (A\nabla u_h)\cdot n \, Q_2(v)\, ds \\ &\quad - \sum_{K\in T_h} \left(\operatorname{div}(A\nabla u_h), Q_1(v)\right)_K \\ &\quad + (\sigma, Q_1(u_h v))_\Omega = (f, Q_1(v))_\Omega, \quad \forall v \in V_h. \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Στην περίπτωση που ο $A$ είναι ο μοναδιαίος $2 \times 2$, πίνακας λόγω της (3.2.7) και του γεγονότος ότι $\operatorname{div} A\nabla\chi = \Delta\chi = 0$, για $\chi \in V_h$, έχουμε

$$\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e \nabla u_h \cdot n\, Q_2(v)\, ds - \sum_{K\in T_h}\left(\operatorname{div}(A\nabla u_h), Q_1(v)\right)_K$$
$$= \sum_{K\in T_h}\int_{\partial K} \nabla u_h \cdot n\, v\, ds = \sum_{K\in T_h}\int_K \nabla u_h \cdot \nabla v\, dx.$$

Από την παραπάνω σχέση εύκολα βλέπουμε ότι τότε τα διακριτά σχήματα (2.3.1) και (3.2.13) ταυτίζονται. Στη συνέχεια θα δείξουμε μία βέλτιστης τάξεως εκτίμηση σφάλματος στην $H^1$ νόρμα.

**Θεώρημα 3.2.1:** *Έστω $u$ η λύση του (3.1.1) και $u_h$ η λύση του (3.2.13). Τότε, υπάρχει μία σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε*

$$\|u - u_h\|_{1,h} \le C\left(\sum_{K\in T_h} h_K^2 \|u\|_{2,K}^2\right)^{1/2}. \tag{3.2.14}$$

*Απόδειξη:* Με την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\|u - u_h\|_{1,h} \le \|u - \chi\|_{1,h} + \|\chi - u_h\|_{1,h}, \quad \forall \chi \in V_h. \tag{3.2.15}$$

Επομένως, λόγω των προσεγγιστικών ιδιοτήτων του $V_h$, βλ. (2.2.1), αρκεί να εκτιμήσουμε τον τελευταίο όρο της (3.2.15). Είναι προφανές ότι

$$\begin{aligned}\|\chi - u_h\|_{1,h}^2 \le C|&a(\chi - u_h, \chi - u_h)\\ &+ (\sigma, (\chi - u_h)^2)_\Omega|, \quad \forall \chi \in V_h,\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

και

$$\begin{aligned}&|a(u_h - \chi, v) + (\sigma, (u_h - \chi)v)_\Omega|\\ &= |a(u_h - u, v) + (\sigma, (u_h - u)v)_\Omega\\ &\quad + a(u - \chi, v) + (\sigma, (u - \chi)v)_\Omega|\\ &\le |a(u_h - u, v) + (\sigma, (u_h - u)v)_\Omega|\\ &\quad + C\|u - \chi\|_{1,h}\|v\|_{1,h}, \quad \forall v, \chi \in V_h.\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\|\chi - u_h\|_{1,h}^2 \le C|&a(u_h - u, u_h - \chi)\\ &+ (\sigma, (u_h - u)(u_h - \chi))_\Omega|\\ &+ C\|u - \chi\|_{1,h}\|u_h - \chi\|_{1,h}, \quad \forall \chi \in V_h.\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Παρατηρούμε ότι στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ο πρώτος όρος του δεξιού μέρους της (3.2.18) είναι μηδέν. Η υπόθεση (3.2.9), δίνει ότι

$$\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A\nabla u)\cdot n\, Q_2(v)\, ds = 0, \quad \forall v\in V_h. \tag{3.2.19}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο ολοκλήρωσης του Green, τις (3.1.1), (3.2.13) και (3.2.19), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&a(u-u_h,v)+(\sigma,(u-u_h)v)_\Omega\\
&=\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A\nabla u)\cdot n\, v\, ds+(f,v)_\Omega\\
&\quad-(\sigma,u_h v)_\Omega-a(u_h,v)\\
&=\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A\nabla u)\cdot n\, v\, ds+(f,v)_\Omega\\
&\quad-(\sigma,u_h v)_\Omega-\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A\nabla u_h)\cdot n\, v\, ds\\
&\quad+\sum_{K\in T_h}(\mathrm{div}(A\nabla u_h),v)_K\\
&=(f,v-Q_1(v))_\Omega-(\sigma,u_h v-Q_1(u_h v))_\Omega\\
&\quad+\sum_{K\in T_h}(\mathrm{div}(A\nabla u_h),v-Q_1(v))_K\\
&\quad+\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A\nabla(u-u_h))\cdot n\,(v-Q_2(v))\, ds,\quad \forall v\in V_h.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
&a(u-u_h,v)+(\sigma,(u-u_h)v)_\Omega\\
&=(f,v-Q_1(v))_\Omega-(\sigma,u_h v-Q_1(u_h v))_\Omega\\
&\quad+\sum_{K\in T_h}(\mathrm{div}(A\nabla u_h),v-Q_1(v))_K\\
&\quad+\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A\nabla(u-u_h))\cdot n\\
&\qquad\qquad\times(v-Q_2(v))\, ds,\quad \forall v\in V_h.
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε το δεξιό μέλος της (3.2.20). Χρησιμοποιώντας τις προσεγγιστικές ιδιότητες (3.2.5) του $Q_1$, το γεγονός ότι $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \le i, j \le 2$, και παρόμοια επιχειρήματα όπως στις (2.3.8) και (2.3.9), λαμβάνουμε για κάθε $v, \chi \in V_h$,

$$\begin{aligned} &\big|(f, v - Q_1(v))_\Omega + (\sigma, u_h v - Q_1(u_h v))_\Omega\big| \\ &\le C\Bigg( \Big( \sum_{K \in T_h} h_K^2 (\|u\|_{2,K}^2 + \|u - \chi\|_{1,K}^2) \Big)^{1/2} \\ &\qquad + h|u_h - \chi|_{1,\Omega} \Bigg) |v|_{1,h}, \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

και

$$\begin{aligned} &|\sum_{K \in T_h} (\mathrm{div}(A \nabla u_h), v - Q_1(v))_K| \\ &\le C \Big( \sum_{K \in T_h} h_K^2 |u_h|_{1,K}^2 \Big)^{1/2} |v|_{1,h} \\ &\le C \|v\|_{1,h} \Big( \sum_{K \in T_h} h_K^2 (\|u\|_{2,K}^2 + \|u - \chi\|_{1,K}^2) \Big)^{1/2} \\ &\quad + h|u_h - \chi|_{1,h} \|v\|_{1,h}, \quad \forall v \in V_h. \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

Γράφουμε τώρα τον τελευταίο όρο της (3.2.20) ως εξής

$$\begin{aligned} &\sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} \int_e (A \nabla (u - u_h) \cdot n \, (v - Q_2(v)) \, ds \\ &= \sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} \int_e (A - A(m_e)) \nabla (u - u_h) \cdot n \\ &\qquad \times (v - Q_2(v)) \, ds \\ &+ \sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} \int_e (A(m_e) \nabla (u - u_h)) \cdot n \\ &\qquad \times (v - Q_2(v)) \, ds, \quad \forall v \in V_h, \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

όπου $m_e$ είναι το μέσο της πλευράς $e$, και εκτιμούμε καθένα όρο του δεξιού μέλους της (3.2.23) ξεχωριστά. Χρησιμοποιώντας την προσεγγιστική ιδιότητα (3.2.8) του $Q_2$, και το Λήμμα 1.5.7, λαμβάνουμε

$$\Big| \sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} \int_e ((A - A(m_e)) \nabla (u - u_h)) \cdot n \, (v - Q_2(v)) \, ds \Big|$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{K\in T_h} h_K \sum_{e\in E_h(K)} \Big(\int_e |\nabla(u-u_h)|^2 ds\Big)^{1/2} \Big(\int_e |v-Q_2(v)|^2 ds\Big)^{1/2} \\
&\le \sum_{K\in T_h} h_K^2 \sum_{e\in E_h(K)} \Big(\int_e |\nabla(u-u_h)|^2 ds\Big)^{1/2} \Big(\int_e |\nabla v|^2 ds\Big)^{1/2} \\
&\le C \sum_{K\in T_h} h_K (\|\nabla(u-u_h)\|_{0,K} + h_K \|u\|_{2,K}) \\
&\qquad\qquad \times (\|v\|_{0,K} + h_K |v|_{1,K}) \\
&\le C \sum_{K\in T_h} h_K (\|\nabla(u-u_h)\|_{0,K} |v|_{1,K} + h_K \|u\|_{2,K} |v|_{1,K}) \\
&\le C \sum_{K\in T_h} (h_K \|\nabla(u-u_h)\|_{0,K} \|v\|_{1,K} + h_K^2 \|u\|_{2,K} \|v\|_{1,K}), \ \ \forall v\in V_h,
\end{aligned}
$$

οπότε

$$
\begin{aligned}
&\Big| \sum_{K\in T_h} \sum_{e\in E_h(K)} \int_e ((A - A(m_e))\nabla(u-u_h))\cdot n \\
&\qquad\qquad \times (v - Q_2(v))\, ds \Big| \\
&\le C \sum_{K\in T_h} (h_K \|\nabla(u-u_h)\|_{0,K} \|v\|_{1,K} \\
&\qquad\qquad + h_K^2 \|u\|_{2,K} \|v\|_{1,K}), \quad \forall v\in V_h.
\end{aligned} \tag{3.2.24}
$$

Επίσης είναι απλό να δούμε ότι λόγω των Υποθέσεων συμβατότητας 2.2.1 για το χώρο $V_h$, ισχύει η (1.6.56) για $v\in V_h$, δηλαδή

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h} \sum_{e\in E_h(K)} \int_e (A(m_e)\nabla u)\cdot n\, v\, ds \\
&= \sum_{K\in T_h} \sum_{e\in E_h(K)} \int_e ((A(m_e)\nabla u)\cdot n \\
&\qquad\qquad - \mathcal{M}_e^0 (A(m_e)\nabla u)\cdot n)\, v\, ds, \quad \forall v\in V_h,
\end{aligned} \tag{3.2.25}
$$

όπου $\mathcal{M}_e^0$ ο τελεστής ορθογώνιας προβολής από τον $L^2(e)$ στον $\mathbb{P}_0$, βλ. (1.5.47). Επειδή ο κανόνας ολοκλήρωσης που ορίζει ο $Q_2$ είναι ακριβής για συναρτήσεις του $V_h$, (3.2.7), και εφαρμόζοντας επιπλέον την παραπάνω σχέση, ο τελευταίος όρος της (3.2.23) δίνει

$$
\Big| \sum_{K\in T_h} \sum_{e\in E_h(K)} \int_e (A(m_e)\nabla(u-u_h))\cdot n (v - Q_2(v))\, ds \Big|
$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big| \sum_{K\in T_h} \sum_{e\in E_h(K)} \int_e ((A(m_e)\nabla u)\cdot n \\
&\qquad\qquad - \mathcal{M}_e^0((A(m_e)\nabla u)\cdot n)(v - Q_2(v))\, ds \Big| \\
&= \Big| \sum_{K\in T_h} \sum_{e\in E_h(K)} \int_e (A(m_e)\nabla u\cdot n \\
&\qquad\qquad - \mathcal{M}_e^0(A(m_e)\nabla u\cdot n)(v - Q_2(v))\, ds \Big| \\
&\le C \sum_{K\in T_h} h_K \|u\|_{2,K} |v|_{1,K} \le Ch\|u\|_{2,\Omega}\|v\|_{1,h}, \quad \forall v\in V_h^0.
\end{aligned}
$$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
&\Big| \sum_{K\in T_h} \sum_{e\in E_h(K)} \int_e (A(m_e)\nabla(u-u_h))\cdot n(v - Q_2(v))\, ds \Big| \\
&\le Ch\|u\|_{2,\Omega}\|v\|_{1,h}, \quad \forall v\in V_h^0.
\end{aligned} \tag{3.2.26}
$$

Συνδυάζοντας λοιπόν τις (3.2.23), (3.2.24) και (3.2.26) έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\Big| \sum_{K\in T_h} \sum_{e\in E_h(K)} \int_e (A\nabla u - u_h)\cdot n\,(v - Q_2(v))\, ds \Big| \\
&\le C\|v\|_{1,h} \Big( \sum_{K\in T_h} h_K^2 \big(\|u\|_{2,K}^2 + \|u-\chi\|_{1,K}^2\big) \Big)^{1/2} \\
&\qquad + Ch\|v\|_{1,h}\|u-\chi\|_{1,h}, \quad \forall v\in V_h.
\end{aligned} \tag{3.2.27}
$$

Συνεπώς, από τις (3.2.20)–(3.2.22) και (3.2.27), παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
&|a(u-u_h, v) + (\sigma, (u-u_h)v)_\Omega| \\
&\le C|v|_{1,h} \big( \sum_{K\in T_h} h_K^2 (\|u-\chi\|_{1,K}^2 + \|u\|_{2,K}^2) \big)^{1/2} \\
&\qquad + Ch|v|_{1,h}|u_h-\chi|_{1,h}, \quad \forall v,\chi\in V_h.
\end{aligned} \tag{3.2.28}
$$

Επομένως, επιλέγοντας $v = u_h - \chi$ στην (3.2.28), η (3.2.18), για $h$ κατάλληλα μικρό, δίνει

$$
\begin{aligned}
\|u_h-\chi\|_{1,h} &\le C\|u-\chi\|_{1,h} \\
&\qquad + C\big( \sum_{K\in T_h} h_K^2 \|u\|_{2,K} \big)^{1/2}, \ \forall \chi\in V_h.
\end{aligned} \tag{3.2.29}
$$

Τελικά από την προσεγγιστική ιδιότητα (2.2.1) του χώρου $V_h$, και την (3.2.29) παίρνουμε την επιθυμητή εκτίμηση. ■

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε τη διαφορά $u - u_h$ στην $L^2$–νόρμα.

**Θεώρημα 3.2.2:** *Έστω $u$ η λύση του (3.1.1) και $u_h$ η λύση του (3.2.13). Υποθέτουμε ότι $f \in H^1(\Omega)$ καθώς και ότι ο κανόνας ολοκλήρωσης που ορίζει ο $Q_1$, είναι ακριβής για γραμμικά πολυώνυμα, δηλαδή*

$$\int_K w\,dx = \int_K Q_1(w)\,dx, \quad \forall w \in \mathbb{P}_1,\ \forall K \in T_h. \tag{3.2.30}$$

*Τότε υπάρχει μία σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε*

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \le Ch^2\big(\|u\|_{2,\Omega} + \|f\|_{1,\Omega}\big). \tag{3.2.31}$$

*Απόδειξη:* Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα: Ζητείται $\varphi \in H^2(\Omega)$, τέτοια ώστε

$$-\mathrm{div}(A^T\nabla\varphi) + \sigma\varphi = u - u_h \quad \text{στο } \Omega \quad \text{και} \quad \varphi = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega. \tag{3.2.32}$$

Είναι γνωστό, βλ. λόγου χάριν [36, Chapter 4], ότι το πρόβλημα (3.2.32) έχει μοναδική λύση, καθώς και ότι ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση ελλειπτικής ομαλότητας

$$\|\varphi\|_{2,\Omega} \le C\|u - u_h\|_{0,\Omega}. \tag{3.2.33}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (3.2.32) και τον τύπο ολοκλήρωσης του Green, λαμβάνουμε εύκολα

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 &= -(u - u_h, \mathrm{div}(A^T\nabla\varphi))_\Omega + (u - u_h, \sigma\varphi)_\Omega \\
&= a(u - u_h, \varphi) - \sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h}\int_e (A^T\nabla\varphi)\cdot n\,(u - u_h)\,ds \\
&\quad + (\sigma, (u - u_h)\varphi)_\Omega \\
&= a(u - u_h, \varphi - v) + (\sigma, (u - u_h)(\varphi - v))_\Omega \\
&\quad + a(u - u_h, v) + (\sigma, (u - u_h)v)_\Omega \\
&\quad - \sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h}\int_e (A^T\nabla\varphi)\cdot n\,(u - u_h)\,ds, \quad \forall v \in V_h.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 &= a(u - u_h, \varphi - v) + (\sigma, (u - u_h)(\varphi - v))_\Omega \\
&\quad + a(u - u_h, v) + (\sigma, (u - u_h)v)_\Omega \\
&\quad - \sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h}\int_e (A^T\nabla\varphi)\cdot n\,(u - u_h)\,ds, \quad \forall v \in V_h.
\end{aligned} \tag{3.2.34}$$

Επίσης, είναι προφανές ότι

$$
\begin{aligned}
&a(u-u_h,\varphi-v)+(\sigma,(u-u_h)(\varphi-v))_\Omega\\
&\le C\|u-u_h\|_{1,h}\|\varphi-v\|_{1,h},\quad \forall v\in V_h.
\end{aligned}
\tag{3.2.35}
$$

Στη συνέχεια, θα εκτιμήσουμε τον τρίτο και τον τέταρτο όρο στο δεξιό μέλος της (3.2.34). Σύμφωνα με την (3.2.20), έχουμε

$$
\begin{aligned}
&a(u-u_h,v)+(\sigma,(u-u_h)v)_\Omega\\
&=(f,v-Q_1(v))_\Omega-(\sigma,u_hv-Q_1(u_hv))_\Omega\\
&\quad+\sum_{K\in T_h}\left(\operatorname{div}(A\nabla u_h),v-Q_1(v)\right)_K\\
&\quad+\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h}\int_e(A\nabla(u-u_h))\cdot n\,(v-Q_2(v))\,ds,\ \ \forall v\in V_h.
\end{aligned}
\tag{3.2.36}
$$

Λαμβάνοντας τώρα υπόψιν ότι ο $Q_1$ ορίζει έναν κανόνα ολοκλήρωσης ακριβή για συναρτήσεις του $V_h$, βλ. (3.2.30), και χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα όπως στις (1.6.51) και (1.6.52), παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_K f(v-Q_1(v))\,dx-\int_K\sigma(vu_h-Q_1(vu_h))\,dx\right|\\
&\le Ch_K^2(\|u\|_{2,K}+\|f\|_{1,K}+\|u-u_h\|_{1,K})\\
&\qquad\times(\|\varphi\|_{1,K}+\|\varphi-v\|_{1,K}),\quad \forall v\in V_h,
\end{aligned}
\tag{3.2.37}
$$

και

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{K\in T_h}\left(\operatorname{div}(A\nabla u_h),v-Q_1(v)\right)_K\right|\\
&=\left|\sum_{K\in T_h}\left(\operatorname{div}(A\nabla u_h)-\operatorname{div}(A\nabla u_h)(z_K),v-Q_1(v)\right)_K\right|\\
&\le Ch^2(\|u\|_{1,\Omega}+\|u-u_h\|_{1,h})(\|\varphi\|_{1,\Omega}+\|\varphi-v\|_{1,h}),\\
&\qquad\forall v\in V_h.
\end{aligned}
\tag{3.2.38}
$$

Όπως στην (3.2.23) γράφουμε τον τελευταίο όρο της (3.2.36) ως εξής

$$
\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e(A\nabla(u-u_h)\cdot n\,(v-Q_2(v))\,ds
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A - A(m_e))\nabla(u-u_h)\cdot n \\
&\qquad\qquad \times (v - Q_2(v))\, ds \\
&+ \sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A(m_e)\nabla(u-u_h))\cdot n \\
&\qquad\qquad \times (v - Q_2(v))\, ds, \quad \forall v\in V_h,
\end{aligned}
\tag{3.2.39}
$$

Για τον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της (3.2.39) θεωρούμε την εκτίμηση που παίρνουμε στην (3.2.24) και στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε τον τελευταίο όρο της (3.2.24). Λόγω λοιπόν των υποθέσεων συμβατότητας (2.2.2) και (2.2.3) βλ. §2.2, για το χώρο $V_h$, και χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα όπως στις (1.5.64) και (1.5.65) παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e \varphi\mathcal{M}_e^0((A(m_e)\nabla u)\cdot n)ds \\
&= \sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A(m_e)\nabla u)\cdot n\varphi\, ds = 0,
\end{aligned}
\tag{3.2.40}
$$

όπου $\mathcal{M}_e^0$ είναι ο τελεστής ορθογώνιας προβολής που ορίσαμε στην (1.5.47). Επειδή ο $Q_2$ ορίζει έναν κανόνα ολοκλήρωσης ακριβή για γραμμικές συναρτήσεις, βλ. (3.2.7), $\varphi\in H^2(\Omega)$, και συνδυάζοντας επιπλέον με την (3.2.9), έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A(m_e)\nabla u\cdot n - \mathcal{M}_e^0(A(m_e)\nabla u\cdot n) \\
&\qquad\qquad \times (\varphi - Q_2(\varphi))\, ds = 0.
\end{aligned}
\tag{3.2.41}
$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι την (3.2.7), τις (3.2.40), (3.2.41) και (3.2.25) καθώς και την προσεγγιστική ιδιότητα της $\mathcal{M}_e^0$, (1.5.48), λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A(m_e)\nabla(u-u_h))\cdot n(v-Q_2(v))\, ds\Big| \\
&= \Big|\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e ((A(m_e)\nabla u)\cdot n - \mathcal{M}_e^0((A(m_e)\nabla u)\cdot n) \\
&\qquad\qquad \times (v - Q_2(v))\, ds\Big|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big| \sum_{K\in T_h} \sum_{e\in E_h(K)} \int_e (A(m_e)\nabla u\cdot n - \mathcal{M}_e^0(A(m_e)\nabla u\cdot n) \\
&\qquad\qquad \times (v - Q_2(v) - \varphi + Q_2(\varphi))\, ds\Big| \\
&\le C \sum_{K\in T_h} h_K \|u\|_{2,K} |v-\varphi|_{1,K} \\
&\le Ch\|u\|_{2,\Omega}\|v-\varphi\|_{1,h}, \quad \forall v\in V_h.
\end{aligned}
$$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
&\Big| \sum_{K\in T_h} \sum_{e\in E_h(K)} \int_e (A(m_e)\nabla(u-u_B))\cdot n(v-Q_2(v))\, ds\Big| \\
&\le Ch\|u\|_{2,\Omega}\|v-\varphi\|_{1,h}, \quad \forall v\in V_h.
\end{aligned} \tag{3.2.42}
$$

Άρα, συνδυάζοντας τις (3.2.36)–(3.2.39), (3.2.24) και (3.2.42), έχουμε

$$
\begin{aligned}
&|a(u-u_h,v) + (\sigma,(u-u_h)v)_\Omega| \\
&\le Ch\big(\|u-u_h\|_{1,h} + h\big(\|u\|_{2,\Omega} + \|f\|_{1,\Omega}\big)\big) \\
&\qquad \times \big(\|\varphi\|_{1,\Omega} + \|\varphi - v\|_{1,h}\big), \quad \forall v\in V_h.
\end{aligned} \tag{3.2.43}
$$

Επειδή τώρα $u,\varphi\in H^2(\Omega)$ και ο $V_h$ ικανοποιεί τις υποθέσεις συμβατότητας (2.2.1) και (2.2.3), εφαρμόζοντας παρόμοια επιχειρήματα όπως στην
(1.5.64), παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h} \int_{\partial K} (A^T\nabla\varphi)\cdot n(u-u_h)\, ds \\
&= \sum_{K\in T_h} \sum_{e\in E_h(K)} \int_e \{(A^T\nabla\varphi)\cdot n - \mathcal{M}_e^0((A^T\nabla\varphi)\cdot n)\} \\
&\qquad\qquad \times (u-u_h)\, ds.
\end{aligned} \tag{3.2.44}
$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν την προσεγγιστική ιδιότητα (1.5.48) της $\mathcal{M}_e^0$, παίρνουμε

$$
\Big| \sum_{K\in T_h} \int_{\partial K} (A^T\nabla\varphi)\cdot n(u-u_h)\, ds\Big| \le Ch|\varphi|_{2,\Omega}\|u-u_h\|_{1,h}. \tag{3.2.45}
$$

Επομένως, από τις (3.2.34), (3.2.35), (3.2.43), (3.2.45), (3.2.14), (3.2.33) και την προσεγγιστική ιδιότητα (2.2.1) του $V_h$, παίρνουμε

$$
\|u-u_h\|_{0,\Omega}^2 \le Ch^2\big(\|u\|_{2,\Omega} + \|f\|_{1,\Omega}\big)\|u-u_h\|_{0,\Omega}. \quad \blacksquare
$$

## 3.3 Εφαρμογες Ι: Μεθοδοι πεπερασμενων χωριων με συνεχη πεπερασμενα στοιχεια

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε δύο σχήματα πεπερασμένων χωρίων για την (3.1.1), χρησιμοποιώντας ως προσεγγιστικό χώρο τις συνεχείς, κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις σε έναν δοσμένο τριγωνισμό $T_h$, δηλαδή τον $X_h^0$, βλ. §1.2. Είναι απλό να δούμε ότι ο $X_h^0$ έχει όλες τις ιδιότητες που υποθέτουμε για τον $V_h$, βλ. §2.4.

Η Μέθοδος Ι είναι το διακριτό σχήμα της §1.4, δηλαδή μία μέθοδος πεπερασμένων χωρίων στο διαμερισμό $\mathcal{B}_c$ του $\Omega$, και η Μέθοδος ΙΙ είναι ένα σχήμα πεπερασμένων χωρίων στο διαμερισμό $\mathcal{V}_c$ του $\Omega$. Επίσης θεωρούμε δύο τελεστές $Q_1$ και $Q_2$, διαφορετικούς σε κάθε μέθοδο, πού ορίζουν κανόνες αριθμητικής ολοκλήρωσης ακριβείς για κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις στο $T_h$ και κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις στο $E_h$, αντίστοιχα, και ικανοποιούν τις υποθέσεις (3.2.4)–(3.2.6) και (3.2.7)–(3.2.9). Εύκολα τότε παίρνουμε ότι τα σχήματα πεπερασμένων χωρίων των Ι και ΙΙ, (3.3.2) και (3.3.21), αντίστοιχα, μπορούν να γραφούν στη μορφή (3.2.13). Έτσι, για τις μεθόδους πεπερασμένων χωρίων που θεωρούμε εδώ ισχύουν οι εκτιμήσεις σφάλματος που δείξαμε στην παράγραφο 3.2, βλ. Θεωρήματα 3.2.1–3.2.2.

Τα αποτελέσματα της Μεθόδου Ι είναι ήδη γνωστά από την παραγράφο 1.4. Όμως εδώ για την απόδειξη της σύγκλισης της μεθόδου και των εκτιμήσεων σφάλματος δεν χρειάζεται να υποθέσουμε περιοριστικές συνθήκες για τον τριγωνισμό $T_h$ και τον δυϊκό διαμερισμό $\mathcal{B}_c$. Ακόμα παρατηρούμε, όπως και στο Κεφάλαιο 2, ότι η Μέθοδος ΙΙ έχει μία ουσιαστική διαφορά από την Μέθοδο Ι. Έτσι, ενώ στην Μέθοδο Ι η λύση $u$ του (3.1.1) και η προσεγγιστική λύση που δίνει η μέθοδος ικανοποιούν παρόμοιες εξισώσεις, βλ. (3.3.1) και (3.3.2), στην Μέθοδο ΙΙ ικανοποιούν διαφορετικές, βλ. (3.3.14) και (3.3.21).

**Μέθοδος Ι:** Όπως αναφέραμε στην §1.4, ο Cai, στην [13], θεωρεί μία μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για την (3.1.1) στον μη επικαλυπτόμενο δυϊκό διαμερισμό $\mathcal{B}_c$. Ως προσεγγιστικό χώρο χρησιμοποιεί τον $X_h^0$. Η μέθοδος κατασκευάζεται κατά τον ακόλουθο τρόπο: Θεωρούμε μία κορυφή $z \in Z_h^{\text{in}}$ και το αντίστοιχο χωρίο $b_z \in \mathcal{B}_c$. Μετά ολοκληρώνουμε την (3.1.1) στο $b_z$ και εφαρμόζουμε τον τύπο ολοκλήρωσης του Green. Έτσι, λαμβάνουμε

$$-\int_{\partial b_z} (A\nabla u)\cdot n\, ds + \int_{b_z} \sigma u\, dx = \int_{b_z} f\, dx. \tag{3.3.1}$$

Έχοντας υπόψιν τη σχέση (3.3.1), θεωρούμε την ακόλουθη μέθοδο πεπε-

ρασμένων χωρίων για την (3.1.1): Ζητείται $u_h \in X_h^0$, τέτοια ώστε

$$
\begin{aligned}
(3.3.2) \qquad & -\int_{\partial b_z} (A\nabla u_h)\cdot n\, ds + u_h(z)\int_{b_z} \sigma\, dx \\
& = \int_{b_z} f\, dx, \quad \forall z \in Z_h^{\mathrm{in}}, \quad \forall \chi \in X_h^0.
\end{aligned}
$$

Θεωρούμε τώρα τη διγραμμική μορφή $\overline{a}_{CN}(\cdot,\cdot) : H^1(\Omega)\times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, όπως αυτή ορίζεται στην (1.4.5), δηλαδή

$$
(3.3.3) \qquad \overline{a}_{CN}(v,w) = -\sum_{z\in Z_h^{\mathrm{in}}} w(z)\int_{\partial b_z} (A\nabla v)\cdot n\, ds.
$$

Τότε μπορούμε να γράψουμε την (3.3.2) στη μορφή

$$
\begin{aligned}
(3.3.4) \qquad & \overline{a}_{CN}(u_h,\chi) + \sum_{z\in Z_h^{\mathrm{in}}} u_h(z)\chi(z)\int_{b_z}\sigma\, dx \\
& = \sum_{z\in Z_h^{\mathrm{in}}} \chi(z)\int_{b_z} f\, dx, \quad \forall \chi \in X_h^0.
\end{aligned}
$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η λύση $u_h$ του (3.3.4) ικανοποιεί τη μεταβολική εξίσωση (3.2.13), για κατάλληλους τελεστές $Q_1$ και $Q_2$.

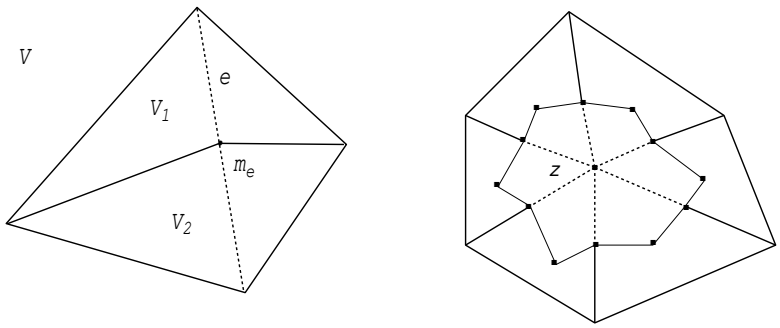
Θεωρούμε έναν τελεστή $Q_1$, που ορίζεται ως

$$
(3.3.5) \qquad Q_1(w)|_K = \sum_{z\in Z_h(K)} w(z) q_{A_z}, \quad K \in T_h,
$$

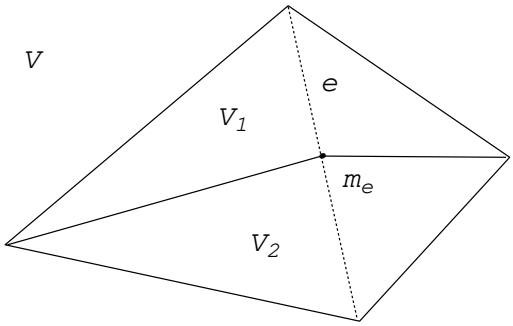
όπου $A_z \in \mathcal{A}(K)$, τα χωρία στα οποία διαμερίζουμε το $K$, βλ. Σχήμα 3. Ο $Q_1$ δηλαδή είναι ο τελεστής που ορίσαμε στην (2.4.5) για τη Μέθοδο Ι, §2.4. Τότε είναι προφανές ότι ο $Q_1$ ικανοποιεί τις (3.2.4)–(3.2.6), βλ. §2.4. Έστω τώρα ένα τρίγωνο $K \in T_h$. Ορίζουμε τον τελεστή $Q_2$ ως εξής

$$
(3.3.6) \qquad Q_2(w)|_e = w(z_e^N) q_e^N + w(z_e^S) q_e^S, \quad e \in E_h(K),
$$

όπου $z_e^N$ και $z_e^S$ οι δύο κορυφές της πλευράς $e \in E_h(K)$, και $q_e^S$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $\ell_e^S$, $\ell_e^S \in E_h^\star(b_{z_e^S})$, βλ. Σχήμα 3,




**ΣΧΗΜΑ 3**. *Αριστερά:* Διαμερισμός ενός τριγώνου $K \in T_h$ σε τρία υποχωρία $A_z$. *Δεξιά:* Τα δύο χωρία $V_z$ και $b_z$. Με διακεκομμένες γραμμές το σύνολο $E_h^\star(b_z)$.




**ΣΧΗΜΑ 12**. Ένα χωρίο $V$ και τα υποχωρία του $V_1$ και $V_2$.

όπου $\ell_e^S$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την κορυφή $z_e^S$ με το $m_e$, οπότε φυσικά $|\ell_e^S| = \frac{|e|}{2}$. Ανάλογα ορίζουμε και την $q_e^N$.

Είναι απλό τώρα να δούμε ότι ο $Q_2$ ορίζει έναν κανόνα ολοκλήρωσης ακριβή για γραμμικές συναρτήσεις, διότι

$$\begin{aligned}\int_e Q_2(\chi)\,ds &= \chi(z_e^N)\int_e q_e^N\,ds + \chi(z_e^S)\int_e q_e^S\,ds \\ &= \frac{1}{2}(\chi(z_e^N)+\chi(z_e^S)) = \int_e \chi\,ds.\end{aligned}$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας το λήμμα των Bramble–Hilbert έχουμε ότι ο $Q_2$ ικανοποιεί την (3.2.8). Θεωρούμε τώρα ένα χωρίο $V = K_1 \cup K_2$, $K_1, K_2 \in T_h$ και $K_1 \cap K_2 = e \in E_h^{\rm in}$. Συνδέοντας το μέσο $m_e$ της πλευράς $e$ με τις δύο απέναντι κορυφές του $V$ παίρνουμε δύο νέα τετράπλευρα $V_1$ και $V_2$ με κοινές πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα που μόλις τώρα θεωρήσαμε, βλ. Σχήμα 12.

Χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα όπως στην απόδειξη της (1.5.49), βλ. και (3.2.11), σε κάθε ένα από τα $V_1$ και $V_2$, παίρνουμε

$$\int_e (A\nabla w)\cdot n_1 Q_2(\widetilde{w})\,ds + \int_e (A\nabla w)\cdot n_2 Q_2(\widetilde{w})\,ds = 0,$$

όπου $n_i$ είναι το μοναδιαίο κάθετο εξωτερικό διάνυσμα στην πλευρά $e$ του $K_i$, $i=1,2$, και $w, \widetilde{w} \in H^2(V)$. Συνεπώς, ο $Q_2$ ικανοποιεί και την (3.2.9). Παίρνουμε εύκολα τώρα ότι

$$\begin{aligned}
(f, Q_1(v))_\Omega &= \sum_{K\in T_h} \int_K f Q_1(v)\,dx \\
&= \sum_{K\in T_h} \int_K f \sum_{z\in Z_h(K)} v(z) q_{A_z}\,dx \\
&= \sum_{K\in T_h} \sum_{z\in Z_h(K)} v(z) \int_{A_z} f\,dx \\
&= \sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z) \int_{b_z} f\,dx, \quad \forall f\in L^2(\Omega),\ \forall v\in X_h^0.
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Επομένως για την παραπάνω επιλογή τελεστών $Q_1$ και $Q_2$, λαμβάνοντας υπόψιν και την (3.3.7), η (3.2.13) γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h} \sum_{e\in E_h(K)} \int_e (A\nabla u_h)\cdot n\,(v(z_e^N) q_e^N + v(z_e^S) q_e^S)\,ds \\
&\quad - \sum_{K\in T_h} \sum_{z\in Z_h(K)} v(z) \int_{A_z} \operatorname{div}(A\nabla u_h)\,dx \\
&\quad + \sum_{z\in Z_h^{\rm in}} u_h(z) v(z) \int_{b_z} \sigma\,dx \\
&= \sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z) \int_{b_z} f\,dx, \quad \forall v\in X_h^0.
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον τύπο ολοκλήρωσης του Green γράφουμε το αριστερό μέλος της (3.3.8) στη μορφή

$$\sum_{K\in T_h} \sum_{e\in E_h(K)} \int_e (A\nabla u_h)\cdot n\,(v(z_e^N) q_e^N + v(z_e^S) q_e^S)\,ds$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{K\in T_h}\sum_{z\in Z_h(K)} v(z)\int_{A_z}\operatorname{div}(A\nabla u_h)\,dx + \sum_{z\in Z_h^{\rm in}} u_h(z)v(z)\int_{b_z}\sigma\,dx\\
&\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\big\{v(z_e^N)\int_{\ell_e^N}(A\nabla u_h)\cdot n\,ds + v(z_e^S)\int_{\ell_e^S}(A\nabla u_h)\cdot n\,ds\big\}\\
&- \sum_{K\in T_h}\sum_{z\in Z_h(K)} v(z)\int_{A_z}\operatorname{div}(A\nabla u_h)\,dx + \sum_{z\in Z_h^{\rm in}} u_h(z)v(z)\int_{b_z}\sigma\,dx\\
&= \sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z)\sum_{e\in E_h^\star(b_z)}\int_e [A\nabla u_h]\cdot n_e\,ds\\
&- \sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z)\big\{\int_{\partial b_z}(A\nabla u_h)\cdot n\,ds + \sum_{e\in E_h^\star(b_z)}\int_e [A\nabla u_h]\cdot n_e\,ds\big\}\\
&+ \sum_{z\in Z_h^{\rm in}} u_h(z)v(z)\int_{b_z}\sigma\,dx\\
&= \overline{a}_{CN}(u_h,v) + \sum_{z\in Z_h^{\rm in}} u_h(z)v(z)\int_{b_z}\sigma\,dx,\quad \forall v\in X_h^0,
\end{aligned}
$$

όπου, σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε στην (1.6.27),

$$
\begin{aligned}
[A(x)\nabla\chi]\cdot n_e &= (A(x)\nabla\chi_{K^{+e}})\cdot n_e\\
&\quad - (A(x)\nabla\chi_{K^{-e}})\cdot n_e,\quad \forall x\in e,\ \forall\chi\in X_h^0,
\end{aligned}
\tag{3.3.9}
$$

και $n_e$ το μοναδιαίο, κάθετο, εξωτερικό διάνυσμα στην πλευρά $e\in E_h(K^{+e})$ (βλ. Σχήμα 5, σελ. 16). Επομένως,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A\nabla u_h)\cdot n\,(v(z_e^N)q_e^N + v(z_e^S)q_e^S)\,ds\\
&\quad - \sum_{K\in T_h}\sum_{z\in Z_h(K)} v(z)\int_{A_z}\operatorname{div}(A\nabla u_h)\,dx\\
&\quad + \sum_{z\in Z_h^{\rm in}} u_h(z)v(z)\int_{b_z}\sigma\,dx\\
&= \overline{a}_{CN}(u_h,v) + \sum_{z\in Z_h^{\rm in}} u_h(z)v(z)\int_{b_z}\sigma\,dx,\quad \forall v\in X_h^0.
\end{aligned}
\tag{3.3.10}
$$

Άρα λόγω των (3.3.8) και (3.3.10) έχουμε ότι η λύση $u_h$ του (3.3.4) ικανοποιεί την (3.2.13), όπου ο $Q_1$ δίνεται από την (3.3.5) και ο $Q_2$

από την (3.3.6). Συνεπώς, εάν η $u$ είναι λύση της (3.1.1) και η $u_h$ λύση της (3.3.4), σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.1, έχουμε

$$\|u-u_h\|_{1,h} \le C\Big(\sum_{K\in T_h} h_K^2 \|u\|_{2,K}^2\Big)^{1/2}. \tag{3.3.11}$$

Επιλέγοντας για $z_K$ το βαρύκεντρο του $K\in T_h$ στην κατασκευή του δυϊκού διαμερισμού $\mathcal{B}_c$, σύμφωνα με την (2.4.9) παίρνουμε

$$\int_K Q_1(w)\,dx = \frac{|K|}{3}\sum_{z\in Z_h(K)} w(z) = \int_K w\,dx, \quad \forall w\in\mathbb{P}_1. \tag{3.3.12}$$

Επομένως, ο $Q_1$ ορίζει έναν κανόνα ολοκλήρωσης ακριβή για κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις. Υποθέτοντας, ακόμα, ότι $f\in H^1(\Omega)$, λόγω του Θεωρήματος 3.2.2, έχουμε

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega} \le Ch^2\big(\|u\|_{2,\Omega}+\|f\|_{1,\Omega}\big). \tag{3.3.13}$$

*Παρατήρηση 3.3.1:* Η εκτίμηση (3.3.11), στην $H^1$ νόρμα αποδεικνύεται στο Θεώρημα 1.4.2 από τον Cai, υποθέτοντας ορισμένες (περιοριστικές) ιδιότητες για τον τριγωνισμό $T_h$ και τον δυϊκό διαμερισμό $\mathcal{B}_c$, βλ. §1.4.

**Μέθοδος ΙΙ:** Θα θεωρήσουμε τώρα μία μέθοδο πεπερασμένων χωρίων στον δυϊκό διαμερισμό $\mathcal{V}_c$. Το υπολογιστικό όφελος από τη χρήση του $\mathcal{V}_c$ σε σχέση με τον $\mathcal{B}_c$ είναι προφανές, γιατί, δεδομένου του $T_h$, δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε έναν νέο διαμερισμό για το $\Omega$, βλ. §1.2. Θα χρησιμοποιήσουμε, όπως και στην Μέθοδο Ι, ως χώρο προσέγγισης τον $X_h^0$. Θεωρούμε λοιπόν μία κορυφή $z\in Z_h^{\rm in}$ και το αντίστοιχο χωρίο $V_z\in\mathcal{V}_c$. Ολοκληρώνουμε τώρα την (3.1.1) στο $V_z$, και εφαρμόζουμε τον τύπο ολοκλήρωσης του Green. Έτσι, λαμβάνουμε

$$-\int_{\partial V_z}(A\nabla u)\cdot n\,ds + \int_{V_z}\sigma u\,dx = \int_{V_z} f\,dx. \tag{3.3.14}$$

Επειδή τα χωρία $V_z$ και $V_{z'}$, για $z,z'$ γειτονικές κορυφές επικαλύπτονται, το σχήμα πεπερασμένων χωρίων που θα κατασκευάσουμε, σε αντίθεση με την Μέθοδο Ι, δεν θα διατηρεί τη μορφή της (3.3.14), βλ. τη Μέθοδο ΙΙ, στο Κεφάλαιο 2. Επιλέγουμε λοιπόν δύο κατάλληλους τελεστές $Q_1$ και $Q_2$, για το διακριτό σχήμα (3.2.30), όπως και στην Μέθοδο Ι. Έστω ότι ο $Q_1$ ορίζεται ως

$$Q_1(w)|_K = \frac{1}{3}\sum_{z\in Z_h(K)} w(z), \quad K\in T_h. \tag{3.3.15}$$

Ο $Q_1$ δηλαδή είναι ο τελεστής που ορίσαμε στην (2.4.21) για τη Μέθοδο II, §2.4. Είναι προφανές ότι ο $Q_1$ ικανοποιεί τις (3.2.4)–(3.2.6), βλ. §2.4. Έστω τώρα ένα τρίγωνο $K \in T_h$. Ορίζουμε τον τελεστή $Q_2$ ως εξής

$$Q_2(w)|_e = \frac{1}{2}(w(z_e^N) + w(z_e^S)), \quad e \in E_h(K), \tag{3.3.16}$$

όπου $z_e^N$ και $z_e^S$ οι δύο κορυφές της πλευράς $e \in E_h(K)$, βλ. Σχήμα 10, σελ. 79. Είναι απλό τώρα να δούμε ότι ο $Q_2$ ικανοποιεί τις (3.2.7) και (3.2.8). Επίσης, λόγω της (3.2.11), παίρνουμε

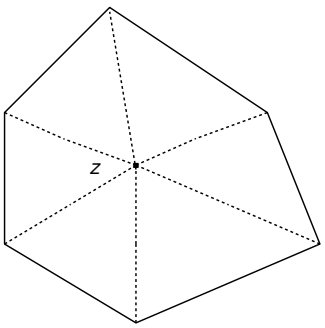
$$\int_e (A\nabla w)\cdot n_1 Q_2(\widetilde{w})\,ds + \int_e (A\nabla w)\cdot n_2 Q_2(\widetilde{w})\,ds = 0,$$

όπου $n_i$ είναι το μοναδιαίο κάθετο εξωτερικό διάνυσμα στην πλευρά $e$ του $K_i,\ i=1,2,\ w,\widetilde{w} \in H^2(V)$ με $V = K_1 \cup K_2,\ K_1, K_2 \in T_h$ και $K_1 \cap K_2 = e \in E_h^{\rm in}$. Συνεπώς, ο $Q_2$ ικανοποιεί και την (3.2.9). Εύκολα τώρα παίρνουμε

$$\begin{aligned}
(f, Q_1(v))_\Omega &= \sum_{K\in T_h} \int_K f\, Q_1(v)\,dx \\
&= \frac{1}{3}\sum_{K\in T_h} \int_K f \sum_{z\in Z_h(K)} v(z) q_K\,dx \\
&= \frac{1}{3}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z) \sum_{K\in T_h(V_z)} \int_K f\,dx \\
&= \frac{1}{3}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z) \int_{V_z} f\,dx, \quad \forall f\in L^2(\Omega),\ \forall v \in X_h^0.
\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

Επομένως, για την παραπάνω επιλογή τελεστών $Q_1$ και $Q_2$, λαμβάνοντας υπόψιν και την (3.3.17), η (3.2.13) γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)} \int_e (A\nabla u_h)\cdot n\,(v(z_e^N) + v(z_e^S))\,ds \\
&\quad - \frac{1}{3}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z) \sum_{K\in T_h(V_z)} {\rm div}(A\nabla u_h)\,dx \\
&\quad + \frac{1}{3}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} u_h(z)v(z) \int_{V_z} \sigma\,dx \\
&= \frac{1}{3}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z) \int_{V_z} f\,dx, \quad \forall v \in X_h^0.
\end{aligned} \tag{3.3.18}$$




**ΣΧΗΜΑ 13**. Το χωρίο $V_z$. Με διακεκομμένες γραμμές οι πλευρές του συνόλου $E_h^\star(V_z)$.

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον τύπο ολοκλήρωσης του Green γράφουμε το αριστερό μέλος της (3.3.18) στη μορφή

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A\nabla u_h)\cdot n\,(v(z_e^N)+v(z_e^S))\,ds\\
&\quad-\frac{1}{3}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z)\sum_{K\in T_h(V_z)}\operatorname{div}(A\nabla u_h)\,dx+\frac{1}{3}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} u_h(z)v(z)\int_{V_z}\sigma\,dx\\
&=\frac{1}{2}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z)\sum_{e\in E_h^\star(V_z)}\int_e [A\nabla u_h]\cdot n_e\,ds\\
&\quad-\frac{1}{3}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z)\Big\{\int_{\partial V_z} A\nabla u_h\cdot n\,ds+\sum_{e\in E_h^\star(V_z)}\int_e [A\nabla u_h]\cdot n_e\,ds\Big\}\\
&\quad+\frac{1}{3}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} u_h(z)v(z)\int_{V_z}\sigma\,dx\\
&=-\frac{1}{3}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z)\int_{\partial V_z} A\nabla u_h\cdot n\,ds+\frac{1}{6}\sum_{e\in E_h^\star(V_z)}\int_e [A\nabla u_h]\cdot n_e\,ds\\
&\quad+\frac{1}{3}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} u_h(z)v(z)\int_{V_z}\sigma\,dx,\quad \forall v\in X_h^0,
\end{aligned}
$$

με $[A\nabla\chi]\cdot n_e$ και $n_e$ όπως στην (3.3.9) και

$$E_h^\star(V_z)=\cup_{K\in T_h(V_z)}E_h(K)\setminus\{e\in\cup_{K\in T_h(V_z)}E_h(K):\ e\subset\partial V_z\},$$

βλ. Σχήμα 13.

Θεωρούμε ακόμα τη διγραμμική μορφή $\overline{a}_{CO} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, που ορίζεται ως

$$\overline{a}_{CO}(v,w) = -\sum_{z \in Z_h^{\rm in}} w(z) \int_{V_z} (A\nabla v)\cdot n\, ds, \tag{3.3.19}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A\nabla u_h)\cdot n\,(v(z_e^N)+v(z_e^S))\,ds\\
&\quad -\frac{1}{3}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z)\sum_{K\in T_h(V_z)} \operatorname{div}(A\nabla u_h)\,dx\\
&\quad +\frac{1}{3}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} u_h(z)v(z)\int_{V_z}\sigma\,dx\\
&= \frac{1}{3}\overline{a}_{CN}(u_h,v) + \frac{1}{6}\sum_{e\in E_h^\star(V_z)}\int_e [A\nabla u_h]\cdot n_e\,ds\\
&\quad +\frac{1}{3}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} u_h(z)v(z)\int_{V_z}\sigma\,dx, \quad \forall v\in X_h^0.
\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψιν τις (3.3.20) και (3.3.18), θεωρούμε την ακόλουθη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για την (3.1.1): Ζητείται $u_h \in X_h^0$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{3}\int_{\partial V_z}(A\nabla u_h)\cdot n\,ds + \frac{1}{6}\sum_{e\in E_h^\star(V_z)}\int_e [A\nabla u_h]\cdot n_e\,ds\\
&+\frac{1}{3}u_h(z)\int_{V_z}\sigma\,dx = \frac{1}{3}\int_{V_z} f\,dx, \quad \forall z\in Z_h^{\rm in},
\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\overline{a}_{CO}(u_h,v) + \frac{1}{6}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z)\sum_{e\in E_h^\star(V_z)}\int_e [A\nabla u_h]\cdot n_e\,ds\\
&\quad +\frac{1}{3}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} u_h(z)v(z)\int_{V_z}\sigma\,dx\\
&= \frac{1}{3}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z)\int_{V_z} f\,dx, \quad \forall v\in X_h^0.
\end{aligned} \tag{3.3.22}$$

Συνεπώς για τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων (3.3.21) ισχύουν οι εκτιμήσεις σφάλματος που δείξαμε στην §3.2. Άρα αν $u$ είναι η λύση της (3.1.1) και $u_h$ η λύση της (3.3.21), λόγω του Θεωρήματος 3.2.1, έχουμε

$$\|u-u_h\|_{1,h} \le C\big(\sum_{K\in T_h} h_K^2 \|u\|_{2,K}^2\big)^{1/2}. \tag{3.3.23}$$

Είναι προφανές ότι ο τελεστής $Q_1$, που ορίζεται στην (3.3.15), ικανοποιεί την

$$\int_K Q_1(w)\,dx = \frac{|K|}{3}\sum_{z\in Z_h(K)} w(z) = \int_K w\,dx, \quad \forall w\in\mathbb{P}_1. \tag{3.3.24}$$

Συνεπώς ο $Q_1$ ορίζει έναν κανόνα ολοκλήρωσης ακριβή για κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις. Υποθέτοντας τώρα ότι $f\in H^1(\Omega)$, λόγω του Θεωρήματος 3.2.2, λαμβάνουμε

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega} \le Ch^2\big(\|u\|_{2,\Omega}+\|f\|_{1,\Omega}\big). \tag{3.3.25}$$

Ακόμα μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι στην περίπτωση που ο $A$ είναι ο μοναδιαίος $2\times 2$ πίνακας, δηλαδή το πρόβλημα (3.1.1) είναι το (2.1.1), τότε τα σχήματα (3.3.21) και (2.4.12) ταυτίζονται. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\overline{a}_{CO}(u_h,v)+\frac{1}{6}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z)\sum_{e\in E_h^\star(V_z)}\int_e [A\nabla u_h]\cdot n_e\,ds\\
&=\frac{1}{2}\overline{a}_{CO}(u_h,v)+\frac{1}{6}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z)\sum_{K\in T_h(V_z)}\int_{\partial K} A\nabla u_h\cdot n\,ds\\
&=\frac{1}{2}\overline{a}_{CO}(u_h,v)+\frac{1}{6}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z)\sum_{K\in T_h(V_z)}\operatorname{div}(A\nabla u_h)\,dx\\
&=\frac{1}{2}\overline{a}_{CO}(u_h,v)+\frac{1}{2}\sum_{K\in T_h}\int_K \operatorname{div}(A\nabla u_h)Q(v)\,dx, \quad \forall v\in X_h^0.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\overline{a}_{CO}(u_h,v)+\frac{1}{6}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z)\sum_{e\in E_h^\star(V_z)}\int_e [A\nabla u_h]\cdot n_e\,ds\\
&=\frac{1}{2}\overline{a}_{CO}(u_h,v)+\frac{1}{2}\sum_{K\in T_h}\int_K \operatorname{div}(A\nabla u_h)Q(v)\,dx.
\end{aligned}$$

Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε το σχήμα (3.3.22) στην ισοδύναμη μορφή

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\overline{a}_{CO}(u_h,v)+\frac{3}{2}\sum_{K\in T_h}\left(\operatorname{div}\left(A\nabla u_h\right),Q_1(v)\right)_K\\ +\left(\sigma,Q_1(u_hv)\right)_\Omega=\left(f,Q_1(v)\right)_\Omega,\quad\forall v\in X_h^0.\end{aligned}\tag{3.3.26}$$

Άρα αν ο $A$ είναι ο μοναδιαίος $2\times 2$ πίνακας τότε $\operatorname{div}(A\nabla u_h)=\Delta u_h=0$, οπότε, επειδή σύμφωνα με το Λήμμα 2.4.2 ισχύει $\frac{1}{2}\overline{a}_{CO}(v,\chi)=a(v,\chi)$, για $v,\chi\in X_h^0$, η (3.3.26) γίνεται

$$a(u_h,v)+\left(\sigma,Q_1(u_hv)\right)_\Omega=\left(f,Q_1(v)\right)_\Omega,\quad\forall v\in X_h^0,$$

δηλαδή η (2.4.14).

## 3.4 Εφαρμογες ΙΙ: Μεθοδοι πεπερασμενων χωριων με μη συνεχη πεπερασμενα στοιχεια

Σε αυτή την παράγραφο θα θεωρήσουμε δύο μεθόδους πεπερασμένων χωρίων για την (3.1.1), χρησιμοποιώντας ως χώρο προσέγγισης τις μη προσαρμοζόμενες (nonconforming), κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις σε έναν δοσμένο τριγωνισμό $T_h$, δηλαδή το χώρο $S_h^0$. Εύκολα βλέπουμε ότι ο $S_h^0$ πληροί την (2.2.1), βλ. (1.2.6), καθώς και τις (2.2.2)–(2.2.4), βλ. Παρατήρηση 2.2.2.

Η Μέθοδος ΙΙΙ είναι το διακριτό σχήμα της §1.6, δηλαδή μία μέθοδος πεπερασμένων χωρίων στο διαμερισμό $\mathcal{B}_n$ του $\Omega$, και η Μέθοδος ΙV είναι ένα διακριτό σχήμα πεπερασμένων χωρίων στο διαμερισμό $\mathcal{V}_n$ του $\Omega$. Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, θεωρούμε δύο τελεστές $Q_1$ και $Q_2$ διαφορετικούς σε κάθε εφαρμογή, που ορίζουν κανόνες αριθμητικής ολοκλήρωσης ακριβείς για κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις στο $T_h$ και κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις στο $E_h$, αντίστοιχα. Ακόμα, εύκολα βλέπουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις (3.2.4)–(3.2.6) και (3.2.7)–(3.2.8). Όπως και στην §3.3, δείχνουμε ότι τα σχήματα πεπερασμένων χωρίων (3.4.2) και (3.4.20), που παίρνουμε στις Μεθόδους ΙΙΙ και IV, αντίστοιχα, μπορούν να γραφούν στη μορφή (3.2.13). Έτσι, και για τις μεθόδους πεπερασμένων χωρίων που θεωρούμε εδώ ισχύουν οι εκτιμήσεις σφάλματος που δείξαμε στην παράγραφο 3.2, βλ. Θεωρήματα 3.2.1–3.2.2.

Τα αποτελέσματα της Μεθόδου ΙΙΙ είναι ήδη γνωστά από την παράγραφο 1.6, ενώ αυτά της Μεθόδου IV παρουσιάζονται εδώ για πρώτη φορά.

Ακόμα, παρατηρούμε ότι η Μέθοδος IV έχει μία ουσιαστική διαφορά από αυτήν της Μεθόδου III. Έτσι, ενώ στην Μέθοδο III η λύση $u$ του (3.1.1) και η προσεγγιστική λύση που δίνει η μέθοδος ικανοποιούν παρόμοιες εξισώσεις, βλ. (3.4.1) και (3.4.2), στην Μέθοδο IV ικανοποιούν διαφορετικές, βλ. (3.4.13) και (3.4.20).

**Μέθοδος III:** Στην §1.6 θεωρήσαμε μία μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για την (3.1.1) στον μη επικαλυπτόμενο δυϊκό διαμερισμό $\mathcal{B}_n$. Ως προσεγγιστικό χώρο χρησιμοποιήσαμε τον $S_h^0$. Η μέθοδος κατασκευάζεται κατά τον ακόλουθο τρόπο: Θεωρούμε μία πλευρά $e \in E_h^{\rm in}$ και το αντίστοιχο χωρίο $b_e \in \mathcal{B}_n$. Ολοκληρώνοντας λοιπόν την (3.1.1) στο $b_e$ και εφαρμόζοντας τον τύπο ολοκλήρωσης του Green, λαμβάνουμε

$$-\int_{\partial b_e} (A\nabla u)\cdot n\, ds + \int_{b_e} \sigma u\, dx = \int_{V_e} f\, dx. \tag{3.4.1}$$

Έχοντας υπόψιν τη σχέση (3.4.1), θεωρούμε τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για την (3.1.1): Ζητείται $u_h \in S_h^0$, τέτοια ώστε

$$-\int_{\partial b_e} (A\nabla u_h)\cdot n\, ds + u_h(m_e)\int_{b_e} \sigma\, dx = \int_{b_e} f\, dx, \quad \forall e \in E_h^{\rm in}. \tag{3.4.2}$$

Θεωρούμε τώρα τη διγραμμική μορφή $\overline{a}_{NN} : (H^1(\Omega)+S_h)\times(H^1(\Omega)+S_h)\to\mathbb{R}$, όπως αυτή ορίστηκε στην (1.6.4), δηλαδή

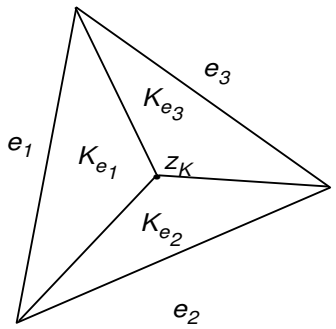
$$\overline{a}_{NN}(v,w) = -\sum_{e\in E_h^{\rm in}} w(m_e)\int_{\partial b_e} (A\nabla v)\cdot n\, ds. \tag{3.4.3}$$

Τότε, μπορούμε να γράψουμε την (3.4.2) στη μορφή

$$\begin{aligned} &\overline{a}_{NN}(u_h,\chi) + \sum_{e\in E_h^{\rm in}} u_h(m_e)\chi(m_e)\int_{b_e}\sigma\, dx \\ &= \sum_{e\in E_h^{\rm in}} \chi(m_e)\int_{b_e} f\, dx, \quad \forall \chi \in S_h^0. \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η λύση $u_h$ του (3.4.4) ικανοποιεί τη μεταβολική εξίσωση (3.2.13), για κατάλληλους τελεστές $Q_1$ και $Q_2$. Θεωρούμε έναν τελεστή $Q_1$, που ορίζεται ως

$$Q_1(w)|_K = \sum_{e\in E_h(K)} w(m_e) q_{K_e}, \quad K\in T_h, \tag{3.4.5}$$




**ΣΧΗΜΑ 11**. Διαμερισμός ενός τριγώνου $K \in T_h$ σε τρία υποχωρία $K_e$.

όπου $K_e \in \widetilde{T_h}(K)$ είναι τα μικρότερα τρίγωνα στα οποία έχουμε διαμερίσει το $K$, βλ. Σχήμα 11, και συμβολίζουμε με $q_S$ τη χαρακτηριστική συνάρτηση ενός χωρίου $S \subset \mathbb{R}^2$. Ο $Q_1$ δηλαδή είναι ο τελεστής που ορίσαμε στην (2.5.6) για τη Μέθοδο ΙΙΙ, §2.5. Τότε είναι προφανές ότι ο $Q_1$ ικανοποιεί τις (3.2.4)–(3.2.6), βλ. §2.5.

Έστω τώρα ένα τρίγωνο $K \in T_h$. Ορίζουμε τον τελεστή $Q_2$ ως εξής

$$Q_2(w)|_e = w(m_e), \quad \forall e \in E_h(K), \tag{3.4.6}$$

όπου $m_e$ είναι το μέσον της πλευράς $e \in E_h(K)$. Είναι απλό τώρα να δούμε ότι ο $Q_2$ έχει τις ιδιότητες (3.2.7) και (3.2.8). Επίσης, σύμφωνα με την (3.2.12) ο $Q_2$ ικανοποιεί και την (3.2.9). Ακόμα, εύκολα βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
(f, Q_1(v))_\Omega &= \sum_{K\in T_h} \int_K f\, Q_1(v)\, dx \\
&= \sum_{K\in T_h} \int_K f \sum_{e\in E_h(K)} v(m_e) q_{K_e}\, dx \\
&= \sum_{K\in T_h} \sum_{e\in E_h(K)} v(m_e) \int_{K_e} f\, dx \\
&= \sum_{e\in E_h^{\mathrm{in}}} v(m_e) \int_{b_e} f\, dx, \quad \forall f \in L^2(\Omega),\ \forall v \in S_h^0.
\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Επομένως για την παραπάνω επιλογή τελεστών $Q_1$ και $Q_2$, λόγω της

(3.4.7), η (3.2.13) γράφεται στη μορφή

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A\nabla u_h)\cdot n\, v(m_e)\,ds \\
&\quad -\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)} v(m_e)\int_{K_e}\operatorname{div}(A\nabla u_h)\,dx \\
&\quad +\sum_{e\in E_h^{\rm in}} u_h(m_e)v(m_e)\int_{b_e}\sigma\,dx \\
&=\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\int_{b_e} f\,dx, \quad \forall v\in S_h^0.
\end{aligned}
\tag{3.4.8}
$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον τύπο ολοκλήρωσης του Green γράφουμε το αριστερό μέλος της (3.4.8) στη μορφή

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A\nabla u_h)\cdot n\, v(m_e)\,ds \\
&\quad -\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)} v(m_e)\int_{K_e}\operatorname{div}(A\nabla u_h)\,dx \\
&\quad +\sum_{e\in E_h^{\rm in}} u_h(m_e)v(m_e)\int_{b_e}\sigma\,dx \\
&=\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\int_e [A\nabla u_h]\cdot n_e\,ds-\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\Big\{\int_{\partial b_e} A\nabla u_h\cdot n\,ds \\
&\quad +\int_e [A\nabla u_h]\cdot n_e\,ds\Big\}+\sum_{e\in E_h^{\rm in}} u_h(m_e)v(m_e)\int_{b_e}\sigma\,dx \\
&=\overline{a}_{NN}(u_h,v)+\sum_{e\in E_h^{\rm in}} u_h(m_e)v(m_e)\int_{b_e}\sigma\,dx, \quad \forall v\in S_h^0,
\end{aligned}
$$

με $[A\nabla\chi]\cdot n_e$ όπως στην (3.3.9). Επομένως,

$$\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A\nabla u_h)\cdot n\, v(m_e)\,ds \\
&\quad -\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)} v(m_e)\int_{K_e}\operatorname{div}(A\nabla u_h)\,dx \\
&\quad +\sum_{e\in E_h^{\rm in}} u_h(m_e)v(m_e)\int_{b_e}\sigma\,dx \\
&= \overline{a}_{NN}(u_h,v)+\sum_{e\in E_h^{\rm in}} u_h(m_e)v(m_e)\int_{b_e}\sigma\,dx,\quad \forall v\in S_h^0.
\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

Άρα λόγω των (3.4.8) και (3.4.9) έχουμε ότι η λύση $u_h$ του (3.4.4) ικανοποιεί την (3.2.13) όπου ο $Q_1$ δίνεται από την (3.4.5) και ο $Q_2$ από την (3.4.6). Συνεπώς, εάν η $u$ είναι λύση της (3.1.1) και η $u_h$ λύση της (3.4.4), σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.1, έχουμε

$$\|u-u_h\|_{1,h}\le C\Big(\sum_{K\in T_h} h_K^2\|u\|_{2,K}^2\Big)^{1/2}. \tag{3.4.10}$$

Επιλέγοντας για $z_K$ το βαρύκεντρο του $K\in T_h$ στην κατασκευή του δυϊκού διαμερισμού $\mathcal{B}_n$, έχουμε

$$\int_K Q_1(w)\,dx=\int_K w\,dx,\quad \forall w\in\mathbb{P}_1, \tag{3.4.11}$$

βλ. (2.5.10). Συνεπώς, ο $Q_1$ ορίζει έναν κανόνα ολοκλήρωσης ακριβή για κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις. Υποθέτοντας, ακόμα, ότι $f\in H^1(\Omega)$, λόγω του Θεωρήματος 3.2.2, έχουμε

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega}\le Ch^2\big(\|u\|_{2,\Omega}+\|f\|_{1,\Omega}\big). \tag{3.4.12}$$

**Μέθοδος IV:** Θα θεωρήσουμε τώρα μία μέθοδο πεπερασμένων χωρίων στον δυϊκό διαμερισμό $\mathcal{V}_n$. Το υπολογιστικό όφελος από τη χρήση του $\mathcal{V}_n$ σε σχέση με τον $\mathcal{B}_n$ είναι προφανές, γιατί, δεδομένου του $T_h$, δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε έναν νέο διαμερισμό για το $\Omega$, βλ. §1.2. Θα χρησιμοποιήσουμε, όπως και στην Μέθοδο ΙΙΙ, ως χώρο προσέγγισης τον $S_h^0$. Θεωρούμε, λοιπόν μία κορυφή $e\in E_h^{\rm in}$ και το αντίστοιχο χωρίο

$V_e \in \mathcal{V}_n$. Ολοκληρώνουμε τώρα την (3.1.1) στο $V_e$, και εφαρμόζουμε τον τύπο ολοκλήρωσης του Green. Έτσι, λαμβάνουμε

$$-\int_{\partial V_e} (A\nabla u)\cdot n\, ds + \int_{V_e} \sigma u\, dx = \int_{V_e} f\, dx. \tag{3.4.13}$$

Θα κατασκευάσουμε μία μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για την (3.1.1) στον διαμερισμό $\mathcal{V}_n$ επιλέγοντας δύο κατάλληλους τελεστές $Q_1$ και $Q_2$, για το διακριτό σχήμα (3.2.13), όπως και στην Μέθοδο ΙΙΙ. Θεωρούμε τώρα τον τελεστή $Q_1$, που ορίζεται ως

$$Q_1(w)|_K = \frac{1}{3}\sum_{e\in E_h(K)} w(m_e), \quad K \in T_h\,. \tag{3.4.14}$$

Ο $Q_1$ δηλαδή είναι ο τελεστής που ορίσαμε στην (2.5.17) για τη Μέθοδο IV, §2.5. Έστω τώρα ένα τρίγωνο $K \in T_h$. Ορίζουμε τον τελεστή $Q_2$ ως εξής

$$Q_2(w)|_e = w(m_e), \quad \forall e \in E_h(K), \tag{3.4.15}$$

όπου $m_e$ είναι το μέσον της πλευράς $e \in E_h(K)$, δηλαδή τον τελεστή $Q_2$ που ορίσαμε στην (3.4.6), για τη Μέθοδο ΙΙΙ, §3.4. Είναι προφανές ότι ο $Q_1$ ικανοποιεί τις (3.2.4)–(3.2.6) και ο $Q_2$ τις (3.2.7)–(3.2.9). Επίσης βλέπουμε εύκολα ότι

$$\begin{aligned}
(f, Q(v))_\Omega &= \sum_{K\in T_h}\int_K f Q(v)\, dx \\
&= \frac{1}{3}\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)} v(m_e)\int_K f\, dx \\
&= \frac{1}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\sum_{K\in T_h(V_e)}\int_K f\, dx \\
&= \frac{1}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\int_{V_e} f\, dx, \quad \forall f \in L^2(\Omega),\ \forall v \in S_h^0,
\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

όπου $T_h(V_e)$ είναι το σύνολο των τριγώνων του $T_h$ που αποτελούν το $V_e$. Επομένως για την παραπάνω επιλογή τελεστών $Q_1$ και $Q_2$, λόγω της

(3.4.16), η (3.2.13) γράφεται στη μορφή

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A\nabla u_h)\cdot n\, v(m_e)\,ds\\
&\quad+\frac{1}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} u_h(m_e)v(m_e)\int_{V_e}\sigma\,dx\\
&\quad-\frac{1}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\sum_{K\in T_h(V_e)}\int_K \operatorname{div}(A\nabla u_h)\,dx\\
&=\frac{1}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\int_{V_e} f\,dx,\quad \forall v\in S_h^0.
\end{aligned}
\tag{3.4.17}
$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον τύπο ολοκλήρωσης του Green γράφουμε το αριστερό μέλος της (3.4.17) ως εξής

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A\nabla u_h)\cdot n\, v(m_e)\,ds\\
&\quad-\frac{1}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\sum_{K\in T_h(V_e)}\int_K \operatorname{div}(A\nabla u_h)\,dx\\
&\quad+\frac{1}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} u_h(m_e)v(m_e)\int_{V_e}\sigma\,dx\\
&=\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\int_e [A\nabla u_h]\cdot n_e\,ds-\frac{1}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\Big\{\int_{\partial V_e} A\nabla u_h\cdot n\,ds\\
&\qquad+\frac{1}{3}\int_e [A\nabla u_h]\cdot n_e\,ds\Big\}+\frac{1}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} u_h(m_e)v(m_e)\int_{V_e}\sigma\,dx\\
&=-\frac{1}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\int_{\partial V_e} A\nabla u_h\cdot n\,ds+\frac{2}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\int_e [A\nabla u_h]\cdot n_e\,ds\\
&\quad+\frac{1}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} u_h(m_e)v(m_e)\int_{V_e}\sigma\,dx,
\end{aligned}
$$

με $[A\nabla\chi]\cdot n_e$ και $n_e$ όπως στην (1.6.27). Θεωρούμε ακόμα τη διγραμμική μορφή $\overline{a}_{NO}:(H^1(\Omega)+S_h)\times(H^1(\Omega)+S_h)\to\mathbb{R}$, που ορίζεται ως

$$
\overline{a}_{NO}(v,w)=-\sum_{e\in E_h^{\rm in}} w(m_e)\int_{V_e}(A\nabla v)\cdot n\,ds.
\tag{3.4.18}
$$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in E_h(K)}\int_e (A\nabla u_h)\cdot n\, v(m_e)\,ds \\
&\quad+\frac{1}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} u_h(m_e)v(m_e)\int_{V_e}\sigma\,dx \\
&\quad-\frac{1}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\sum_{K\in T_h(V_e)}\int_K \operatorname{div}(A\nabla u_h)\,dx \\
&=\frac{1}{3}\overline{a}_{NO}(u_h,v)+\frac{2}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\int_e [A\nabla u_h]\cdot n_e\,ds \\
&\quad+\frac{1}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} u_h(m_e)v(m_e)\int_{V_e}\sigma\,dx,\quad \forall v\in S_h^0.
\end{aligned}
\tag{3.4.19}
$$

Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψιν τις (3.4.17) και (3.4.19), θεωρούμε την ακόλουθη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για την (3.1.1): Ζητείται $u_h\in S_h^0$, τέτοια ώστε

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{3}\int_{\partial V_e}(A\nabla u_h)\cdot n\,ds+\frac{2}{3}\int_e [A\nabla u_h]\cdot n_e\,ds \\
&\quad+\frac{1}{3}u_h(m_e)\int_{V_e}\sigma\,dx=\frac{1}{3}\int_{V_e} f\,dx,\quad \forall e\in E_h^{\rm in},
\end{aligned}
\tag{3.4.20}
$$

ή ισοδύναμα

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\overline{a}_{NO}(u_h,v)+\frac{2}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\int_e [A\nabla u_h]\cdot n_e\,ds \\
&\quad+\frac{1}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)u_h(m_e)\int_{V_e}\sigma\,dx \\
&=\frac{1}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\int_{V_e} f\,dx,\quad \forall v\in S_h^0.
\end{aligned}
\tag{3.4.21}
$$

Συνεπώς για τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων (3.4.20) ισχύουν οι εκτιμήσεις σφάλματος που δείξαμε στην §3.2. Άρα αν $u$ είναι η λύση της (3.1.1) και $u_h$ η λύση της (3.4.20), λόγω του Θεωρήματος 3.2.1, έχουμε

$$
\|u-u_h\|_{1,h}\le C\Big(\sum_{K\in T_h} h_K^2\|u\|_{2,K}^2\Big)^{1/2}.
\tag{3.4.22}
$$

Είναι προφανές ότι ο τελεστής $Q_1$ που ορίζεται στην (3.4.14) ικανοποιεί την

$$\int_K Q_1(w)\,dx = \frac{|K|}{3}\sum_{e\in E_h(K)} w(m_e) = \int_K v\,dx, \quad \forall w\in\mathbb{P}_1. \tag{3.4.23}$$

Συνεπώς ο $Q_1$ ορίζει έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης ακριβή για κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις. Υποθέτοντας τώρα ότι $f\in H^1(\Omega)$, λόγω του Θεωρήματος 3.2.2, λαμβάνουμε

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega} \le Ch^2\|u\|_{3,\Omega}. \tag{3.4.24}$$

Ακόμα μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι στην περίπτωση που ο $A$ είναι ο μοναδιαίος $2\times 2$ πίνακας, δηλαδή το πρόβλημα (3.1.1) είναι το (2.1.1), τότε τα σχήματα (3.4.20) και (2.5.13) ταυτίζονται. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\overline{a}_{NO}(u_h,v) + \frac{2}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\int_e [A\nabla u_h]\cdot n_e\,ds\\
&= \overline{a}_{NO}(u_h,v) + \frac{2}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\sum_{K\in T_h(V_e)}\int_{\partial K} A\nabla u_h\cdot n\,ds\\
&= \overline{a}_{NO}(u_h,v) + \frac{2}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\sum_{K\in T_h(V_e)}\int_K \operatorname{div}(A\nabla u_h)\,dx\\
&= \overline{a}_{NO}(u_h,v) + 2\sum_{K\in T_h}\int_K \operatorname{div}(A\nabla u_h)Q_1(v)\,dx, \quad \forall v\in S_h^0.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\overline{a}_{NO}(u_h,v) + \frac{2}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}} v(m_e)\int_e [A\nabla u_h]\cdot n_e\,ds\\
&= \overline{a}_{NO}(u_h,v) + 2\sum_{K\in T_h}\int_K \operatorname{div}(A\nabla u_h)Q_1(v)\,dx, \quad \forall v\in S_h^0.
\end{aligned}$$

Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε το σχήμα (3.4.21) στη μορφή

$$\begin{aligned}
&\overline{a}_{NN}(u_h,v) + 2\sum_{K\in T_h}\left(\operatorname{div}(A\nabla u_h), Q_1(v)\right)_K\\
&\qquad + \left(\sigma, Q_1(u_h v)\right)_\Omega = \left(f, Q_1(v)\right)_\Omega, \quad \forall v\in S_h^0.
\end{aligned} \tag{3.4.25}$$

Άρα αν ο $A$ είναι ο μοναδιαίος $2 \times 2$ πίνακας, τότε $\mathrm{div}(A\nabla u_h) = \Delta u_h = 0$, οπότε, επειδή σύμφωνα με το Λήμμα 2.5.2, ισχύει $\overline{a}_{NO}(v,\chi) = a(v,\chi)$, για $v, \chi \in S_h^0$, η (3.4.25) γίνεται

$$a(u_h, v) + (\sigma, Q_1(u_h v))_\Omega = (f, Q_1(v))_\Omega, \quad \forall v \in X_h^0,$$

δηλαδή η (2.5.15).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# Ομοιόμορφες εκτιμήσεις σφάλματος για την εξίσωση του Poisson

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί συνέχεια του Κεφαλαίου 2. Θα θεωρήσουμε την εξίσωση του Poisson σε ένα φραγμένο, κυρτό, πολυγωνικό χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ και έναν ημιομοιόμορφο τριγωνισμό του, $T_h$. Θα αποδείξουμε εκτιμήσεις σφάλματος στην $L^\infty$ νόρμα για μεθόδους πεπερασμένων χωρίων που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 2. Η απόδειξη των εκτιμήσεων θα γίνει με παρόμοιο τρόπο όπως και στο Κεφάλαιο 2. Έτσι, θεωρούμε τη διακριτή μέθοδο της §2.2 και αποδεικνύουμε βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος στην $W^{1,\infty}$ ημινόρμα και $L^\infty$ νόρμα. Για την απόδειξη αυτών των αποτελεσμάτων ακολουθούμε την ανάλυση των αντίστοιχων αποτελεσμάτων για τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων.

## 4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος στην $L^\infty$ νόρμα για τη διακριτοποίηση της εξίσωσης του Poisson με τις μεθόδους πεπερασμένων χωρίων που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 2. Θεωρούμε, λοιπόν, το ακόλουθο ελλειπτικό πρόβλημα συνοριακών τιμών: Ζητείται μία συνάρτηση $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{στο } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{στο } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

με $\Omega$ ένα φραγμένο, κυρτό, πολυγωνικό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ και $f \in L^2(\Omega)$. Θα αποδείξουμε εκτιμήσεις σφάλματος μεθόδων πεπερασμένων χωρίων στους επικαλυπτόμενους διαμερισμούς $\mathcal{V}_c$ και $\mathcal{V}_n$ του $\Omega$, καθώς και στους αντίστοιχους μη επικαλυπτόμενους, $\mathcal{B}_c$ και $\mathcal{B}_n$. Θα αποδείξουμε εκτιμήσεις σφάλματος στην $L^\infty$ νόρμα για τη διακριτή μέθοδο, (2.3.1), που εισάγουμε στην §2.3. Επομένως, τα αποτελέσματα για τις μεθόδους

πεπερασμένων χωρίων προκύπτουν ως εφαρμογές των αντίστοιχων αποτελεσμάτων που αποδεικνύουμε στην §4.3. Η απόδειξη των εκτιμήσεων σφάλματος της παραγράφου 4.3 είναι βασισμένη στην απόδειξη αντίστοιχων αποτελεσμάτων για τη διακριτοποίηση της (4.1.1) με μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων, βλ. φερ' ειπείν [33].

Θεωρούμε τώρα έναν ημιομοιόμορφο τριγωνισμό του $\Omega$, βλ. Ορισμό 1.2.1, και ζητούμε προσεγγίσεις της λύσεως $u$ του (4.1.1) σε έναν πεπερασμένης διάστασης χώρο συναρτήσεων $V_h$, του οποίου ειδικές περιπτώσεις είναι οι $X_h^0$ και $S_h^0$. Όπως και στην απόδειξη ανάλογων εκτιμήσεων σφάλματος στην $L^\infty$ νόρμα για τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, βασικό εργαλείο είναι οι νόρμες Sobolev με βάρη. Στην παράγραφο 4.3, στο Θεώρημα 4.3.1 αποδεικνύουμε μία βέλτιστης τάξεως εκτίμηση σφάλματος στην $W^{1,\infty}$ ημινόρμα. Στη συνέχεια, στο Θεώρημα 4.3.2, υποθέτοντας όπως και στο Θεώρημα 2.3.2 ότι ο τελεστής $Q$ αφήνει αναλλοίωτο το ολοκλήρωμα των κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων και ότι $f \in W^{1,\infty}$, αποδεικνύουμε μία βέλτιστης τάξεως εκτίμηση σφάλματος στην $L^\infty$ νόρμα. Οι αποδείξεις των παραπάνω δύο θεωρημάτων βασίζονται σε αυτές που δίνουν οι Gastaldi και Nochetto για τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, βλ. [33, §5].

Στις παραγράφους τώρα 4.4 και 4.5 θεωρούμε τις μεθόδους πεπερασμένων χωρίων των παραγράφων 2.4 και 2.5, αντίστοιχα. Σύμφωνα με το Κεφάλαιο 2, για μία κατάλληλη επιλογή ενός τελεστή $Q$, μπορούμε να γράψουμε αυτές τις μεθόδους στη μορφή της διακριτής μεθόδου της §2.2. Επομένως, για αυτές ισχύουν οι εκτιμήσεις σφάλματος που παίρνουμε από τα Θεωρήματα 4.3.1 και 4.3.2.

Μία σύντομη περίληψη αυτού του κεφαλαίου είναι η ακόλουθη. Στην παράγραφο 4.2 εισάγουμε τον απαραίτητο συμβολισμό και διακριτοποιούμε την (4.1.1) σύμφωνα με την μέθοδο της §2.2. Στην §4.3 αποδεικνύουμε για αυτή τη μέθοδο βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος στην $W^{1,\infty}$ ημινόρμα και $L^\infty$ νόρμα. Στις §4.4 και §4.5 εφαρμόζουμε τις εκτιμήσεις αυτές για τις τέσσερις διαφορετικές μεθόδους πεπερασμένων χωρίων που αναλύσαμε στο Κεφάλαιο 2.

## 4.2 ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ

Έστω $\{T_h\}_{0<h\leq 1}$ μία ημιομοιόμορφη οικογένεια τριγωνισμών του $\Omega$, βλ. Ορισμό 1.2.1. Θεωρούμε τώρα νόρμες Sobolev με συνάρτηση βάρους. Αυτές οι νόρμες θα είναι κύριο εργαλείο στην απόδειξη των Θεωρημάτων 4.3.1 και 4.3.2. Για ευκολία θα ακολουθήσουμε τον ίδιο συμβολισμό με τους Gastaldi και Nochetto που εισάγουν στην [33] για την ανάλυση του (4.1.1) με μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων. Έστω $S \subset \mathbb{R}^2$ μετρήσιμο

σύνολο, $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ και $\Phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\Phi > 0$. Ορίζουμε, λοιπόν, τις ημινόρμες Sobolev με βάρη ως

$$\|\nabla^k u\|_{\Phi^\alpha, S} := \Big(\int_S \Phi^\alpha \sum_{|\beta|=k} |D^\beta u|^2\Big)^{1/2}, \tag{4.2.1}$$

και επίσης

$$\|\nabla^k u\|_{\Phi^\alpha} := \|\nabla^k u\|_{\Phi^\alpha, \Omega}, \tag{4.2.2}$$

$$\|\nabla^k u\|_S := \|\nabla^k u\|_{\Phi^0, S}, \tag{4.2.3}$$

$$\|\nabla^k u\|_{\Phi^\alpha, h} := \Big(\sum_{K\in T_h} \|\nabla^k u\|^2_{\Phi^\alpha, K}\Big)^{1/2}. \tag{4.2.4}$$

Τελικά, με $\|\cdot\|_{L^\infty(S)}$ συμβολίζουμε τη νόρμα του $L^\infty(S)$, $S \subset \mathbb{R}^2$, με $\|\nabla^k \cdot\|_{L^\infty(S)}$ την αντίστοιχη ημινόρμα τάξεως $k \in \mathbb{N}$ και με $\|u\|_{L^1,h} = \sum_{K\in T_h} \int_K |u|\, dx$.

Έστω $x_0 \in \overline{\Omega}$ ένα τυχαίο σημείο. Για $\vartheta > 0$ θεωρούμε μία συνάρτηση $\Phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$,

$$\Phi(x) := \frac{1}{|x - x_0|^2 + \vartheta^2}, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{4.2.5}$$

όπου $|x - x_0|$ είναι η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των $x$ και $x_0$. Υποθέτουμε· ότι $\vartheta = \gamma h$, με $\gamma \geq 1$. Τότε η συνάρτηση $\Phi$ δεν μεταβάλεται πάρα πολύ σε κάθε $K \in T_h$· πιο συγκεκριμένα ισχύει το ακόλουθο, βλ. [55, σελ. 295] : υπάρχει σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε

$$\max_{x\in K} \Phi(x) \leq C \min_{x\in K} \Phi(x), \quad \forall K \in T_h. \tag{4.2.6}$$

Επίσης υπάρχει μία σταθερά $C = C(k, \alpha)$, τέτοια ώστε

$$|D^k \Phi^\alpha(x)| \leq C\Phi^{\alpha+\frac{k}{2}}(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \tag{4.2.7}$$

όπου $D^k$ είναι μία παράγωγος τάξεως $k$, βλ. [55, σελ. 298]. Ακόμα η $\Phi^\alpha$ ικανοποιεί την ακόλουθη ανισότητα, βλ., παραδείγματος χάριν, [21, σελ. 158],

$$\int_\Omega \Phi^\alpha\, dx \leq \begin{cases} \dfrac{C}{(\alpha-1)\vartheta^{2(\alpha-1)}}, & \text{αν } \alpha > 1, \\ C|\log\vartheta|, & \text{αν } \alpha = 1, \end{cases} \tag{4.2.8}$$

με σταθερά $C$ ανεξάρτητη των $x_0$ και $\alpha$.

Στη συνέχεια θεωρούμε μία οικογένεια $\{V_h\}_{0<h\leq 1}$ πεπερασμένης διάστασης χώρων συναρτήσεων $v$ ορισμένων στο $\Omega$, τέτοιων ώστε $v|_K \in \mathbb{P}_1$ για κάθε $K \in T_h$, όπου $\mathbb{P}_1$ είναι ο χώρος των γραμμικών πολυωνύμων δύο μεταβλητών. Θα ζητήσουμε την προσεγγιστική λύση του (4.1.1) στο χώρο $V_h$. Έτσι υποθέτουμε ότι ο $V_h$ έχει ορισμένες προσεγγιστικές ιδιότητες. Πιο συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι ο $V_h$ ικανοποιεί την (2.2.1), δηλαδή ότι υπάρχει μία σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε για κάθε $v \in H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$,

$$\inf_{\chi\in V_h} \|v-\chi\|_{j,h} \leq C\Big(\sum_{K\in T_h} h_K^{2(2-j)}\|v\|_{j,K}^2\Big)^{1/2}, \quad j=0,1, \tag{4.2.9}$$

καθώς και ότι έχει τις ακόλουθες ιδιότητες: υπάρχει μία σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε για κάθε $v \in H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$,

$$\inf_{\chi\in V_h} \|\nabla^j(v-\chi)\|_{\Phi^\alpha,h} \leq Ch^{2-j}\|\nabla^2 v\|_{\Phi^\alpha}, \quad j=0,1,\ \alpha\in\mathbb{R}, \tag{4.2.10}$$

και

$$\inf_{\chi\in V_h} \|\nabla(v-\chi)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch\|v\|_{2,\infty}, \quad \forall v\in W^{2,\infty}(\Omega), \tag{4.2.11}$$

όπου $\|\cdot\|_{2,\infty}$ είναι η νόρμα του χώρου $W^{2,\infty}(\Omega)$.

*Παρατήρηση 4.2.1:* Στην περίπτωση που ο $V_h$ είναι ο χώρος των συνεχών κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων, οι ιδιότητες (4.2.9)–(4.2.11) ισχύουν, βλ. παραδείγματος χάριν [21, Theorems 16.2 και 22.4]. Η (4.2.9) ισχύει αφού η αντίστοιχη ανισότητα ισχύει για την παρεμβάλουσα συνάρτηση της $v$, $\Pi_h v = \sum_{z\in Z_h^{\rm in}} v(z)\psi_z$, όπου $\{\psi_z\}_{z\in Z_h^{\rm in}}$ βάση του $X_h^0$, βλ. (1.2.3). Οι (4.2.10) και (4.2.11) προκύπτουν από τοπικές προσεγγιστικές ιδιότητες του τελεστή παρεμβολής.

**Υπόθεση 4.2.1:** Όπως και στην παράγραφο 2.2, υποθέτουμε τις ακόλουθες συνθήκες συμβατότητας:

(i) Σε κάθε κοινή πλευρά $e$ δύο τριγώνων $K_1, K_2 \in T_h$, ισχύει

$$\int_e (v_{K_1} - v_{K_2})\, ds = 0, \quad \forall v\in V_h, \tag{4.2.12}$$

όπου $v_K$ είναι ο περιορισμός της $v$ στο $K \in T_h$.

(ii) Σε κάθε πλευρά $e$ ενός τριγώνου $K \in T_h$ που είναι τμήμα του συνόρου του $\Omega$, ισχύει

$$\int_e v\, ds = 0, \quad \forall v\in V_h. \tag{4.2.13}$$

Ακόμα υποθέτουμε ότι στον $V_h$ ισχύει η ανισότητα των Poincaré–Friedrichs, δηλαδή

$$\|v\|_{0,\Omega} \le C\|v\|_{1,h}, \quad \forall v \in V_h. \tag{4.2.14}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε και πάλι τη διγραμμική μορφή $a$, όπως ορίστηκε στην (2.2.5), οπότε

$$a(v,w) = \sum_{K\in T_h} \int_K \nabla v \cdot \nabla w \, dx. \tag{4.2.15}$$

Γράφουμε λοιπόν την (4.1.1) στην ακόλουθη μορφή: Ζητείται $u \in H_0^1(\Omega)$, τέτοια ώστε

$$a(u,v) = (f,v)_\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.2.16}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το πρόβλημα (4.2.16) είναι το (2.2.6), με $\sigma = 0$. Επομένως, όπως και στην παράγραφο 2.2 θεωρούμε το διακριτό πρόβλημα: Ζητείται $u_Q \in V_h$, τέτοια ώστε

$$a(u_Q,\chi) = (f, Q(\chi))_\Omega, \quad \forall \chi \in V_h, \tag{4.2.17}$$

όπου $Q$ είναι ένας τελεστής που έχει τις ιδιότητες (2.2.8)–(2.2.10), βλ. §2.2. Η ύπαρξη της λύσεως $u_Q$ του (4.2.17) προκύπτει όπως και στην παράγραφο 2.3.

## 4.3 ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Σε αυτή την παράγραφο θα αποδείξουμε εκτιμήσεις της διαφοράς $u - u_Q$ στην $W^{1,\infty}$ ημινόρμα και στην $L^\infty$ νόρμα, όπου $u$ είναι η λύση της (4.1.1) και $u_Q$ η λύση της (4.2.17). Πρώτα όμως θα αποδείξουμε ένα λήμμα που θα μας βοηθήσει στην απόδειξη των Θεωρημάτων 4.3.1 και 4.3.2

**Λήμμα 4.3.1:** *Έστω $v \in L^\infty(\Omega)$ και $w \in L^2(\Omega)$. Τότε υπάρχει μία σταθερά $C$ ανεξάρτητη του $h$ τέτοια ώστε*

$$\sum_{K\in T_h} \|v\|_{0,K}\|w\|_{0,K} \le C\Big(\int_\Omega \Phi^{1+\alpha}\, dx\Big)^{1/2} \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \times \|w\|_{\Phi^{-(1+\alpha)},h}, \quad \alpha \ge 0. \tag{4.3.1}$$

*Απόδειξη:* Λόγω της (4.2.6), έχουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h} \|v\|_{0,K}\|w\|_{0,K} \\
&\le \sum_{K\in T_h} \max_{x\in K} \Phi^{1+\alpha}(x) \max_{x\in K} \Phi^{-(1+\alpha)}(x) \|v\|_{\Phi^{1+\alpha},K}\|w\|_{\Phi^{-(1+\alpha)},K} \\
&\le \sum_{K\in T_h} \frac{\max_{x\in K} \Phi^{1+\alpha}(x)}{\min_{x\in K} \Phi^{1+\alpha}(x)} \|v\|_{\Phi^{1+\alpha},K}\|w\|_{\Phi^{-(1+\alpha)},K} \\
&\le C\|v\|_{\Phi^{1+\alpha},h}\|w\|_{\Phi^{-(1+\alpha)},h} \\
&\le C\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \Big(\int_\Omega \Phi^{1+\alpha}\,dx\Big)^{1/2} \|w\|_{\Phi^{-(1+\alpha)},h}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε μία προσέγγιση $\delta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ της κατανομής Dirac σε ένα τρίγωνο $K_0 \in T_h$, η οποία ικανοποιεί τις

$$\operatorname{supp}\delta \subset K_0, \quad \delta \ge 0, \tag{4.3.2}$$

$$\int_\Omega \delta\,dx = 1. \tag{4.3.3}$$

Ακόμα επειδή ο τριγωνισμός $T_h$ είναι ημιομοιόμορφος, βλ. Ορισμό 1.2.1, ισχύει

$$\|\nabla^k \delta\|_{L^\infty(\Omega)} \le Ch^{-2-k}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4.3.4}$$

βλ., λόγου χάριν, [33, §5].

Συμβολίζουμε τώρα με $D$ μία δεδομένη κατά κατεύθυνση παράγωγο. Έστω $g \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ η λύση του ακόλουθου βοηθητικού προβλήματος:

$$-\Delta g = D\delta, \quad \text{στο } \Omega. \tag{4.3.5}$$

Ακόμα, θεωρούμε το ανάλογο πρόβλημα πεπερασμένων στοιχείων του (4.3.5): Ζητείται $g_h \in V_h$, τέτοια ώστε

$$a(g_h, \chi) = (D\delta, \chi)_\Omega, \quad \forall \chi \in V_h. \tag{4.3.6}$$

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε ορισμένα ήδη γνωστά λήμματα που θα μας βοηθήσουν στην απόδειξη των Θεωρημάτων 4.3.1 και 4.3.2.

**Λήμμα 4.3.2:** *Έστω $g$ η λύση του βοηθητικού προβλήματος (4.3.5). Για κάθε $\alpha > 1$ υπάρχει μία θετική σταθερά $C$, τέτοια ώστε*

$$\|\nabla g\|_{\Phi^{-\alpha},h} \leq Ch^{\alpha-1}. \tag{4.3.7}$$

*Απόδειξη:* Η απόδειξη αυτού του λήμματος ακολουθεί μία παρόμοια που δίνεται από τους Rannacher και Scott στην [59, §3]. Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι

$$\begin{aligned} \Big|\int_\Omega \Phi^{-\alpha}|\nabla g|^2 dx\Big| &= \Big|\int_\Omega \nabla(\Phi^{-\alpha}g)\nabla g\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \Delta\Phi^{-\alpha} g^2 dx\Big| \\ &\leq \int_\Omega \Phi^{-\alpha} g|D\delta|\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta\Phi^{-\alpha}| g^2 dx. \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Ακόμα, σύμφωνα με την (4.2.7), έχουμε

$$|\Delta\Phi^{-\alpha}(x)| \leq C\Phi^{1-\alpha}(x), \quad \forall x \in \Omega. \tag{4.3.9}$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο $-\Delta$ είναι ένας ομοιομορφισμός από τον χώρο Sobolev $W_0^{1,q} \cap W^{2,q}$ στον $L^q$, με $q \in (1,2]$ μπορεί να αποδειχθεί ότι η $g$ ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση,

$$\int_\Omega \Phi^{1-\alpha} g^2 dx \leq C\alpha^{-1}\vartheta^{-2}\int_\Omega \Phi^{-(1+\alpha)}|\delta|^2 dx, \tag{4.3.10}$$

βλ. [59, (2.11)]. Επομένως, χρησιμοποιώντας την αριθμητική γεωμετρική ανισότητα και συνδυάζοντας τις (4.3.8)–(4.3.10), (4.3.2), (4.2.5) και (4.3.4), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \Big|\int_\Omega \Phi^{-\alpha}|\nabla g|^2 dx\Big| &\leq \int_\Omega \Phi^{-\alpha} g|D\delta|\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi^{1-\alpha} g^2 dx \\ &\leq C\int_\Omega \Phi^{-(1+\alpha)}|D\delta|^2\, dx + C\int_\Omega \Phi^{1-\alpha} g^2 dx \\ &\leq C\int_\Omega \Phi^{-(1+\alpha)}|D\delta|^2\, dx + C\alpha^{-1}\vartheta^{-2}\int_\Omega \Phi^{-(1+\alpha)}|\delta|^2 dx \\ &\leq Ch^{2\alpha-2} + Ch^{-2+2(1+\alpha)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Θεωρούμε τώρα το ακόλουθο πρόβλημα. Έστω $f \in H^2(\Omega) \cap V_h$ και $d = (d_1, d_2) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, δοσμένες συναρτήσεις. Ζητείται $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, τέτοια ώστε

$$-\Delta v = f + \operatorname{div} b, \quad \text{στο } \Omega. \tag{4.3.11}$$

Για το πρόβλημα (4.3.11) ισχύει το ακόλουθο λήμμα, βλ., λόγου χάριν, [33]:

**Λήμμα 4.3.3:** *Για κάθε κυρτό πολυγωνικό χωρίο $\Omega$ υπάρχει μία σταθερά $\alpha_\Omega \in (0, 1/2)$, τέτοια ώστε για κάθε $\alpha \in (0, \alpha_\Omega]$ να ισχύουν οι ακόλουθες εκτιμήσεις*

$$\|\nabla^2 v\|_{\Phi^{-(1+\alpha)}} \leq C\|\operatorname{div} b\|_{\Phi^{-(1+\alpha)}} + C(\sqrt{\alpha})^{-1}\|b\|_{\Phi^{-(1+\alpha)}}, \quad \text{εάν } f \equiv 0,$$

$$\|\nabla^2 v\|_{\Phi^{-(1+\alpha)}} \leq C(\sqrt{\alpha})^{-1}\|\nabla f\|_{\Phi^{-(1+\alpha)}}, \quad \text{εάν } b \equiv 0. \quad \blacksquare$$

Στη συνέχεια δίνουμε ορισμένες εκτιμήσεις των λύσεων $g$ και $g_h$, των προβλημάτων (4.3.5) και (4.3.6), αντίστοιχα, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Για την απόδειξη αυτών των εκτιμήσεων σφάλματος βλ., παραδείγματος χάριν, [33, §5]. Για κάθε $\alpha \in (0, \alpha_\Omega]$, υπάρχει μία σταθερά $C$ που εξαρτάται μόνο από τα $\alpha$ και $\gamma$, τέτοια ώστε

$$\|\nabla^2 g\|_{\Phi^{-(1+\alpha)}} \leq Ch^{\alpha-1}, \tag{4.3.12}$$

βλ. [33, (4.14)]. Επίσης, για κάθε $\alpha \in (0, \alpha_\Omega]$, υπάρχουν δύο σταθερές $\gamma$, $C \geq 1$, που εξαρτώνται μόνο από το $\alpha$, τέτοιες ώστε αν $\vartheta = \gamma h$, τότε

$$\|\nabla(g - g_h)\|_{\Phi^{-(1+\alpha)},h} \leq Ch^{\alpha}, \tag{4.3.13}$$

βλ. [33, (4.15)]. Ακόμα, υπάρχει μία σταθερά $C \geq 1$, τέτοια ώστε

$$\|\nabla(g - g_h)\|_{L^1,h} \leq C, \tag{4.3.14}$$

βλ. [33, (4.29)]. Στη συνέχεια θα δείξουμε μία βέλτιστης τάξεως εκτίμηση της διαφοράς $\nabla(u - u_Q)$ στην $L^\infty$ νόρμα. Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1 βασίζεται στην απόδειξη ενός παρόμοιου αποτελέσματος των Gastaldi και Nochetto για τη διακριτοποίηση του (4.1.1) με τη μέθοδο Galerkin/πεπερασμένων στοιχείων, βλ. [33, §5].

**Θεώρημα 4.3.1:** *Έστω $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$ η λύση του (4.1.1), και $u_Q \in V_h$ η λύση του (4.2.17). Τότε, υπάρχει μία σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε*

$$\|\nabla(u - u_Q)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch\|u\|_{2,\infty}. \tag{4.3.15}$$

*Απόδειξη:* Οι (4.3.2), (4.3.3) και (4.3.6), καθώς και το γεγονός ότι κάθε $\chi \in V_h$ είναι κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση, δίνουν

$$\begin{aligned} D\chi(z) &= D\chi(z)\int_{K_0} \delta\, dx = (\delta, D\chi)_\Omega \\ &= -a(g_h, \chi), \quad \forall z \in K_0. \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

Στη συνέχεια, σύμφωνα με την (4.2.11), για να δείξουμε την εκτίμηση (4.3.15), αρκεί να εκτιμήσουμε τη διαφορά $\nabla(\chi - u_Q)$ στην $L^\infty$ νόρμα, για κάθε $\chi \in V_h$, ή ισοδύναμα την $D(\chi - u_Q)$ για κατάλληλο $D$. Επομένως, επιλέγουμε ως φορέα του $\delta$ το $K_0 \in T_h$, για το οποίο $\|\nabla(\chi - u_Q)\|_{L^\infty(\Omega)} = D(\chi - u_Q)|_{K_0}(z)$, για κάθε $z \in K_0$. Τότε λόγω της (4.3.16) έχουμε

$$\begin{aligned} D(\chi - u_Q)(z) &= -a(g_h, \chi - u_Q) = a(u_Q - \chi, g_h) \\ &= a(u - \chi, g) + a(u - \chi, g_h - g) \\ &\quad + a(u_Q - u, g_h), \quad \forall \chi \in V_h,\ \forall z \in K_0. \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

Σύμφωνα τώρα με την (2.3.5), για $\sigma = 0$, έχουμε

$$a(u - u_Q, g_h) = \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} g_h \nabla u \cdot n \, ds + (f, g_h - Q(g_h))_\Omega. \tag{4.3.18}$$

Επομένως, οι (4.3.17) και (4.3.18) δίνουν

$$\begin{aligned} D(\chi - u_Q)(z) &= a(u - \chi, g) + a(u - \chi, g_h - g) \\ &\quad + \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} g_h \nabla u \cdot n \, ds \\ &\quad + (f, g_h - Q(g_h))_\Omega, \quad \forall \chi \in V_h,\ \forall z \in K_0. \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

Εφαρμόζοντας τώρα παρόμοια επιχειρήματα με τους Gastaldi και Nochetto, βλ. [33, (4.13)], παίρνουμε

$$\begin{aligned} &\|\nabla(\chi - u_Q)\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\le C\|\nabla(u - \chi)\|_{L^\infty(\Omega)} \big(1 + \frac{h}{\sqrt{\alpha}\vartheta^\alpha}\|\nabla^2 g\|_{\Phi^{-(1+\alpha)}} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\alpha}\vartheta^\alpha}\|\nabla(g - g_h)\|_{\Phi^{-(1+\alpha)},h} + \|\nabla(g - g_h)\|_{L^1,h}\big) \\ &\quad + |(f, g_h - Q(g_h))_\Omega|. \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (4.3.20), (4.3.12)–(4.3.14) και το γεγονός ότι $\vartheta = \gamma h$, με $\gamma \ge 1$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \|\nabla(\chi - u_Q)\|_{L^\infty(\Omega)} &\le C\|\nabla(u - \chi)\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\quad + |(f, g_h - Q(g_h))_\Omega|. \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε τον τελευταίο όρο της παραπάνω σχέσης. Από τις (4.3.6), (4.3.2), τον τύπο ολοκλήρωσης του Green και την (4.3.4), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\|\nabla g_h\|_{0,h}^2 &= (\Delta g_h, g_h)_\Omega = (D\delta, g_h)_\Omega \le \|\delta\|_{0,h}\|\nabla g_h\|_{0,h}\\ &\le Ch\|\delta\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla g_h\|_{0,h} \le Ch^{-1}\|\nabla g_h\|_{0,h}.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\|\nabla g_h\|_{0,h} \le Ch^{-1}. \tag{4.3.22}$$

Λόγω της ανισότητας των Cauchy–Schwarz, του Λήμματος 4.3.1, των (4.2.8) και (4.2.5), έχουμε για $\chi \in V_h$ και $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}|(f, g_h - Q(g_h))_\Omega| &\le C\sum_{K\in T_h} h_K\|f\|_{0,K}\|\nabla g_h\|_{0,K}\\ &\le Ch\|f\|_{L^\infty(\Omega)}\Big(\int_\Omega \Phi^{1+\alpha}\,dx\Big)^{1/2}\|\nabla g_h\|_{\Phi^{-(1+\alpha)},h}\\ &\le Ch\|f\|_{L^\infty(\Omega)}\frac{1}{\sqrt{\alpha}\vartheta^\alpha}\|\nabla g_h\|_{\Phi^{-(1+\alpha)},h}\\ &\le Ch\|f\|_{L^\infty(\Omega)}\frac{1}{\sqrt{\alpha}\vartheta^\alpha}(\|\nabla g\|_{\Phi^{-(1+\alpha)},h}\\ &\qquad + \|\nabla(g-g_h)\|_{\Phi^{-(1+\alpha)},h}).\end{aligned} \tag{4.3.23}$$

Συνδυάζοντας τώρα το Λήμμα 4.3.2 και τις (4.3.14) και (4.3.23), παίρνουμε

$$|(f, g_h - Q(g_h))_\Omega| \le Ch\|f\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{4.3.24}$$

Επομένως, λόγω των (4.3.21), (4.3.24) και του γεγονότος ότι $\vartheta = \gamma h$, με $\gamma \ge 1$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\|\nabla(u_Q - \chi)\|_{L^\infty(\Omega)} &\le C\|\nabla(u-\chi)\|_{L^\infty(\Omega)}\\ &\qquad + Ch\|u\|_{2,\infty}, \quad \forall \chi \in V_h.\end{aligned} \tag{4.3.25}$$

Άρα, σύμφωνα με τις (4.2.11) και (4.3.25), έχουμε

$$\|\nabla(u - u_Q)\|_{L^\infty(\Omega)} \le Ch\|u\|_{2,\infty}. \quad \blacksquare$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε μία εκτίμηση βέλτιστης τάξεως για τη διαφορά $u - u_Q$ στην $L^\infty$ νόρμα. Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.2

βασίζεται, όπως και αυτή του προηγούμενου θεωρήματος, στην απόδειξη ενός παρόμοιου αποτελέσματος των Gastaldi και Nochetto για τη διακριτοποίηση της (4.1.1) με τη μέθοδο Galerkin/πεπερασμένων στοιχείων, βλ. [33, §5].

**Θεώρημα 4.3.2:** *Έστω $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$ η λύση του (4.1.1) και $u_Q$ η λύση του (4.2.17). Υποθέτουμε ότι $f \in W^{1,\infty}(\Omega)$ καθώς και ότι ο τελεστής $Q$, που θεωρήσαμε στην §4.3, ορίζει έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης ακριβή για γραμμικές συναρτήσεις, δηλαδή*

$$\int_K w\,dx = \int_K Q(w)\,dx, \quad \forall w \in \mathbb{P}_1,\ \forall K \in T_h. \tag{4.3.26}$$

*Τότε υπάρχει μία σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε*

$$\|u - u_Q\|_{L^\infty(\Omega)} \le Ch^2|\log h|\big(\|u\|_{2,\infty} + \|f\|_{1,\infty}\big), \tag{4.3.27}$$

*όπου $\|\cdot\|_{s,\infty}$ είναι η νόρμα του $W^{s,\infty}(\Omega)$, $s \in \mathbb{N}$.*
*Απόδειξη:* Έστω $K_0 \in T_h$ τέτοιο ώστε

$$\|u - u_Q\|_{L^\infty(\Omega)} = |(u - u_Q)(\overline{x})|, \quad \text{με } \overline{x} \in K_0.$$

Το τρίγωνο $K_0$ που θεωρούμε δεν είναι αναγκαστικά το ίδιο με αυτό της απόδειξης του Θεωρήματος 4.3.1. Έστω λοιπόν $\delta$ η προσέγγιση της κατανομής Dirac, με φορέα το τρίγωνο $K_0$, βλ. (4.3.2)–(4.3.4). Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού, υπάρχει $x_0 \in K_0$ τέτοιο ώστε

$$\int_\Omega \delta(u - u_Q)\,dx = \int_{K_0} \delta(u - u_Q)\,dx = (u - u_Q)(x_0). \tag{4.3.28}$$

Επίσης, εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής, λόγω του γεγονότος ότι $\overline{x}$, $x_0 \in K_0$, έχουμε

$$\|u - u_Q\|_{L^\infty(\Omega)} \le |(u - u_Q)(x_0)| + Ch\|\nabla(u - u_Q)\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{4.3.29}$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεωρήμα 4.3.1, αρκεί να εκτιμήσουμε το $|(u-u_Q)(x_0)|$. Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1 θεωρούμε το εξής βοηθητικό πρόβλημα: ζητείται $\overline{g} \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, τέτοια ώστε

$$-\Delta\overline{g} = \delta, \quad \text{στο } \Omega. \tag{4.3.30}$$

Συνεπώς, λόγω της (4.3.28), έχουμε

$$(u-u_Q)(x_0) = -\int_\Omega \Delta\overline{g}(u-u_Q)\,dx. \tag{4.3.31}$$

Ακόμα, ολοκληρώνοντας κατά μέρη το δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσεως, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \Delta\overline{g}(u-u_Q)\,dx &= a(\overline{g},u-u_Q) + \sum_{K\in T_h}\int_{\partial K} u_Q\nabla\overline{g}\cdot n\,ds\\
&= a(\overline{g}-\chi,u-u_Q) + a(u-u_Q,\chi) + \sum_{K\in T_h}\int_{\partial K} u_Q\nabla\overline{g}\cdot n\,ds\\
&= a(\overline{g}-\chi,u-u_Q) + (f,\chi-Q(\chi))_\Omega + \sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\chi\nabla u\cdot n\,ds\\
&\quad + \sum_{K\in T_h}\int_{\partial K} u_Q\nabla\overline{g}\cdot n\,ds,\quad \forall\chi\in V_h.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
(u-u_Q)(x_0) = a(\overline{g}-\chi,u-u_Q) &+ (f,\chi-Q(\chi))_\Omega\\
&+ \sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\chi\nabla u\cdot n\,ds\\
&+ \sum_{K\in T_h}\int_{\partial K} u_Q\nabla\overline{g}\cdot n\,ds,\quad \forall\chi\in V_h.
\end{aligned} \tag{4.3.32}$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε τους όρους του δεξιού μέλους της (4.3.32). Χρησιμοποιώντας την ανισότητα των Cauchy–Schwarz, το Λήμμα 4.3.1, και τις (4.2.8) και (4.3.15), έχουμε

$$\begin{aligned}
&|a(\overline{g}-\chi,u-u_Q)|\\
&\le C\sum_{K\in T_h}\|\nabla(u-u_Q)\|_{0,K}\|\nabla(\overline{g}-\chi)\|_{0,K}\\
&\le C\|\nabla(u-u_Q)\|_{L^\infty(\Omega)}\Big(\int_\Omega \Phi\,dx\Big)^{1/2}\|\nabla(\overline{g}-\chi)\|_{\Phi^{-1},h}\\
&\le Ch|\log\vartheta|^{1/2}\|u\|_{2,\infty}\|\nabla(\overline{g}-\chi)\|_{\Phi^{-1},h},\quad \forall\chi\in V_h.
\end{aligned} \tag{4.3.33}$$

Επειδή η $f\in W^{1,\infty}(\Omega)$, ισχύει η (2.3.12), οπότε επαναλαμβάνοντας παρόμοια επιχειρήματα όπως στην (2.3.22), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
|(f,\chi-Q(\chi))_\Omega| &\le Ch^2\sum_{K\in T_h}\|\nabla f\|_{0,K}\|\nabla\chi\|_{0,K}\\
&\le Ch^2\sum_{K\in T_h}\|\nabla f\|_{0,K}(\|\nabla\overline{g}\|_{0,K}+\|\nabla(\overline{g}-\chi)\|_{0,K}).
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τώρα το Λήμμα 4.3.1 και την (4.2.8) στην παραπάνω εκτίμηση, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}|(f,\chi-Q(\chi))_\Omega| &\le Ch^2\|\nabla f\|_{L^\infty(\Omega)}\Big(\int_\Omega \Phi\,dx\Big)^{1/2}\\ &\quad\times\big\{\|\nabla\overline{g}\|_{\Phi^{-1}}+\|\nabla(\overline{g}-\chi)\|_{\Phi^{-1},h}\big\}\\ &\le Ch^2\|\nabla f\|_{L^\infty(\Omega)}|\log\vartheta|^{1/2}\\ &\quad\times\big\{\|\nabla\overline{g}\|_{\Phi^{-1}}+\|\nabla(\overline{g}-\chi)\|_{\Phi^{-1},h}\big\},\quad\forall\chi\in V_h.\end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη ανισότητα

$$|\psi|^2_{1,\Omega}\le C\frac{|\log\vartheta|}{\vartheta^2}|\Delta\psi|^2_{\Phi^{-2},h},\quad\forall\psi\in H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega),\tag{4.3.34}$$

για την απόδειξη της οποίας βλ., παραδείγματος χάριν, [21, (22.48), σελ. 167]. Εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι

$$\|v\|_{\Phi^{-1}}\le C\|v\|_{0,\Omega},\quad\forall v\in L^2(\Omega).$$

Επομένως, λόγω της προηγούμενης σχέσεως, των (4.3.34), (4.3.2), (4.3.4), και του γεγονότος ότι $\vartheta=\gamma h$, με $\gamma\ge 1$, παίρνουμε

$$\|\nabla\overline{g}\|^2_{\Phi^{-1},h}\le C\frac{|\log\vartheta|}{\vartheta^2}\int_{K_0}\Phi^{-2}\delta^2dx\le C|\log\vartheta|.\tag{4.3.35}$$

Ακόμα, επειδή $\vartheta=\gamma h$, $\gamma\ge 1$, έχουμε

$$\log\frac{1}{\vartheta}\le C\log\frac{1}{h}.\tag{4.3.36}$$

Συνεπώς, συνδυάζοντας τις (4.3.35) και (4.3.36), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}|(f,\chi-Q(\chi))_\Omega| &\le Ch^2\|\nabla f\|_{L^\infty(\Omega)}(|\log h|+|\log h|^{1/2}\\ &\quad\times\|\nabla(\overline{g}-\chi)\|_{\Phi^{-1},h}),\quad\forall\chi\in V_h.\end{aligned}\tag{4.3.37}$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε τους δύο τελευταίους όρους της (4.3.32). Παρόμοια, όπως στην (2.3.19), παίρνουμε

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\chi\nabla u\cdot n\,ds+\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}u_Q\nabla\overline{g}\cdot n\,ds\Big|\\ &\le Ch\sum_{K\in T_h}(|u|_{2,K}|\overline{g}-\chi|_{1,K}\\ &\qquad+|u-u_Q|_{1,K}|\overline{g}|_{2,K}),\quad\forall\chi\in V_h.\end{aligned}\tag{4.3.38}$$

Επίσης, λόγω του Λήμματος 4.3.1, και των (4.2.8), (4.3.15) και (4.3.36), εκτιμούμε το δεξιό μέλος της (4.3.38), ως εξής

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h} \left(|u|_{2,K}|\overline{g}-\chi|_{1,K}+|u-u_Q|_{1,K}|\overline{g}|_{2,K}\right)\\
&\le C\|u\|_{2,\infty}\Big(\int_\Omega \Phi\,dx\Big)^{1/2}\|\nabla(\overline{g}-\chi)\|_{\Phi^{-1},h}\\
&\quad+\|\nabla(u-u_Q)\|_{L^\infty(\Omega)}\Big(\int_\Omega \Phi\,dx\Big)^{1/2}\|\nabla^2\overline{g}\|_{\Phi^{-1}}\\
&\le C\|u\|_{2,\infty}(|\log h|^{1/2}\|\nabla(\overline{g}-\chi)\|_{\Phi^{-1},h}\\
&\qquad+h|\log h|^{1/2}\|\nabla^2\overline{g}\|_{\Phi^{-1}}),\quad \forall\chi\in V_h.
\end{aligned}
\tag{4.3.39}
$$

Ακόμα, οι Gastaldi και Nochetto, στην [33, Lemma 5.4], αποδεικνύουν ότι

$$
\|\nabla^2\overline{g}\|_{\Phi^{-1}}\le C|\log\vartheta|^{1/2}. \tag{4.3.40}
$$

Επομένως, συνδυάζοντας τις (4.3.31)–(4.3.33), (4.3.36)–(4.3.39), και (4.2.10), έχουμε

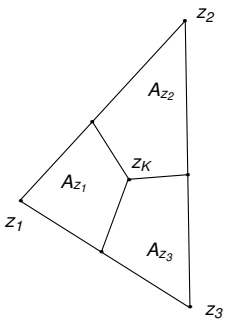
$$
\begin{aligned}
|(u-u_Q)(x_0)|&\le Ch^2(|\log h|+|\log h|^{1/2}\|\nabla^2\overline{g}\|_{\Phi^{-1}})\\
&\qquad\times(\|u\|_{2,\infty}+\|f\|_{1,\infty})\\
&\le Ch^2|\log h|(\|u\|_{2,\infty}+\|f\|_{1,\infty}).
\end{aligned}
$$

Τελικά, χρησιμοποιώντας εδώ τις (4.3.29) και (4.3.15), λαμβάνουμε την εκτίμηση (4.3.27). ■

## 4.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ Ι: ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΧΩΡΙΩΝ ΜΕ ΣΥΝΕΧΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Σε αυτή την παράγραφο θεωρούμε τις δύο μεθόδους πεπερασμένων χωρίων που μελετήσαμε στην §2.4, στους διαμερισμούς $\mathcal{B}_c$ και $\mathcal{V}_c$ του $\Omega$, για τη διακριτοποίηση της (4.1.1). Εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο χώρος $X_h^0$, οπου ζητούμε την προσεγγιστική λύση, ικανοποιεί τις (4.2.9)–(4.2.11), βλ., παραδείγματος χάριν [21, Theorems 16.2 και 22.4], όπως και τις (4.2.12)–(4.2.14), βλ. Παρατήρηση 2.2.2.

Επίσης, σύμφωνα με την §2.4 οι δύο μέθοδοι πεπερασμένων χωρίων που εξετάζουμε εδώ μπορούν να γραφούν στη μορφή της μεθόδου που μελετήσαμε στην §4.3, για έναν κατάλληλο τελεστή $Q$. Επομένως, για




**ΣΧΗΜΑ 9**. Διαμερισμός του τριγώνου $K$ σε τρία υποχωρία $A_z$.

αυτές τις μεθόδους ισχύουν οι εκτιμήσεις σφάλματος που δείξαμε στην §4.3.

**Μέθοδος Ι:** Θεωρούμε τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για την (4.1.1) στον μη επικαλυπτόμενο διαμερισμό $\mathcal{B}_c$, δηλαδή την (2.4.2), με $\sigma = 0$. Επομένως, ζητούμε $u_h \in X_h^0$, τέτοια ώστε

$$-\int_{\partial b_z} \nabla u_h \cdot n \, ds = \int_{b_z} f \, dx, \quad \forall z \in Z_h^{\text{in}}. \tag{4.4.1}$$

Θεωρούμε τώρα τη διγραμμική μορφή $\overline{a}_{CN}(\cdot,\cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, που ορίσαμε στην (1.3.7), δηλαδή

$$\overline{a}_{CN}(v,w) = -\sum_{z \in Z_h^{\text{in}}} w(z) \int_{\partial b_z} \nabla v \cdot n \, ds. \tag{4.4.2}$$

Τότε μπορούμε να γράψουμε την (4.4.1) στη μορφή

$$\overline{a}_{CN}(u_h, \chi) = \sum_{z \in Z_h^{\text{in}}} \chi(z) \int_{b_z} f \, dx. \tag{4.4.3}$$

Θεωρούμε τώρα έναν τελεστή $Q$, που ορίζεται ως

$$Q(w)|_K = \sum_{z \in Z_h(K)} w(z) q_{A_z}, \quad K \in T_h, \tag{4.4.4}$$

όπου $A_z \in \mathcal{A}(K)$ τα χωρία στα οποία διαμερίζουμε το $K$, βλ. Σχήμα 9, και $q_S$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του χωρίου $S \subset \mathbb{R}^2$. Ο $Q$ δηλαδή είναι ο τελεστής που ορίσαμε στην (2.4.5) για τη Μέθοδο Ι, §2.4.

Επομένως έχουμε ότι η λύση $u_h$ του (4.4.3) ικανοποιεί τη μεταβολική μορφή (4.2.17), βλ. Μέθοδο I §2.4, οπότε

$$\begin{aligned} a(u_h,\chi) = \overline{a}_{CN}(u_h,\chi) &= \sum_{z\in Z_h^{\rm in}} \chi(z)\int_{b_z} f\,dx \\ &= (f, Q(\chi))_\Omega, \quad \forall \chi\in X_h^0. \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Άρα, έαν η $u\in W^{2,\infty}(\Omega)$ είναι λύση της (4.1.1) και $u_h$ η λύση της (4.4.3), σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.1, έχουμε

$$\|\nabla(u-u_h)\|_{L^\infty(\Omega)} \le Ch\|u\|_{2,\infty}. \tag{4.4.6}$$

Επιπλέον, επιλέγοντας για $z_K$ το βαρύκεντρο του $K\in T_h$ στην κατασκευή του δυϊκού διαμερισμού $\mathcal{B}_c$, παρατηρούμε ότι ο τελεστής $Q$, που θεωρήσαμε στην (4.4.4), ικανοποιεί την

$$\int_K Q(w)\,dx = \int_K w\,dx, \quad \forall w\in\mathbb{P}_1,$$

βλ. (2.4.9). Υποθέτοντας ακόμα, ότι $f\in W^{1,\infty}(\Omega)$ και $u\in W^{2,\infty}(\Omega)$, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.4, παίρνουμε

$$\|u-u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \le Ch^2|\log h|\big(\|u\|_{2,\infty}+\|f\|_{1,\infty}\big). \tag{4.4.7}$$

**Μέθοδος II:** Τώρα θα θεωρήσουμε τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων στον επικαλυπτόμενο διαμερισμό $\mathcal{V}_c$, δηλαδή την (2.4.12) με $\sigma=0$. Επομένως, ζητούμε $u_h\in X_h^0$, τέτοια ώστε

$$-\int_{\partial V_z} \nabla u_h\cdot n\,ds = \frac{2}{3}\int_{V_z} f\,dx, \quad \forall z\in Z_h^{\rm in}. \tag{4.4.8}$$

Θεωρούμε τώρα τη διγραμμική μορφή $\overline{a}_{CO}: H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$, που ορίσαμε στην (2.4.13), δηλαδή

$$\overline{a}_{CO}(v,w) = -\sum_{z\in Z_h^{\rm in}} w(z)\int_{\partial V_z}\nabla v\cdot n\,ds. \tag{4.4.9}$$

Τότε, μπορούμε να γράψουμε την (4.4.8) στη μορφή

$$\overline{a}_{CO}(u_h,\chi) = \frac{2}{3}\sum_{z\in Z_h^{\rm in}}\chi(z)\int_{V_z} f\,dx. \tag{4.4.10}$$

Θεωρούμε τώρα έναν τελεστή $Q$, που ορίζεται ως

$$Q(w)|_K = \frac{1}{3} \sum_{z \in Z_h(K)} w(z), \quad K \in T_h. \tag{4.4.11}$$

Ο $Q$ δηλαδή είναι ο τελεστής που ορίσαμε στην (2.4.21) για τη Μέθοδο ΙΙ, §2.4. Επομένως η λύση $u_h$ της (4.4.10) ικανοποιεί τη μεταβολική μορφή (4.2.17), βλ. Μέθοδο ΙΙ, §2.4, οπότε

$$\begin{aligned} a(u_h, \chi) &= \frac{1}{2}\overline{a}_{CO}(u_h, \chi) = \frac{1}{3} \sum_{z \in Z_h^{\text{in}}} \chi(z) \int_{V_z} f \, dx \\ &= (f, Q(\chi))_\Omega, \quad \forall \chi \in X_h^0. \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

Συνεπώς, εάν η $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$ είναι λύση της (4.1.1) και η $u_h$ λύση της (4.4.8), λόγω του Θεωρήματος 4.3.1, παίρνουμε

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch\|u\|_{2,\infty}. \tag{4.4.13}$$

Επιπλέον, είναι σαφές ότι ο τελεστής $Q$ που ορίσαμε στην (4.4.11) ικανοποιεί την

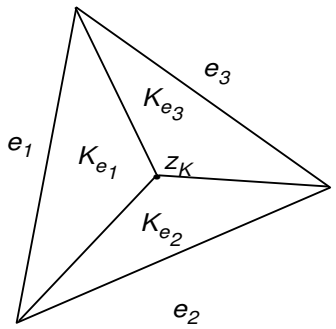
$$\int_K Q(w)\, dx = \int_K w \, dx, \quad \forall w \in \mathbb{P}_1,$$

βλ. (2.4.25). Υποθέτοντας τώρα ότι $f \in W^{1,\infty}(\Omega)$ και $u \in W^{3,\infty}(\Omega)$, λόγω του Θεωρήματος 4.3.2, έχουμε

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^2 |\log h| \big(\|u\|_{2,\infty} + \|f\|_{1,\infty}\big). \tag{4.4.14}$$

## 4.5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΙΙ: ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΧΩΡΙΩΝ ΜΕ ΜΗ ΣΥΝΕΧΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Σε αυτήν την παράγραφο θεωρούμε τις δύο μεθόδους πεπερασμένων χωρίων, που μελετήσαμε στην §2.5, στους διαμερισμούς $\mathcal{B}_n$ και $\mathcal{V}_n$ του $\Omega$ για τη διακριτοποίηση της (4.1.1). Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι ο χώρος $S_h^0$, όπου ζητούμε την προσεγγιστική λύση, πληροί τις (4.2.9)–(4.2.11), βλ., παραδείγματος χάριν [22, Theorem 5] και [33, Lemma 4.1], καθώς και τις (4.2.12)–(4.2.14), βλ. Παρατήρηση 4.2.2.




**ΣΧΗΜΑ 11**. Διαμερισμός του τριγώνου $K \in T_h$ στα υποχωρία $K_e$.

Επίσης, σύμφωνα με την §2.5 οι δύο μέθοδοι πεπερασμένων χωρίων που εξετάζουμε εδώ μπορούν να γραφούν στη μορφή της μεθόδου που μελετάμε στην §4.3, για έναν κατάλληλο τελεστή $Q$. Επομένως για αυτές τις μεθόδους ισχύουν οι εκτιμήσεις σφάλματος που δείξαμε στην §4.3.

**Μέθοδος III:** Σε αυτή την εφαρμογή θα θεωρήσουμε τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για την (4.1.1) στον μη επικαλυπτόμενο διαμερισμό $\mathcal{B}_n$, δηλαδή την (2.5.2), για $\sigma = 0$. Επομένως, ζητούμε $u_h \in S_h^0$, τέτοια ώστε

$$-\int_{\partial b_e} \nabla u_h \cdot n \, ds = \int_{b_e} f \, dx, \quad \forall e \in E_h^{\rm in}. \tag{4.5.1}$$

Ακόμα, θεωρούμε τη διαγραμμική μορφή $\overline{a}_{NN} : (H^1(\Omega)+S_h)\times(H^1(\Omega)+S_h) \to \mathbb{R}$, που ορίσαμε στην (1.5.16), δηλαδή

$$\overline{a}_{NN}(v,w) = -\sum_{e\in E_h^{\rm in}} w(m_e) \int_{\partial b_e} \nabla v \cdot n \, ds. \tag{4.5.2}$$

Τότε, μπορούμε να γράψουμε την (4.5.1) στη μορφή

$$\overline{a}_{NN}(u_h,\chi) = \sum_{e\in E_h^{\rm in}} \chi(m_e) \int_{b_e} f \, dx, \quad \forall \chi \in S_h^0. \tag{4.5.3}$$

Θεωρούμε τώρα έναν τελεστή $Q$, που ορίζεται ως

$$Q(w)|_K = \sum_{e\in E_h(K)} w(m_e) q_{K_e}, \quad K \in T_h, \tag{4.5.4}$$

όπου $K_e \in \widetilde{T_h}(K)$ είναι τα μικρότερα τρίγωνα στα οποία έχουμε διαμερίσει το $K$, βλ. Σχήμα 11, σελ. 140, και συμβολίζουμε με $q_S$ τη χαρακτηριστική συνάρτηση ενός χωρίου $S \subset \mathbb{R}^2$. Ο $Q$ είναι δηλαδή ο τελεστής $Q$ που ορίσαμε στην (2.5.6) για τη Μέθοδο III, §2.5.

Επομένως η λύση $u_h$ του (4.5.3) ικανοποιεί τη μεταβολική μορφή (4.2.17), βλ. Μέθοδο ΙΙΙ §2.5. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} a(u_h,\chi) = \overline{a}_{NN}(u_h,\chi) &= \sum_{e\in E_h^{\rm in}} \chi(m_e)\int_{b_e} f\,dx \\ &= (f, Q(\chi))_\Omega, \quad \forall \chi\in S_h^0. \end{aligned} \tag{4.5.5}$$

Επομένως, αν η $u\in W^{2,\infty}(\Omega)$ είναι λύση της (4.1.1) και η $u_h$ λύση της (4.5.3), λόγω του Θεωρήματος 4.3.1, παίρνουμε

$$\|\nabla(u-u_h)\|_{L^\infty(\Omega)} \le Ch\|u\|_{2,\infty}. \tag{4.5.6}$$

Επιπλέον, επιλέγοντας για $z_K$ το βαρύκεντρο του $K\in T_h$ στην κατασκευή του δυϊκού διαμερισμού $\mathcal{B}_n$, παρατηρούμε ότι ο τελεστής $Q$ που θεωρήσαμε στην (4.5.4), ικανοποιεί την

$$\int_K Q(w)\,dx = \int_K w\,dx, \quad \forall w\in\mathbb{P}_1,$$

βλ. (2.5.10). Υποθέτοντας ακόμα ότι $f\in W^{1,\infty}(\Omega)$ και $u\in W^{3,\infty}(\Omega)$, λόγω του Θεωρήματος 4.3.2, λαμβάνουμε

$$\|u-u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \le Ch^2|\log h|\big(\|u\|_{2,\infty}+\|f\|_{1,\infty}\big). \tag{4.5.7}$$

**Μέθοδος IV:** Θα θεωρήσουμε τώρα τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων στον επικαλυπτόμενο διαμερισμό $\mathcal{V}_n$, δηλαδή την (2.5.13) με $\sigma=0$. Επομένως, ζητούμε $u_h\in S_h^0$, τέτοια ώστε

$$-\int_{\partial V_e} \nabla u_h\cdot n\,ds = \frac{1}{3}\int_{V_e} f\,dx, \quad \forall e\in E_h^{\rm in}. \tag{4.5.8}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τη διγραμμική μορφή $\overline{a}_{NO}:(H^1(\Omega)+S_h)\times(H^1(\Omega)+S_h)\to\mathbb{R}$, που ορίσαμε στην (2.5.14), δηλαδή

$$\overline{a}_{NO}(v,w) = -\sum_{e\in E_h^{\rm in}} w(m_e)\int_{\partial V_e}\nabla v\cdot n\,ds. \tag{4.5.9}$$

Τότε, μπορούμε να γράψουμε την (4.5.8) στη μορφή

$$\overline{a}_{NO}(u_Q,\chi) = \frac{1}{3}\sum_{e\in E_h^{\rm in}}\chi(m_e)\int_{V_e} f\,dx, \quad \forall\chi\in S_h^0. \tag{4.5.10}$$

Θεωρούμε τώρα τον τελεστή $Q$, που ορίζεται ως

$$Q(w)|_K = \frac{1}{3} \sum_{e \in E_h(K)} w(m_e), \quad K \in T_h. \tag{4.5.11}$$

Ο $Q$ δηλαδή είναι ο τελεστής που ορίσαμε στην (2.5.17) για τη Μέθοδο IV, §2.5. Επομένως, η λύση $u_h$ του (4.5.10) ικανοποιεί τη μεταβολική μορφή (4.2.17). Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} a(u_h, \chi) = \overline{a}_{NO}(u_h, \chi) &= \frac{1}{3} \sum_{e \in E_h^{\text{in}}} \chi(m_e) \int_{V_e} f \, dx \\ &= (f, Q(\chi))_\Omega, \quad \forall \chi \in S_h^0. \end{aligned} \tag{4.5.12}$$

Συνεπώς, αν η $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$ είναι λύση της (4.1.1) και η $u_h$ λύση της (4.5.10), λόγω του Θεωρήματος 4.3.1, έχουμε

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch \|u\|_{2,\infty}. \tag{4.5.13}$$

Επιπλέον ο τελεστής $Q$ που θεωρήσαμε στην (4.5.11) ικανοποιεί την

$$\int_K Q(w) \, dx = \int_K w \, dx, \quad \forall w \in \mathbb{P}_1,$$

βλ. (2.5.21). Υποθέτοντας λοιπόν ότι $f \in W^{1,\infty}(\Omega)$ και $u \in W^{3,\infty}(\Omega)$, λόγω του Θεωρήματος 4.3.2, έχουμε

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^2 |\log h| \big( \|u\|_{2,\infty} + \|f\|_{1,\infty} \big). \tag{4.5.14}$$

**ΜΕΡΟΣ Β**

# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

# Εισαγωγή

Στο δεύτερο μέρος αυτής της εργασίας θα μελετήσουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, καθώς και ένα αρχικών και συνοριακών τιμών. Στο Κεφάλαιο 5 θεωρούμε μία κατηγορία διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$Au'(t) = B(t, u(t)), \quad t \in [0, t^\star], \ t^\star > 0, \tag{1}$$

όπου $A$ είναι ένας αυτοσυζυγής, θετικά ορισμένος γραμμικός τελεστής σε ένα χώρο Hilbert $H$ και $B$ ένας πιθανόν μη γραμμικός τελεστής. Μας ενδιαφέρουν συγκεκριμένες μη άκαμπτες μερικές διαφορικές εξισώσεις που ανήκουν στην παραπάνω κατηγορία διαφορικών εξισώσεων. Έτσι υποθέτουμε ορισμένες ιδιότητες του $B$ ώστε το $(1)$ να μην είναι άκαμπτο. Πιο συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι ο $B$ ικανοποιεί συνθήκες τύπου Lipschitz, βλ. $(\text{Y}5.2.3)$ και $(\text{Y}5.2.4)$. Στην παράγραφο $5.2$ διακριτοποιούμε το χώρο $H$ με μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων και παίρνουμε βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος για το ημιδιακριτό πρόβλημα που προκύπτει. Στη συνέχεια διακριτοποιούμε και ως προς το χρόνο με γραμμικές άμεσες πολυβηματικές μεθόδους. Επειδή, σύμφωνα με τις υποθέσεις για τον $B$, το $(1)$ είναι μη άκαμπτο, δεν χρειάζεται να διακριτοποιήσουμε ως προς το χρόνο με μία μέθοδο με πολύ καλές ιδιότητες ευστάθειας, όπως είναι μερικές μέθοδοι Runge–Kutta. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε μεθόδους που είναι λιγότερο δαπανηρές σε πράξεις. Στις παραγράφους $5.3$ και $5.4$ αποδεικνύουμε βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος για τα πλήρως διακριτά σχήματα που προκύπτουν διακριτοποιώντας με την άμεση μέθοδο του Euler και με μία γενικότερη άμεση γραμμική πολυβηματική μέθοδο. Θα εφαρμόσουμε τα αφηρημένα αποτελέσματα στην εξίσωση του Rosenau στο $\mathbb{R}^m$, $m \leq 3$, σε μία γενικευμένη εξίσωση τύπου Sobolev σε μία χωρική διάσταση, σε μία ψευδοπαραβολική εξίσωση στον $\mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, και σε ένα σύστημα εξισώσεων τύπου Boussinesq.

Στο Κεφάλαιο $6$ θεωρούμε ένα απλό παραβολικό πρόβλημα για την εξίσωση της θερμότητας

$$u_t - \Delta u = f, \quad \text{στο } \Omega \times [0, T], \ T > 0, \tag{2}$$

όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα κυρτό, φραγμένο, πολυγωνικό χωρίο. Θα μελετήσουμε τα ημιδιακριτά σχήματα που προκύπτουν χρησιμοποιώντας μεθόδους πεπερασμένων χωρίων για τη διακριτοποίηση του χώρου. Η προσεγγιστική λύση που κατασκευάζουμε ανήκει στο χώρο των όχι κατ' ανάγκη συνεχών κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων και αποδεικνύουμε βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος στην $H^1$ και $L^2$ νόρμα. Στη συνέχεια διακριτοποιούμε και ως προς το χρόνο με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler και αποδεικνύουμε και για τα πλήρως διακριτά σχήματα βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

# Άμεσες πολυβηματικές μέθοδοι για μη άκαμπτες μερικές διαφορικές εξισώσεις

Θα προσεγγίσουμε τη λύση μη άκαμπτων προβλημάτων αρχικών τιμών για εξισώσεις της μορφής $Au'(t) = B(t, u(t)),\ t \in [0, t^\star]$. $A$ είναι ένας αυτοσυζυγής, θετικά ορισμένος, γραμμικός τελεστής σε έναν χώρο Hilbert $(H, (\cdot, \cdot))$ και $B$ είναι ένας πιθανόν μη γραμμικός τελεστής. Διακριτοποιούμε ως προς το χώρο χρησιμοποιώντας πεπερασμένα στοιχεία. Για τη διακριτοποίηση ως προς το χρόνο χρησιμοποιούμε άμεσα γραμμικά πολυβηματικά σχήματα. Αποδεικνύουμε βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος. Εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα για την αφηρημένη περίπτωση στην εξίσωση του Rosenau στον $\mathbb{R}^m$, $m \leq 3$, σε μία γενικευμένη εξίσωση τύπου Sobolev σε μία διάσταση ως προς το χρόνο, σε μία ψευδοπαραβολική εξίσωση στον $\mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, και σε ένα σύστημα εξισώσεων τύπου Boussinesq.

## 5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο κατασκευάζουμε και μελετάμε άμεσες πολυβηματικές μεθόδους για τη διακριτοποίηση στο χρόνο μίας κατηγορίας μη άκαπτων προβλημάτων αρχικών τιμών της μορφής: Για δοσμένο $t^\star > 0$ και $u^0 \in H$, ζητούμε να προσδιορίσουμε μία συνάρτηση $u : [0, t^\star] \equiv J \to D(A)$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} A(u'(t)) = B(t, u(t)), & t \in J, \\ u(0) = u^0, \end{cases} \tag{5.1.1}$$

όπου $A$ είναι ένας αυτοσυζυγής, θετικά ορισμένος, γραμμικός τελεστής σε έναν χώρο Hilbert $(H,(\cdot, \cdot))$ με πεδίο ορισμού $D(A)$ πυκνό στον $H$, και $B : J \times D(A) \to H$ ένας ενδεχομένως μη γραμμικός τελεστής.

Επειδή ο $A$ είναι αυτοσυζυγής και θετικά ορισμένος στον $H$, ο $A^{1/2}$ είναι καλά ορισμένος. Θέτουμε λοιπόν $V := D(A^{1/2})$, και ορίζουμε την εξής νόρμα στον $V$, $\|v\| = \left(A^{1/2}v, A^{1/2}v\right)^{1/2}$. Τη νόρμα στον $H$, που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$, τη συμβολίζουμε με $|\cdot|$. Ακόμα ταυτίζουμε τον $H$ με τον δυϊκό του χώρο, οπότε $V \subset H \subset V'$, όπου $V'$ είναι ο δυϊκός του $V$ και συμβολίζουμε ξανά με $(\cdot,\cdot)$ το δυϊκό ζεύγος μεταξύ $V'$ και $V$. Επίσης υποθέτουμε ότι ο τελεστής $B$ μπορεί να επεκταθεί σε έναν τελεστή από το $J \times V$ στον $V'$. Θεωρούμε τώρα τη συμμετρική διγραμμική μορφή $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής

$$a(v,w) = (A^{1/2}v, A^{1/2}w),$$

και γράφουμε το (5.1.1) στην παρακάτω μεταβολική μορφή: Ζητούμε μία συνάρτηση $u(t) \in V$, $t \in J$, τέτοια ώστε

$$\begin{cases} a(u'(t), v) = (B(t, u(t)), v), & \forall v \in V, \quad t \in J, \\ u(0) = u^0. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

Αν $V_h$ ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του $V$, το αντίστοιχο ημιδιακριτό πρόβλημα του (5.1.2) είναι το εξής: Ζητούμε μία συνάρτηση $u_h(t) \in V_h$, $t \in J$, τέτοια ώστε

$$\begin{cases} a(u_h'(t), \chi) = (B(t, u_h(t)), \chi), & \forall \chi \in V_h, \quad t \in J, \\ u_h(0) = u_h^0, \end{cases} \tag{5.1.3}$$

όπου $u_h^0 \in V_h$ είναι μία δοσμένη προσέγγιση της $u^0$. Επειδή θέλουμε το πρόβλημα (5.1.1) που μελετούμε να είναι μη άκαμπτο, πρέπει να υποθέσουμε κατάλληλες συνθήκες για τον τελεστή $B$. Για αυτό το λόγο θεωρούμε ακόμα το εξής βοηθητικό πρόβλημα: Για $f \in V'$, ζητούμε $v \in V$ τέτοια ώστε

$$a(v,w) = (f,w), \qquad \forall w \in V. \tag{5.1.4}$$

Παρακάτω, στην παράγραφο 5.2, θα δούμε ότι αυτό το πρόβλημα έχει μία ακριβώς λύση. Συμβολίζουμε με $T$ τον τελεστή λύσεώς του και θεωρούμε μία προσέγγιση $T_h : V \to V_h$ του $T$. Λόγω του ορισμού των τελεστών $T$ και $T_h$ μπορούμε να διατυπώσουμε τα προβλήματα (5.1.2) και (5.1.3) ισοδύναμα στις εξής αντίστοιχες μορφές: Ζητούμε $u(t) \in V$, $t \in J$, τέτοια ώστε

$$\begin{cases} (u'(t), v) = (TB(t, u(t)), v), & \forall v \in V, \quad t \in J, \\ u(0) = u^0 \end{cases} \tag{5.1.5}$$

και: Ζητούμε $u_h(t) \in V_h$, $t \in J$, τέτοια ώστε

$$\text{(5.1.6)} \qquad \begin{cases} (u_h'(t), \chi) = (T_h B(t, u_h(t)), \chi), & \forall \chi \in V_h, \quad t \in J, \\ u_h(0) = u_h^0. \end{cases}$$

Δείχνουμε ακόμα ότι η λύση $u_h$ του (5.1.6) προσεγγίζει τη λύση $u$ του (5.1.1).

Στο κεφάλαιο αυτό όμως, επικεντρώνουμε τη μελέτη μας σε πλήρως διακριτά σχημάτα, των οποίων η λύση προσεγγίζει τη λύση $u$ του (5.1.2). Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι το πρόβλημα (5.1.6) είναι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών για ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Κατασκευάζουμε λοιπόν προσεγγίσεις του (5.1.6) όπως θα κατασκευάζαμε για το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών: Ζητούμε $y : J \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\text{(5.1.7)} \qquad y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad t \in J,$$

όπου $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ένας τρόπος είναι να προσεγγίσουμε την τιμή της λύσεως $y$ του (5.1.7) σε διακριτά σημεία του πεδίου ορισμού της, $J$. Θεωρούμε, λοιπόν μία ομοιόμορφη διαμέριση του διαστήματος $J$. Δηλαδή για $N \in \mathbb{N}$, θέτουμε $k := \frac{t^\star}{N}$ το σταθερό χρονικό βήμα και $t^n := nk$, $n = 0, \ldots, N$. Ζητούμε τότε προσεγγίσεις $Y^n \in \mathbb{R}$ των $y^n := y(t^n)$, $n = 0, \ldots, N$, οι οποίες μπορούν να κατασκευαστούν, παραδείγματος χάριν, με μεθόδους Runge–Kutta, με πολυβηματικές μεθόδους ή και με άλλες (βλ. [39]). Έτσι λοιπόν κατασκευάζουμε προσεγγίσεις $U^n$, $U^n \in V_h$, των $u_h(t^n)$, $n = 0, \ldots,$ οι οποίες θα είναι τελικά προσεγγίσεις των $u^n = u(t^n)$, $n = 0, \ldots, N$.

Μία ταξινόμηση που υπάρχει στα προβλήματα της μορφής (5.1.7), χωρίς όμως σαφή μαθηματικό ορισμό, είναι σε άκαμπτα και μη. Ο διαχωρισμός αυτός πολλές φορές μπορεί να ερμηνεύσει γιατί μία μέθοδος δίνει καλύτερα αποτελέσματα από μία άλλη. Οι Hairer και Wanner, βλ. [40], χαρακτηρίζουν το (5.1.7) ως άκαμπτο όταν *"ορισμένες πεπλεγμένες μέθοδοι προσεγγίζουν καλύτερα τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών, συνήθως εξαιρετικά καλύτερα, από ότι οι άμεσες"*, [40, Chapter IV, σελ. 1]. Το πρόβλημα επικεντρώνεται στην κατάλληλη επιλογή του βήματος $k$ ώστε η μέθοδος να είναι απόλυτα ευσταθής. Αυτό εξασφαλίζεται αν η απόλυτη τιμή του γινομένου της κυρίαρχης ιδιοτιμής, $\lambda$, της ιακωβιανής της $f$, επί $k$, βρίσκεται γνησίως μέσα στην περιοχή απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου, βλ. [40, σελ. 17 και 22]. Στην περίπτωση που η $f$ ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz, η σταθερά Lipschitz της $f$ είναι μία καλή προσέγγιση της απόλυτης τιμής της $\lambda$, επειδή

$$\text{(5.1.8)} \qquad |\lambda| \approx \frac{|||f(t, y+v) - f(t, y)|||}{|||v|||},$$

όπου με $|||\cdot|||$ συμβολίζουμε μία νόρμα στο χώρο των συναρτήσεων στον οποίο ανήκει η λύση $y$ του (5.1.7), $v$ είναι μία προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος της $\lambda$ και $|||v|||$ κατάλληλα μικρό, βλ. [40, σελ. 23].

Η λύση $u_h$ του (5.1.6) αποτελεί προσέγγιση της λύσης $u$ του (5.1.2), υπό την προϋπόθεση ότι το $h$ είναι κατάλληλα μικρό (Πρόταση 5.2.1). Θεωρούμε ως ακαμψία του (5.1.6) τον περιορισμό στο χρονικό βήμα $k$, δεδομένου ότι το $h$ είναι μικρό, ώστε η πλήρως διακριτή μέθοδος να είναι απόλυτα ευσταθής. Από τις υποθέσεις (Υ5.2.3) και (Υ5.2.4) μπορούμε να δείξουμε τη (5.2.15). Παρατηρούμε τότε ότι λόγω της (5.1.8) μπορούμε να έχουμε μία εκτίμηση για το μέγεθος της απόλυτης τιμής της κυρίαρχης ιδιοτιμής της ιακωβιανής της $T_hB$, καθώς και ότι η επιλογή ενός μικρού $h$ δεν επηρεάζει αρνητικά την επιλογή του $k$. Συνεπώς μπορούμε να χαρακτηρίσουμε το (5.1.6) ως μη άκαμπτο.

Επειδή θεωρήσαμε ότι το πρόβλημα (5.1.6) δεν είναι άκαμπτο, δεν χρειάζεται η μέθοδος που εφαρμόζουμε να έχει καλές ιδιότητες ευστάθειας, όπως παραδείγματος χάριν $A$–ευστάθεια, που έχουν ορισμένες πεπλεγμένες μέθοδοι Runge–Kutta. Ένα πλεονέκτημα των πολυβηματικών μεθόδων σε σχέση με τις μεθόδους Runge–Kutta, είναι ότι για τον υπολογισμό της $U^n$, χρειάζεται, το πολύ, να λύσουμε ένα σύστημα που έχει διάσταση $m = \dim V_h$, ενώ με μία πεπλεγμένη μέθοδο Runge–Kutta $q$ σταδίων, πρέπει να λύσουμε ένα σύστημα διάστασης $qm$. Διακριτοποιούμε λοιπόν την (5.1.3) χρησιμοποιώντας ευσταθείς και συνεπείς άμεσες πολυβηματικές μεθόδους, καθώς έχουμε υποθέσει ότι το πρόβλημα (5.1.6) δεν είναι άκαμπτο. Αυτές χαρακτηρίζονται από δύο πολυώνυμα $\alpha$, $\beta$,

$$\alpha(z) = \sum_{j=0}^{q} \alpha_j z^j, \qquad \beta(z) = \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j z^j. \tag{5.1.9}$$

Ο λόγος που επιλέξαμε άμεσες μεθόδους είναι ότι είναι λιγότερο δαπανηρές υπολογιστικά από τις έμμεσες. Ορίζουμε, λοιπόν, την ακολουθία των προσεγγίσεων $U^n$, $U^n \in V_h$, των $u^n = u(t^n)$, $n = 0, \ldots, N$, δια

$$\sum_{j=0}^{q} \alpha_j a(U^{n+j}, \chi) = k \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j (B(t^{n+j}, U^{n+j}), \chi), \quad \forall \chi \in V_h. \tag{5.1.10}$$

Στην παράγραφο 5.4 αποδεικνύουμε σύγκλιση των προσεγγίσεων $U^n$ στις $u^n$. Αν και η μέθοδος που χρησιμοποιούμε είναι άμεση, λόγω της μορφής του προβλήματος (5.1.1), σε κάθε χρονικό βήμα χρειάζεται να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα διάστασης $m$, ενώ αν χρησιμοποιήσουμε

μία άμεση μέθοδο Runge–Kutta $q$ σταδίων πρέπει να λύσουμε $q$ γραμμικά συστήματα διάστασης $m$. Έτσι αν $U^{n+j}$, $j = 0, \dots, q-1$, γνωστές προσεγγίσεις των $u^{n+j}$, $j = 0, \dots, q-1$, για να προσδιορίσουμε την $U^{n+q}$ αρκεί να λύσουμε το γραμμικό σύστημα που προκύπτει. Το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση, λόγω των καλών ιδιοτήτων του τελεστή $A$. Επομένως για δοσμένα $U^0, \dots, U^{q-1} \in V_h$, τα $U^q, \dots, U^N$ είναι καλά ορισμένα. Ο υπολογισμός τους δε δεν είναι δαπανηρός, γιατί κάθε φορά λύνουμε ένα γραμμικό σύστημα με τον ίδιο πάντα πίνακα.

Στις εκτιμήσεις σφάλματος που αποδεικνύουμε σε αυτό το κεφάλαιο, υποθέτουμε ότι το (5.1.1) έχει μοναδική, αρκετά ομαλή λύση $u$. Μία μικρή περίληψη αυτού του κεφαλαίου είναι η ακόλουθη: Στην παράγραφο 5.2 υποθέτουμε ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε κάθε στοιχείο του $V$ από τον $V_h$ με τάξη ακρίβειας $r$, (Υ5.2.1). Υποθέτουμε ακόμα τις σχέσεις (Υ5.2.2)–(Υ5.2.6) και μελετούμε το ημιδιακριτό πρόβλημα (5.1.6). Στο τέλος αυτής της παραγράφου αποδεικνύουμε την εκτίμηση σφάλματος,

$$\max_{t \in J} |u(t) - u_h(t)| \le Ch^r,$$

όπου $C$ σταθερά ανεξάρτητη του $h$. Στην παράγραφο 5.3 μελετούμε ένα απλό, άμεσο μονοβηματικό σχήμα, για την προσέγγιση της λύσεως $u$ του (5.1.1), την άμεση μέθοδο του Euler. Αυτό σαν μία εισαγωγή της ανάλυσης άμεσων πολυβηματικών μεθόδων. Στην παράγραφο 5.4 θεωρούμε μία άμεση πολυβηματική μέθοδο, τάξεως $p$. Τότε, για κατάλληλες αρχικές προσεγγίσεις $U^0, \dots, U^{q-1}$ και $k$, $h$ κατάλληλα μικρά, αποδεικνύουμε την εκτίμηση: Υπάρχει σταθερά $C$ ανεξάρτητη των $k$ και $h$ τέτοια ώστε

$$\max_{0 \le n \le N} |u(t^n) - U^n| \le C(k^p + h^r).$$

Τέλος στην παράγραφο 5.5 εφαρμόζουμε αυτό το αποτέλεσμα σε τέσσερα συγκεκριμένα παραδείγματα, στην εξίσωση του Rosenau, σε μία γενικευμένη εξίσωση τύπου Sobolev, σε μία ψευδοπαραβολική εξίσωση και σε ένα σύστημα εξισώσεων τύπου Boussinesq.

## 5.2 ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΟ ΗΜΙΔΙΑΚΡΙΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Θεωρούμε μία οικογένεια υποχώρων $\{V_h\}_{0<h\le 1}$ του $V$, πεπερασμένης διάστασης. Αν $u$ είναι λύση του (5.1.2), ζητούμε μία συνάρτηση $u_h(t) \in V_h$, η οποία να προσεγγίζει την $u(t)$, για κάθε $t \in J$, και να είναι λύση του προβλήματος (5.1.3). Έστω $u_h^0$ μία κατάλληλη προσέγγιση της $u^0$ από τον $V_h$ τέτοια ώστε

$$|u^0 - u_h^0| + h^{d/2} \|u^0 - u_h^0\| \le Ch^r, \tag{5.2.1}$$

όπου $r$, $d$ είναι δύο ακέραιοι τέτοιοι ώστε $2 \leq d \leq r$ και $C$ σταθερά ανεξάρτητη του $h$. Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη αυτού του προβλήματος, θα μελετήσουμε το βοηθητικό πρόβλημα (5.1.4). Αυτό θα μας βοηθήσει να διατυπώσουμε ένα πρόβλημα ισοδύναμο με το (5.1.2), με τη βοήθεια του οποίου θα αποδείξουμε, υπό την προϋπόθεση ότι ο $B$ ικανοποιεί ορισμένες συνθήκες, την εκτίμηση για την ημιδιακριτή προσέγγιση $u_h$,

$$\max_{t\in J} |u(t) - u_h(t)| \leq Ch^r.$$

Από την απόδειξη αυτής της εκτίμησης θα πάρουμε μία γεύση για την πορεία της απόδειξης της αντίστοιχης εκτίμησης στα πλήρως διακριτά σχήματα.

Θεωρούμε λοιπόν το πρόβλημα (5.1.4). Είναι προφανές ότι το $a(\cdot,\cdot)$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον $V$. Επιπλέον ο $(V, a(\cdot,\cdot))$ είναι πλήρης, δηλαδή είναι χώρος Hilbert, και εμφυτεύεται συνεχώς στον $H$, βλ., φερ' ειπείν, [28, Chapter VIII, §3, Θεώρημα 13]. Επομένως, υπάρχει μία σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} |v| \leq c\|v\|, & \forall v \in V, \\ \|v\|_\star \leq c|v|, & \forall v \in H, \end{cases} \tag{5.2.2}$$

όπου $\|\cdot\|_\star$ η νόρμα στον $V'$. Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα αναπαραστάσεως του Riesz, η λύση $v$ του προβλήματος (5.1.4) είναι καλά ορισμένη. Συμβολίζουμε με $T$, $T : V' \to V$, $Tf := v$, τον τελεστή λύσεως αυτού του προβλήματος. Ισχύει επομένως ότι,

$$a(Tf, w) = (f, w), \quad \forall w \in V. \tag{5.2.3}$$

Αν τώρα θέσουμε $w = Tf$ στην (5.2.3), έχουμε

$$\|Tf\|^2 = a(Tf, Tf) = (f, Tf) \leq \|f\|_\star \|Tf\|,$$

άρα

$$\|Tf\| \leq \|f\|_\star. \tag{5.2.4}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε το διακριτό ανάλογο του προβλήματος (5.1.4). Δηλαδή για $f \in V'$, ζητούμε $v_h \in V_h$ τέτοια ώστε

$$a(v_h, \chi) = (f, \chi), \qquad \forall \chi \in V_h. \tag{5.2.5}$$

Το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με ένα γραμμικό σύστημα με τετραγωνικό πίνακα. Θεωρώντας το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα $a(v_h, \chi) = 0$ και θέτοντας $\chi := v_h$, διαπιστώνουμε αμέσως ότι $v_h = 0$. Συνεπώς το σύστημα (5.2.5) έχει μοναδική λύση. Ορίζουμε λοιπόν τον τελεστή λύσεως $T_h$ του (5.2.5), $T_h : V' \to V_h$, ως $T_h f := v_h$. Ισχύει επομένως για κάθε $f \in V'$

$$a(T_h f, \chi) = (f, \chi), \quad \forall \chi \in V_h. \tag{5.2.6}$$

Επειδή η διγραμμική μορφή $a$ είναι συμμετρική, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο $T_h$ είναι αυτοσυζυγής τελεστής. Έτσι, λόγω της (5.2.6), έχουμε

$$(T_h f, g) = a(T_h f, T_h g) = (f, T_h g), \quad \forall f,\, g \in V'. \tag{5.2.7}$$

Ακόμα θέτοντας $\chi = T_h f$ στην (5.2.6) λαμβάνουμε

$$\|T_h f\| \le \|f\|_\star. \tag{5.2.8}$$

Ορίζουμε στη συνέχεια τον τελεστή της "ελλειπτικής" προβολής στον $V_h$, $R_h : V \to V_h$, ως

$$a(R_h v, \chi) = a(v, \chi), \qquad \forall \chi \in V_h. \tag{5.2.9}$$

Ο τελεστής προβολής $R_h$ είναι καλά ορισμένος για τους ίδιους λόγους που είναι και ο τελεστής $T_h$. Στην ανάλυση σφάλματος που θα κάνουμε στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου θα χρειαστούμε ορισμένες προσεγγιστικές ιδιότητες για την "ελλειπτική" προβολή $R_h$. Υποθέτουμε λοιπόν τα εξής:

*Υπόθεση 5.2.1:* Η $R_h v$ είναι μία προσέγγιση της $v$ τάξεως $r$. Συγκεκριμένα, για αρκετά ομαλή συνάρτηση $v$,

$$|v - R_h v| + h^{d/2}\|v - R_h v\| \le N(v) h^r, \tag{Υ5.2.1}$$

όπου $N(v)$ είναι φραγμένο αν μία κατάλληλη νόρμα της $v$ είναι φραγμένη.

*Υπόθεση 5.2.2:* Υπάρχει σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε,

$$|v - R_h v| \le C h^{d/2}\|v\|, \quad \forall v \in V. \tag{Υ5.2.2}$$

Από τον ορισμό του $R_h$, (5.2.9), και τις (5.2.6), (5.2.3), διαπιστώνουμε αμέσως ότι

$$T_h = R_h T. \tag{5.2.10}$$

Επομένως αν η $Tf$ είναι μία αρκετά ομαλή συνάρτηση, τότε από τις (Υ5.2.1) και (5.2.10) έχουμε

$$|Tf - T_h f| + h^{d/2}\|Tf - T_h f\| \le N(Tf)h^r, \tag{5.2.11}$$

και από τις (Υ5.2.2) και (5.2.10)

$$|Tf - T_h f| \le Ch^{d/2}\|Tf\|, \qquad \forall f \in V'. \tag{5.2.12}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η $T_h f$ είναι μία προσέγγιση της $Tf$, τάξεως $d/2$ ή ακόμα και $r$ ως προς τη νόρμα του χώρου $H$, ανάλογα με την ομαλότητα της $Tf$.

Έχοντας ορίσει πλέον τους τελεστές $T$ και $T_h$, μπορούμε να διατυπώσουμε τα προβλήματα (5.1.2) και (5.1.3) ισοδύναμα στις μορφές (5.1.5) και (5.1.6), αντίστοιχα, με $u_h^0 \in V_h$ τέτοια ώστε να ικανοποιείται η (5.2.1).

Συμβολίζουμε με $W(t) := R_h u(t)$, και με $\varrho(t) := u(t) - W(t)$ για κάθε $t \in J$. Επίσης αν $\varphi$ συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $J$ συμβολίζουμε με $\varphi^{(\ell)}(t)$ την $\frac{d^\ell}{dt^\ell}\varphi(t)$. Επειδή η διγραμμική μορφή $a$ είναι ανεξάρτητη του $t$, από την (Υ5.2.1) και τον ορισμό της προβολής $R_h$, (5.2.9), εύκολα μπορούμε να εκτιμήσουμε την $\varrho^{(\ell)}$, $\ell = 0, 1, \ldots$ στις νόρμες $|\cdot|$ και $\|\cdot\|$.

**Λήμμα 5.2.1:** *Έστω $u$ αρκετά ομαλή λύση του (5.1.2). Τότε υπάρχουν σταθερές $C_\ell$, $\ell = 0, 1, \ldots$, ανεξάρτητες του $h$, τέτοιες ώστε*

$$\begin{aligned} &\max_{t\in J} |\varrho^{(\ell)}(t)| \le C_\ell h^r, \\ &\max_{t\in J} \|\varrho^{(\ell)}(t)\| \le C_\ell h^{r-d/2}, \end{aligned} \qquad \ell = 0, 1, \ldots. \tag{5.2.13}$$

*Απόδειξη:* Εύκολα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} a(R_h u^{(\ell)}(t), \chi) = a(u^{(\ell)}(t), \chi) &= \frac{d^\ell}{dt^\ell} a(u(t), \chi) \\ &= \frac{d^\ell}{dt^\ell} a(R_h u(t), \chi) \\ &= a((R_h u(t))^{(\ell)}, \chi), \quad \forall \chi \in V_h. \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

Συνεπώς, λόγω της (Υ5.2.1), έχουμε την (5.2.13). ■

*Υπόθεση 5.2.2′:* Έστω $|||\cdot|||$ μία νόρμα στον $V_h$ και θετικές σταθερές $c$ και $\widetilde{d}$ ανεξάρτητες του $h$ τέτοιες ώστε

$$(\Upsilon 5.2.2') \qquad |||\chi||| \le ch^{-\widetilde{d}}\|\chi\|, \quad \forall \chi \in V_h \quad \text{και} \quad r - d/2 - \widetilde{d} > 0.$$

Θέτουμε τώρα $G := \{\chi \in V_h : \exists\, t \in J \,|\, |W(t) - \chi|\,| < 1\}$ και $M = \{\chi \in V_h : \exists\, t \in J \,\|u(t) - \chi\| < 1\}$ και υποθέτουμε για τους τελεστές $B$ και $TB$ τα εξής:

*Υπόθεση 5.2.3:* Υπάρχει σταθερά $L_1$, ανεξάρτητη των $t$ και $h$, τέτοια ώστε

$$(\Upsilon 5.2.3) \quad \|B(t,v) - B(t,w)\|_\star \le L_1\|v - w\|, \quad \forall v, w \in G, \quad \forall t \in J.$$

*Υπόθεση 5.2.4:* Υπάρχει σταθερά $L_2$, ανεξάρτητη των $t$ και $h$, τέτοια ώστε

$$(\Upsilon 5.2.4) \quad |TB(t,v) - TB(t,w)| \le L_2|v - w|, \quad \forall v, w \in G, \quad \forall t \in J.$$

Λόγω των (5.2.12), (Υ5.24), (5.2.4) και (Υ5.2.3), για $v, w \in G$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|T_hB(t,v) - T_hB(t,w)| &\le |(T_h - T)(B(t,v) - B(t,w))| \\
&\quad + |TB(t,v) - TB(t,w)| \\
&\le Ch^{d/2}\|T(B(t,v) - B(t,w))\| + L_2|v - w| \\
&\le Ch^{d/2}\|B(t,v) - B(t,w)\|_\star + L_2|v - w| \\
&\le L_2|v - w| + CL_1h^{d/2}\|v - w\|.
\end{aligned}$$

Δηλαδή, υπάρχει σταθερά $L$, η οποία είναι ανεξάρτητη των $t$ και $h$, τέτοια ώστε για $v$, $w \in G$,

$$(5.2.15) \qquad |T_hB(t,v) - T_hB(t,w)| \le L\big(|v - w| + h^{d/2}\|v - w\|\big).$$

Υποθέτουμε ακόμα τα εξής: Για μία αρκετά ομαλή συνάρτηση $v$,

*Υπόθεση 5.2.5:*

$$(\Upsilon 5.2.5) \qquad \max_{t\in J}\|B(t,v) - B(t,R_hv)\|_\star \le \widetilde{N}(v)h^{r-d/2}.$$

*Υπόθεση 5.2.6:*

$$\max_{t\in J}|TB(t,v)-TB(t,R_hv)|\le\widetilde{N}(v)h^r. \tag{Υ5.2.6}$$

όπου $\widetilde{N}(v)$ είναι φραγμένο αν μία κατάλληλη νόρμα της $v$ είναι φραγμένη.

Λόγω των (5.2.12), (Υ5.2.6), (5.2.4) και (Υ5.2.5), έχουμε

$$\begin{aligned}|T_hB(t,v)-T_hB(t,R_hv)|&\le|(T_h-T)(B(t,v)-B(t,R_hv))|\\&\quad+|TB(t,v)-TB(t,R_hv)|\\&\le Ch^{d/2}\|T(B(t,v)-B(t,R_hv))\|+\widetilde{N}(v)h^r\\&\le Ch^{d/2}\|B(t,v)-B(t,R_hv)\|_\star+\widetilde{N}(v)h^r\\&\le\widetilde{C}\widetilde{N}(v)h^r.\end{aligned} \tag{5.2.16}$$

*Παρατήρηση 5.2.0:* Η υπόθεση ότι $V_h\subset V$ δεν είναι αναγκαία για την ανάλυση που ακολουθεί. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν χώρο προσέγγισης $V_h\not\subseteq V$ τροποποιώντας κατάλληλα τον ορισμό της "ελλειπτικής" προβολής $R_h$, το σύνολο $M$ και τις υποθέσεις (Υ5.2.5) και (Υ5.2.6).

Υποθέτουμε ακόμα για τον τελεστή $B$ και τη λύση $u$ του (5.1.1) το εξής:

*Υπόθεση 5.2.7:* Έστω ότι $B\in C(J\times V;V')$ και $u\in C(J;V)$.

Από την υπόθεση 5.2.7 και την (5.2.8), παρατηρούμε ότι

$$T_hB\in C(J\times V;V). \tag{5.2.17}$$

Θα δείξουμε τώρα ύπαρξη της λύσεως $u_h$ του (5.1.3).

**Λήμμα 5.2.2:** *Υπάρχει $h_0>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $h\in(0,h_0]$ υπάρχει λύση $u_h(t)\in C(J;G)$ του (5.1.3). Ακόμα υπάρχει σταθερά $C$ ανεξάρτητη των $u_h$ και $h$ τέτοια ώστε*

$$\max_{t\in J}\|W(t)-u_h(t)\|\le Ch^{r-d/2}. \tag{5.2.18}$$

*Απόδειξη:* Λόγω της (5.2.17), υπάρχει διάστημα $[0,t_h)$, $0<t_h\le t^\star$, τέτοιο ώστε το σύστημα (5.1.6) να έχει λύση $u_h\in C([0,t_h);V)$, βλ., παραδείγματος χάριν, [23, Theorem 6.1.3, Chapter 1]. Αφού τα συστήματα

(5.1.6) και (5.1.3) είναι ισοδύναμα, η $u_h$ αποτελεί και λύση του συστήματος (5.1.3). Από την υπόθεση 5.2.7 τώρα και το γεγονός ότι $u_h \in C([0,t_h);V)$ έπεται ότι υπάρχει $\widetilde{t}_h$, $0<\widetilde{t}_h\le t_h$, τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}&\|u_h(t)-u_h(0)\|<Ch^{r-d/2}\quad\text{και}\\&\|u(t)-u(0)\|<Ch^{r-d/2},\quad\forall t\in[0,\widetilde{t}_h),\end{aligned}$$

όπου $C$ είναι η σταθερά της ανισότητας (5.2.1), οπότε λόγω της (5.2.1)

$$\|u(t)-u_h(t)\|<3Ch^{r-d/2},\quad\forall t\in[0,\widetilde{t}_h),\quad 0<\widetilde{t}_h\le t_h. \tag{5.2.19}$$

Σύμφωνα τώρα με τις (Υ5.2.2′), (5.2.13) και (5.2.19) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}|||W(t)-u_h(t)|||&\le Ch^{-\tilde{d}}\|W(t)-u_h(t)\|\\&\le Ch^{-\tilde{d}}\big(\|u(t)-u_h(t)\|+\|u(t)-W(t)\|\big)\\&\le Ch^{r-d/2-\tilde{d}}.\end{aligned}$$

Υπάρχει λοιπόν $h_1\in(0,1]$ τέτοιο ώστε για κάθε $h\in(0,h_1]$

$$|||W(t)-u_h(t)|||<1,\quad\forall t\in[0,\widetilde{t}_h).$$

Άρα $u_h(t)\in G$, για κάθε $t\in[0,\widetilde{t}_h)$. Θα συμβολίσουμε τώρα με $[0,\widetilde{t}_h)$, $0<\widetilde{t}_h\le t^\star$, το μεγαλύτερο διάστημα στο οποίο υπάρχει λύση

$$u_h\in C([0,\widetilde{t}_h);G) \tag{5.2.20}$$

του συστήματος (5.1.6). Έστω τώρα $\vartheta=W-u_h$. Σύμφωνα με τις (5.2.14), (5.2.9), (5.1.2) και (5.1.3), έχουμε για $t\in[0,t_h)$

$$\begin{aligned}a(\vartheta',\chi)&=a(W'-u_h',\chi)=a(u',\chi)-a(u_h',\chi)\\&=(B(t,u)-B(t,u_h),\chi),\quad\forall\chi\in V_h.\end{aligned}$$

Θέτουμε $\chi=\vartheta$ στην προηγούμενη σχέση, οπότε για $t\in[0,\widetilde{t}_h)$

$$\begin{aligned}\frac12\frac{d}{dt}\|\vartheta(t)\|^2&\le\big(\|B(t,u)-B(t,W)\|_\star\\&\qquad+\|B(t,W)-B(t,u_h)\|_\star\big)\|\vartheta\|\\&\le C\big(\|B(t,u)-B(t,W)\|_\star^2\\&\qquad+\|B(t,W)-B(t,u_h)\|_\star^2\big)+\|\vartheta\|^2.\end{aligned} \tag{5.2.21}$$

Η (5.2.21), λόγω και των (Υ5.2.3) και (Υ5.2.5), δίνει

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vartheta(t)\|^2 \le C\big(\|\vartheta\|^2 + h^{2r-d}\big), \quad \forall t \in [0, \widetilde{t}_h), \tag{5.2.22}$$

όπου η σταθερά $C$ είναι ανεξάρτητη των $\vartheta$, $\widetilde{t}_h$ και $h$. Εφαρμόζουμε στην (5.2.22) το λήμμα του Gronwall στο διάστημα $[0, t]$, $t < \widetilde{t}_h$, και λόγω των (5.2.1) και (Υ5.2.1) έχουμε

$$\max_{s\in[0,t]} \|\vartheta(s)\|^2 \le \big(\|\vartheta(0)\|^2 + 2Cth^{2r-d}\big)e^{2Ct} \le \widetilde{C}h^{2r-d}$$

με $\widetilde{C}$ ανεξάρτητη του $t$. Επομένως

$$\|\vartheta(t)\|^2 \le \widetilde{C}h^{2r-d}, \quad \forall t \in [0, \widetilde{t}_h), \quad \forall h \in (0, h_1], \tag{5.2.23}$$

Η $T_h B$ είναι φραγμένη στο $J \times \overline{G}$, λόγω της (5.2.17), όπου με $\overline{G}$ συμβολίζουμε την κλειστότητα του $G$ ως προς $|||\cdot|||$. Σύμφωνα με το [23, Theorem 4.1, Chapter 1], υπάρχει το όριο $\lim_{t\to\widetilde{t}_h^-} u_h(t) \equiv u_h(\widetilde{t}_h)$. Λόγω των (5.2.23) και (Υ5.2.2′), υπάρχει $h_2 \in (0, h_1]$ αρκετά μικρό, τέτοιο ώστε $u_h(\widetilde{t}_h) \in G$, για κάθε $0 < h < h_2$. Τότε, βάσει του προαναφερθέντος θεωρήματος μπορούμε να επεκτείνουμε συνεχώς τη λύση $u_h$ στο διάστημα $[0, \widetilde{t}_h + \varepsilon)$ για κάποιο $\varepsilon > 0$, που όμως είναι άτοπο λόγω της υπόθεσης που κάναμε για το $\widetilde{t}_h$. Συνεπώς αν θέσουμε $h_0 = h_2$ παρατηρούμε ότι υπάρχει λύση $u_h$ του (5.1.6) στο $J$, με $u_h(t) \in G$, για κάθε $h < h_0$, $t \in J$. Επομένως η (5.2.23) ισχύει για κάθε $t \in J$ και $h \in (0, h_0]$, οπότε λόγω της (5.2.13) έχουμε την (5.2.18),

$$\|u(t) - u_h(t)\| \le Ch^{r-d/2}, \quad \forall t \in J, \quad \forall h \in (0, h_0],$$

με σταθερά $C$ ανεξάρτητη των $t$ και $h$. ■

**Λήμμα 5.2.3:** *Υπάρχει $h_0 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $h \in (0, h_0]$ υπάρχει μοναδική λύση $u_h(t) \in G$, $t \in J$, του (5.1.3), και*

$$\|u(t) - u_h(t)\| \le Ch^{r-d/2}, \quad t \in J. \tag{5.2.24}$$

*Απόδειξη:* Σύμφωνα με το Λήμμα 5.2.2, υπάρχει $h_0 > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $h \in (0, h_0]$ υπάρχει λύση $u_h(t) \in G$, $t \in J$, του (5.1.3). Αν η λύση $u_h$ δεν είναι μοναδική, τότε θα υπάρχουν

$$u_{h,1}(t),\ u_{h,2}(t) \in G,\ t \in J, \tag{5.2.25}$$

δύο διαφορετικές λύσεις του (5.1.3). Έστω $v_h = u_{h,1} - u_{h,2}$ η διαφορά τους. Η $v_h$ ικανοποιεί λοιπόν τη σχέση

$$a(v_h', \chi) = (B(t, u_{h,1}) - B(t, u_{h,2}), \chi), \quad \forall \chi \in V_h, \quad \forall t \in J.$$

Θέτουμε $\chi = v_h(t)$ στην προηγούμενη σχέση, οπότε, λόγω των (5.2.25) και (Υ5.2.3), έχουμε για κάθε $t \in J$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_h(t)\|^2 \leq \|B(t, u_{h,1}) - B(t, u_{h,2})\|_\star \|v_h(t)\| \leq C\|v_h(t)\|^2.$$

Συνεπώς

$$\max_{t \in J} \|v_h(t)\| \leq C\|v_h(0)\|. \tag{5.2.26}$$

Επειδή $u_{h,1}$ και $u_{h,2}$ είναι λύσεις του ίδιου προβλήματος αρχικών τιμών, (5.1.3), έχουμε

$$v_h(0) = u_{h,1}(0) - u_{h,2}(0) = u_h^0 - u_h^0 = 0.$$

Επομένως, λόγω της (5.2.26) έχουμε ότι $u_{h,1} = u_{h,2}$. Δηλαδή υπάρχει $h_0 > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $h \in (0, h_0]$ υπάρχει μοναδική λύση $u_h(t) \in G$, $t \in J$, του (5.1.3). Λόγω τώρα των (5.2.18) και (5.2.13) έχουμε την (5.2.24). ■

**Λήμμα 5.2.4:** *Υπάρχει $h_1 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $h \in (0, h_1]$ υπάρχει μοναδική λύση $u_h \in C(J; M)$ του (5.1.3).*
*Απόδειξη:* Σύμφωνα με την (5.2.24) υπάρχει μοναδική $u_h \in C(J; G)$ λύση του (5.1.3) για την οποία ισχύει ότι

$$\|u(t) - u_h(t)\| \leq Ch^{r-d/2}, \quad \forall t \in J, \quad \forall h \in (0, h_0].$$

Μπορούμε λοιπόν να επιλέξουμε ένα $h_1 \in (0, h_0]$, έτσι ώστε

$$\|u(t) - u_h(t)\| \leq Ch^{r-d/2} < 1, \quad \forall t \in J, \quad \forall h \in (0, h_1].$$

Δηλαδή $u_h(t) \in M$, για κάθε $t \in J$. ■

*Παρατήρηση 5.2.1:* Σε αυτή την παράγραφο η (Υ5.2.2′) χρησιμοποιείται για την απόδειξη της (5.2.22) και του Λήμματος 5.2.3. Αν οι (Υ5.2.3) και (Υ5.2.4) ισχύουν σε ένα μεγαλύτερο υποσύνολο του $V$, τέτοιο ώστε το πρόβλημα (5.1.3) να έχει λύση $u_h$ που να ανήκει σε αυτό για κάθε

$t \in J$, όπως παραδείγματος χάριν στο $M$, τότε τα αποτελέσματα της παραγράφου 2 ισχύουν και χωρίς την υπόθεση (Υ5.2.2′).

*Παρατήρηση 5.2.2:* Λόγω των (5.2.6), (5.2.14), (5.2.9), (5.1.2) και του γεγονότος ότι η $a$ είναι συμμετρική διγραμμική μορφή, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\big((R_h u(t))', \chi\big) &= a\big((R_h u(t))', T_h\chi\big)\\ &= a(R_h u'(t), T_h\chi) = a(u'(t), T_h\chi)\\ &= (B(t,u), T_h\chi) = a(T_h B(t,u), T_h\chi)\\ &= (T_h B(t,u), \chi),\ \ \forall \chi \in V_h,\ t \in J.\end{aligned} \tag{5.2.27}$$

**Πρόταση 5.2.1:** *Αν η λύση $u$ του προβλήματος (5.1.1) είναι αρκετά ομαλή και $u_h$ η λύση του (5.1.3), τότε υπάρχει $h_1 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $h \in (0, h_1]$, να ισχύει*

$$\max_{t\in J} |u(t) - u_h(t)| \le Ch^r. \tag{5.2.28}$$

*Απόδειξη:* Σύμφωνα με το Λήμμα 5.2.4 υπάρχει $h_1 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $h \in (0, h_1]$ το (5.1.3), και κατά συνέπεια το (5.1.6), να έχει μοναδική λύση $u_h \in C(J; M)$. Έστω τώρα $\varrho$ και $\vartheta$ όπως προηγουμένως. Λόγω του Λήμματος 5.2.1 για να δείξουμε την (5.2.28) αρκεί να εκτιμήσουμε την $\vartheta$ στην νόρμα $|\cdot|$. Από τις (5.2.27) και (5.1.6) έχουμε, για $\chi \in V_h$,

$$(\vartheta', \chi) = (W' - u_h', \chi) = (T_h B(t,u) - T_h B(t,u_h), \chi).$$

Θέτουμε $\chi = \vartheta$ στην προηγούμενη σχέση, οπότε, λόγω του Λήμματος 5.2.2 και των (5.2.16), (5.2.15), (5.2.13) και (5.2.24), έχουμε για κάθε $t \in J$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\vartheta(t)|^2 &= (T_h B(t,u) - T_h B(t,u_h), \vartheta)\\ &\le |T_h B(t,u) - T_h B(t,W)|\,|\vartheta|\\ &\quad + |T_h B(t,W) - T_h B(t,u_h)|\,|\vartheta|\\ &\le Ch^r|\vartheta| + C|\vartheta|^2 + Ch^{d/2}\|\vartheta\|\,|\vartheta|\\ &\le C\big(|\vartheta|^2 + h^{2r}\big).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το λήμμα του Gronwall η παραπάνω ανισότητα δίνει

$$\max_{t\in J} |\vartheta(t)| \le C\big(|\vartheta(0)| + h^r\big).$$

Επομένως λόγω των (5.2.1) και (5.2.13) λαμβάνουμε το ζητούμενο. ■

## 5.3 Πλήρως διακριτα σχηματα: Η αμεση μεθοδος του Euler

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε την απλούστερη άμεση μέθοδο για τη διακριτοποίηση της (5.1.3) ως προς το χρόνο, τη μέθοδο του Euler. Στην επόμενη παράγραφο θα γενικεύσουμε τα αποτελέσματα μελετώντας άμεσα πολυβηματικά σχήματα.

Ένας απλός τρόπος να κατασκευάσουμε προσεγγίσεις της λύσεως $y$ του προβλήματος αρχικών τιμών (5.1.7) είναι να εφαρμόσουμε την άμεση μέθοδο του Euler. Θεωρούμε λοιπόν μία ομοιόμορφη διαμέριση του διαστήματος $J$. Έτσι για έναν φυσικό αριθμό $N$, θέτουμε $k = \frac{t^\star}{N}$ το βήμα της διαμέρισης και $t^n := nk$, $n = 0, \ldots, N$. Ακόμα για μία συνάρτηση $\varphi$, ορισμένη στο διάστημα $J$, θέτουμε $\varphi^n := \varphi(t^n)$ και για $v^0, \ldots, v^N \in \mathbb{R}$ θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\partial v^n := \frac{v^{n+1} - v^n}{k}, \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Κατασκευάζουμε λοιπόν προσεγγίσεις $Y^n$ της $y^n := y(t^n)$, $n = 1, \ldots, N$, ως εξής:

$$\partial Y^n = f(t^n, Y^n), \quad n = 0, \ldots, N-1, \tag{5.3.1}$$

όπου $Y^0 = y(0)$.

Επεκτείνουμε τώρα ανάλογα το συμβολισμό $\partial v^n$ σε στοιχεία του χώρου $V_h$, διακριτοποιούμε την (5.1.3) σύμφωνα με το σχήμα (5.3.1) και μελετούμε τις προσεγγίσεις $U^n$ των $u^n$, $n = 0, \ldots, N$, που αυτό δίνει. Ζητούμε λοιπόν $U^n \in V_h$, $n = 0, \ldots, N$, τέτοια ώστε

$$\begin{cases} a(\partial U^n, \chi) = (B(t^n, U^n), \chi), \ \forall \chi \in V_h, \ n = 0, \ldots, N-1, \\ U^0 = u_h^0, \end{cases} \tag{5.3.2}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{cases} (\partial U^n, \chi) = (T_h B(t^n, U^n), \chi), \ \forall \chi \in V_h, \ n = 0, \ldots, N-1, \\ U^0 = u_h^0, \end{cases} \tag{5.3.3}$$

με $u_h^0 \in V_h$ που να ικανοποιεί την (5.2.1). Οι $U^n$, $n = 0, \ldots, N$, είναι καλά ορισμένες από το σχήμα (5.3.2), γιατί, για δοσμένο $U^n \in V_h$, το $U^{n+1}$ είναι η μοναδική λύση ενός γραμμικού συστήματος με πίνακα συμμετρικό και θετικά ορισμένο, λόγω των ιδιοτήτων του τελεστή $A$. Σκοπός μας είναι να δείξουμε εκτιμήσεις του σφάλματος προσέγγισης της

$u^n$ από την $U^n$, $n = 0, \dots, N$. Σαν ένα ενδιάμεσο βήμα θα δείξουμε συνέπεια του σχήματος (5.3.2) για την "ελλειπτική" προβολή $W$ της λύσης $u$ του (5.1.1). Το σφάλμα συνέπειας $E^n$ του σχήματος (5.3.2) για την $W$ δίνεται από

$$E^n = \partial W^n - T_h B(t^n, W^n), \quad n = 0, \dots, N-1. \tag{5.3.3}$$

Θα εκτιμήσουμε λοιπόν το $E^n$ στις νόρμες $\|\cdot\|$ και $|\cdot|$.

Συμβολίζουμε με $|\cdot|_{\rm abs}$ την απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού. Για μία αρκετά ομαλή πραγματική συνάρτηση $v$, λόγω του θεωρήματος Taylor, παρατηρούμε ότι:

$$\max_{0\le n\le N-1} |v^{n+1} - v^n - kv'(t^n)|_{\rm abs} \le Ck^2 \max_{t\in J} |v''(t)|_{\rm abs}. \tag{5.3.4}$$

Λόγω λοιπόν των (5.3.3), (5.2.9), (5.2.6) και (5.1.2) έχουμε για $\chi \in V_h$ και $n = 0, \dots, N-1$,

$$\begin{aligned} ka(E^n, \chi) &= a(W^{n+1} - W^n, \chi) - ka(T_h B(t^n, W^n), \chi) \\ &= a(u^{n+1} - u^n - ku'(t^n), \chi) + ka(u'(t^n), \chi) \\ &\quad - k(B(t^n, W^n), \chi) \\ &= a(u^{n+1} - u^n - ku'(t^n), \chi) + k(B(t^n, u^n) \\ &\quad - B(t^n, W^n), \chi). \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Επομένως, επιλέγοντας $\chi = E^n$ στην παραπάνω σχέση, λόγω των (5.3.4) και (Υ5.2.5), για $n = 0, \dots, N-1$, έχουμε

$$\begin{aligned} k\|E^n\| &\le \|u^{n+1} - u^n - ku'(t^n)\| + k\|B(t^n, u^n) - B(t^n, W^n)\|_\star \\ &\le Ck\big(k + h^{r-d/2}\big), \end{aligned}$$

με σταθερά $C$ ανεξάρτητη των $k$ και $h$. Συνεπώς

$$\max_{0\le n\le N-1} \|E^n\| \le C_\star\big(k + h^{r-d/2}\big). \tag{5.3.6}$$

Στη συνέχεια με παρόμοιο τρόπο θα εκτιμήσουμε το σφάλμα $E^n$ στη νόρμα $|\cdot|$. Επιλέγοντας λοιπόν $\chi = T_h E^n$ στην (5.3.5), λόγω της συμμετρίας της διγραμμικής μορφής $a$ και των (5.2.6), (5.2.14), (5.1.2)

και (5.2.7), έχουμε, για $n = 0, \ldots, N-1$,

$$\begin{aligned}
ka(E^n, T_h E^n) &= -(\varrho^{n+1} - \varrho^n - k\varrho'(t^n), E^n) \\
&\quad + (u^{n+1} - u^n - ku'(t^n), E^n) \\
&\quad + k(W'(t^n), E^n) - k(T_h B(t^n, W^n), E^n) \\
&= -(\varrho^{n+1} - \varrho^n - k\varrho'(t^n), E^n) \\
&\quad + (u^{n+1} - u^n - ku'(t^n), E^n) \\
&\quad + ka(W'(t^n), T_h E^n) - k(T_h B(t^n, W^n), E^n) \\
&= -(\varrho^{n+1} - \varrho^n - k\varrho'(t^n), E^n) \\
&\quad + (u^{n+1} - u^n - ku'(t^n), E^n) \\
&\quad + k(B(t^n, u^n), T_h E^n) - k(T_h B(t^n, W^n), E^n) \\
&= -(\varrho^{n+1} - \varrho^n - k\varrho'(t^n), E^n) \\
&\quad + (u^{n+1} - u^n - ku'(t^n), E^n) \\
&\quad + k(T_h B(t^n, u^n) - T_h B(t^n, W^n), E^n).
\end{aligned}$$

Επομένως λόγω των (5.3.4), (5.2.13) και (5.2.16) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
k|E^n| &\le |\varrho^{n+1} - \varrho^n - k\varrho'(t^n)| + |u^{n+1} - u^n - ku'(t^n)| \\
&\quad + k|T_h B(t^n, u^n) - T_h B(t^n, W^n)| \\
&\le Ck\big(kh^r + k + h^r\big) \le Ck\big(k + h^r\big),
\end{aligned}$$

με σταθερά $C$ ανεξάρτητη των $k$ και $h$. Συνεπώς

$$\max_{0 \le n \le N-1} |E^n| \le C\big(k + h^r\big). \tag{5.3.7}$$

Με τη βοήθεια των εκτιμήσεων του σφάλματος συνέπειας για την "ελλειπτική" προβολή $W$, (5.3.6) και (5.3.7), θα δείξουμε το κύριο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου, τη σύγκλιση της μεθόδου (5.3.2).

**Πρόταση 5.3.1** *Έστω ότι η λύση $u$ του προβλήματος (5.1.1) είναι αρκετά ομαλή, $h$ είναι αρκετά μικρό και $k = o(h^{\widetilde{d}})$. Τότε για τις προσεγγίσεις $U^n$, που δίνονται από την (5.3.2), υπάρχει σταθερά $C$, ανεξάρτητη των $k$ και $h$, τέτοια ώστε*

$$\max_{0 \le n \le N} \|u^n - U^n\| \le C\big(k + h^{r-d/2}\big) \tag{5.3.8}$$

*και*

$$\max_{0 \le n \le N} |u^n - U^n| \le C\big(k + h^r\big). \tag{5.3.9}$$

*όπου $\widetilde{d}$ δίνεται από την υπόθεση (Υ2′).*
*Απόδειξη:* Θέτουμε $\varrho^n := u^n - W^n$ και $\vartheta^n := W^n - U^n$, $n = 0, \dots, N$. Γράφουμε λοιπόν το σφάλμα ως $u^n - U^n = \varrho^n + \vartheta^n$. Για να δείξουμε τις (5.3.8) και (5.3.9) αρκεί να εκτιμήσουμε τις $\varrho^n$ και $\vartheta^n$ στις αντίστοιχες νόρμες. Σύμφωνα με την (5.2.13) έχουμε

$$\max_{0\le n\le N}\big(|\varrho^n| + h^{d/2}\|\varrho^n\|\big) \le Ch^r. \tag{5.3.10}$$

Επομένως αρκεί να εκτιμήσουμε την $\vartheta^n$. Λόγω των (5.2.1) και (5.3.10) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι υπάρχει σταθερά $C_{\star\star}$ ανεξάρτητη του $h$ τέτοια ώστε

$$|\vartheta^0| + h^{d/2}\|\vartheta^0\| \le C_{\star\star}h^r. \tag{5.3.11}$$

Σύμφωνα με τις (5.3.2), (5.3.3) και (5.2.6) έχουμε για $\chi \in V_h$ και $n = 0, \dots, N-1$,

$$\begin{aligned} a(\vartheta^{n+1}, \chi) = a(\vartheta^n, \chi) + k(B(t^n, W^n) - B(t^n, U^n), \chi) \\ + ka(E^n, \chi). \end{aligned} \tag{5.3.12}$$

Έστω $L_1$ η σταθερά στην ανισότητα της υπόθεσης (Υ5.2.3), $C_\star$ η σταθερά στην ανισότητα (5.3.6) και $C_{\star\star}$ η σταθερά στην ανισότητα (5.3.11). Θέτουμε $c := \max(1 + L_1, C_\star, C_{\star\star})$, και θα δείξουμε επαγωγικά ως προς $n$ ότι

$$\|\vartheta^n\| \le c_n\big(k + h^{r-d/2}\big), \quad n = 0, \dots, N, \tag{5.3.13}$$

με

$$c_n = c(1 + ck)^n, \quad n = 0, \dots, N. \tag{5.3.14}$$

Είναι προφανές ότι υπάρχει σταθερά $\widetilde{C}$ ανεξάρτητη των $k$ και $h$ τέτοια ώστε

$$\max_{0\le n\le N} c_n \le \widetilde{C}. \tag{5.3.15}$$

Λόγω λοιπόν της (5.3.15), αν ισχύει η (5.3.13) έχουμε ότι

$$\|\vartheta^n\| \le \widetilde{C}\big(k + h^{r-d/2}\big), \quad n = 0, \dots, N. \tag{5.3.16}$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $k = o(h^{\widetilde{d}})$ και ότι $h$ είναι αρκετά μικρό, ώστε να ισχύει

$$C\widetilde{C}\big(kh^{-\widetilde{d}} + h^{r-d/2-\widetilde{d}}\big) < 1 \tag{5.3.17}$$

όπου $\widetilde{C}$ και $C$ είναι οι σταθερές των (5.3.16) και (Υ5.2.2′), αντίστοιχα. Λόγω τώρα της (5.3.11) η (5.3.13) ισχύει για $n = 0$. Έστω ότι η (5.3.13) ισχύει για κάποιο $n$, $0 \le n \le N-1$. Από την επαγωγική υπόθεση και τις (Υ5.2.2′) και (5.3.17) έχουμε ότι

$$U^n \in G. \tag{5.3.18}$$

Στην εξίσωση σφάλματος (5.3.12) επιλέγουμε $\chi = \vartheta^{n+1}$, οπότε λόγω των (5.3.18), (Υ3) και της επαγωγικής υπόθεσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|\vartheta^{n+1}\| &\le \|\vartheta^n\| + k\|B(t^n, W^n) - B(t^n, U^n)\|_\star + k\|E^n\| \\
&\le (1 + L_1 k)\|\vartheta^n\| + k\|E^n\| \\
&\le (c_n + (L_1 c_n + C_*)k)\big(k + h^{r-d/2}\big) \\
&\le (c_n + c_n(1 + L_1)k)\big(k + h^{r-d/2}\big) \\
&\le (c_n + c_n ck)\big(k + h^{r-d/2}\big) \\
&\le c(1 + ck)^{n+1}\big(k + h^{r-d/2}\big).
\end{aligned} \tag{5.3.19}$$

Επομένως η (5.3.13) ισχύει για $n+1$, και άρα η (5.3.13) ισχύει για $n = 0, \dots, N$. Στην εξίσωση σφάλματος (5.3.12), επιλέγουμε τώρα $\chi = T_h \vartheta^{n+1}$, οπότε λόγω της συμμετρίας της διγραμμικής μορφής $a$, των (5.2.6) και (5.2.7) έχουμε

$$\begin{aligned}
(\vartheta^{n+1}, \vartheta^{n+1}) = (\vartheta^n, \vartheta^{n+1}) &+ k(T_h(B(t^n, W^n) - B(t^n, U^n)), \vartheta^{n+1}) \\
&+ k(E^n, \vartheta^{n+1}).
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις (5.3.18), (5.2.15), (5.3.16), και (5.3.7) στην παραπάνω σχέση έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
|\vartheta^{n+1}| &\le |\vartheta^n| + k|T_h B(t^n, W^n) - T_h B(t^n, U^n)| + k|E^n| \\
&\le (1 + Lk)|\vartheta^n| + Lkh^{d/2}\|\vartheta^n\| + k|E^n| \\
&\le (1 + Lk)|\vartheta^n| + C\big(k + h^r\big), \quad n = 0, \dots N-1.
\end{aligned} \tag{5.3.20}$$

Από τις (5.3.20) και (5.3.11), με το διακριτό λήμμα του Gronwall, εύκολα λαμβάνουμε ότι

$$\max_{0 \le n \le N} |\vartheta^n| \le C\big(k + h^r\big). \tag{5.3.21}$$

Επομένως από την (5.3.21) και την (5.3.10) παίρνουμε την (5.3.9). ■

*Παρατήρηση 5.3.1:* Στην Πρόταση 5.3.1 υποθέτουμε ότι $k = o(h^{\tilde{d}})$ ώστε με τη χρήση της (Υ5.2.2′) να εξασφαλίσουμε ότι $U^n \in G$ (βλ. (5.3.18)) για να εφαρμόσουμε την (Υ5.2.3) στην (5.3.19). Από την (5.3.16) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για $k$ και $h$ κατάλληλα μικρά $U^n \in M$. Έτσι αν οι (Υ5.2.3) και (Υ5.2.4) ισχύουν σε ένα μεγαλύτερο σύνολο, παραδείγματος χάριν το $M$, τότε δεν χρειάζεται κάποια συνθήκη για το $k$, ούτε και η υπόθεση (Υ5.2.2′).5.4

## 5.4 ΠΛΗΡΩΣ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΧΗΜΑΤΑ: ΑΜΕΣΕΣ ΠΟΛΥΒΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε ένα πλήρως διακριτό σχήμα για την προσέγγιση της λύσεως του (5.1.1) στην περίπτωση που διακριτοποιούμε την (5.1.3) ως προς το χρόνο με μία άμεση $q$–βηματική μέθοδο. Στην Πρόταση 5.4.1 αποδεικνύουμε βέλτιστη τάξη στις νόρμες $\|\cdot\|$ και $|\cdot|$, για την εκτίμηση σφάλματος της μεθόδου.

Για την προσέγγιση της λύσεως του προβλήματος αρχικών τιμών (5.1.7) υπάρχουν πολλές μέθοδοι (βλ. [39]). Μία κατηγορία είναι οι άμεσες πολυβηματικές μέθοδοι, που περιγράφονται ως εξής: Θεωρούμε μία διαμέριση του $J$ όπως στην παράγραφο 5.3. Με μία άμεση $q$–βηματική μέθοδο κατασκευάζουμε προσεγγίσεις $Y^n$ της $y^n := y(t^n), n = q, \ldots, N$, ως εξής:

$$\sum_{j=0}^{q} \alpha_j Y^{n+j} = k \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j f(t^{n+j}, Y^{n+j}), \quad n = 0, \ldots, N-q, \tag{5.4.1}$$

όπου $\alpha_j$, $j = 0, \ldots, q$, και $\beta_j$, $j = 0, \ldots, q-1$, δοσμένες πραγματικές σταθερές και $Y^0, \ldots, Y^{q-1}$ δοσμένες προσεγγίσεις των $y^0, \ldots, y^{q-1}$.

Θεωρούμε λοιπόν μία διαμέριση του $J$ όπως στην παράγραφο 5.3 και μία $q$–βηματική μέθοδο. Με $\alpha$ και $\beta$ συμβολίζουμε τα πολυώνυμα που δίνονται στην (5.1.9). Υποθέτουμε ότι η μέθοδος (5.4.1) είναι ευσταθής, ικανοποιεί δηλαδή τη συνθήκη των ριζών (βλ., λόγου χάριν, [39, σελ. 380]:

(5.4.2) *Αν $z_0$ είναι ρίζα του $\alpha$, τότε $|z_0|_{\mathrm{abs}} \le 1$.*
*Στην περίπτωση που $z_0$ είναι πολλαπλή ρίζα του $\alpha$,*
*τότε $|z_0|_{\mathrm{abs}} < 1$,*

όπου $|\cdot|_{\rm abs}$ το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z \in \mathbb{C}$. Ακόμα υποθέτουμε ότι η μέθοδος (5.4.1) έχει τάξη $p \in \mathbb{N}$ (βλ., παραδείγματος χάριν, [39, σελ. 370, Theorem 2.4]:

$$C_j = 0, \quad j = 0, \ldots, p, \quad C_{p+1} \neq 0 \tag{5.4.3}$$

όπου

$$C_0 = \alpha(1), \quad C_i = \frac{1}{i!}\left(\sum_{j=0}^{q} \alpha_j j^i - i \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j j^{i-1}\right), \quad i \geq 1.$$

Παραδείγματα $q$–βηματικών μεθόδων που ικανοποιούν τις (5.4.2) και (5.4.3) υπάρχουν στο βιβλίο των Hairer, Nørsett και Wanner, [39, Chapter III.1]. Επίσης η μέθοδος που μελετήσαμε στη παράγραφο 5.3, είναι μία μονοβηματική μέθοδος που ικανοποιεί τις (5.4.2) και (5.4.3) με $p = 1$.

Για μία αρκετά ομαλή πραγματική συνάρτηση $v$, λόγω της (5.4.3), μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι (βλ. φερ' ειπείν, [42, §5.2 – 5]):

$$\begin{aligned} &\max_{0 \leq n \leq N-q} \left| \sum_{j=0}^{q} \alpha_j v^{n+j} - k \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j v'(t^{n+j}) \right|_{\rm abs} \\ &\leq C k^{p+1} \max_{t \in J} \left| v^{(p+1)}(t) \right|_{\rm abs}. \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

Η μέθοδος (5.4.1) για το πρόβλημα (5.1.3) παίρνει τη μορφή: Ζητούμε $U^n \in V_h$, $0 \leq n \leq N$, τέτοιες ώστε να ικανοποιούν

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{q} \alpha_j a(U^{n+j}, \chi) \\ &= k \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j (B(t^{n+j}, U^{n+j}), \chi), \quad \forall \chi \in V_h,\ n = 0, \ldots, N-q, \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{q} \alpha_j (U^{n+j}, \chi) &= k \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j (T_h B(t^{n+j}, U^{n+j}), \chi), \\ &\forall \chi \in V_h,\ \ n = 0, \ldots, N-q, \end{aligned} \tag{5.4.6}$$

Θεωρούμε αρχικές προσεγγίσεις $\{U^j\}_{j=0}^{q-1} \subset V_h$, για τις οποίες υπάρχει σταθερά $C_{\star\star}$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{q-1} |U^j - W^j| \le C_{\star\star}\big(k^p + h^r\big) \\ &\text{και} \quad \sum_{j=0}^{q-1} \|U^j - W^j\| \le C_{\star\star}\big(k^p + h^{r-d/2}\big). \end{aligned} \tag{5.4.7}$$

Οι $U^n$, $n = q, \dots, N$, είναι καλά ορισμένες από το σχήμα (5.4.5), γιατί για δοσμένες $U^n, \dots, U^{n+q-1} \in V_h$, η $U^{n+q}$ είναι η μοναδική λύση ενός γραμμικού συστήματος με πίνακα συμμετρικό και θετικά ορισμένο, λόγω των ιδιοτήτων του τελεστή $A$. Σκοπός μας είναι να δείξουμε εκτιμήσεις του σφάλματος προσέγγισης της $u^n$ από την $U^n$, $n = 0, \dots, N$. Σαν ένα ενδιάμεσο βήμα θα δείξουμε συνέπεια του σχήματος (5.4.5) για την "ελλειπτική" προβολή $W$ της λύσης $u$ του (5.1.1).

Το σφάλμα συνέπειας για το σχήμα (5.4.5) για την $W$ δίνεται από

$$\begin{aligned} kE^n &= \sum_{j=0}^{q} \alpha_j W^{n+j} \\ &\quad - k \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j T_h B(t^{n+j}, W^{n+j}), \quad n = 0, \dots, N-q. \end{aligned} \tag{5.4.8}$$

Θα εκτιμήσουμε λοιπόν το σφάλμα $E^n$ στις νόρμες $\|\cdot\|$ και $|\cdot|$. Έτσι, λόγω των (5.4.8), (5.2.9), (5.2.6) και (5.1.2), για $\chi \in V_h$, $n = 0, \dots, N-q$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} ka(E^n, \chi) &= \sum_{j=0}^{q} \alpha_j a(W^{n+j}, \chi) \\ &\quad - k \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j a(T_h B(t^{n+j}, W^{n+j}), \chi) \\ &= a\big(\sum_{j=0}^{q} \alpha_j u^{n+j} - k \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j u'(t^{n+j}), \chi\big) \\ &\quad + k \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j a(u'(t^{n+j}), \chi) \end{aligned} \tag{5.4.9}$$

$$
\begin{aligned}
&- k\sum_{j=0}^{q-1}\beta_j\big(B(t^{n+j},W^{n+j}),\chi\big)\\
&= a(\sum_{j=0}^{q}\alpha_j u^{n+j} - k\sum_{j=0}^{q-1}\beta_j u'(t^{n+j}),\chi)\\
&\quad + k\sum_{j=0}^{q-1}\beta_j(B(t^{n+j},u^{n+j}) - B(t^{n+j},W^{n+j}),\chi).
\end{aligned}
$$

Επομένως, επιλέγοντας $\chi = E^n$ στην παραπάνω σχέση, λόγω των (5.4.4) και (Υ5.2.5), για $n = 0,\dots,N-q$ λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
k\|E^n\| &\le \|\sum_{j=0}^{q}\alpha_j u^{n+j} - k\sum_{j=0}^{q-1}\beta_j u'(t^{n+j})\|\\
&\quad + k\sum_{j=0}^{q-1}|\beta_j|\,\|B(t^{n+j},u^{n+j}) - B(t^{n+j},W^{n+j})\|_\star\\
&\le C_\star k\big(k^p + h^{r-d/2}\big),
\end{aligned}
$$

με σταθερά $C_*$ ανεξάρτητη των $k$ και $h$. Συνεπώς

$$
\max_{0\le n\le N-q}\|E^n\| \le C_\star\big(k^p + h^{r-d/2}\big). \tag{5.4.10}
$$

Στη συνέχεια, με παρόμοιο τρόπο, θα εκτιμήσουμε το σφάλμα $E^n$ στη νόρμα $|\cdot|$. Επιλέγοντας λοιπόν $\chi = T_h E^n$ στην (5.4.9), λόγω της συμμετρίας της διγραμμικής μορφής $a$ και των (5.2.6), (5.2.14), (5.1.2) και (5.2.7), για $n = 0,\dots,N-q$ λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
ka(E^n,T_hE^n) &= -\big(\sum_{j=0}^{q}\alpha_j\varrho^{n+j} - k\sum_{j=0}^{q-1}\beta_j\varrho'(t^{n+j}),E^n\big)\\
&\quad + \sum_{j=0}^{q}\alpha_j(u^{n+j},E^n) - k\sum_{j=0}^{q-1}\beta_j(u'(t^{n+j}),E^n)\\
&\quad + k\sum_{j=0}^{q-1}\beta_j(W'(t^{n+j}) - T_hB(t^{n+j},W^{n+j}),E^n)\\
&= -\big(\sum_{j=0}^{q}\alpha_j\varrho^{n+j} - k\sum_{j=0}^{q-1}\beta_j\varrho'(t^{n+j}),E^n\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{j=0}^{q}\alpha_j(u^{n+j},E^n)-k\sum_{j=0}^{q-1}\beta_j(u'(t^{n+j}),E^n)\\
&+k\sum_{j=0}^{q-1}\beta_j\big\{(u'(t^{n+j}),T_hE^n)-(T_hB(t^{n+j},W^{n+j}),E^n)\big\}\\
=&-\big(\sum_{j=0}^{q}\alpha_j\varrho^{n+j}-k\sum_{j=0}^{q-1}\beta_j\varrho'(t^{n+j}),E^n\big)\\
&+\sum_{j=0}^{q}\alpha_j(u^{n+j},E^n)-k\sum_{j=0}^{q-1}\beta_j(u'(t^{n+j}),E^n)\\
&+k\sum_{j=0}^{q-1}\beta_j(T_hB(t^{n+j},u^{n+j})-T_hB(t^{n+j},W^{n+j}),E^n).
\end{aligned}
$$

Επομένως λόγω των (5.4.4), (5.2.13) και (5.2.16) έχουμε, για $n=0,\dots,N-q$,

$$
\begin{aligned}
k|E^n|&\le|\sum_{j=0}^{q}\alpha_j\varrho^{n+j}-k\sum_{j=0}^{q-1}\beta_j\varrho'(t^{n+j})|\\
&\quad+|\sum_{j=0}^{q}\alpha_ju^{n+j}-k\sum_{j=0}^{q-1}\beta_ju'(t^{n+j})|\\
&\quad+k|\sum_{j=0}^{q-1}\beta_j(T_hB(t^{n+j},u^{n+j})-T_hB(t^{n+j},W^{n+j})|\\
&\le Ck(k^ph^r+k^p+h^r),
\end{aligned}
$$

με σταθερά $C$ ανεξάρτητη των $k$ και $h$. Συνεπώς

$$
\max_{0\le n\le N-q}|E^n|\le C\big(k^p+h^r\big). \tag{5.4.11}
$$

Με τη βοήθεια των εκτιμήσεων για το σφάλμα συνέπειας για την "ελλειπτική" προβολή $W$, (5.4.10) και (5.4.11), θα δείξουμε το κύριο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου, την Πρόταση 5.4.1, δηλαδή τη σύγκλιση της μεθόδου (5.4.5). Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό,

$$
\Theta^n=\begin{pmatrix}\vartheta^{n+q-1}\\ \vdots\\ \vartheta^n\end{pmatrix},\quad \mathcal{E}^n=\begin{pmatrix}E^n\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},
$$

$$\Gamma_n^j = \beta_j'(B(t^{n+j}, W^{n+j}) - B(t^{n+j}, U^{n+j}))$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha_{q-1}' & \alpha_{q-2}' & \dots & \alpha_0' \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_n = \begin{pmatrix} \Gamma_n^{q-1} & \dots & \Gamma_n^0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

όπου $\alpha_j' = \frac{\alpha_j}{\alpha_q}$, $\beta_j' = \frac{\beta_j}{\alpha_q}$, $j = 0, \dots, q-1$. Ακόμα, για $V = (v_1, \dots, v_q)^T$ και $W = (w_1, \dots, w_q)^T$ στον $H^q$ ή και στον $V^q$, θέτουμε

$$(V, W) := \sum_{i=1}^{q} (v_i, w_i), \quad |V| := \Big(\sum_{i=1}^{q} |v_i|^2\Big)^{1/2},$$

$$\|V\| := \Big(\sum_{i=1}^{q} \|v_i\|^2\Big)^{1/2}, \quad \|V\|_\star := \Big(\sum_{i=1}^{q} \|v_i\|_\star^2\Big)^{1/2},$$

$$a(V, W) := \sum_{i=1}^{q} a(v_i, w_i), \quad T_h V = (T_h v_i, \dots, T_h v_q)^T,$$

και με $\|\cdot\|_2$ συμβολίζουμε την Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{C}^q$ καθώς και την παραγόμενη από αυτήν νόρμα πινάκων.

**Λήμμα 5.4.1:** *Υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $S$ τέτοιος ώστε η νόρμα $\|\cdot\|_2$ του πίνακα $\mathcal{L} = S^{-1}\Lambda S$ φράσσεται από τη μονάδα,*

$$\|\mathcal{L}\|_2 \le 1. \tag{5.4.12}$$

*Απόδειξη:* Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $\det(\Lambda - \lambda I) = \alpha_q \alpha(\lambda)$, όπου $I$ είναι ο μοναδιαίος $q \times q$ πίνακας. Συνεπώς οι ρίζες του πολυωνύμου $\alpha$ είναι ιδιοτιμές του πίνακα $\Lambda$ και αντιστρόφως. Επομένως λόγω της συνθήκης των ριζών, (5.4.2),

$$|\lambda| \le 1, \quad \text{αν } \lambda \text{ ιδιοτιμή του } \Lambda. \tag{5.4.13}$$

Ακόμα, κάθε πολλαπλή ιδιοτιμή $\lambda$ του $\Lambda$ έχει μέτρο μικρότερο της μονάδας, $|\lambda| < 1$. Από το Θεώρημα κανονικής μορφής ενός πίνακα, του Jordan, έχουμε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $S_1 \in \mathbb{C}^{q,q}$ τέτοιος ώστε ο $\widetilde{\Lambda} = S_1^{-1}\Lambda S_1$ έχει τη μορφή $\widetilde{\Lambda} = \mathrm{diag}[J_1, \dots, J_\ell]$, $\ell \le q$. Κάθε τετραγωνικός υποπίνακας $J_i$, $i = 1, \dots, \ell$, είναι είτε ο $1 \times 1$ πίνακας $(\lambda_i)$, αν $\lambda_i$ είναι απλή ιδιοτιμή, είτε έχει $\lambda_i$ στη διαγώνιο και πιθανόν 1 στην υπερδιαγώνιό του. Έτσι ο $\widetilde{\Lambda}$ είναι ένας αραιός πίνακας με μη

μηδενικά στοιχεία μόνο στη διαγώνιο και στην υπερδιαγώνιο του. Στη διαγώνιό του εμφανίζονται οι ιδιοτιμές του $\Lambda$ και στην υπερδιαγώνιο τα στοιχεία είναι είτε 0 είτε 1. Είναι δε 1 μόνο όταν το αντίστοιχο στοιχείο της διαγωνίου είναι μία πολλαπλή ιδιοτιμή $\lambda$ του $\Lambda$, δηλαδή $|\lambda| < 1$. Επιλέγουμε τώρα $\varepsilon$ τέτοιο ώστε

(5.4.14)
$$0 < \varepsilon < 1 - |\lambda|, \text{ για κάθε } \lambda \text{ που είναι πολλαπλή ιδιοτιμή του } \Lambda.$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τον πίνακα $D = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{q-1})$ και τον πίνακα $\mathcal{L} = D^{-1}\widetilde{\Lambda}D$. Ο $\mathcal{L}$ διαφέρει από τον $\widetilde{\Lambda}$ μόνο στην υπερδιαγώνιο, όπου αντί για 1 έχει $\varepsilon$. Συμβολίζουμε με $\varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, q-1$, τα στοιχεία της υπερδιαγωνίου του $\mathcal{L}$ και $\lambda_i$, $i = 1, \ldots, q$, τα στοιχεία της διαγωνίου του. Τώρα

$$\begin{aligned} |(\mathcal{L}x, x)| &= \Big|\sum_{i=1}^{q} \lambda_i |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{q-1} \varepsilon_i \overline{x_i} x_{i+1}\Big| \\ &\le \sum_{i=1}^{q-1} (|\lambda_i| + |\varepsilon_i|)|x_i|^2 + |x_q|^2, \quad \forall x \in \mathbb{C}^q, \end{aligned} \tag{5.4.15}$$

όπου συμβολίζουμε και πάλι με $(\cdot, \cdot)$ το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^q$ και με $\overline{x}$ τον συζυγή του $x \in \mathbb{C}$. Σύμφωνα με όσα αναφέραμε για τη μορφή του $\mathcal{L}$, τα $\varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, q-1$, είναι είτε μηδέν είτε $\varepsilon$. Μάλιστα αν $\varepsilon_i = \varepsilon$ για κάποιο $i = 1, \ldots, q-1$, τότε $\lambda_i$ είναι πολλαπλή ιδιοτιμή του $\Lambda$. Λόγω λοιπόν της (5.4.14),

$$|\lambda_i| + |\varepsilon_i| < 1, \quad \text{αν } \varepsilon_i = \varepsilon,\ i = 1, \ldots, q-1. \tag{5.4.16}$$

Από τις (5.4.15), (5.4.16) και (5.4.13) έχουμε

$$|(\mathcal{L}x, x)| \le \sum_{i=1}^{q} |x_i|^2 = \|x\|_2^2, \quad \forall x \in \mathbb{C}^q.$$

Συνεπώς $\|\mathcal{L}\|_2 \le 1$. Επομένως ισχύει η (5.4.12) και $S = S_1 D$. ■.

**Πρόταση 5.4.1:** *Αν $\{U^n\}_{n=0}^N$ ικανοποιεί την (5.4.5), αν ισχύει η (5.4.7), η μέθοδος (5.4.1) ικανοποιεί τις (5.4.2) και (5.4.3) και η λύση $u$ του (5.1.1) είναι αρκετά ομαλή, τότε για $h$ αρκετά μικρό και $k^p = o(h^{\tilde{d}})$, υπάρχει σταθερά $C$ ανεξάρτητη των $k$ και $h$ τέτοια ώστε*

$$\begin{aligned} &\max_{0 \le n \le N} \|u^n - U^n\| \le C\big(k^p + h^{r-d/2}\big) \\ &\text{και} \quad \max_{0 \le n \le N} |u^n - U^n| \le C\big(k^p + h^r\big), \end{aligned} \tag{5.4.17}$$

*όπου $\widetilde{d}$ δίνεται από την υπόθεση (Υ2′).*

*Απόδειξη:* Έστω $\varrho^n$ και $\vartheta^n$ όπως στην απόδειξη τις Πρότασης 5.3.1, οπότε $u^n - U^n = \varrho^n + \vartheta^n$, $n = 0, \dots, N$. Σύμφωνα λοιπόν με την (5.3.10), για να δείξουμε την (5.4.17) αρκεί να εκτιμήσουμε την $\vartheta^n$ στις αντίστοιχες νόρμες. Από τις (5.4.5) και (5.4.8) έχουμε, για $\chi \in V_h$, $n = 0, \dots, N-q$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{q} \alpha_j a(\vartheta^{n+j}, \chi) &= \sum_{j=0}^{q} \alpha_j a(W^{n+j}, \chi) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{q} \alpha_j a(U^{n+j}, \chi) \\ &= k a(E^n, \chi) \\ &\quad + k \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j (B(t^{n+j}, W^{n+j}) - B(t^{n+j}, U^{n+j}), \chi).\end{aligned} \tag{5.4.18}$$

Έστω

$$Y^n = S^{-1}\Theta^n, \quad \widetilde{\Gamma}_n = S^{-1}\Gamma_n, \quad \widetilde{\mathcal{E}^n} = S^{-1}\mathcal{E}^n, \quad e = (1, \dots, 1)^T.$$

Θα εκτιμήσουμε το $\vartheta^n$ εκτιμώντας το $Y^n$. Μπορούμε να ξαναδιατυπώσουμε την (5.4.18) ως

$$\begin{aligned}a(Y^{n+1}, X) = a(\mathcal{L}Y^n, X) &+ k(\widetilde{\Gamma}_n e, X) \\ &+ k\alpha_q^{-1} a(\widetilde{\mathcal{E}^n}, X), \quad \forall X \in V^q.\end{aligned} \tag{5.4.19}$$

Από την (5.4.7), εύκολα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}|Y^0| + h^{d/2}\|Y^0\| &\le \|S^{-1}\|_2 (|\Theta^0| + h^{d/2}\|\Theta^0\|) \\ &\le C_{\star\star}\|S^{-1}\|_2 (k^p + h^r).\end{aligned} \tag{5.4.20}$$

Έστω $L_1$ η σταθερά Lipschitz στην (Υ5.2.3), $C_\star$ και $C_{\star\star}$ οι σταθερές στις (5.4.10) και (5.4.20), αντίστοιχα, και $c := \max(1 + \max_j |\beta_j'| \|S^{-1}\|_2 L_1, C_\star \alpha_q^{-1}\|S^{-1}\|_2, C_{\star\star}\|S^{-1}\|_2)$. Στη συνέχεια θα δείξουμε με επαγωγή ως προς $n$, ότι

$$\|Y^n\| \le d_n \big(k^p + h^{r-d/2}\big), \tag{5.4.21}$$

όπου $d_n = c(1+ck)^n$, $n = 0, \dots, N$. Εύκολα παρατηρούμε ότι υπάρχει σταθερά $\widetilde{D}$, ανεξάρτητη των $k$ και $h$, τέτοια ώστε

$$\max_{0 \le n \le N} d_n \le \widetilde{D}. \tag{5.4.22}$$

Αν υποθέσουμε ότι η (5.4.21) ισχύει, από την (5.4.22) έχουμε

$$\|Y^n\| \le \widetilde{D}\big(k^p + h^{r-d/2}\big), \quad n = 0, \dots, N. \tag{5.4.23}$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $k^p = o(h^{\widetilde{d}})$ και ότι το $h$ είναι αρκετά μικρό, ώστε να ισχύει

$$C\widetilde{D}\big(k^p h^{-\widetilde{d}} + h^{r-d/2-\widetilde{d}}\big) < 1, \tag{5.4.24}$$

όπου $\widetilde{D}$ και $C$ είναι οι σταθερές στις σχέσεις (5.4.23) και (Υ5.2.2′), αντίστοιχα. Λόγω της (5.4.20), η (5.4.21) ισχύει για $n = 0$. Έστω τώρα ότι η (5.4.21) ισχύει για $n$, $0 \le n \le N-1$. Από την επαγωγική υπόθεση και τις (Υ5.2.2′) και (5.4.24) έχουμε

$$U^n \in G. \tag{5.4.25}$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε $X = Y^{n+1}$ στην εξίσωση σφάλματος (5.4.19). Τότε λόγω των (5.4.12), (5.4.25), (Υ5.2.3) και της επαγωγικής υπόθεσης έχουμε

$$\begin{aligned} \|Y^{n+1}\| &\le \|\mathcal{L}Y^n\| + k\|\widetilde{\Gamma}_n e\|_\star \\ &\qquad + k\alpha_q^{-1}\|\widetilde{\mathcal{E}^n}\| \\ &\le (1 + \max_j |\beta_j'|\|S^{-1}\|_2 L_1 k)\|Y^n\| + k\alpha_q^{-1}\|\widetilde{\mathcal{E}^n}\| \\ &\le c(1+ck)^{n+1}\big(k^p + h^{r-d/2}\big). \end{aligned} \tag{5.4.26}$$

Επομένως η (5.4.21) ισχύει για $n+1$, και άρα ισχύει για $n = 0, \dots, N$. Στη συνέχεια επιλέγουμε $X = T_h Y^{n+1}$ στην εξίσωση σφάλματος (5.4.19). Λόγω της συμμετρίας της διγραμμικής μορφής $a$, και των (5.2.6) και (5.2.7), έχουμε

$$\begin{aligned} (Y^{n+1}, Y^{n+1}) &= (\mathcal{L}Y^n, Y^{n+1}) + k(T_h\widetilde{\Gamma}_n e, Y^{n+1}) \\ &\quad + k\alpha_q^{-1}(T_h\widetilde{\mathcal{E}^n}, Y^{n+1}) \\ &= (\mathcal{L}Y^n, Y^{n+1}) + k(S^{-1}T_h\Gamma_n e, Y^{n+1}) + k\alpha_q^{-1}(T_h\widetilde{\mathcal{E}^n}, Y^{n+1}). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις (5.4.25), (5.2.15), (5.4.23), και (5.4.11) έχουμε

$$\begin{aligned} |Y^{n+1}| &\le |\mathcal{L}Y^n| + k\|S^{-1}\|_2 |T_h\Gamma_n e| + k\alpha_q^{-1}|T_h\widetilde{\mathcal{E}^n}| \\ &\le (1 + \max_j |\beta_j'|\|S^{-1}\|_2 Lk)|Y^n| \\ &\quad + \max_j |\beta_j'|\|S^{-1}\|_2 Lkh^{d/2}\|Y^n\| + k\alpha_q^{-1}|T_h\widetilde{\mathcal{E}^n}| \\ &\le (1 + \widetilde{L}k)|Y^n| + C\big(k^p + h^r\big), \quad n = 0, \dots N-1. \end{aligned} \tag{5.4.27}$$

Επίσης από τις (5.4.27), (5.4.20) με το διακριτό λήμμα του Gronwall λαμβάνουμε

$$\max_{0\le n\le N}|Y^n|\le C\big(k^p+h^r\big). \tag{5.4.28}$$

Η (5.4.17) έπεται εύκολα από τις (5.4.28) και (5.3.10). ■

*Παρατήρηση 5.4.1:* Στην Πρόταση 5.4.1 υποθέτουμε ότι $k^p=o(h^{\widetilde{d}})$ ώστε με τη χρήση της (Υ5.2.2′) να εξασφαλίσουμε ότι $U^n\in G$ (βλ. (5.4.27)) για να εφαρμόσουμε την (Υ5.2.3) στην (5.4.28). Από την (5.4.25) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για $k$ και $h$ κατάλληλα μικρά ισχύει $U^n\in M$. Έτσι αν οι (Υ5.2.3) και (Υ5.2.4) ισχύουν σε ένα μεγαλύτερο σύνολο, παραδείγματος χάριν το $M$, τότε δεν χρειάζεται κάποια συνθήκη για το $k$, ούτε και η υπόθεση (Υ5.2.2′).

*Παρατήρηση 5.4.2:* Σύμφωνα με τις (5.1.5), (5.2.14) και (5.2.10) έχουμε ότι

$$W'(t)=T_hB(t,W(t))+E(t),\quad \forall t\in J,$$

όπου $E(t)=T_hB(t,u(t))-T_hB(t,W(t))$. Υποθέτουμε για τη λύση $u$ του (5.1.1) ότι $u\in C^p(J;V)$ και για τον τελεστή $B$ ότι $B\in C^p(J\times V;V')$ καθώς και ότι υπάρχουν σταθερές $D_\ell$, $\ell=0,\dots,p-1$, τέτοιες ώστε

$$\big|\big|\frac{d^\ell}{dt^\ell}E(0)\big|\big|\le D_\ell h^{r-d/2},\quad \ell=0,\dots,p-1, \tag{Υ5.4.1}$$

και

$$\big|\frac{d^\ell}{dt^\ell}E(0)\big|\le D_\ell h^{r},\quad \ell=0,\dots,p-1. \tag{Υ5.4.2}$$

Επειδή $u\in C^p(J;V)$ εύκολα παρατηρούμε ότι υπάρχει σταθερά $C$ ανεξάρτητη του $k$ τέτοια ώστε για $j=0,\dots,q-1$,

$$\begin{aligned}&\big|W^j-\sum_{\ell=0}^{p-1}\frac{(jk)^\ell}{\ell!}W^{(\ell)}(0)\big|+\big|\big|W^j-\sum_{\ell=0}^{p-1}\frac{(jk)^\ell}{\ell!}W^{(\ell)}(0)\big|\big|\\ &\le Ck^p.\end{aligned} \tag{5.4.29}$$

Αν θέσουμε

$$U^j=W(0)+\sum_{\ell=0}^{p-2}\frac{(jk)^\ell}{\ell!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}[T_hB(0,W(0))],\ j=0,\dots,q-1, \tag{5.4.30}$$

μπορούμε να δείξουμε ότι οι $U^0,\dots,U^{q-1}$ ικανοποιούν την (5.4.1). Πράγματι από τις (5.4.30), (5.1.5), (5.2.14) και (5.2.10) έχουμε για $\chi\in V_h$ ότι

$$
\begin{aligned}
a(U^j-W^j,\chi) &= a(W(0),\chi)\\
&\quad + a(\sum_{\ell=0}^{p-2}\frac{(jk)^\ell}{\ell!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}[T_hB(0,W(0))],\chi)\\
&\quad + a(\sum_{\ell=0}^{p-1}\frac{(jk)^\ell}{\ell!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}W^{(\ell)}(0)-W^j,\chi)\\
&\quad - a(\sum_{\ell=0}^{p-1}\frac{(jk)^\ell}{\ell!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}W^{(\ell)}(0),\chi)\\
&= a(\sum_{\ell=0}^{p-1}\frac{(jk)^\ell}{\ell!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}W^{(\ell)}(0)-W^j,\chi)\\
&\quad - a(\sum_{\ell=0}^{p-2}\frac{(jk)^\ell}{\ell!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}E(0),\chi).
\end{aligned}
\tag{5.4.31}
$$

Θέτουμε τώρα $\chi=U^j-W^j$ στην (5.4.31), οπότε λόγω των (Υ5.4.1) και (5.4.29) λαμβάνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{q-1}\|U^j-W^j\| &\le \sum_{j=0}^{q-1}\sum_{\ell=0}^{p-2}\frac{(jk)^\ell}{\ell!}\Big|\Big|\frac{d^\ell}{dt^\ell}E(0)\Big|\Big|\\
&\quad + \sum_{j=0}^{q-1}\Big|\Big|\sum_{\ell=0}^{p-1}\frac{(jk)^\ell}{\ell!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}W^{(\ell)}(0)-W^j\Big|\Big|\\
&\le C\big(k^p+h^{r-d/2}\big).
\end{aligned}
$$

Επίσης θέτουμε $\chi=T_h(U^j-W^j)$ στην (5.4.31), οπότε λόγω της συμμετρίας της διγραμμικής μορφής $a$, των (5.2.6), (5.4.29) και (Υ5.4.2), έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{q-1}|U^j-W^j| &= \sum_{j=0}^{q-1}\Big|\sum_{\ell=0}^{p-1}\frac{(jk)^\ell}{\ell!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}W^{(\ell)}(0)-W^j\Big|\\
&\quad + \sum_{j=0}^{q-1}\sum_{\ell=0}^{p-2}\frac{(jk)^\ell}{\ell!}\Big|\frac{d^\ell}{dt^\ell}E(0)\Big|
\end{aligned}
$$

$$\leq C\big(k^p + h^r\big).$$

## 5.5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Σε αυτή την παράγραφο θα εφαρμόσουμε την Πρόταση 5.4.1 σε μία εξίσωση στον $\mathbb{R}^m$, $m \leq 3$, την εξίσωση του Rosenau, σε ένα περιοδικό πρόβλημα αρχικών τιμών για μία γενικευμένη εξίσωση τύπου Sobolev στον $\mathbb{R}$, σε μία ψευδοπαραβολική εξίσωση στον $\mathbb{R}^3$ και σε ένα σύστημα εξισώσεων τύπου Boussinesq.

**5.5α. Η εξίσωση του Rosenau.** Θεωρούμε ένα πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση του Rosenau. Για $t^\star > 0$ ζητούμε μία πραγματική συνάρτηση $u$, που ορίζεται στο $\overline{\Omega} \times J$, τέτοια ώστε

$$\text{(5.5α.1)} \qquad \begin{cases} u_t + \Delta^2 u_t = \nabla \cdot f(u), & \text{στο } \Omega \times J \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{στο } \partial\Omega \times J \\ u(\cdot, 0) = u^0, & \text{στο } \Omega, \end{cases}$$

όπου $\Omega$ ένα φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^m$, $m \leq 3$, με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$, $u^0$ δοσμένη συνάρτηση αρκετά ομαλή και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ συνάρτηση με ομαλές συνιστώσες.

Ο Rosenau, στην [61], εισήγαγε την εξίσωση αυτή για $m = 1$ και $f(x) = x + x^2$, ώστε να μοντελοποιήσει τη δυναμική ορισμένων μεγάλων διακριτών συστημάτων και να αποφύγει ορισμένα μειονεκτήματα που παρουσιάζει η εξίσωση των Korteweg-de Vries (KdV). Για $s \in \mathbb{N}_0$, συμβολίζουμε με $H_0^s$ το χώρο Sobolev $H_0^s(\Omega)$ και με $H^s$ το χώρο Sobolev $H^s(\Omega)$. Τη νόρμα του $H^s$ τη συμβολίζουμε ως $\|\cdot\|_s$, το εσωτερικό γινόμενο στον $H := L^2(\Omega) = H^0$ ως $(\cdot, \cdot)$ και την παραγόμενη από αυτό νόρμα ως $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$. Έστω $A : H^4 \cap H_0^2 \to H$, $Av = (I + \Delta^2)v$. Θέτουμε τότε $V := D(A^{1/2}) = H_0^2$ και εισάγουμε τη νόρμα $\|\cdot\|$ στον $V$, $\|v\| = \big(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta v\|^2_{L^2(\Omega)}\big)^{1/2}$. Έστω ακόμα $B : V \to H$, $B(v) = \nabla \cdot f(v)$. Συνεπώς το (5.5α.1) ανήκει στην κατηγορία προβλημάτων που δίνεται από την (5.1.1). Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι σε αυτό το πρόβλημα ισχύουν οι υποθέσεις (Υ5.2.1), (Υ5.2.2), (Υ5.2.3)–(Υ5.2.6).

Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι οι νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|_2$ είναι ισοδύναμες στον $V$. Η Park, στην [56, Theorems 2.1 και 2.2], έδειξε ότι για $f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$, $m \in \mathbb{N}$, με $f(0) = 0$ και $u^0 \in H^4 \cap H_0^2$,

υπάρχει $\tilde{t} > 0$ τέτοιο ώστε το (5.5α.1) να έχει μοναδική λύση $u \in C^1([0,\tilde{t}); H^4 \cap H_0^2)$, καθώς και ότι

$$\|u(\cdot,t)\| \le C\|u^0\|, \quad \forall t \in [0,\tilde{t}), \tag{5.5α.2}$$

με σταθερά $C$ ανεξάρτητη $u$ και $f$. Συνεπώς για $t^\star < \tilde{t}$ το (5.5α.1), έχει μοναδική λύση $u \in C^1(J;V)$. Οι Chung και Ha, [20], διακριτοποίησαν την (5.5α.1) χρησιμοποιώντας πεπερασμένα στοιχεία στο χώρο και την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler ή τη μέθοδο των Crank–Nicolson στο χρόνο.

Για τη διακριτοποίηση στο χώρο, θεωρούμε μία οικογένεια υποχώρων $\{V_h\}_{0<h\le 1}$ του $H_0^2$ πεπερασμένης διάστασης. Υποθέτουμε ότι (έχοντας όμως υπόψιν ότι στην περίπτωση ενός καμπύλου συνόρου $\partial\Omega$ η υπόθεση $V_h \subset V$ μπορεί να μην ισχύει, βλ. Παρατήρηση 5.2.0) ο $V_h$ έχει την εξής προσεγγιστική ιδιότητα

$$\inf_{\chi\in V_h} \sum_{j=0}^{2} h^j \|v-\chi\|_j \le Ch^s \|v\|_s, \quad v \in H^s \cap V, \quad 4 \le s \le r. \tag{5.5α.3}$$

Στις δύο διαστάσεις ($m=2$), ένα παράδειγμα υπόχωρων του $H_0^2$ πεπερασμένης διάστασης που ικανοποιεί την (5.5α.3) είναι τα $C^1$ κατά τμήματα πολυώνυμα βαθμού το πολύ $r-1$, $r \ge 4$, βλ. [27]. Σε αυτή την εφαρμογή η διγραμμική μορφή $a(\cdot,\cdot)$, σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε στην παράγραφο 5.1, ορίζεται ως εξής,

$$a(v,w) = (v,w) + (\Delta v, \Delta w), \quad \forall v,w \in V,$$

οπότε η "ελλειπτική" προβολή $R_h : V \to V_h$ ορίζεται ως

$$(v - R_h v, \chi) + (\Delta(v - R_h v), \Delta\chi) = 0, \quad \forall \chi \in V_h. \tag{5.5α.4}$$

Μπορούμε να δούμε ότι η $R_h$ έχει την προσεγγιστική ιδιότητα

$$\begin{aligned} &\|v - R_h v\|_{L^2(\Omega)} + h^2 \|v - R_h v\| \\ &\le Ch^s \|v\|_s, \quad v \in H^s \cap V, \quad 4 \le s \le r, \end{aligned} \tag{5.5α.5}$$

η οποία προκύπτει εύκολα χρησιμοποιώντας το δυϊκό επιχείρημα των Aubin και Nitsche, βλ., λόγου χάριν, [70, Chapter 1, Theorem 1.1]. Πράγματι, για $v \in H^s \cap V$ και $\chi \in V_h$, λόγω του ορισμού της νόρμας $\|\cdot\|$ και της (5.5α.4) έχουμε

$$\begin{aligned} \|v - R_h v\|^2 &= a(v - R_h v, v - R_h v) = a(v - R_h v, v - \chi) \\ &\le \|v - R_h v\| \, \|v - \chi\|, \end{aligned}$$

οπότε,

$$\|v - R_h v\| = \inf_{\chi \in V_h} \|v - \chi\|.$$

Άρα, λόγω της (5.5α.3), έχουμε

$$\|v - R_h v\| \le C h^{s-2} \|v\|_s, \quad \text{για } v \in H^s \cap V, \quad 4 \le s \le r. \tag{5.5α.6}$$

Για να δείξουμε την (5.5α.5), μένει να εκτιμήσουμε και την $L^2$–νόρμα. Για αυτό το λόγο θεωρούμε το βοηθητικό πρόβλημα: Για $f \in L^2(\Omega)$, ζητούμε $v \in H^4 \cap H_0^2$ τέτοια ώστε

$$\big(I + \Delta^2\big) v = f.$$

Από το [2, Θεώρημα 9.11], έχουμε ότι υπάρχει σταθερά $C$ ανεξάρτητη των $f$, $v$, ώστε

$$\|v\|_4 \le C\big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}\big).$$

Ακόμα εύκολα μπορούμε να δούμε ότι

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \le C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις λαμβάνουμε

$$\|v\|_4 \le C \|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.5α.7}$$

Έτσι αν $w \in H^4 \cap H_0^2$ τέτοιο ώστε $\big(I + \Delta^2\big) w = v - R_h v$, λόγω της (5.5α.4) έχουμε

$$\begin{aligned} \|v - R_h v\|^2_{L^2(\Omega)} &= (v - R_h v, v - R_h v) = (Aw, v - R_h v) \\ &= a(w, v - R_h v) = a(w - \chi, v - R_h v) \\ &\le \|v - R_h v\| \, \|w - \chi\|, \quad \forall \chi \in V_h. \end{aligned}$$

Λόγω τώρα και των (5.5α.3), (5.5α.6) και (5.5α.7) έχουμε

$$\begin{aligned} \|v - R_h v\|^2_{L^2(\Omega)} &\le \inf_{\chi \in V_h} \|w - \chi\| \, \|v - R_h v\| \le C h^2 \|w\|_4 h^{s-2} \|v\|_s \\ &\le C h^s \|v\|_s \|v - R_h v\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\|v - R_h v\|_{L^2(\Omega)} \le C h^s \|v\|_s, \quad \text{για } v \in H^s \cap H_0^2, \quad 4 \le s \le r. \tag{5.5α.8}$$

Από τις (5.5α.6) και (5.5α.8) εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει η (5.5α.5). Συνεπώς ικανοποιούνται οι υποθέσεις (Υ5.2.1) και (Υ5.2.2) της παραγράφου 5.2, με $d = 4$.

Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_{L^\infty}$ τη νόρμα στον $L^\infty(\Omega)$. Σύμφωνα με την ανισότητα του Sobolev, βλ., λόγου χάριν, [12, Θεώρημα 1.4.6], υπάρχει σταθερά $C_\star$ τέτοια ώστε

$$\|v\|_{L^\infty} \le C_\star \|v\|, \quad \forall v \in H_0^2. \tag{5.5α.9}$$

Επομένως, λόγω της (5.5α.2),

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C_\star \|u^0\|, \quad \forall t \in J. \tag{5.5α.10}$$

Σύμφωνα με την παράγραφο 5.2, το σύνολο $M$ ορίζεται ως $M = \{\chi \in V_h : \exists\, t \in J \, \|u(\cdot,t) - \chi\| < 1\}$. Θέτουμε τώρα $\widetilde{M} = \{U \in \mathbb{R} : \exists\, (x,t) \in \Omega \times J \, |u(x,t) - U| < C_\star\}$, όπου $C_\star$ η σταθερά της (5.5α.9). Από τον ορισμό του $\widetilde{M}$ εύκολα παρατηρούμε ότι

$$\max_{U \in \widetilde{M}} |U| \le C_\star \big(\|u^0\| + 1\big). \tag{5.5α.12}$$

Επειδή υποθέσαμε ότι $f \in C^1(\mathbb{R})$, λόγω του ορισμού του $\widetilde{M}$ και της (5.5α.12) υπάρχει μία συνάρτηση $\widetilde{f}$, η οποία ταυτίζεται με την $f$ στο $\widetilde{M}$ και κάθε συνιστώσα της πληροί τη συνθήκη του Lipschitz, με σταθερά $L$. Αν $\chi \in M$, υπάρχει $t \in J$ τέτοιο ώστε $\|u(\cdot,t) - \chi\| < 1$. Λόγω και της (5.5α.9) έχουμε τότε

$$|u(x,t) - \chi(x)| \le \|u(\cdot,t) - \chi\|_{L^\infty} \le C_\star \|u(\cdot,t) - \chi\| < C_\star, \quad \forall x \in \Omega.$$

Επομένως $\chi(x) \in \widetilde{M}$, για κάθε $x \in \Omega$, οπότε $\widetilde{f}(\chi) = f(\chi)$, για κάθε $\chi \in M$. Συνεπώς

$$\sum_{i=1}^m \|f_i(\chi) - f_i(\psi)\|_{L^2(\Omega)} \le 3L \|\chi - \psi\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \chi, \psi \in M, \tag{5.5α.11}$$

όπου $f_i$ η $i-$στή συνιστώσα της $f$. Άρα από την (5.5α.11) για $\chi, \psi \in M$ και $\varphi \in V$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&(B(\chi) - B(\psi), \varphi) = (\nabla \cdot f(\chi) - \nabla \cdot f(\psi), \varphi) \\
&= \sum_{i=1}^m \Big(\frac{\partial f_i(\chi)}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i(\psi)}{\partial x_i}, \varphi\Big) = -\sum_{i=1}^m \Big(f_i(\chi) - f_i(\psi), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big) \\
&\le \left(\sum_{i=1}^m \|f_i(\chi) - f_i(\psi)\|_{L^2(\Omega)}\right) \|\varphi\| \\
&\le 3L \|\chi - \psi\|_{L^2(\Omega)} \, \|\varphi\|.
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\|B(\chi)-B(\psi)\|_\star \le 3L\|\chi-\psi\|_{L^2(\Omega)},\quad \forall \chi,\psi\in M. \tag{5.5α.13}$$

Επομένως υπάρχει σταθερά $L_1$, τέτοια ώστε

$$\|B(\chi)-B(\psi)\|_\star \le L_1\|\chi-\psi\|,\quad \forall \chi,\psi\in M. \tag{5.5α.14}$$

Ακόμα, λόγω των (5.2.4), (5.2.2) και (5.5α.13), υπάρχει σταθερά $L_2$, τέτοια ώστε

$$\|TB(\chi)-TB(\psi)\|_{L^2(\Omega)} \le L_2\|\chi-\psi\|_{L^2(\Omega)},\quad \forall \chi,\psi\in M. \tag{5.5α.15}$$

Πλέον λόγω των (5.5α.14), (5.5α.15) και (5.5α.5) είναι απλό να δούμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις (Υ5.2.3)–(Υ5.2.6).

Έστω λοιπόν $U^0,\dots,U^{q-1}\in V_h$ προσεγγίσεις των $u^0,\dots,u^{q-1}$ τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{q-1}\|U^j-u^j\|_{L^2(\Omega)} \le C\big(k^p+h^r\big)\\ &\text{και}\ \sum_{j=0}^{q-1}\|U^j-u^j\| \le C\big(k^p+h^{r-2}\big).\end{aligned} \tag{5.5α.16}$$

Ορίζουμε τις προσεγγίσεις $U^n\in V_h$, $n=q,\dots,N$, αναδρομικά από το σχήμα

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{q}\alpha_j\left[(U^{n+j},\chi)+(\Delta U^{n+j},\Delta\chi)\right]\\ &=k\sum_{j=0}^{q-1}\beta_j(\nabla\cdot f(U^{n+j}),\chi),\ \ \forall\chi\in V_h,\ \ n=0,\dots,N-q.\end{aligned} \tag{5.5α.17}$$

Τότε από την Πρόταση 5.4.1, για $k$, $h$ κατάλληλα μικρά, λαμβάνουμε τις εκτιμήσεις σφάλματος

$$\max_{0\le n\le N}\|u^n-U^n\|_{L^2(\Omega)} \le C(k^p+h^r) \tag{5.5α.18}$$

$$\max_{0\le n\le N}\|u^n-U^n\| \le C(k^p+h^{r-2}). \tag{5.5α.19}$$

*Παρατήρηση 5.5α.1:* Λόγω των (5.5α.14) και (5.5α.15) οι (Υ5.2.3) και (Υ5.2.4) ισχύουν για κάθε $\chi, \psi \in M$. Σύμφωνα λοιπόν με τις Παρατηρήσεις 5.2.1, 5.3.1 και 5.4.1, σε αυτή την εφαρμογή δεν είναι απαραίτητη η υπόθεση (Υ5.2.2′), ούτε κάποια συνθήκη για το $k$ για την απόδειξη των προτάσεων 5.2.1, 5.3.1 και 5.4.1.

*Παρατήρηση 5.5α.2:* Στην περίπτωση που $m = 1$ και η $f$ είναι ένα πολυώνυμο μπορούμε να δείξουμε ότι οι (Υ5.4.1) και (Υ5.4.2) της Παρατήρησης 5.4.2 ισχύουν. Πράγματι αν $f(x) = x^\mu$, $\mu \in \mathbb{N}$ τότε $f^{(j)}(x) = \frac{\mu!}{(\mu-j)!}x^{\mu-j}$, $0 \le j \le \mu$, και $f^{(j)} = 0$, $j > \mu$. Είναι προφανές λοιπόν ότι υπάρχει $N_j(u)$ τέτοια ώστε

$$\|f^{(j)}(u)\| \le N_j(u), \quad j \in \mathbb{N}. \tag{5.5α.20}$$

Λόγω τώρα της (5.2.14) έχουμε ότι

$$\|W^{(j)}\| \le \max_{t\in J} \|u^{(j)}\|, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{5.5α.21}$$

Επίσης επειδή

$$\begin{aligned} f^{(j)}(u) - f^{(j)}(W) &= \frac{\mu!}{(\mu-j)!}(u^{\mu-j} - W^{\mu-j}) \\ &= \frac{\mu!}{(\mu-j)!}(u-W)\sum_{i=0}^{\mu-j-1} u^{\mu-j-1-i}W^i, \quad 0 \le j \le \mu, \end{aligned}$$

λόγω των (5.2.13) και (5.5α.21), υπάρχει σταθερά $C$ τέτοια ώστε

$$\|f^{(j)}(u) - f^{(j)}(W)\| \le C(u). \tag{5.5α.22}$$

Επιπλέον λόγω του ορισμού της $E$ στην Παρατήρηση 5.4.2 και της (5.2.6) παρατηρούμε ότι για $\ell \in \mathbb{N}$ και $\chi \in V_h$ ισχύει

$$\begin{aligned} a(\frac{d^\ell}{dt^\ell}E(0), \chi) &= \frac{d^\ell}{dt^\ell}\big((B(u(t)) - B(W(t))), \chi\big) \\ &= \frac{d^\ell}{dt^\ell}\big(\nabla(f(u) - f(W)), \chi\big) = -\big(\frac{d^\ell}{dt^\ell}(f(u) - f(W)), \nabla\chi\big) \\ &= -\Big(\sum_{j=0}^{\ell}\big(f^{(j)}(u)u^{(\ell-j)}(t) - f^{(j)}(W)W^{(\ell-j)}(t)\big), \nabla\chi\Big) \\ &= -\sum_{j=0}^{\ell}\Big(\big(f^{(j)}(u)(u^{(\ell-j)}(t) - W^{(\ell-j)}(t)), \nabla\chi\Big) \\ &\qquad + (f^{(j)}(u) - f^{(j)}(W))W^{(\ell-j)}(t)\big), \nabla\chi\Big). \end{aligned}$$

Σύμφωνα λοιπόν με τις (5.5α.20), (5.2.13), (5.5α.22) και (5.5α.21) από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι υπάρχει σταθερά $D_\ell$ τέτοια ώστε

$$\|\frac{d^\ell}{dt^\ell}E(0)\| \le D_\ell h^{r-d/2}.$$

Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε και την (Υ5.4.2).

**5.5β. Η γενικευμένη εξίσωση του Sobolev.** Θα εφαρμόσουμε τώρα τα αφηρημένα αποτελέσματά μας και στο ακόλουθο περιοδικό πρόβλημα αρχικών τιμών για μία εξίσωση τύπου Sobolev,

$$(5.5\beta.1)\quad \begin{cases} -(b(x)u_{tx})_x + c(x)u_t = -(\gamma(x,t,u)u_x)_x + \delta(x,t,u)u_x \\ \qquad\qquad + \varepsilon(x,t,u), \quad \text{για } x\in\mathbb{R},\ t\in J, \\ u(x,0) = u^0(x), \quad \text{για } x\in\mathbb{R}, \\ u(x+1,t) = u(x,t), \quad \text{για } (x,t)\in\mathbb{R}\times J. \end{cases}$$

Οι $b$ και $c$ είναι αυστηρά θετικές, συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις του $x$, 1–περιοδικές. Οι $\gamma$, $\delta$ και $\varepsilon$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις των $x$, $t$ και $u$, 1–περιοδικές ως προς $x$.

Οι εξισώσεις της μορφής (5.5β.1) έχουν χρησιμοποιηθεί για να μοντελοποιήσουν πολλές φυσικές διαδικασίες (σχετική βιβλιογραφία υπάρχει στην [29]). Ένα παράδειγμα με ιδιαίτερη σημασία είναι η εξίσωση

$$-u_{xxt} + u_t + (1+u)u_x - \nu u_{xx} = 0, \quad \nu \ge 0,$$

η οποία έχει μελετηθεί εκτενώς από τους Benjamin, Bona και Mahony, στην [8], και από άλλους ερευνητές (βλ. βιβλιογραφία στην [4]), σαν εναλλακτική στην εξίσωση Korteweg-de Vries για την περιγραφή μεγάλων ομοιοκατευθυνόμενων, αποσβενόμενων κυμάτων. Η αριθμητική επίλυση προβλημάτων της μορφής (5.5β.1) έχει εξεταστεί από πολλούς ερευνητές, όπως οι Ewing, Ford, Ting (βλ. βιβλιογραφία στην [4]), χρησιμοποιώντας τόσο μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων όσο και πεπερασμένων διαφορών.

Οι χώροι Sobolev 1–περιοδικών συναρτήσεων ορίζονται ως

$$H^s_{\rm p} = \{f\in H^s_{\rm loc}(\mathbb{R}) / f(x+1) = f(x),\ x\in\mathbb{R}\},$$

και η αντίστοιχη νόρμα στον $H^s_{\rm p}$ συμβολίζεται ως $\|\cdot\|_s = \|\cdot\|_{H^s(I)}$, όπου $I$ είναι ένα διάστημα μήκους ένα. Το εσωτερικό γινόμενο στον $H := L^2_{\rm p} = H^0_{\rm p}$ συμβολίζεται με $(\cdot,\cdot)$ και η επαγόμενη νόρμα ως $\|\cdot\|_0$.

Ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσεως του (5.5β.1) μπορεί να αποδειχθεί υπό διάφορες προϋποθέσεις (βλ. [4]). Υπό την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις $\gamma$, $\delta$ και $\varepsilon$ είναι φραγμένες, οι Arnold, Douglas και Thomée, στην [4, Θεώρημα 1.1], έδειξαν ότι για $u^0 \in H^1_{\rm p}$, το (5.5β.1) έχει μοναδική λύση $u \in C^1(J; H^1_{\rm p})$, και

$$\|u(\cdot,t)\|_1 \le C, \quad \forall t \in J, \tag{5.5β.2}$$

όπου η σταθερά $C$ εξαρτάται μόνο από τα $\|u^0\|_1$, $t^\star$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $b$ και $c$. Υποθέτουμε ακόμα ότι οι $b$ και $c$ ανήκουν στον $C^2(\mathbb{R})$ και ότι το (5.5β.1) έχει μοναδική λύση $u \in C^1(J; H^r_{\rm p})$, $r \ge 2$. 8

Έστω $A : H^2_{\rm p} \to H$, $Av = -(bv')' + cv$. Θέτουμε λοιπόν $V = D(A^{1/2}) = H^1_{\rm p}$. Η νόρμα στον $V$ θα είναι η $\|v\| = ((bv', v') + (cv, v))^{1/2}$, η οποία είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_1$. Έστω ακόμα $B : J \times H^2_{\rm p} \to H$, $B(t, v(x)) = -(\gamma(x,t,v(x))v')_x + \delta(x,t,v)v' + \varepsilon(x,t,v)$. Το (5.5β.1) ανήκει λοιπόν στην οικογένεια προβλημάτων (5.1.1). Για τη διακριτοποίηση στο χώρο θεωρούμε μία ημιομοιόμορφη διαμέριση του $[0,1]$, $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_J = 1$ με $h := \max_j (x_{j+1} - x_j)$. Θέτουμε $x_{jJ+i} := j + x_i$, $j \in \mathbb{Z}$, $i = 0, \ldots, J-1$. Επεκτείνουμε με αυτόν τον τρόπο τη διαμέριση περιοδικά σε μία διαμέριση του $\mathbb{R}$. Για ακέραιο $r \ge 2$, έστω $V_h$ ο χώρος των τουλάχιστον συνεχών, 1–περιοδικών splines, βαθμού $r-1$. Είναι γνωστό, βλ., παραδείγματος χάριν, [64, Theorem 8.12], ότι η οικογένεια $\{V_h\}_{0<h\le 1}$ έχει την προσεγγιστική ιδιότητα

$$\inf_{\chi \in V_h} \sum_{j=0}^{1} h^j \|v - \chi\|_j \le C h^s \|v\|_s, \quad \forall v \in H^s_{\rm p}, \quad 2 \le s \le r. \tag{5.5β.3}$$

Σε αυτή την εφαρμογή η διγραμμική μορφή $a(\cdot,\cdot)$, σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε στην παράγραφο 5.1, ορίζεται ως εξής,

$$a(v,w) = (bv', w') + (cv, w), \quad \forall v, w \in V,$$

οπότε η "ελλειπτική" προβολή $R_h : V \to V_h$ ορίζεται ως

$$(b(v - R_h v)', \chi') + (c(v - R_h v), \chi) = 0, \quad \forall \chi \in V_h. \tag{5.5β.4}$$

Μπορούμε να δούμε ότι η $R_h$ έχει την προσεγγιστική ιδιότητα

$$\|v - R_h v\|_0 + h\|v - R_h v\|_1 \le C h^s \|v\|_s,\ v \in H^s_{\rm p},\ 2 \le s \le r. \tag{5.5β.5}$$

Πράγματι, σύμφωνα με το δυϊκό επιχείρημα των Aubin και Nitsche, βλ. λόγου χάριν [70, Chapter 1, Theorem 1.1], για $v \in H^s_{\rm p}$ και $\chi \in V_h$, λόγω του ορισμού της νόρμας $\|\cdot\|$ και της (5.5β.4) έχουμε

$$\begin{aligned}\|v - R_h v\|^2 &= a(v - R_h v, v - R_h v) = a(v - R_h v, v - \chi)\\ &\le \|v - R_h v\|\,\|v - \chi\|,\end{aligned}$$

οπότε,

$$\|v - R_h v\| = \inf_{\chi \in V_h} \|v - \chi\|.$$

Άρα, λόγω της (5.5β.3), έχουμε

$$\|v - R_h v\| \le C h^{s-1} \|v\|_s, \quad \text{για } v \in H^s_{\rm p}, \quad 2 \le s \le r. \tag{5.5β.6}$$

Για να δείξουμε την (5.5β.5), μένει να εκτιμήσουμε και την $L^2$–νόρμα. Για αυτό το λόγο θεωρούμε το βοηθητικό πρόβλημα: Για $f \in L^2_{\rm p}$, ζητούμε $v \in H^2_{\rm p}$ τέτοιο ώστε

$$cv + (bv')' = f.$$

Είναι γνωστό, βλ. παραδείγματος χάριν [2, Θεώρημα 9.11], ότι υπάρχει σταθερά $C$ ανεξάρτητη των $f$, $v$, ώστε

$$\|v\|_2 \le C\big(\|f\|_0 + \|v\|_0\big).$$

Ακόμα εύκολα μπορούμε να δούμε ότι

$$\|v\|_0 \le C\|f\|_0.$$

Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις λαμβάνουμε

$$\|v\|_2 \le C\|f\|_0. \tag{5.5β.7}$$

Έτσι αν $w \in H^2_{\rm p}$ τέτοιο ώστε $cw + (bw')' = v - R_h v$, λόγω της (5.5β.4) έχουμε

$$\begin{aligned}\|v - R_h v\|_0^2 &= (v - R_h v, v - R_h v) = (Aw, v - R_h v) = a(w, v - R_h v)\\ &= a(w - \chi, v - R_h v) \le \|v - R_h v\|\,\|w - \chi\|, \quad \forall \chi \in V_h.\end{aligned}$$

Λόγω τώρα και των (5.5β.3), (5.5β.6) και (5.5β.7) έχουμε1

$$\begin{aligned}\|v - R_h v\|_0^2 &\le \inf_{\chi \in V_h} \|w - \chi\|\,\|v - R_h v\| \le C h^2 \|w\|_2 h^{s-1}\|v\|_s\\ &\le C h^s \|v\|_s \|v - R_h v\|_0.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\|v - R_h v\|_0 \le Ch^s \|v\|_s, \quad \text{για } v \in H^s_{\rm p}, \quad 2 \le s \le r. \tag{5.5β.8}$$

Από τις (5.5β.6) και (5.5β.8) εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει η (5.5β.5). Συνεπώς ικανοποιούνται οι υποθέσεις (Υ5.2.1) και (Υ5.2.2) της παραγράφου 5.2, με $d = 2$.

Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_{L^\infty}$ τη νόρμα στον $L^\infty(\mathbb{R})$. Είναι απλό να δούμε ότι

$$\|v\|_{L^\infty} \le \|v\|_1, \quad \forall v \in H^1_{\rm p}. \tag{5.5β.9}$$

Έστω $\|\cdot\|_{1,\infty}$ η νόρμα του χώρου Sobolev $W^{1,\infty}_{\rm p}(\mathbb{R})$. Σύμφωνα με την ανισότητα του Sobolev, βλ., παραδείγματος χάριν, [12, Theorem 1.4.6], υπάρχει σταθερά $C$ τέτοια ώστε

$$\|u\|_{1,\infty} \le C\|u\|_2, \quad \forall u \in H^2_{\rm p}. \tag{5.5β.10}$$

Είναι γνωστό τώρα ότι υπάρχει ένα στοιχείο $Q_h u \in V_h$, τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} &\|Q_h u - u\|_1 \le Ch^{s-1}\|u\|_s, \quad s \ge 1 \\ &\text{και} \quad \|Q_h u\|_{1,\infty} \le C\|u\|_{1,\infty}, \end{aligned} \tag{5.5β.11}$$

βλ. φερ' ειπείν, [64, Theorem 8.12]. Επίσης στον χώρο $V_h$, ισχύει η εξής αντίστροφη ανίσοτητα

$$\|\chi\|_{1,\infty} \le Ch^{-1/2}\|\chi\|_1, \quad \forall \chi \in V_h. \tag{5.5β.12}$$

Έχουμε λοιπόν ότι η υπόθεση (Υ5.2.2′) ισχύει με $|||\cdot||| := \|\cdot\|_{1,\infty}$ και $\widetilde{d} = 1/2$. Επομένως, σύμφωνα με την παράγραφο 5.2, $G = \{\chi \in V_h : \exists\, t \in J\, \|W(t) - \chi\|_{1,\infty} < 1\}$. Ακόμα, επειδή οι νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμες, ορίζουμε τώρα το σύνολο $M$ ως $M = \{\chi \in V_h : \exists\, t \in J\, \|u(\cdot,t) - \chi\| < 1\}$. Θέτουμε τώρα $\widetilde{M} = \{U \in \mathbb{R} : \exists\, (x,t) \in \mathbb{R} \times J\, |u(x,t) - U| < 1\}$. Από τον ορισμό του $\widetilde{M}$ είναι προφανές ότι υπάρχει σταθερά $\widetilde{C}(u)$ τέτοια ώστε

$$|U| \le \max_{t\in J} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} + 1 \le \widetilde{C}, \quad \forall U \in \widetilde{M}. \tag{5.5β.13}$$

Από τον ορισμό του $M$ και την (5.5β.6) συμπεραίνουμε ότι

$$\forall \chi \in M \quad \exists\, t \in J \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |u(x,t) - \chi(x)| < 1, \tag{5.5β.14}$$

οπότε

$$\chi(x) \in \widetilde{M}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \chi \in M. \tag{5.5β.15}$$

Για $f \in C^1(\mathbb{R} \times J \times \mathbb{R})$ πραγματική συνάρτηση, περιοδική ως προς την πρώτη της μεταβλητή, συμβολίζουμε με $\widetilde{f}$ μία συνάρτηση που ταυτίζεται με την $f$ στο $\mathbb{R} \times J \times \widetilde{M}$, και ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz, ως προς την τρίτη μεταβλητή, ομοιόμορφα ως προς τις άλλες δύο, με σταθερά Lipschitz $L_f$. Συνεπώς λόγω της (5.5β.15) έχουμε

$$\begin{aligned} &\|f(\cdot,t,\chi) - f(\cdot,t,w)\|_0 \\ &\le L_f \|\chi - w\|_0, \quad \forall t \in J, \quad \forall \chi, \psi \in M. \end{aligned} \tag{5.5β.16}$$

2 Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $\gamma$ και $\delta$ περιορισμένες στο $\mathbb{R} \times J \times \widetilde{M}$ είναι φραγμένες, γιατί είναι 1–περιοδικές ως προς την πρώτη τους μεταβλητή, η δεύτερη μεταβλητή ορίζεται σε ένα φραγμένο διάστημα, και σύμφωνα με την (5.5β.13) η τρίτη είναι φραγμένη. Επομένως, σύμφωνα και με την (5.5β.15) υπάρχει μία σταθερά $C(u)$ τέτοια ώστε

$$\max_{t \in J} \|\gamma(\cdot,t,\chi)\|_{L^\infty} \le C, \quad \forall \chi \in M \tag{5.5β.17}$$

και

$$\max_{t \in J} \|\delta(\cdot,t,\chi)\|_{L^\infty} \le C, \quad \forall \chi \in M. \tag{5.5β.18}$$

Θεωρούμε την (5.5β.16) για τις $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, οπότε λόγω και των (5.5β.17) και (5.5β.18), για $v, w \in V$ και $\varphi \in H^1_{\mathrm{p}}$ έχουμε,

$$\begin{aligned} (B(t,v) - B(t,w), \varphi) &= (\gamma(\cdot,t,v)v' - \gamma(\cdot,t,w)w', \varphi') \\ &\quad + (\delta(\cdot,t,v)v' - \delta(\cdot,t,w)w', \varphi) + (\varepsilon(\cdot,t,v) - \varepsilon(\cdot,t,w), \varphi) \\ &= (\gamma(\cdot,t,v)(v-w)' + \big(\gamma(\cdot,t,v) - \gamma(\cdot,t,w)\big)w', \varphi') \\ &\quad + (\delta(\cdot,t,v)(v-w)', \varphi) + \big((\delta(\cdot,t,v) - \delta(\cdot,t,w))w', \varphi\big) \\ &\quad + (\varepsilon(\cdot,t,v) - \varepsilon(\cdot,t,w), \varphi) \\ &\le \Big( \|\gamma(\cdot,t,v)\|_{L^\infty} \|v-w\|_1 + L_\gamma \|v-w\|_0 \, \|w'\|_{L^\infty} \Big) \|\varphi'\|_0 \\ &\quad + \Big( \|\beta(\cdot,t,v)\|_{L^\infty} \|v-w\|_1 + \big(L_\delta \|w'\|_{L^\infty} + L_\varepsilon\big) \|v-w\|_0 \Big) \|\varphi\|_0 \\ &\le C\big(1 + \|w'\|_{L^\infty}\big) \|v-w\|_1 \|\varphi\|_1. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$|(B(t,v)-B(t,w),\varphi)| \le C\big(1+\|w'\|_{L^\infty}\big)\|v-w\|_1\|\varphi\|_1. \tag{5.5β.19}$$

Από τις (5.5β.10)–(5.5β.12) και την (5.5β.3) έχουμε για κάθε $\chi \in G$ ότι

$$\begin{aligned}\|\chi\|_{1,\infty} &\le \|Q_h u\|_{1,\infty} + \|Q_h u - R_h u\|_{1,\infty} + \|R_h u - \chi\|_{1,\infty}\\ &\le C\|u\|_{1,\infty} + Ch^{-1/2}\|Q_h u - R_h u\|_1 + 1\\ &\le C\|u\|_2 + Ch^{-1/2}\big(\|Q_h u - u\|_1 + \|R_h u - u\|_1\big) + 1\\ &\le C\|u\|_2 + Ch^{-1/2}\big(\|Q_h u - u\|_1 + \|R_h u - u\|_1\big) + 1\\ &\le C\big(\|u\|_2 + h^{r-1/2}\|u\|_r\big) + 1.\end{aligned}$$

Λόγω του ότι $r \ge 2$, έχουμε συνεπώς

$$\|\chi\|_{1,\infty} \le C\|u\|_r + 1, \quad \forall \chi \in G.$$

Σύμφωνα με την προηγουμένη εκτίμηση αν θέσουμε $v = \chi$ και $w = \psi$, με $\chi, \psi \in G$, στην (5.5β.19), παρατηρούμε ότι υπάρχει σταθερά $L_1(u)$ τέτοια ώστε

$$\|B(t,\chi) - B(t,\psi)\|_\star \le L_1\|\chi - \psi\|_1, \quad \forall \chi, \psi \in G.$$

2 Από την προηγούμενη ανισότητα εύκολα βλέπουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις (Υ5.2.3) και (Υ5.2.5).

Θέλουμε ακόμα να δείξουμε ότι ικανοποιούνται και οι (Υ5.2.2) και (Υ5.2.6). Θεωρούμε λοιπόν τη βοηθητική συνάρτηση $q : \mathbb{R}\times J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$q(x,t,y) = \frac{1}{b(x)}\int_0^y \gamma(x,t,z)\,dz.$$

Θα δείξουμε ότι

$$q(\cdot,t,\chi) \in H^1_{\mathrm{p}}, \quad \forall t \in J, \quad \forall \chi \in M. \tag{5.5β.20}$$

Από τον ορισμό της $q$ έπεται ότι αυτή είναι 1–περιοδική ως προς $x$ και φραγμένη για $y$ φραγμένο. Επομένως, από τις (5.5β.13) και (5.5β.15), επειδή η $b$ είναι κάτω φραγμένη από μία θετική σταθερά, έχουμε

$$q(\cdot,t,\chi) \in H^0_{\mathrm{p}}, \quad \forall t \in J, \quad \forall \chi \in M. \tag{5.5β.21}$$

Επίσης οι $q_x(x,t,\chi(x))$ και $q_y(x,t,\chi(x))$ είναι συνεχείς και 1–περιοδικές συναρτήσεις ως προς $x$, όπου $\chi$ είναι μία συνάρτηση συνεχής και 1–περιοδική. Οι συναρτήσεις αυτές τώρα λόγω των (5.5β.13) και (5.5β.15) είναι φραγμένες στο $\mathbb{R}\times J\times M$. Έχουμε λοιπόν ότι $(q(x,t,\chi(x)))_x \in H^0_{\rm p}$ για κάθε $t\in J$ και $\chi\in M$. Επομένως ισχύει η (5.5β.20). Τώρα για $t\in J$ και $\chi,\psi\in M$ έχουμε

$$\begin{aligned} a(q(\cdot,t,\chi),\psi) &= (bq(\cdot,t,\chi)_x,\psi') + (cq(\cdot,t,\chi)\chi,\psi) \\ &= (\gamma(x,t,\chi)\chi' + \int_0^\chi \gamma_x(\cdot,t,z)\,dz \\ &- b'(x)q(\cdot,t,\chi),\psi') \\ &\quad + (cq(\cdot,t,\chi),\psi). \end{aligned} \tag{5.5β.22}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τον τελεστή $F: J\times V\to V'$ ως εξής,

$$\begin{aligned} (F(t,v),w) = (\int_0^v \gamma_x(\cdot,t,z)\,dz - b'(x)q(\cdot,t,v),w') \\ + (cq(\cdot,t,v),w), \quad \forall w\in H^1_{\rm p}. \end{aligned} \tag{5.5β.23}$$

Έτσι, για $\chi\in M$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (B(t,\chi),w) = a(q(\cdot,t,\chi),w) - (F(t,\chi),w) + (\delta(\cdot,t,\chi)\chi' \\ + \varepsilon(\cdot,t,\chi),w), \quad \forall w\in H^1_{\rm p}. \end{aligned}$$

Συνεπώς από την προηγούμενη σχέση για $\chi\in M$ και $w\in H^1_{\rm p}$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} (TB(t,\chi),w) = (q(\cdot,t,\chi),w) - (TF(t,\chi),w) \\ + (T(\delta(\cdot,t,\chi)\chi' + \varepsilon(\cdot,t,\chi)),w). \end{aligned} \tag{5.5β.24}$$

Θεωρούμε τώρα τις συναρτήσεις $f_1,\ f_2 : \mathbb{R}\times J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζονται ως εξής

$$\begin{aligned} &f_1(x,t,y) = \int_0^y \gamma_x(x,t,z)\,dz - b'(x)q(x,t,y) \\ &\text{και} \quad f_2(x,t,y) = c(x)q(x,t,y). \end{aligned}$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι οι $f_1$ και $f_2$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Σύμφωνα τώρα με τον ορισμό των $f_1$ και $f_2$ και τις

(5.5β.16) και (5.5β.23), για $\chi, \psi \in M$ και $\varphi \in H^1_{\mathrm{p}}$ έχουμε

$$\begin{aligned}(F(t,\chi) - F(t,\psi), \varphi) &= (f_1(\cdot,t,\chi) - f_1(\cdot,t,\psi), \varphi') \\ &\quad + (f_2(\cdot,t,\chi) - f_2(\cdot,t,\psi), \varphi) \\ &\le \big(\|f_1(\cdot,t,\chi) - f_1(\cdot,t,\psi)\|_0 + \|f_2(\cdot,t,\chi) - f_2(\cdot,t,\psi)\|_0\big)\|\varphi\|_1 \\ &\le C(L_{f_1}\|\chi-\psi\|_0 + L_{f_2}\|\chi-\psi\|_0)\|\varphi\|_0.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\|F(t,\chi) - F(t,\psi)\|_\star \le C\|\chi-\psi\|_0, \quad \forall \chi,\psi \in M. \tag{5.5β.25}$$

Θεωρούμε ακόμα τις συναρτήσεις $g_1,\ g_2 : \mathbb{R}\times J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζονται ως εξής

$$g_1(x,t,y) = \int_0^y \delta(x,t,z)\,dz \quad \text{και} \quad g_2(x,t,y) = \int_0^y \delta_x(x,t,z)\,dz.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned}\big(g_1(x,t,\chi(x))\big)_x - g_2(x,t,\chi(x)) &= \left(\int_0^{\chi(x)} \delta(x,t,z)\,dz\right)_x \\ &\quad - \int_0^{\chi(x)} \delta_x(x,t,z)\,dz \\ &= \delta(x,t,\chi)\chi'(x).\end{aligned}$$

Συνεπώς, για $\chi, \psi \in M$ και $\varphi \in H^1_{\mathrm{p}}$,

$$\begin{aligned}(\delta(\cdot,t,\chi)\chi' - \delta(\cdot,t,\psi)\psi', \varphi) &= -(g_1(\cdot,t,\chi) - g_1(\cdot,t,\psi), \varphi') \\ &\quad - (g_2(\cdot,t,\chi) - g_2(\cdot,t,\psi), \varphi).\end{aligned}$$

Σύμφωνα λοιπόν με την (5.5β.16) για τις $g_1$ και $g_2$, για $t \in J$, $\chi, \psi \in M$ και $\varphi \in H^1_{\mathrm{p}}$ έχουμε

$$\begin{aligned}(\delta(\cdot,t,\chi)\chi' - \delta(\cdot,t,\psi)\psi', \varphi) &\le \|g_1(\cdot,t,\chi) - g_1(\cdot,t,\psi)\|_0\|\varphi\|_1 \\ &\quad + \|g_2(\cdot,t,\chi) - g_2(\cdot,t,\psi)\|_0\|\varphi\|_1 \le C\big(L_{g_1} + L_{g_2}\big)\|\chi-\psi\|_0\,\|\varphi\|_0.\end{aligned}$$

Άρα

$$\|\delta(\cdot,t,\chi)\chi' - \delta(\cdot,t,\psi)\psi'\|_\star \le C\|\chi-\psi\|_0, \quad \forall \chi,\psi \in M. \tag{5.5β.26}$$

Επομένως από την (5.5β.16) για τις συνάρτησεις $q$ και $\varepsilon$, τις (5.5β.24), (5.5β.25) και (5.5β.26) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\|TB(t,\chi)-TB(t,\psi)\|_0 &\le \|q(\cdot,t,\chi)-q(\cdot,t,\psi)\|_0\\ &+\|F(t,\chi)-F(t,\psi)\|_\star+\|\delta(\cdot,t,\chi)\chi'-\delta(\cdot,t,\psi)\psi'\|_\star\\ &+\|\varepsilon(\cdot,t,\chi)-\varepsilon(\cdot,t,\psi)\|_0\le C\|\chi-\psi\|_0,\quad \forall\chi,\psi\in M.\end{aligned}$$

Εύκολα πλέον βλέπουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις (Υ5.2.4) και (Υ5.2.6).

Έστω τώρα $U^0,\dots,U^{q-1}\in V_h$ προσεγγίσεις των $u^0,\dots,u^{q-1}$, τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{q-1}\|U^j-u^j\|_0\le C\big(k^p+h^r\big)\\ &\text{και}\quad \sum_{j=0}^{q-1}\|U^j-u^j\|_1\le C\big(k^p+h^{r-1}\big).\end{aligned}\tag{5.5β.27}$$

Ορίζουμε τότε τις προσεγγίσεις $U^n\in V_h$, $n=q,\dots,N$, αναδρομικά από το σχήμα

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{q}\alpha_j\big[(cU^{n+j},\chi)+(b(U^{n+j})',\chi')\big]\\ =&k\sum_{j=0}^{q-1}\beta_j\big[(\gamma(\cdot,t^{n+j},U^{n+j})(U^{n+j})',\chi')\\ &+(\delta(\cdot,t^{n+j},U^{n+j})(U^{n+j})'\\ &+\varepsilon(\cdot,t^{n+j},U^{n+j}),\chi)\big],\ \forall\chi\in V_h,\ n=0,\dots,N-q.\end{aligned}\tag{5.5β.28}$$

Τότε από την Πρόταση 5.4.1, για $k$, $h$ κατάλληλα μικρά λαμβάνουμε τις εκτιμήσεις σφάλματος

$$\max_{0\le n\le N}\|u^n-U^n\|_0\le C(k^p+h^r).\tag{5.5β.29}$$

$$\max_{0\le n\le N}\|u^n-U^n\|_1\le C(k^p+h^{r-1}).\tag{5.5β.30}$$

**5.5γ. Μία ψευδοπαραβολική εξίσωση.** Θεωρούμε το εξής πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών: Για $t^\star > 0$ ζητούμε μία πραγματική συνάρτηση $u$, που ορίζεται στο $\overline{\Omega} \times J$, τέτοια ώστε

$$u_t(x,t) - \eta \Delta u_t(x,t) = \lambda \Delta u(x,t), \quad \text{στο } \Omega \times J, \tag{5.5γ.1α}$$

$$u(\cdot,0) = u^0, \quad \text{στο } \Omega, \tag{5.5γ.1β}$$

$$u = 0, \quad \text{στο } \partial\Omega \times J. \tag{5.5γ.1γ}$$

όπου $u^0$ δοσμένη ομαλή συνάρτηση και $\Omega$ φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^m$, $m \leq 3$, με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$, $\eta > 0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Οι εξισώσεις αυτής της μορφής ονομάζονται ψευδοπαραβολικές γιατί η λύση του παραβολικού προβλήματος ($\eta = 0$ και $\lambda > 0$) προσεγγίζεται από τις λύσεις των προβλημάτων με $\eta_n$, όπου $\eta_n$ μία μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών, βλ. [65], [30] και τις αναφορές τους. Οι Showalter και Ting, στην [65], έδειξαν μοναδικότητα και ομαλότητα της λύσεως $u$ του (5.5γ.1).

Μερικές εφαρμογές της (5.5γ.1α) που αναφέρουν στην εργασία τους αυτή είναι οι ακόλουθες: Η υδροστατική πίεση σε ένα κομμάτι πυλού κατά τη διάρκεια στερεοποίησης ικανοποιεί μία εξίσωση της μορφής (5.5γ.1α), βλ. [68]. Εάν θεωρήσουμε ότι η αντίσταση στη συμπίεση είναι πλαστική (δηλαδή ανάλογη με το ρυθμό της συμπίεσης) τότε η (5.5γ.1α) ισχύει με $\eta > 0$. Ένα άλλο φυσικό φαινόμενο που περιγράφεται από την (5.5γ.1α) δίνεται από τη θεωρία της διαρροής ενός ομογενούς υγρού μέσα από έναν ραγισμένο βράχο, βλ. [6]. Επίσης σύμφωνα με τη θεωρία των δύο θερμοκρασιών για τη μετάδοση της θερμότητας σε μία κατηγορία υλικών, η αγώγιμη θερμοκρασία ικανοποιεί μία εξίσωση της μορφής (5.5γ.1α), βλ. [18] και [72].

Συμβολίζουμε με $H^s$ το χώρο Sobolev $H^s(\Omega)$, με $H_0^s$ το χώρο $H_0^s(\Omega)$, και με $\|\cdot\|_s$ τη συνήθη νόρμα στον $H^s$. Έστω $H = L^2(\Omega) = H^0$, $(\cdot,\cdot)$ το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $L^2$, και $\|\cdot\|_0$ η παραγόμενη νόρμα. Έστω ακόμα $A : H^2 \cap H_0^1 \to L^2$, $Av = (I - \eta\Delta)v$ και $B : H^2 \cap H_0^1 \to L^2$, $Bv = \lambda\Delta v$. Θέτουμε $V = D(A^{1/2}) = H_0^1$ με νόρμα $\|v\| = \left(\|v\|_0^2 + \eta\|\nabla v\|_0^2\right)^{1/2}$, η οποία είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_1$. Μπορούμε λοιπόν να δούμε ότι το (5.5γ.1) ανήκει στην κατηγορία προβλημάτων που δίνονται από την (5.1.1).

Για τη διακριτοποίηση στο χώρο θεωρούμε έναν τριγωνισμό του $\Omega$. Για ευκολία θεωρούμε ότι ο $V_h$ είναι ένας υπόχωρος του $H_0^1$ που αποτελείται από συνεχείς κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις, βαθμού το πολύ $r-1$, $r \geq 2$. Έχοντας όμως υπόψιν ότι στην περίπτωση ενός καμπύλου συνόρου $\partial\Omega$ η υπόθεση $V \subset V_h$ μπορεί να μην ισχύει, βλ. Παρατήρηση

5.2.0, υποθέτουμε ότι ο $V_h$ έχει την προσεγγιστική ιδιότητα

$$\begin{aligned}&\inf_{\chi\in V_h}\big(\|v-\chi\|_0+h\|v-\chi\|_1\big)\\&\le Ch^s\|v\|_s,\quad \forall v\in H^s\cap H_0^1,\quad 2\le s\le r.\end{aligned}\tag{5.5γ.2}$$

με σταθερά $C$ ανεξάρτητη του $h$. Σε αυτή την εφαρμογή η διγραμμική μορφή $a(\cdot,\cdot)$, σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε στην παράγραφο 5.1, ορίζεται ως εξής,

$$a(v,w)=(v,w)+\eta(\nabla v,\nabla w),\quad \forall v,w\in V,$$

οπότε, η "ελλειπτική" προβολή $R_h:V\to V_h$ ορίζεται ως

$$(v-R_hv,\chi)+\eta(\nabla(v-R_hv),\nabla\chi)=0,\quad \forall\chi\in V_h.\tag{5.5γ.3}$$

Μπορούμε να δούμε ότι η $R_h$ έχει την προσεγγιστική ιδιότητα

$$\begin{aligned}&\|v-R_hv\|_0+h\|v-R_hv\|_1\\&\le Ch^s\|v\|_s,\quad \forall v\in H^s\cap H_0^1,\quad 2\le s\le r.\end{aligned}\tag{5.5γ.4}$$

με σταθερά $C$ ανεξάρτητη του $h$. Πράγματι, σύμφωνα με το δυϊκό επιχείρημα των Aubin και Nitsche, βλ., λόγου χάριν, [70, Chapter 1, Theorem 1.1], για $v\in H^s\cap V$ και $\chi\in V_h$, λόγω του ορισμού της νόρμας $\|\cdot\|$ και της (5.5γ.3) έχουμε

$$\begin{aligned}\|v-R_hv\|^2&=a(v-R_hv,v-R_hv)=a(v-R_hv,v-\chi)\\&\le\|v-R_hv\|\,\|v-\chi\|,\end{aligned}$$

οπότε,

$$\|v-R_hv\|=\inf_{\chi\in V_h}\|v-\chi\|.$$

Άρα, λόγω της (5.5γ.2), έχουμε

$$\|v-R_hv\|\le Ch^{s-1}\|v\|_s,\quad \text{για } v\in H^s\cap H_0^1,\quad 2\le s\le r.\tag{5.5γ.5}$$

Για να δείξουμε την (5.5γ.4), μένει να εκτιμήσουμε και την $L^2$–νόρμα. Για αυτό το λόγο θεωρούμε το βοηθητικό πρόβλημα: Για $f\in L^2(\Omega)$, ζητούμε $v\in H^2\cap H_0^1$ τέτοιο ώστε

$$\big(I+\eta\Delta\big)v=f.$$

Είναι γνωστό ότι υπάρχει σταθερά $C$ ανεξάρτητη των $f$, $v$, ώστε

$$\|v\|_2 \le C\big(\|f\|_0 + \|v\|_0\big),$$

βλ. παραδείγματος χάριν [2, Theorem 9.11], [36, Chapter 4]. Ακόμα εύκολα μπορούμε να δούμε ότι

$$\|v\|_0 \le C\|f\|_0.$$

Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις λαμβάνουμε

$$\|v\|_2 \le C\|f\|_0. \tag{5.5γ.6}$$

Έτσι αν $w \in H^2 \cap H_0^1$ τέτοιο ώστε $\big(I + \eta\Delta\big)w = v - R_h v$, λόγω της (5.5γ.3) έχουμε

$$\begin{aligned}\|v - R_h v\|_0^2 &= (v - R_h v, v - R_h v) = (Aw, v - R_h v) = a(w, v - R_h v)\\ &= a(w - \chi, v - R_h v) \le \|v - R_h v\|\,\|w - \chi\|, \quad \forall \chi \in V_h.\end{aligned}$$

Λόγω τώρα και των (5.5γ.2), (5.5γ.5) και (5.5γ.6) έχουμε

$$\begin{aligned}\|v - R_h v\|_0^2 &\le \inf_{\chi\in V_h} \|w - \chi\|\,\|v - R_h v\| \le Ch^2\|w\|_2 h^{s-1}\|v\|_s\\ &\le Ch^s\|v\|_s\|v - R_h v\|_0.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\|v - R_h v\|_0 \le Ch^s\|v\|_s, \quad \text{για } v \in H^s \cap H_0^1, \quad 2 \le s \le r. \tag{5.5γ.7}$$

Από τις (5.5γ.5) και (5.5γ.7) εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει η (5.5γ.4). Συνεπώς ικανοποιούνται οι υποθέσεις (Υ5.2.1) και (Υ5.2.2) της παραγράφου 5.2, με $d = 2$.

Ακόμα για $v, w, \varphi \in H_0^1$ έχουμε ότι

$$(B(v) - B(w), \varphi) = -\lambda(\nabla(v - w), \nabla\varphi) \le |\lambda|\,\|v - w\|_1\|\varphi\|_1.$$

Συνεπώς

$$\|B(v) - B(w)\|_\star \le L_1\|v - w\|_1, \quad \forall v, w \in V. \tag{5.5γ.8}$$

Από τις (5.5γ.8) και (5.5γ.4) βλέπουμε ότι ικανοποιούνται οι (Υ5.2.3) και (Υ5.2.5). Ακόμα έχουμε ότι

$$(B(v), w) = -\lambda(\nabla v, \nabla w) = -\frac{\lambda}{\eta}a(v, w) + \frac{\lambda}{\eta}(v, w), \quad \forall v, w \in V.$$

Επομένως,

$$(TB(v),w) = -\frac{\lambda}{\eta}(v,w) + \frac{\lambda}{\eta}(Tv,w), \quad \forall v,w \in V.$$

Συνεπώς

$$\|TB(v) - TB(w)\|_0 \le L_2 \|v-w\|_0, \quad \forall v,w \in V. \tag{5.5γ.9}$$

Από τις (5.5γ.9) και (5.5γ.4) βλέπουμε ότι ικανοποιούνται οι (Υ5.2.4) και (Υ5.2.5).

Έστω λοιπόν $U^0,\dots,U^{q-1} \in V_h$ προσεγγίσεις των $u^0,\dots,u^{q-1}$ τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{q-1} \|U^j - u^j\|_0 \le C\big(k^p + h^r\big) \\ &\text{και } \sum_{j=0}^{q-1} \|U^j - u^j\|_1 \le C\big(k^p + h^{r-1}\big). \end{aligned} \tag{5.5γ.10}$$

Ορίζουμε τις προσεγγίσεις $U^n \in V_h$, $n = q,\dots,N$, αναδρομικά από το σχήμα

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{q} \alpha_j \big[(U^{n+j},\chi) + \eta(\nabla U^{n+j},\nabla\chi)\big] \\ &= k\lambda \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j (\nabla U^{n+j},\nabla\chi), \quad \forall \chi \in V_h, \quad n = 0,\dots,N-q. \end{aligned} \tag{5.5γ.11}$$

Τότε από την Πρόταση 5.4.1, για $k$, $h$ κατάλληλα μικρά, λαμβάνουμε τις εκτιμήσεις σφάλματος

$$\max_{0\le n\le N} \|u^n - U^n\|_0 \le C(k^p + h^r) \tag{5.5γ.12}$$

$$\max_{0\le n\le N} \|u^n - U^n\|_1 \le C(k^p + h^{r-1}). \tag{5.5γ.13}$$

*Παρατήρηση 5.5γ.1:* Λόγω των (5.5γ.8) και (5.5γ.9), οι (Υ5.2.3) και (Υ5.2.4) ισχύουν για κάθε $v,w \in V$. Σύμφωνα λοιπόν με τις Παρατηρήσεις 5.2.1, 5.3.1 και 5.4.1, σε αυτή την εφαρμογή δεν είναι

απαραίτητη η υπόθεση (Υ5.2.2′), ούτε κάποια συνθήκη για το $k$, για την απόδειξη των προτάσεων 5.2.1, 5.3.1 και 5.4.1.

*Παρατήρηση 5.5γ.2:* Σε αυτή την εφαρμογή οι υποθέσεις (Υ5.4.1) και (Υ5.4.2) της Παρατήρησης 5.4.2 ικανοποιούνται. Πράγματι λόγω του ορισμού της $E$ στην Παρατήρηση 5.4.2 και της (5.2.6), για $\chi \in V_h$ και $\ell \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} a\big(\frac{d^\ell}{dt^\ell}E(t),\chi\big) &= \frac{d^\ell}{dt^\ell}(B(u(t))-B(W(t)),\chi) = \frac{d^\ell}{dt^\ell}(\nabla(u-W),\nabla\chi) \\ &= (\nabla\frac{d^\ell}{dt^\ell}(u-W),\nabla\chi) \le \|u^{(\ell)}-W^{(\ell)}\|_1\|\chi\|_1. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με το Λήμμα 5.2.1

$$\big|\big|\frac{d^\ell}{dt^\ell}E(0)\big|\big|_1 \le D_\ell h^{r-1}.$$

Παρόμοια δείχνουμε ότι ισχύει

$$\big|\big|\frac{d^\ell}{dt^\ell}E(0)\big|\big|_0 \le D_\ell h^{r}.$$

**5.5δ. Ένα σύστημα τύπου Boussinesq.** Θα εφαρμόσουμε τώρα τα αφηρημένα αποτελέσματά μας και στο ακόλουθο σύστημα αρχικών και συνοριακών τιμών τύπου Boussinesq. Για $t^\star > 0$, ζητούμε μία συνάρτηση $\underline{u} = (u_1, u_2) : [0, L_0] \times J \to \mathbb{R}^2,\ L_0 > 0,$ τέτοια ώστε

$$\text{(5.5δ.1)} \qquad \begin{cases} \underline{u}_t - \dfrac{1}{6}\underline{u}_{xxt} = B(\underline{u}), \quad \text{στο } [0,L_0]\times J \\ \underline{u}(\cdot,0) = \underline{u}^0, \quad \text{στο } [0,L_0], \\ \underline{u} = \underline{0}, \quad \text{στο } \{0,L_0\}\times J \end{cases}$$

όπου $\underline{u}^0$ είναι δοσμένη αρκετά ομαλή διανυσματική συνάρτηση, $B : [0, L_0] \times J \to \mathbb{R}^2,\ B(\underline{v}) = (-(v_2)_x - (v_1v_2)_x, -(v_1)_x - v_2(v_2)_x)$, και συμβολίζουμε με $\underline{v}_x = ((v_1)_x, (v_2)_x)$.

Το σύστημα (5.5δ.1) είναι μία προσέγγιση της διδιάστατης διάδοσης επιφανειακών κυμάτων σε ένα ομοιόμορφο κανάλι μήκους $L_0$ και βάθους 1 γεμάτο με ασυμπίεστο τέλειο υγρό, βλ. [9]. Ακόμα σε αυτή τους την εργασία οι Bona και Chen δείχνουν ύπαρξη, μοναδικότητα της κλασικής

λύσεως $\underline{u}$ του (5.5δ.1) και για $\underline{u}^0 \in C^\ell(0,L_0)^2$, $\ell \geq 2$, και αποδεικνύουν ότι υπάρχει $\widetilde{t}^\star > 0$, τέτοιο ώστε

$$\underline{u} \in C^\ell(0,\widetilde{t}^\star; C^\ell(0,L_0))^2.$$

Για $s \in \mathbb{N}$, συμβολίζουμε με $H^s$ το χώρο Sobolev $H^s(0,L_0)$, με $H^s_0$ το χώρο Sobolev $H^s_0(0,L_0)$, με $|\cdot|_s$ τη νόρμα του $H^s$. Στη συνέχεια θέτουμε $\widetilde{H^s} = H^s \times H^s$, $\widetilde{H^s_0} = H^s_0 \times H^s_0$ και θεωρούμε την εξής νόρμα του $\widetilde{H}^s$ $\|\underline{v}\|_s = \left(|v_1|_s^2 + |v_2|_s^2\right)^{1/2}$. Θέτουμε τώρα $H = \widetilde{H^0}$. Συμβολίζουμε ακόμα με $<\cdot,\cdot>$ το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $H^0$ και με $(\underline{v},\underline{w}) =< v_1,w_1 > + < v_2,w_2 >$ το εσωτερικό γινόμενο στον $H$. Επίσης θεωρούμε τους τελεστές $\partial_x : \widetilde{H}^1 \to \widetilde{H}^0$, $\partial_x \underline{v} = ((v_1)_x,(v_2)_x)$, $A : \widetilde{H^2} \cap \widetilde{H^1_0} \to H$, $A\underline{v} = (I - \frac{1}{6}\partial_x^2)\underline{v}$. Θέτουμε τότε $V = D(A^{1/2}) = \widetilde{H^1_0}$ με νόρμα $\|\underline{v}\| = \left(\|\underline{v}\|_0^2 + \frac{1}{6}\|\partial_x \underline{v}\|_0^2\right)^{1/2}$ η οποία είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_1$. Επομένως το (5.5δ.1) ανήκει στην κατηγορία προβλημάτων που δίνονται από την (5.1.1). Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι σε αυτό το πρόβλημα ισχύουν οι υποθέσεις (Υ5.2.1), (Υ5.2.2), (Υ5.2.3)–(Υ5.2.).

Για τη διακριτοποίηση στο χώρο, θεωρούμε μία διαμέριση του $[0,L_0]$, $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_J = L_0$ με $h := \max_{0\leq j\leq J}(x_{j+1} - x_j)$. Για ακέραιο $r \geq 2$, έστω $S_h = \{\chi \in C[0,L_0] : \chi_{|[x_j,x_{j+1}]}$ είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $r-1$, $j = 0,\ldots,J-1$, $\chi(0) = \chi(L_0) = 0\}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η οικογένεια $\{S_h\}_{0<h\leq 1}$ έχει την προσεγγιστική ιδιότητα

$$(5.5\delta.2)\quad \inf_{\chi\in S_h} \sum_{j=0}^{1} h^j |v-\chi|_j \leq Ch^s |v|_s, \quad \forall v \in H^s \cap H^1_0, \quad 2 \leq s \leq r$$

με σταθερά $C$ ανεξάρτητη του $h$. Θεωρούμε τώρα ως $V_h = S_h \times S_h$. Τότε για $\underline{v} \in V$ έχουμε

$$\inf_{\underline{\chi}\in V_h} \sum_{j=0}^{1} h^j \|\underline{v}-\underline{\chi}\|_j^2 \leq \inf_{\chi_1\in S_h} \sum_{j=0}^{1} h^j |v_1-\chi_1|_j^2 + \inf_{\chi_2\in S_h} \sum_{j=0}^{1} h^j |v_2-\chi_2|_j^2.$$

Επομένως, σύμφωνα με την (5.5δ.2), η παραπάνω σχέση δίνει

$$(5.5\delta.3)\quad \inf_{\underline{\chi}\in V_h} \sum_{j=0}^{1} h^j \|\underline{v}-\underline{\chi}\|_j \leq Ch^s \|\underline{v}\|_s, \ \forall \underline{v} \in \widetilde{H}^s \cap \widetilde{H}^1_0, \ 2 \leq s \leq r.$$

Σε αυτή την εφαρμογή η διγραμμική μορφή $a$, σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε στην παράγραφο 5.1, ορίζεται ως

$$a(\underline{v},\underline{w}) = (\underline{v},\underline{w}) + \frac{1}{6}(\partial_x \underline{v}, \partial_x \underline{w}), \quad \forall \underline{v},\underline{w} \in V,$$

οπότε η "ελλειπτική" προβολή $R_h : V \to V_h$ ορίζεται ως

$$(\underline{v} - R_h\underline{v}, \underline{\chi}) + \frac{1}{6}(\partial_x(\underline{v} - R_h\underline{v}), \partial_x\underline{\chi}) = 0, \quad \forall \underline{\chi} \in V_h. \tag{5.5δ.4}$$

Μπορούμε να δούμε ότι η $R_h$ έχει την προσεγγιστική ιδιότητα

$$\begin{gathered} \|\underline{v} - R_h\underline{v}\|_0 + h\|\underline{v} - R_h\underline{v}\|_1 \le Ch^s\|\underline{v}\|_s, \\ v \in \widetilde{H}^s \cap \widetilde{H}^1_0, \quad 2 \le s \le r \end{gathered} \tag{5.5δ.5}$$

με σταθερά $C$ ανεξάρτητη του $h$. Παρατηρούμε ότι η (5.5δ.4) είναι ισοδύναμη με το εξής σύστημα

$$\begin{gathered} (v_i - (R_h\underline{v})_i, \chi) + \frac{1}{6}(v_i' - (R_h\underline{v})_i', \chi') = 0, \\ \forall \chi \in S_h, \quad i = 1,2. \end{gathered} \tag{5.5δ.6}$$

Επαναλαμβάνοντας τώρα τα επιχειρήματα στις (5.5γ.6)–(5.5γ.8), λόγω των (5.5δ.2) και (5.5δ.6) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &|v_i - (R_h\underline{v})_i|_0 + h|v_i - (R_h\underline{v})_i|_1 \\ &\le Ch^s|v_i|_s, \quad i = 1,2, \ v \in \widetilde{H}^s \cap \widetilde{H}^1_0, \ 2 \le s \le r. \end{aligned} \tag{5.5δ.7}$$

Από την (5.5δ.7) εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει η (5.5δ.5) και άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις (Υ5.2.1) και (Υ5.2.2) της παραγράφου 5.2, με $d = 2$.

Συμβολίζουμε με $|\cdot|_{L^\infty}$ τη νόρμα στον $L^\infty(0, L_0)$. Σύμφωνα με την ανισότητα του Sobolev, βλ., λόγου χάριν, [12, Θεώρημα 1.4.6], υπάρχει σταθερά $C_\star$, τέτοια ώστε

$$|v|_{L^\infty} \le C_\star|v|_1, \quad \forall v \in H^1_0. \tag{5.5δ.8}$$

Επειδή οι νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμες, ορίζουμε τώρα το σύνολο $M$ ως $M = \{\underline{\chi} \in V_h : \exists\, t \in J \, \|\underline{u}(\cdot,t) - \underline{\chi}\|_1 < 1\}$. Θέτουμε τώρα $\widetilde{M} = \{\underline{U} \in \mathbb{R}^2 : \exists\, (x,t) \in [0,L_0] \times J \, |u_1(x,t) - U_1| <$

$C_\star$ και $|u_2(x,t)-U_2|<C_\star\}$, όπου $C_\star$ η σταθερά της (5.5δ.8). Από τον ορισμό του $\widetilde{M}$ εύκολα παρατηρούμε ότι

$$\max_{\underline{U}\in\widetilde{M}}\{|U_1|^2+|U_2|^2\}\le\max_{t\in J}\{|u_2(\cdot,t)|_1^2+|u_2(\cdot,t)|_1^2\}+2C_\star^2. \tag{5.5δ.9}$$

Έστω $f(x)=x^2$. Λόγω του ορισμού του συνόλου $\widetilde{M}$ και της (5.5δ.9), υπάρχει μία συνάρτηση $\widetilde{f}$ η οποία ταυτίζεται με την $f$ στο $\widetilde{M}$ και πληροί τη συνθήκη του Lipschitz, με σταθερά $L$. Αν $\underline{\chi}\in M$, υπάρχει $t\in J$ τέτοιο ώστε $\|\underline{u}(\cdot,t)-\underline{\chi}\|_1<1$. Λόγω και της (5.5δ.8) έχουμε τότε

$$\begin{aligned}
&|u_1(x,t)-\chi_1(x)|^2+|u_2(x,t)-\chi_2(x)|^2\le|u_1(\cdot,t)-\chi_1|_{L^\infty}^2\\
&\qquad+|u_2(\cdot,t)-\chi_2|_{L^\infty}^2\\
&\le C_\star^2\{|u_1(\cdot,t)-\chi_1|_1^2+|u_2(\cdot,t)-\chi_2|_1\}\\
&\le C_\star^2\|\underline{u}(\cdot,t)-\underline{\chi}\|_1^2\le C_\star,\quad\forall x\in[0,L_0].
\end{aligned}$$

Επομένως $\underline{\chi}(x)\in\widetilde{M}$, για κάθε $x\in[0,L_0]$ και $\underline{\chi}\in M$, οπότε $\widetilde{f}(\chi_2)=f(\chi_2)$, για κάθε $\underline{\chi}\in M$. Άρα για $\underline{\chi},\underline{\psi}\in M$ και $\underline{\varphi}\in V$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&(B(\underline{\chi})-B(\underline{\psi}),\underline{\varphi})1=<-(\chi_2)_x-(\chi_2\chi_1)_x+(\psi_2)_x+(\psi_2\psi_1)_x,\varphi_1>\\
&\quad+<-(\chi_1)_x-\chi_2(\chi_2)_x+(\psi_1)_x+\psi_2(\psi_2)_x,\varphi_2>\\
&=<\chi_2-\psi_2,(\varphi_1)_x>+<\chi_2(\chi_1-\psi_1)+\psi_1(\chi_2-\psi_2),(\varphi_1)_x>\\
&\quad+<\chi_1-\psi_1,(\varphi_2)_x>+\frac{1}{2}<\widetilde{f}(\chi_2)-\widetilde{f}(\psi_2),(\varphi_2)_x>\\
&\le|\chi_2-\psi_2|_0|\varphi_1|_1+(|\chi_2|_{L^\infty}|\chi_1-\psi_1|_0\\
&\quad+|\psi_1|_{L^\infty}|\chi_2-\psi_2|_0)|\varphi_1|_1+(|\chi_1-\psi_1|_0+L|\chi_2-\psi_2|_0)|\varphi_2|_1\\
&\le C\|\underline{\chi}-\underline{\psi}\|_0\,\|\underline{\varphi}\|_1.
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\|B(\underline{\chi})-B(\underline{\psi})\|_\star\le C\|\underline{\chi}-\underline{\psi}\|_0,\quad\forall\underline{\chi},\underline{\psi}\in M. \tag{5.5δ.10}$$

Επομένως υπάρχει σταθερά $L_1$, τέτοια ώστε

$$\|B(\underline{\chi})-B(\underline{\psi})\|_\star\le L_1\|\underline{\chi}-\underline{\psi}\|_1,\quad\forall\underline{\chi},\underline{\psi}\in M. \tag{5.5δ.11}$$

Ακόμα, λόγω των (5.2.4), (5.2.2) και (5.5δ.10), υπάρχει σταθερά $L_2$, τέτοια ώστε

$$\|TB(\underline{\chi})-TB(\underline{\psi})\|_0\le L_2\|\underline{\chi}-\underline{\psi}\|_0,\quad\forall\underline{\chi},\underline{\psi}\in M. \tag{5.5δ.12}$$

Πλέον λόγω των (5.5δ.11), (5.5δ.12) και (5.5δ.8) είναι απλό να δούμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις (Υ5.2.3)–(Υ5.2.6).

Έστω λοιπόν $\underline{U}^0, \dots, \underline{U}^{q-1} \in V_h$ προσεγγίσεις των $\underline{u}^0, \dots, \underline{u}^{q-1}$ τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{q-1} \|\underline{U}^j - \underline{u}^j\|_0 \le C\big(k^p + h^r\big) \\ &\text{και} \quad \sum_{j=0}^{q-1} \|\underline{U}^j - \underline{u}^j\|_1 \le C\big(k^p + h^{r-1}\big). \end{aligned} \tag{5.5 δ.13}$$

Ορίζουμε τις προσεγγίσεις $\underline{U}^n \in V_h$, $n = q, \dots, N$, αναδρομικά από το σχήμα

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{q} \alpha_j \left[(\underline{U}^{n+j}, \underline{\chi}) + \frac{1}{6}(\partial_x \underline{U}^{n+j}, \partial_x \underline{\chi})\right] \\ &= k \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j (B(\underline{U}^{n+j}), \underline{\chi}), \quad \forall \chi \in V_h, \quad n = 0, \dots, N-q. \end{aligned} \tag{5.5δ.14}$$

Τότε από την Πρόταση 5.4.1, για $k$, $h$ κατάλληλα μικρά, λαμβάνουμε τις εκτιμήσεις σφάλματος

$$\max_{0 \le n \le N} \|\underline{u}^n - \underline{U}^n\|_0 \le C(k^p + h^r). \tag{5.5δ.15}$$

$$\max_{0 \le n \le N} \|\underline{u}^n - \underline{U}^n\|_1 \le C(k^p + h^{r-1}). \tag{5.5δ.16}$$

*Παρατήρηση:* Λόγω των (5.5δ.11) και (5.5δ.12) οι (Υ5.2.3) και (Υ5.2.4) ισχύουν για κάθε $\underline{\chi}, \underline{\psi} \in M$. Σύμφωνα λοιπόν με τις Παρατηρήσεις 5.2.1, 5.3.1 και 5.4.1, σε αυτή την εφαρμογή δεν είναι απαραίτητη η υπόθεση (Υ5.2.2′), ούτε κάποια συνθήκη για το $k$ για την απόδειξη των Προτάσεων 5.2.1, 5.3.1 και 5.4.1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

# Μέθοδοι πεπερασμένων χωρίων για παραβολικά προβλήματα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε δύο μεθόδους πεπερασμένων χωρίων για ένα παραβολικό πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών. Πιο συγκεκριμένα θα αναλύσουμε τα ημιδιακριτά προβλήματα που προκύπτουν εάν διακριτοποιήσουμε ως προς το χώρο την εξίσωση της θερμότητας, με τις μεθόδους πεπερασμένων χωρίων που μελετήσαμε στην §2.4. Έτσι, θα ζητήσουμε την προσεγγιστική λύση του παραβολικού προβλήματος στο χώρο των μη προσαρμοζόμενων πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart και θα διακριτοποιήσουμε τη διαφορική εξίσωση με μεθόδους πεπερασμένων χωρίων τόσο σε επικαλυπτόμενους όσο και σε μη επικαλυπτόμενους διαμερισμούς. Στη συνέχεια θα διακριτοποιήσουμε ως προς το χρόνο με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler τα δύο ημιδιακριτά προβλήματα που αναλύουμε στις 6.2 και 6.4. Για τα ημιδιακριτά και πλήρως διακριτά προβλήματα που μελετούμε σε αυτό το κεφάλαιο αποδεικνύουμε βέλτιστης τάξης εκτιμήσεις σφάλματος στις νόρμες $H^1$ και $L^2$.

## 6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Θεωρούμε το ακόλουθο παραβολικό πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών: Για δοσμένο $T > 0$ και $u^0$ μία ομαλή συνάρτηση πραγματικών τιμών, ζητείται $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$
\begin{aligned}
u_t - \Delta u &= f \quad \text{στο } \Omega, \quad t \in [0,T] \\
u &= 0 \quad \text{στο } \partial\Omega, \ t \in [0,T], \\
u(\cdot,0) &= u^0 \quad \text{στο } \Omega,
\end{aligned}
\tag{6.1.1}
$$

όπου $\Omega$ είναι ένα φραγμένο, κυρτό, πολυγωνικό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ και $f(t) \in L^2(\Omega),\ t \in [0,T]$.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα κατασκευάσουμε και θα αναλύσουμε μεθόδους πεπερασμένων χωρίων για τη διακριτοποίηση της $(6.1.1)$ ως προς το χώρο καθώς και πλήρως διακριτά σχήματα που προκύπτουν διακριτοποιώντας στη συνέχεια και ως προς το χρόνο με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler. Η διακριτοποίηση ως προς το χώρο βασίζεται στις μεθόδους πεπερασμένων χωρίων που αναλύσαμε στην παράγραφο 2.5. Έτσι θα ζητήσουμε μία προσέγγιση της λύσεως του $(6.1.1)$ στο χώρο των μη προσαρμοζόμενων, κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων, δηλαδή τον χώρο πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart, βλ. [24].

Οι Guo και Stynes, στην [37], αναλύουν ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών, το οποίο προκύπτει από μία μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για ένα παραβολικό πρόβλημα μεταφοράς και διάχυσης στο $[0,1] \times [0,T]$. Επίσης, οι Baughman και Walkington, στην [7], αναλύουν μία μέθοδο co–volume, μία τεχνική διακριτοποίησης παρόμοια με αυτήν των πεπερασμένων χωρίων, για εκφυλισμένα παραβολικά προβλήματα, όπως είναι τα προβλήματα τύπου Stefan.

Πρόσφατα ο Trujillo, στην [73], ανέλυσε ελλειπτικά και παραβολικά προβλήματα, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων που αναφέραμε στην παράγραφο 1.4, για τη διακριτοποίηση του χώρου. Επίσης, διακριτοποιεί ως προς το χρόνο το ημιδιακριτό παραβολικό πρόβλημα που προκύπτει, χρησιμοποιώντας την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler καθώς και την μέθοδο των Crank–Nicolson. Στη συνέχεια για το ημιδιακριτό και τα πλήρως διακριτά σχήματα που μελετά, αποδεικνύει βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος στην $H^1$ νόρμα.

Εδώ θα κατασκευάσουμε σχήματα για τη διακριτοποίηση του $(6.1.1)$ χρησιμοποιώντας τις Μεθόδους III και IV, της §2.5. Θα ζητήσουμε προσεγγίσεις της λύσεως του $(6.1.1)$ στο χώρο των μη προσαρμοζόμενων, κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων, δηλαδή το χώρο $S_h^0$, σε έναν μη εκφυλισμένο τριγωνισμό του $\Omega$, βλ. Ορισμό 1.2.1. Προκειμένου να μελετήσουμε τα σχήματα διακριτοποίησης του παραβολικού προβλήματος που εξετάζουμε εδώ, θα θεωρήσουμε τις αντίστοιχες "ελλειπτικές" προβολές στο χώρο $S_h^0$. Για τα ημιδιακριτά σχήματα που μελετούμε, αποδεικνύουμε βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος στην $H^1$ νόρμα. Ακόμα, δείχνουμε εκτιμήσεις σφάλματος βέλτιστης τάξεως στην $L^2$ νόρμα. Για την απόδειξη αυτής της εκτίμησης για το σχήμα που προκύπτει με τη Μέθοδο IV, υποθέτουμε ότι $u^{(j)}(\cdot,t) \in H^3(\Omega),\ t \in [0,T]$ και $j = 0,1,2,$ όπου $u^{(j)} = \frac{d^j}{dt^j}u$. Για την Μέθοδο III υποθέτουμε ότι το εσωτερικό σημείο $z_K$, που επιλέγουμε σε κάθε τρίγωνο $K$ για την κατασκευή του δυϊκού διαμερισμού του $T_h$, είναι το βαρύκεντρο καθώς και ότι $u(\cdot,t), u_t(\cdot,t) \in H^3(\Omega),\ t \in [0,T]$. Επίσης θεωρούμε πλήρως διακριτά σχήματα για την $(6.1.1)$, που προκύπτουν διακριτοποιώντας τα ημιδιακρι-

τά πρόβλημα που αναλύουμε ως προς το χρόνο με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler. Οι εκτιμήσεις σφάλματος για τα πλήρως διακριτά σχήματα είναι παρόμοιες με αυτές των αντίστοιχων ημιδιακριτών προβλημάτων.

Συνοπτικά το περιεχόμενο αυτού του κεφαλαίου είναι το εξής. Στην §6.2 διακριτοποιούμε την (6.1.1) ως προς το χώρο χρησιμοποιώντας τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων που αναλύσαμε στην Μέθοδο IV, §2.5, και αναλύουμε την ημιδιακριτή μέθοδο που προκύπτει. Στα Θεωρήματα 6.2.1 και 6.2.2 αποδεικνύουμε βέλτιστης τάξεως εκτίμηση σφάλματος στην $H^1$ και $L^2$ νόρμα, αντίστοιχα. Στην §6.3 διακριτοποιούμε το ημιδιακριτό πρόβλημα της §6.2 ως προς το χρόνο με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler. Στα Θεωρήματα 6.3.1 και 6.3.2 αποδεικνύουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα της παραγράφου 6.2. Στην §6.4 διακριτοποιούμε την (6.1.1) ως προς το χώρο χρησιμοποιώντας τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων που αναλύσαμε στην §1.5 και αναλύουμε το ημιδιακριτό πρόβλημα. Στα Θεώρηματα 6.4.1 και 6.4.2 αποδεικνύουμε μία βέλτιστης τάξεως εκτίμηση σφάλματος στην $H^1$ και $L^2$ νόρμα, αντίστοιχα. Στην §6.5 διακριτοποιούμε το ημιδιακριτό πρόβλημα της §6.4 ως προς το χρόνο με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler. Στα Θεωρήματα 6.5.1 και 6.5.2 αποδεικνύουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα της παραγράφου 6.4.

## 6.2 ΤΟ ΗΜΙΔΙΑΚΡΙΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΕ ΕΠΙΚΑΛΥΠΤΟΜΕΝΟ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟ

Σε αυτή την παράγραφο διακριτοποιούμε ως προς το χώρο το (6.1.1) χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο IV, §2.5, και αναλύουμε το αντίστοιχο ημιδιακριτό πρόβλημα. Στα Θεωρήματα 6.2.1 και 6.2.2 αποδεικνύουμε βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος στην $H^1$ και $L^2$ νόρμα, αντίστοιχα.

Θεωρούμε λοιπόν μία πλευρά $e \in E_h^{\text{in}}$ και το αντίστοιχο χωρίο $V_e \in V_n$. Ολοκληρώνοντας τότε την (6.1.1) πάνω στο $V_e$ και εφαρμόζοντας τον τύπο ολοκλήρωσης του Green, παίρνουμε

$$\begin{aligned} &\int_{V_e} u_t(x,t)\,dx - \int_{\partial V_e} \nabla u(s,t)\cdot n\,ds \\ &= \int_{V_e} f(x,t)\,dx, \quad \forall e \in E_h^{\text{in}},\ t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Έχοντας υπόψιν την (6.2.1) και την (2.5.13) θεωρούμε την ακόλουθη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για την (6.1.1): Ζητείται $u_h(t) \in S_h^0$,

$t \in [0,T]$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &\int_{V_e} u_{h,t}(x,t)\,dx - 3\int_{\partial V_e} \nabla u_h(s,t)\cdot n\,ds \\ &= \int_{V_e} f(x,t)\,dx, \quad \forall e \in E_h^{\rm in},\ t\in[0,T] \\ &u_h(\cdot,0) = u_h^0 \quad \text{στο } \Omega, \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

με $u_h^0 \in S_h^0$ μία δοσμένη προσέγγιση της $u^0$, τέτοια ώστε

$$\|u^0 - u_h^0\|_{1,h} \le Ch\|u^0\|_{2,\Omega}. \tag{6.2.3}$$

Συνδυάζοντας τότε τις (6.2.1) και (6.2.2), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} &\int_{V_e} (u_t - u_{h,t})(x,t)\,dx - \int_{\partial V_e} \nabla(u-3u_h)(s,t)\cdot n\,ds \\ &= 0, \quad \forall e \in E_h^{\rm in},\ t\in[0,T]. \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Θεωρούμε τώρα τη διγραμμική μορφή $\overline{a}_{NO}$, που ορίσαμε στην (2.5.14), καθώς και τη διγραμμική μορφή $\overline{b} : (H^1+S_h)\times(H^1+S_h) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής

$$\overline{b}(v,w) = \sum_{e\in E_h^{\rm in}} w(m_e)\int_{V_e} v\,dx. \tag{6.2.5}$$

Άρα, μπορούμε να γράψουμε την (6.2.2) στη μορφή

$$\begin{aligned} &\overline{b}(u_{h,t}(\cdot,t),v) + 3\overline{a}_{NO}(u_h(\cdot,t),v) \\ &= \overline{b}(f(t),v), \quad \forall v\in S_h^0,\ t\in[0,T], \\ &u_h(\cdot,0) = u_h^0,\ \text{στο } \Omega, \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

καθώς και την (6.2.4) ως εξής

$$\overline{b}(u_t - u_{h,t}, v) + \overline{a}_{NO}(u-3u_h, v) = 0, \quad \forall v\in S_h^0,\ t\in[0,T]. \tag{6.2.7}$$

Αφού οι συναρτήσεις $\{\varphi_e\}_{e\in E_h^{\rm in}}$ αποτελούν βάση του χώρου $S_h^0$, βλέπε (1.2.3), μπορούμε να διατυπώσουμε το ημιδιακριτό πρόβλημα (6.2.6) στην ακόλουθη μορφή: Ζητούνται οι συνιστώσες $\alpha_e(t)$ του αναπτύγματος $u_h(x,t) = \sum_{e\in E_h^{\rm in}} \alpha_e(t)\varphi_e(x)$, τέτοιες ώστε

$$\sum_{e\in E_h^{\rm in}} \alpha_e'(t)\overline{b}(\varphi_e,\varphi_\ell) + 3\sum_{e\in E_h^{\rm in}} \alpha_e(t)\overline{a}(\varphi_e,\varphi_\ell) = \overline{b}(f,\varphi_\ell), \quad \forall \ell \in E_h^{\rm in},$$

και, συμβολίζοντας με $\gamma_e$ τις συνιστώσες της δοσμένης αρχικής προσέγγισης $u_h^0$,

$$\alpha_e(0) = \gamma_e, \quad \forall e \in E_h^{\rm in}.$$

Μπορούμε να εκφράσουμε το παραπάνω πρόβλημα σε μορφή πινάκων ως εξής

$$B\alpha'(t) + A\alpha(t) = \widetilde{f}, \quad \text{για } t \geq 0, \text{ με } \alpha(0) = \gamma, \tag{6.2.8}$$

όπου $A = \{\alpha_{e\ell}\}_{e,\ell \in E_h^{\rm in}}$ είναι ο πίνακας ακαμψίας, με στοιχεία $\alpha_{e\ell} = \overline{a}_{NO}(\varphi_e, \varphi_\ell)$, $B = \{b_{e\ell}\}_{e,\ell \in E_h^{\rm in}}$ ο πίνακας μάζας, με στοιχεία $b_{e\ell} = \overline{b}(\varphi_e, \varphi_\ell)$, $\widetilde{f}$ το διάνυσμα με στοιχεία $f_\ell = \int_{V_\ell} f\,dx$, $\ell \in E_h^{\rm in}$, $\alpha(t)$ το διάνυσμα των αγνώστων $\alpha_e(t)$, $e \in E_h^{in}$, και $\gamma$ το διάνυσμα με στοιχεία $\gamma_e$, $e \in E_h^{\rm in}$. Αυτά τα διανύσματα έχουν διάσταση ίση με αυτή του χώρου $S_h^0$. Για να δείξουμε ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσεως $\alpha$ του (6.2.8) αρκεί να δείξουμε ότι ο $B$ είναι αντιστρέψιμος. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο $B$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, συνεπώς, ιδιαίτερα, αντιστρέφεται.

**Λήμμα 6.2.1:** *Για κάθε $v \in S_h^0$ έχουμε*

$$\overline{b}(v, v) \geq 0. \tag{6.2.9}$$

*Απόδειξη:* Λόγω της (2.5.21), έχουμε

$$\begin{aligned}
\overline{b}(v,v) &= \sum_{e \in E_h^{\rm in}} v(m_e) \int_{V_e} v\,dx \\
&= \sum_{e \in E_h^{\rm in}} v(m_e) \Big( \frac{|K^{+e}|}{3} \sum_{\ell \in E_h(K^{+e})} v(m_\ell) + \frac{|K^{-e}|}{3} \sum_{\ell \in E_h(K^{-e})} v(m_\ell) \Big) \\
&= \sum_{K \in T_h} \frac{|K|}{3} \Big( \sum_{e \in E_h(K)} v(m_\ell) \Big)^2. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Λήμμα 6.2.2:** *Ο πίνακας $B$ είναι συμμετρικός.*
*Απόδειξη:* Έστω δύο πλευρές $e$, $\ell \in E_h^{\rm in}$. Έστω κατ' αρχήν ότι η $e$ και η $\ell$ δεν είναι πλευρές ενός τριγώνου $K \in T_h$. Τότε είναι προφανές από τον ορισμό της $\overline{b}$, και τις (6.2.5) και (1.2.5), ότι $\overline{b}(\varphi_e, \varphi_\ell) = \overline{b}(\varphi_\ell, \varphi_e) = 0$. Υποθέτουμε τώρα ότι $e$, $\ell \in E_h(K)$ για ένα τρίγωνο $K \in T_h$ και $e \neq \ell$. Τότε

$$\overline{b}(\varphi_e, \varphi_\ell) = \int_{V_\ell} \varphi_e\,dx = \int_K \varphi_e\,dx = \frac{|K|}{3} = \int_{V_e} \varphi_\ell\,dx = \overline{b}(\varphi_\ell, \varphi_e). \quad \blacksquare$$

Σύμφωνα με τα Λήμματα 6.2.1 και 6.2.2, ο πίνακας $B$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος και άρα είναι αντιστρέψιμος. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε την (6.2.8) ως

$$\alpha'(t) + B^{-1}A\alpha(t) = B^{-1}\widetilde{f}, \quad \text{για } t \geq 0, \text{ με } \alpha(0) = \gamma.$$

Συνεπώς είναι προφανές ότι η (6.2.8) έχει μοναδική λύση για θετικό $t$.

Θα θεωρήσουμε τώρα, έναν τελεστή "ελλειπτικής" προβολής, $P_1^{\mathrm{o}} : H^1(\Omega) + S_h \to S_h^0$, που ορίζεται ως εξής

$$3\overline{a}_{NO}(P_1^{\mathrm{o}}u, \chi) = \overline{a}_{NO}(u, \chi), \quad \forall \chi \in S_h^0. \tag{6.2.10}$$

Σύμφωνα με τις (2.5.20) και (2.5.22), έχουμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις σφάλματος

$$\begin{aligned} \|P_1^{\mathrm{o}}v - v\|_{1,h} \leq & Ch\|v\|_{2,\Omega}, \quad \forall v \in H^2 \cap H_0^1, \\ \|P_1^{\mathrm{o}}v - v\|_{0,\Omega} \leq & Ch^2\|v\|_{3,\Omega}, \quad \forall v \in H^3 \cap H_0^1. \end{aligned} \tag{6.2.11}$$

Επίσης, λόγω του ορισμού της $P_1^{\mathrm{o}}$, παρατηρούμε εύκολα ότι ο $P_1^{\mathrm{o}}$ και η παραγώγιση ως προς το χρόνο αντιμετατίθενται,

$$P_1^{\mathrm{o}}u_t = (P_1^{\mathrm{o}}u)_t. \tag{6.2.12}$$

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.1 θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

**Λήμμα 6.2.3:** *Έστω $v, w \in H_0^1 \cap H^2 + S_h^0$. Τότε*

$$|\overline{b}(v, w)| \leq C\|v\|_{0,\Omega}\|w\|_{0,\Omega}.$$

*Απόδειξη:* Από την (1.2.1), έχουμε

$$\begin{aligned} |\overline{b}(v, w)| &= |\sum_{e \in E_h^{\mathrm{in}}} w(m_e) \int_{V_e} v\, dx| \\ &\leq (\sum_{e \in E_h^{\mathrm{in}}} h_e^2 w^2(m_e))^{1/2} (\sum_{e \in E_h^{\mathrm{in}}} \frac{|V_e|}{h_e^2} \int_{V_e} v^2\, dx)^{1/2} \\ &\leq C\|w\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ακόμα διατυπώνουμε το γνωστό λήμμα του Gronwall, ως Λήμμα 6.2.5 (βλ. [78, §A3]).

**Λήμμα 6.2.5 (Το γενικευμένο Λήμμα του1 Gronwall):** *Έστω* $\varphi, f \in C[0,T]$, $f(t) \geq 0$, $t \in [0,T]$, *και*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_0^t f(s)\varphi(s)\,ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

*όπου* $\alpha \in \mathbb{R}$ *Τότε,*

$$\varphi(t) \leq \alpha e^{\int_0^t f(s)\,ds}, \quad \forall t \in [0,T].$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε μία βέλτιστης τάξεως εκτίμηση σφάλματος στην $H^1$ νόρμα.

**Θεώρημα 6.2.1:** *Έστω* $u_h$ *και* $u$ *οι λύσεις των (6.2.6) και (6.1.1), αντίστοιχα. Τότε*

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_h(t)\|_{1,h} \leq Ch\big\{ &\|u^0\|_{2,\Omega} + \|u_t(0)\|_{2,\Omega} + \|u_t(t)\|_{2,\Omega} \\ &+ \int_0^t \|u_t(\tau)\|_{2,\Omega}\,d\tau + \big(\int_0^t \|u_{tt}(\tau)\|_{2,\Omega}^2\,d\tau\big)^{1/2}\big\},\ \text{για } t \geq 0. \end{aligned} \tag{6.2.13}$$

*Απόδειξη:* Ως συνήθως, χωρίζουμε τη διαφορά $u - u_h$ ως εξής

$$u - u_h = (u - P_1^o u) + (P_1^o u - u_h) = \varrho + \vartheta. \tag{6.2.14}$$

Σύμφωνα με την (6.2.11), έχουμε για $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \|\varrho(t)\|_{1,h} &\leq Ch\|u(t)\|_{2,\Omega} = Ch\|u^0 - \int_0^t u_t(\tau)\,d\tau\|_{2,\Omega} \\ &\leq Ch(\|u^0\|_{2,\Omega} + \int_0^t \|u_t(\tau)\|_{2,\Omega}\,d\tau). \end{aligned} \tag{6.2.15}$$

Επομένως, για να δείξουμε την (6.2.13) αρκεί να εκτιμήσουμε την $\vartheta$. Λόγω του ορισμού της $\vartheta$, των (6.2.4), (6.2.1) και (6.2.3) παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση σφάλματος

$$\begin{aligned} \overline{b}(\vartheta_t, \chi) + 3\overline{a}_{NO}(\vartheta, \chi) &= \overline{b}(P_1^o u_t, \chi) + 3\overline{a}_{NO}(P_1^o u, \chi) - \overline{b}(u_{h,t}, \chi) \\ &\quad - 3\overline{a}_{NO}(u_h, \chi) \\ &= \overline{b}(P_1^o u_t, \chi) + 3\overline{a}_{NO}(P_1^o u, \chi) - \overline{b}(f, \chi) \\ &= -\overline{a}_{NO}(u - 3P_1^o u, \chi) - \overline{b}(u_t - P_1^o u_t, \chi) \\ &= -\overline{b}(\varrho_t, \chi), \quad \forall \chi \in S_h^0. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\overline{b}(\vartheta_t,\chi)+3\overline{a}_{NO}(\vartheta,\chi)=-\overline{b}(\varrho_t,\chi),\quad \forall\chi\in S_h^0. \tag{6.2.16}$$

Επιλέγοντας τώρα $\chi=\vartheta_t$ στην (6.2.16) και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\overline{a}_{NO}(v,\chi)=a(v,\chi)$, για $v,\chi\in S_h^0$, βλ. Λήμμα 2.5.2 και Λήμμα 6.2.1, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\frac{d}{dt}|\vartheta|_{1,h}^2 &\le \overline{b}(\vartheta_t,\vartheta_t)+3\overline{a}_{NO}(\vartheta,\vartheta_t)=-\overline{b}(\varrho_t,\vartheta_t)\\ &=-\frac{d}{dt}\overline{b}(\varrho_t,\theta)+\overline{b}(\varrho_{tt},\theta),\quad t\in[0,T].\end{aligned} \tag{6.2.17}$$

Θεωρούμε τώρα $t\in[0,T]$ και ολοκληρώνουμε την (6.2.17) στο διάστημα $[0,t]$. Τότε, από τα Λήμματα 6.2.3 και την διακριτή ανισότητα των Poincaré–Friedrichs, βλ. Λήμμα 1.5.8, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}|\vartheta(t)|_{1,h}^2 &\le \frac{3}{2}|\vartheta(0)|_{1,h}^2+\|\varrho_t(0)\|_{0,\Omega}\|\vartheta(0)\|_{0,\Omega}\\ &\quad+C\|\varrho_t(t)\|_{0,\Omega}|\vartheta(t)|_{1,h}+C\int_0^t\|\varrho_{tt}(\tau)\|_{0,\Omega}|\vartheta(\tau)|_{1,h}\,d\tau.\end{aligned} \tag{6.2.18}$$

Εφαρμόζοντας τώρα στην (6.2.18) το Λήμμα 6.2.5 και χρησιμοποιώντας τις (6.2.11) και (6.2.12), παίρνουμε

$$\begin{aligned}|\vartheta(t)|_{1,h}^2 &\le C(|\vartheta(0)|_{1,h}^2+\|\varrho_t(t)\|_{0,\Omega}^2+\|\varrho_t(0)\|_{0,\Omega}^2\\ &\qquad+\int_0^t\|\varrho_{tt}(\tau)\|_{0,\Omega}^2d\tau)\\ &\le C|\vartheta(0)|_{1,h}^2+Ch^2(\|u_t(t)\|_{2,\Omega}^2+\|u_t(0)\|_{2,\Omega}^2\\ &\qquad+\int_0^t\|u_{tt}(\tau)\|_{2,\Omega}^2d\tau).\end{aligned} \tag{6.2.19}$$

Συνδυάζοντας λοιπόν τις (6.2.19) και (6.2.15), έπεται η επιθυμητή εκτίμηση (6.2.13). ■

Θα αποδείξουμε τώρα μία βέλτιστης τάξεως εκτίμηση σφάλματος στην $L^2$ νόρμα.

**Θεώρημα 6.2.2:** *Έστω $u$ η λύση του (6.1.1), με $u,u_t,u_{tt}\in H^3(\Omega)$, $t\in[0,T]$ και $u_h$ η λύση του (6.2.6), με $u_h^0=P_1^{\rm o}u^0$. Τότε υπάρχει μία*

*σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε*

$$\begin{aligned}\|u(t)-u_h(t)\|_{0,\Omega} \le Ch^2\big(&\|u^0\|_{3,\Omega}+\|u_t(0)\|_{3,\Omega}\\ &+\|u_t(t)\|_{3,\Omega}+\int_0^t\|u_t(\tau)\|_{3,\Omega}\,d\tau\\ &+\big(\int_0^t\|u_{tt}(\tau)\|_{3,\Omega}^2\,d\tau\big)^{1/2}\big),\quad \text{για } t\ge 0.\end{aligned}\tag{6.2.20}$$

*Απόδειξη:* Αφού $u_h^0=P_1^o u^0$, έχουμε $\vartheta(0)=0$. Άρα, από την (6.2.19), παίρνουμε

$$\begin{aligned}|\vartheta(t)|_{1,h} \le Ch^2\big(&\|u_t(t)\|_{2,\Omega}^2+\|u_t(0)\|_{2,\Omega}^2\\ &+\int_0^t\|u_{tt}(\tau)\|_{2,\Omega}^2 d\tau\big)^{1/2}.\end{aligned}\tag{6.2.21}$$

Επομένως, σύμφωνα με την διακριτή ανισότητα των Poicaré–Friedrichs, Λήμμα 1.5.8, και τις (6.2.11), (6.2.12), και (6.2.21), λαμβάνουμε την επιθυμητή εκτίμηση. ■

## 6.3 ΕΝΑ ΠΛΗΡΩΣ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΣΧΗΜΑ ΣΕ ΕΠΙΚΑΛΥΠΤΟΜΕΝΟ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟ

Σε αυτή την παράγραφο θα αναλύσουμε ένα πλήρως διακριτό σχήμα για τη διακριτοποίηση της (6.1.1), που προκύπτει αν διακριτοποιήσουμε την (6.2.6) ως προς το χρόνο με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler. Στα Θεωρήματα 6.3.1 και 6.3.2 αποδεικνύουμε βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος στην $H^1$ και $L^2$ νόρμα.

Θεωρούμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[0,T]$. Για $N\in\mathbb{N}$, έστω $k=T/N$ το βήμα της διαμέρισης και $t^n:=nk$, $n=0,\dots,N$. Επίσης, για κάθε συνάρτηση $\varphi$, που ορίζεται στο $[0,T]$, θέτουμε $\varphi^n:=\varphi(t^n)$ και για $v^0,\dots,v^N\in S_h^0$

$$\overline{\partial}v^n=\frac{v^n-v^{n-1}}{k},\quad n=0,\dots,N-1.$$

Διακριτοποιούμε, λοιπόν, την (6.2.6) ως προς το χρόνο με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler. Το σχήμα που προκύπτει είναι το εξής: Ζητούνται $U^n\in S_h^0$, $n=0,\dots,N$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}&\overline{b}(\overline{\partial}U^n,\chi)+\overline{a}_{NO}(U^n,\chi)\\ &=\overline{b}(f(t^n),\chi),\ \forall\chi\in S_h^0,\ n=1,\dots,N,\\ &U^0=u_h^0,\end{aligned}\tag{6.3.1}$$

όπου $u_h^0 \in S_h^0$ ικανοποιεί την (6.2.3). Χρησιμοποιώντας τώρα τον συμβολισμό για τους πίνακες $A$ και $B$ που εισαγάγαμε για το ημιδιακριτό πρόβλημα (6.2.8), μπορούμε να ξαναγράψουμε την (6.3.1) στη μορφή

$$(B + kA)\alpha^n = B\alpha^{n-1} + k\widetilde{f}(t^n). \tag{6.3.2}$$

Λόγω των Λημμάτων 2.5.2, 6.2.1 και 6.2.2, ο πίνακας $B + kA$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, και άρα αντιστρέψιμος. Ακόμα διατυπώνουμε ένα διακριτό λήμμα του Gronwall, ως Λήμμα 6.3.1 (βλ. [78 §A3]).

**Λήμμα 6.3.1 (Η διακριτή ανισότητα του Gronwall):** *Έστω $T > 0, N \in \mathbb{N}$, και $k = T/N$. Αν $a_0, \ldots, a_N$ και $E$ μη αρνητικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε με $\gamma > 0$ να ισχύει*

$$\alpha_{n+1} \le E + \gamma k \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell, \quad n = 0, \ldots, N-1,$$

*τότε*

$$\max_{0\le n\le N} a_n \le C(a_0 + E),$$

*με μία σταθερά $C$ ανεξάρτητη του $k$.*

Στη συνέχεια θα δείξουμε μία βέλτιστης τάξεως εκτίμηση σφάλματος στην $H^1$ νόρμα.

**Θεώρημα 6.3.1:** *Έστω $U^n$ και $u$ οι λύσεις των (6.3.1) και (6.1.1), αντίστοιχα. Τότε υπάρχει μία σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε*

$$\begin{aligned}\max_{0\le n\le N} \|u(t^n) - U^n\|_{1,h} \le Ch\Big( &\|u^0\|_{2,\Omega} + \max_{0\le n\le N} \|u_{tt}^n\|_{2,\Omega} \\ &+ \max_{0\le t\le T} \|u_t(t)\|_{2,\Omega} + \Big(\int_0^T \|u_{ttt}(s)\|_{2,\Omega}^2 ds\Big)^{1/2}\Big) \\ &+ Ck\Big(\max_{0\le t\le T} \|u_{tt}(t)\|_{0,\Omega} + \Big(\int_0^T \|u_{ttt}(s)\|_{0,\Omega}^2 ds\Big)^{1/2}\Big).\end{aligned} \tag{6.3.3}$$

*Απόδειξη:* Ανάλογα, όπως στην (6.2.14), έχουμε

$$u(t^n) - U^n = (u(t^n) - P_1^{\circ}u(t^n)) + (P_1^{\circ}u(t^n) - U^n) = \varrho^n + \theta^n. \tag{6.3.4}$$

Σύμφωνα με την (6.2.15), ισχύει

$$\|\varrho^n\|_{1,h} \le Ch\|u(t^n)\|_{2,\Omega} \le Ch\big(\|u^0\|_{2,\Omega} + \int_0^{t^n} \|u_t(\tau)\|_{2,\Omega} d\tau\big). \tag{6.3.5}$$

Επίσης, ένας υπολογισμός παρόμοιος με αυτόν στην (6.2.16), δίνει

$$\begin{aligned}
&\overline{b}(\overline{\partial}\vartheta^n,\chi)+3\overline{a}_{NO}(\vartheta^n,\chi)=\overline{b}(\overline{\partial}P_1^{\mathrm{o}}u^n,\chi)+3\overline{a}_{NO}(P_1^{\mathrm{o}}u^n,\chi)\\
&\quad-\overline{b}(\overline{\partial}U^n,\chi)-3\overline{a}_{NO}(U^n,\chi)\\
&=\overline{b}(\overline{\partial}(P_1^{\mathrm{o}}u^n-u_t^n),\chi)+\overline{b}(\overline{\partial}u^n-u_t^n),\chi)+\overline{b}(u_t^n,\chi)+\overline{a}_{NO}(u^n,\chi)\\
&\quad-\overline{b}(\overline{\partial}U^n,\chi)-3\overline{a}_{NO}(U^n,\chi)\\
&=\overline{b}(\omega^n,\chi),\quad \forall\chi\in S_h^0,\ n=1,\dots,N,
\end{aligned}$$

όπου

$$\omega^n:=(P_1^{\mathrm{o}}\overline{\partial}u^n-\overline{\partial}u^n)+(\overline{\partial}u^n-u_t^n)=\omega_1^n+\omega_2^n. \tag{6.3.6}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
&\overline{b}(\overline{\partial}\vartheta^n,\chi)+3\overline{a}_{NO}(\vartheta^n,\chi)\\
&\quad=\overline{b}(\omega^n,\chi),\quad \forall\chi\in S_h^0,\ n=1,\dots,N.
\end{aligned} \tag{6.3.7}$$

Επιλέγοντας τώρα $\chi=\overline{\partial}\vartheta^n$ στην (6.3.7), λαμβάνουμε

$$\overline{b}(\overline{\partial}\vartheta^n,\overline{\partial}\vartheta^n)+3\overline{a}_{NO}(\vartheta^n,\overline{\partial}\vartheta^n)=\overline{b}(\omega^n,\overline{\partial}\vartheta^n),\quad n=1,\dots,N. \tag{6.3.8}$$

Λόγω τώρα του γεγονότος ότι $\overline{a}_{NO}(v,\chi)=a(v,\chi)$, για $v,\chi\in S_h^0$, βλ. Λήμμα 2.5.2, και του Λήμματος 6.2.1, η (6.3.8) δίνει

$$|\vartheta^n|_{1,h}^2\le|\vartheta^n|_{1,h}|\vartheta^{n-1}|_{1,h}+\frac{k}{3}\overline{b}(\omega^n,\overline{\partial}\vartheta^n),\quad n=1,\dots,N. \tag{6.3.9}$$

Αθροίζοντας λοιπόν την (6.3.9) για $j=1,\dots,n$, και χρησιμοποιώντας άθροιση κατά μέρη, το Λήμμα 6.2.3, την διακριτή ανισότητα των Poincaré–Friedrichs, βλ. Λήμμα 1.5.8, και την αριθμητική γεωμετρική ανισότητα, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^n|\vartheta^j|_{1,h}^2\le\sum_{j=1}^n|\vartheta^j|_{1,h}|\vartheta^{j-1}|_{1,h}+\frac{k}{3}\sum_{j=1}^n\overline{b}(\omega^j,\overline{\partial}\vartheta^j)\\
&\le\frac{1}{2}|\vartheta^0|_{1,h}^2+\sum_{j=1}^{n-1}|\vartheta^j|_{1,h}^2+\frac{1}{2}|\vartheta^n|_{1,h}^2+\frac{1}{3}\overline{b}(\omega^n,\vartheta^n)-\frac{1}{3}\overline{b}(\omega^1,\vartheta^0)\\
&\quad-\frac{k}{3}\sum_{j=2}^n\overline{b}(\overline{\partial}\omega^j,\vartheta^{j-1})\\
&\le C|\vartheta^0|_{1,h}^2+\frac{3}{4}|\vartheta^n|_{1,h}^2+\sum_{j=1}^{n-1}|\vartheta^j|_{1,h}^2+Ck\sum_{j=1}^{n-1}|\vartheta^j|_{1,h}^2\\
&\quad+C(\|\omega^n\|_{0,\Omega}^2+\|\omega^1\|_{0,\Omega}^2)+Ck\sum_{j=2}^n\|\overline{\partial}\omega^j\|_{0,\Omega}^2,
\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$
\begin{aligned}
|\vartheta^n|_{1,h}^2 \le C|\vartheta^0|_{1,h}^2 + Ck\sum_{j=1}^{n-1}|\vartheta^j|_{1,h}^2 + C\max_{0\le n\le N}\|\omega^n\|_{0,\Omega}^2 \\
+ Ck\sum_{j=2}^{n}\|\overline{\partial}\omega^j\|_{0,\Omega}^2.
\end{aligned}
\tag{6.3.10}
$$

Χρησιμοποιώντας τώρα στην (6.3.10) το Λήμμα 6.3.1, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\max_{0\le n\le N}|\vartheta^n|_{1,h}^2 \le C|\vartheta^0|_{1,h}^2 + Ck\sum_{j=2}^{N}\|\overline{\partial}\omega^j\|_{0,\Omega}^2 \\
+ C\max_{0\le n\le N}\|\omega^n\|_{0,\Omega}^2.
\end{aligned}
\tag{6.3.11}
$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε το δεξιό μέλος της (6.3.11). Λόγω, λοιπόν, της (6.3.6), έχουμε, για $j = 1, \dots, N$,

$$
\begin{aligned}
\overline{\partial}\omega_1^j &= \frac{1}{k}(P_1^{\mathrm{o}} - I)(\overline{\partial}u^j - \overline{\partial}u^{j-1}) \\
&= \frac{1}{k^2}(P_1^{\mathrm{o}} - I)(u^j - 2u^{j-1} + u^{j-2}) \\
&= (P_1^{\mathrm{o}} - I)\Bigg\{u_{tt}^{j-1} + \frac{1}{k^2}\int_{t^{j-1}}^{t^j}\frac{(t^j - s)^2}{2!}u_{ttt}(s)\,ds \\
&\qquad + \frac{1}{k^2}\int_{t^{j-1}}^{t^{j-2}}\frac{(t^{j-2} - s)^2}{2!}u_{ttt}(s)\,ds\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{6.3.12}
$$

Επίσης,

$$
\begin{aligned}
\overline{\partial}\omega_2^j &= \frac{1}{k}(\overline{\partial}u^j - u_t^j - \partial u^{j-1} + u_t^{j-1}) \\
&= \frac{1}{k^2}(u^j - 2u^{j-1} + u^{j-2} - ku_t^j + ku_t^{j-1}) \\
&= \frac{1}{k^2}\Bigg(k^2u_{tt}^{j-1} + ku_t^{j-1} - ku_t^j + \int_{t^{j-1}}^{t^j}\frac{(t^j - s)^2}{2!}u_{ttt}(s)\,ds \\
&\qquad + \int_{t^{j-1}}^{t^{j-2}}\frac{(t^{j-2} - s)^2}{2!}u_{ttt}(s)\,ds\Bigg) \\
&= \frac{1}{k^2}\Bigg(k\int_{t^{j-1}}^{t^j}(t^j - s)u_{ttt}(s)\,ds + \int_{t^{j-1}}^{t^j}\frac{(t^j - s)^2}{2!}u_{ttt}(s)\,ds \\
&\qquad + \int_{t^{j-1}}^{t^{j-2}}\frac{(t^{j-2} - s)^2}{2!}u_{ttt}(s)\,ds\Bigg).
\end{aligned}
$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\overline{\partial}\omega_2^j &= \frac{1}{k^2}\big(k\int_{t^{j-1}}^{t^j}(t^j-s)u_{ttt}(s)\,ds\\ &+\int_{t^{j-1}}^{t^j}\frac{(t^j-s)^2}{2!}u_{ttt}(s)\,ds+\int_{t^{j-1}}^{t^{j-2}}\frac{(t^{j-2}-s)^2}{2!}u_{ttt}(s)\,ds\big).\end{aligned}\tag{6.3.13}$$

Ακόμα, εύκολα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\omega_1^j &= \frac{1}{k}\int_{t^{j-1}}^{t^j}(P_1^{\mathrm{o}}-I)u_t(s)\,ds\\ \text{και}\quad \omega_2^j &= -\frac{1}{k}\int_{t^{j-1}}^{t^j}(s-t^{j-1})u_{tt}(s)\,ds.\end{aligned}\tag{6.3.14}$$

Συνεπώς, σύμφωνα με τις (6.3.12)–(6.3.14), (6.2.11) και (6.2.12), παίρνουμε

$$\begin{aligned}k\sum_{j=1}^n\|\overline{\partial}\omega^j\|_{0,\Omega}^2 &\le 2k\sum_{j=1}^n\|\overline{\partial}\omega_1^j\|_{0,\Omega}^2+\|\overline{\partial}\omega_2^j\|_{0,\Omega}^2\\ &\le Ch^2\max_{0\le n\le N}\|u_{tt}^n\|_{2,\Omega}^2+Ck^2\int_0^{t^n}\|u_{ttt}(s)\|_{0,\Omega}^2ds\\ &+Ch^2k^2\int_0^{t^n}\|u_{ttt}(s)\|_{2,\Omega}^2ds,\end{aligned}\tag{6.3.15}$$

καθώς και

$$\begin{aligned}\max_{0\le n\le N}\|\omega^n\|_{0,\Omega}^2 &\le 2\max_{0\le n\le N}\|\omega_1^n\|_{0,\Omega}^2+2\max_{0\le n\le N}\|\omega_2^n\|_{0,\Omega}^2\\ &\le Ch^2\max_{0\le t\le T}\|u_t(t)\|_{2,\Omega}^2+Ck^2\max_{0\le t\le T}\|u_{tt}(t)\|_{0,\Omega}^2.\end{aligned}\tag{6.3.16}$$

Τότε, συνδυάζοντας τις (6.3.15), (6.3.16) και (6.3.11), έχουμε

$$\begin{aligned}\max_{0\le n\le N}|\vartheta^n|_{1,h}^2 &\le C|\vartheta^0|_{1,h}^2+Ch^2\max_{0\le n\le N}\|u_{tt}^n\|_{2,\Omega}^2\\ &+Ck^2\int_0^T\|u_{ttt}(s)\|_{0,\Omega}^2ds+Ch^2k^2\int_0^T\|u_{ttt}(s)\|_{2,\Omega}^2ds\\ &+Ch^2\max_{0\le t\le T}\|u_t(t)\|_{2,\Omega}^2+Ck^2\max_{0\le t\le T}\|u_{tt}(t)\|_{0,\Omega}^2.\end{aligned}\tag{6.3.17}$$

Τελικά, χρησιμοποιώντας τις (6.3.5) και (6.3.17), λαμβάνουμε την επιθυμητή εκτίμηση, (6.3.3). ■

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε την $L^2$ νόρμα της διαφοράς $u(t^n) - U^n$.

**Θεώρημα 6.3.2:** *Έστω $u$ η λύση του (6.1.1), με $u, u_t, u_{tt}, u_{ttt} \in H^3(\Omega)$, $t \in [0,T]$, και $U^n$ η λύση του (6.3.1), με $U^0 = P_1^{\mathrm{o}} u^0$. Τότε υπάρχει μία σταθερά $C$, ανεξάρτητη των $k$ και $h$, τέτοια ώστε*

$$\begin{aligned}\max_{0\le n\le N} \|u(t^n) - U^n\|_{0,\Omega} &\le Ch^2 \Bigg( \|u^0\|_{3,\Omega} + \max_{0\le n\le N} \|u_{tt}^n\|_{3,\Omega} \\ &+ \max_{0\le t\le T} \|u_t(t)\|_{3,\Omega} + \Big(\int_0^T \|u_{ttt}(s)\|_{3,\Omega}^2 ds\Big)^{1/2} \Bigg) \\ &+ Ck \Bigg( \max_{0\le t\le T} \|u_{tt}(t)\|_{0,\Omega} + \Big(\int_0^T \|u_{ttt}(s)\|_{0,\Omega}^2 ds\Big)^{1/2} \Bigg).\end{aligned} \tag{6.3.18}$$

*Απόδειξη:* Συνεπώς, σύμφωνα με τις (6.3.12)–(6.3.14), (6.2.11) και (6.2.12) παίρνουμε

$$\begin{aligned} k\sum_{j=1}^{n} \|\overline{\partial}\omega^j\|_{0,\Omega}^2 &\le 2k \sum_{j=1}^{n} \|\overline{\partial}\omega_1^j\|_{0,\Omega}^2 + \|\overline{\partial}\omega_2^j\|_{0,\Omega}^2 \\ &\le Ch^4 \max_{0\le n\le N} \|u_{tt}^n\|_{3,\Omega}^2 + Ck^2 \int_0^{t^n} \|u_{ttt}(s)\|_{0,\Omega}^2 ds \\ &\quad + Ch^4 k^2 \int_0^{t^n} \|u_{ttt}(s)\|_{3,\Omega}^2 ds, \end{aligned} \tag{6.3.19}$$

καθώς και

$$\begin{aligned} \max_{0\le n\le N} \|\omega^n\|_{0,\Omega}^2 &\le 2 \max_{0\le n\le N} \|\omega_1^n\|_{0,\Omega}^2 + 2 \max_{0\le n\le N} \|\omega_2^n\|_{0,\Omega}^2 \\ &\le Ch^4 \max_{0\le t\le T} \|u_t(t)\|_{3,\Omega}^2 + Ck^2 \max_{0\le t\le T} \|u_{tt}(t)\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned} \tag{6.3.20}$$

Αφού έχουμε επιλέξει $U^0 = P_1^{\mathrm{o}} u^0$, τότε $\vartheta^0 = 0$. Επομένως, συνδυάζοντας τις (6.3.19), (6.3.20) και (6.3.11), έχουμε

$$\begin{aligned} \max_{0\le n\le N} |\vartheta^n|_{1,h}^2 &\le Ch^4 \max_{0\le n\le N} \|u_{tt}^n\|_{3,\Omega}^2 \\ &\quad + Ch^4 \max_{0\le t\le T} \|u_t(t)\|_{3,\Omega}^2 + Ch^4 k^2 \int_0^{t^n} \|u_{ttt}(s)\|_{3,\Omega}^2 ds \\ &\quad + Ck^2 \int_0^{t^n} \|u_{ttt}(s)\|_{0,\Omega}^2 ds + Ck^2 \max_{0\le t\le T} \|u_{tt}(t)\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned} \tag{6.3.21}$$

Συνεπώς, σύμφωνα με την διακριτή ανισότητα των Poicaré–Friedrichs, Λήμμα 1.5.8, και τις (6.2.11) και (6.3.21), παίρνουμε την επιθυμητή εκτίμηση. ■

## 6.4 ΤΟ ΗΜΙΔΙΑΚΡΙΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΕ ΜΗ ΕΠΙΚΑΛΥΠΤΟΜΕΝΟ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟ

Σε αυτή την παράγραφο θα διακριτοποιήσουμε ως προς το χώρο το (6.1.1) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων που θεωρήσαμε στην παράγραφο 2.5, και θα αναλύσουμε το ημιδιακριτό πρόβλημα που προκύπτει. Στα Θεωρήματα 6.4.1 και 6.4.2 θα αποδείξουμε βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος στις $H^1$ και $L^2$ νόρμες.

Θεωρούμε λοιπόν μία πλευρά $e \in E_h^{\text{in}}$ και το αντίστοιχο χωρίο, $b_e \in \mathcal{B}_n$. Τότε ολοκληρώνουμε την (6.1.1) στο $b_e$ και εφαρμόζουμε τον τύπο ολοκλήρωσης του Green. Επομένως, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} &\int_{b_e} u_t(x,t)\,dx - \int_{\partial b_e} \nabla u(s,t)\cdot n\,ds \\ &= \int_{b_e} f(x,t)\,dx, \quad \forall e \in E_h^{\text{in}},\ t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

Έχοντας υπόψιν την (6.4.1) και την §2.5, θεωρούμε την ακόλουθη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για την (6.1.1): Ζητείται $u_h(t) \in S_h^0$, $t \in [0,T]$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &u_{h,t}(m_e,t)|b_e| - \int_{\partial b_e} \nabla u_h(s,t)\cdot n\,ds \\ &= \int_{b_e} f(x,t)\,dx, \quad \forall e \in E_h^{\text{in}},\ t \in [0,T] \\ &u_h(\cdot,0) = u_h^0 \quad \text{στο } \Omega, \end{aligned} \tag{6.4.2}$$

με $u_h^0 \in S_h^0$ μία δοσμένη προσέγγιση της $u_0$.

*Παρατήρηση 6.4.1:* Δεν διακριτοποιούμε τον όρο $\int_{b_e} u_t$, με $\int_{b_e} u_{h,t}\,dx$, που είναι πιθανόν να οδηγήσει σε μη συμμετρικό πίνακα, αλλά με $u_{h,t}(m_e,t)|b_e|$, ο οποίος θα δώσει τελικά έναν διαγώνιο πίνακα.

Συνδυάζοντας τώρα τις (6.4.1) και (6.4.2), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} &\int_{b_e} (u_t(x,t) - u_{h,t}(m_e,t))\,dx - \int_{\partial b_e} \nabla(u-u_h)(s,t)\cdot n\,ds \\ &= 0, \quad \forall e \in E_h^{\text{in}}. \end{aligned} \tag{6.4.4}$$

Θεωρούμε ακόμα τις ακόλουθες διγραμμικές μορφές, $a, \overline{a}_{NN}, \overline{b}, \overline{c} : (H^2 + S_h) \times (H^2 + S_h) \to \mathbb{R}$, ως

$$
\begin{aligned}
a(v,w) &= \sum_{K\in T_h} (\nabla v, \nabla w)_K, \\
\overline{a}_{NN}(v,w) &= \sum_{e\in E_h^{\rm in}} w(m_e) \int_{\partial b_e} \nabla v \cdot n \, ds, \\
\overline{b}(v,w) &= \sum_{e\in E_h^{\rm in}} w(m_e) \int_{b_e} v \, dx, \\
\overline{c}(v,w) &= \sum_{e\in E_h^{\rm in}} |b_e| v(m_e) w(m_e).
\end{aligned}
\tag{6.4.5}
$$

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε την (6.4.2) στη μορφή

$$
\begin{aligned}
&\overline{c}(u_{h,t}(\cdot,t), v) + \overline{a}_{NN}(u_h(\cdot,t), v) \\
&= \overline{b}(f(t), v), \quad \forall v \in S_h^0, \ t \in [0,T], \\
&u_h(\cdot,0) = u_h^0, \ \text{στο } \Omega,
\end{aligned}
\tag{6.4.6}
$$

και την (6.4.4) ως εξής

$$
\begin{aligned}
&\overline{b}(u_t, v) - \overline{c}(u_{h,t}, v) + \overline{a}_{NN}(u - u_h, v) \\
&= 0, \quad \forall v \in S_h^0, \ t \in [0,T].
\end{aligned}
\tag{6.4.7}
$$

Αφού οι $\{\varphi_e\}_{e\in E_h^{\rm in}}$ αποτελούν βάση του $S_h^0$, μπορούμε να διατυπώσουμε το ημιδιακριτό πρόβλημα (6.4.6) στη μορφή: Ζητούνται οι συνιστώσες $\alpha_e(t)$ του αναπτύγματος $u_h(x,t) = \sum_{e\in E_h^{\rm in}} \alpha_e(t)\varphi_e(x)$, τέτοιες ώστε

$$
\sum_{e\in E_h^{\rm in}} \alpha_e'(t) \overline{c}(\varphi_e, \varphi_\ell) + \sum_{e\in E_h^{\rm in}} \alpha_e(t) \overline{a}_{NN}(\varphi_e, \varphi_\ell) = \overline{b}(f, \varphi_\ell), \quad \forall \ell \in E_h^{\rm in},
$$

και με $\gamma_e$ συμβολίζουμε τις συνιστώσες τις αρχικής προσέγγισης $u_h^0$,

$$
\alpha_e(0) = \gamma_e, \quad \forall e \in E_h^{\rm in}.
$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι μπορούμε να διατυπώσουμε το παραπάνω πρόβλημα στην ακόλουθη μορφή,

$$
\overline{C}\alpha'(t) + \overline{A}\alpha(t) = \widetilde{f}, \quad \text{για } t \geq 0, \ \text{με} \quad \alpha(0) = \gamma,
\tag{6.4.8}
$$

όπου $\overline{A} = \{\alpha_{e\ell}\}_{e,\ell\in E_h^{\rm in}}$ είναι ο πίνακας ακαμψίας με στοιχεία $\alpha_{e\ell} = \overline{a}_{NN}(\varphi_e, \varphi_\ell)$, $\overline{C} = \{c_{e\ell}\}_{e,\ell\in E_h^{\rm in}}$ ο πίνακας μάζας με στοιχεία $c_{e\ell} = \overline{c}(\varphi_e, \varphi_\ell)$, $\widetilde{f}$ το διάνυσμα με στοιχεία $f_\ell = \int_{b_\ell} f\,dx$, $\ell \in E_h^{\rm in}$, $\alpha(t)$ το διάνυσμα των αγνώστων $\alpha_e(t)$, $e \in E_h^{\rm in}$, και $\gamma$ το διάνυσμα με στοιχεία $\gamma_e$, $e \in E_h^{\rm in}$. Η διάσταση των διανυσμάτων αυτών είναι ίση με τη διάσταση του χώρου $S_h^0$. Για να δείξουμε ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσεως $\alpha$ του (6.4.8), αρκεί να δείξουμε ότι ο $\overline{C}$ είναι αντιστρέψιμος. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ο $\overline{C}$ είναι διαγώνιος με μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία και συνεπώς αντιστρέψιμος.

Λόγω του ορισμού της $\overline{c}$ και των συναρτήσεων βάσης $\varphi_e$, $e \in E_h^{\rm in}$, βλ. (2.2.5), έχουμε

$$\overline{c}(\varphi_e, \varphi_\ell) = \sum_{p\in E_h^{\rm in}} |b_p|\varphi_e(m_p)\varphi_\ell(m_p) = \delta_{e\ell}, \tag{6.4.9}$$

όπου $\delta$ είναι το σύμβολο του Kronecker. Άρα $\overline{C} = I$, όπου $I$ είναι ο μοναδιαίος $N\times N$ πίνακας. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε την (6.4.8) στη μορφή

$$\alpha'(t) + \overline{A}\alpha(t) = \widetilde{f}, \quad \text{για } t \ge 0, \text{ με } \alpha(0) = \gamma,$$

και άρα είναι σαφές ότι έχει μοναδική λύση για θετικά $t$.

Θεωρούμε τώρα τον ακόλουθο τελεστή "ελλειπτικής" προβολής $P_1^{\rm n}$ στον $S_h^0$, ο οποίος ορίζεται ως

$$\overline{a}_{NN}(P_1^{\rm n}u, \chi) = \overline{a}_{NN}(u, \chi), \quad \forall \chi \in S_h^0. \tag{6.4.10}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.5.1 έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση σφάλματος

$$\|P_1^{\rm n}v - v\|_{1,h} \le Ch\|v\|_{2,\Omega}, \quad \forall v \in H^2 \cap H_0^1. \tag{6.4.11}$$

Ακόμα, αν υποθέσουμε ότι στην κατασκευή του δυϊκού διαμερισμού $\mathcal{B}_n$ του $T_h$, το εσωτερικό σημείο $z_K$ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $K$, για κάθε $K \in T_h$, τότε από το Θεώρημα 2.5.2 παίρνουμε

$$\|P_1^{\rm n}v - v\|_{0,\Omega} \le Ch^2\|v\|_{3,\Omega}, \quad \forall v \in H^3 \cap H_0^1. \tag{6.4.12}$$

Επίσης, λόγω του ορισμού της $P_1^{\rm n}$, παρατηρούμε εύκολα ότι ο $P_1^{\rm n}$ και η παραγώγιση ως προς το χρόνο αντιμετατίθενται,

$$P_1^{\rm n}u_t = (P_1^{\rm n}u)_t, \tag{6.4.13}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ορισμένα λήμματα που θα μας βοηθήσουν στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.4.1.

**Λήμμα 6.4.1:** *Υπάρχουν θετικές σταθερές $C_1$ και $C_2$ τέτοιες ώστε*

$$\|v\|_{0,\Omega}^2 \leq C_1 \overline{c}(v,v) \leq C_2 \|v\|_{0,\Omega}^2, \quad \forall v \in S_h^0. \tag{6.4.14}$$

*Απόδειξη:* Σύμφωνα με το Λήμμα 2.6.5 έχουμε

$$\|v\|_{0,\Omega}^2 \leq C \sum_{e \in E_h^{\rm in}} h_e^2 v^2(m_e) \leq C_\star \|v\|_{0,\Omega}^2, \quad \forall v \in S_h^0, \tag{6.4.15}$$

όπου $h_e = |e|$. Λόγω του γεγονότος ότι ο διαμερισμός $T_h$ είναι μη εκφυλισμένος, βλ. (2.2.1), υπάρχει μία σταθερά $C$, τέτοια ώστε

$$h_e^2 \leq C|b_e|, \quad \forall e \in E_h^{\rm in}.$$

Άρα,

$$\|v\|_{0,\Omega}^2 \leq C\overline{c}(v,v), \quad \forall v \in S_h^0.$$

Παρόμοια δείχνουμε και την άλλη ανισότητα της (6.4.14). ■

**Λήμμα 6.4.2:** *Έστω $v \in H_0^1 \cap H^2 + S_h^0$ και $w \in S_h^0$. Τότε*

$$|\overline{b}(v,w)| \leq C\|v\|_{0,\Omega}\|w\|_{0,\Omega}. \tag{6.4.16}$$

*Απόδειξη:* Χρησιμοποιώντας την ανισότητα των Cauchy–Schwarz, τις (6.4.15) και το γεγονός ότι ο διαμερισμός $T_h$ είναι μη εκφυλισμένος, βλ. (2.2.1), έχουμε

$$\begin{aligned}
|\overline{b}(v,w)| &= |\sum_{e \in E_h^{\rm in}} w(m_e) \int_{b_e} v\,dx| \\
&\leq (\sum_{e \in E_h^{\rm in}} h_e^2 w^2(m_e))^{1/2} (\sum_{e \in E_h^{\rm in}} \frac{|b_e|}{h_e^2} \int_{b_e} v^2\,dx)^{1/2} \\
&\leq C\|w\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε τη διγραμμική μορφή

$$\varepsilon_h(v,w) = \overline{b}(v,w) - \overline{c}(v,w), \tag{6.4.17}$$

και αποδεικνύουμε την ακόλουθη εκτίμηση:

**Λήμμα 6.4.3:** *Έστω $v, w \in S_h^0$. Τότε υπάρχει μία σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε*

$$|\varepsilon_h(v,w)| \le Ch|v|_{1,h}\|w\|_{0,\Omega}. \tag{6.4.18}$$

*Απόδειξη:* Χρησιμοποιώντας το ότι ο τριγωνισμός $T_h$ είναι μη εκφυλισμένος, (2.2.1), και το γεγονός ότι η $v$ είναι κατά τμήματα γραμμική στον $T_h$, έχουμε

$$\begin{aligned}|\varepsilon_h(v,w)| &= |\sum_{e\in E_h^{\rm in}} w(m_e)\int_{b_e}(v - v(m_e))\,dx| \\ &\le C\sum_{e\in E_h^{\rm in}} \mathrm{diam}(b_e)|b_e|\,|w(m_e)|\,|\nabla v| \\ &\le Ch|v|_{1,h}\|w\|_{0,\Omega},\end{aligned}$$

όπου $h_e = |e|$. ■

Σύμφωνα με τα Λήμματα 2.5.1 και 2.5.2, έχουμε

$$\overline{a}_{NN}(v,w) = a(v,w), \quad \forall v, w \in S_h^0. \tag{6.4.19}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε μία βέλτιστης τάξεως εκτίμηση σφάλματος στην $\|\cdot\|_{1,h}$ νόρμα.

**Θεώρημα 6.4.1:** *Έστω $u_h$ και $u$ οι λύσεις των* (6.4.6) *και* (6.1.1), *αντίστοιχα. Τότε*

$$\begin{aligned}\|u(t) - u_h(t)\|_{1,h} &\le \|u^0 - u_h^0\|_{1,h} + Ch\Big(\|u^0\|_{2,\Omega} \\ &+ \int_0^t \|u_t(\tau)\|_{2,\Omega}\,d\tau + \big(\int_0^t \|u_t(\tau)\|_{2,\Omega}^2\,d\tau\big)^{1/2}\Big),\ \text{για } t \ge 0.\end{aligned} \tag{6.4.20}$$

*Απόδειξη:* Χωρίζουμε τη διαφορά $u - u_h$ κατά τον ακόλουθο τρόπο

$$u - u_h = (u - P_1^{\rm n}u) + (P_1^{\rm n}u - u_h) = \varrho + \vartheta. \tag{6.4.21}$$

Σύμφωνα με την (6.4.14), έχουμε για $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\|\varrho(t)\|_{1,h} &\le Ch\|u(t)\|_{2,\Omega} = Ch\|u^0 - \int_0^t u_t(\tau)d\tau\|_{2,\Omega} \\ &\le Ch(\|u^0\|_{2,\Omega} + \int_0^t \|u_t(\tau)\|_{2,\Omega}\,d\tau).\end{aligned} \tag{6.4.22}$$

Συνεπώς, για να αποδείξουμε την (6.4.20) αρκεί να εκτιμήσουμε την $\vartheta$. Λόγω τώρα του ορισμού της $\vartheta$, των (6.4.4), (6.4.1) και (6.4.3), έχουμε την ακόλουθη εξίσωση σφάλματος

$$\begin{aligned}\overline{c}(\vartheta_t,\chi)+\overline{a}_{NN}(\vartheta,\chi) &= \overline{c}(P_1^{\mathrm{n}}u_t,\chi)+\overline{a}_{NN}(P_1^{\mathrm{n}}u,\chi)-\overline{c}(u_{h,t},\chi)\\ &\quad -\overline{a}_{NN}(u_h,\chi)\\ &= \overline{c}(P_1^{\mathrm{n}}u_t,\chi)+\overline{a}_{NN}(P_1^{\mathrm{n}}u,\chi)-\overline{b}(f,\chi)\\ &= -\overline{a}_{NN}(u-P_1^{\mathrm{n}}u,\chi)-\overline{b}(u_t,\chi)+\overline{c}(P_1^{\mathrm{n}}u_t,\chi)\\ &= -\overline{b}(\varrho_t,\chi)-\varepsilon_h(P_1^{\mathrm{n}}u_t,\chi),\quad \forall\chi\in S_h^0.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\overline{c}(\vartheta_t,\chi)+\overline{a}_{NN}(\vartheta,\chi)=-\overline{b}(\varrho_t,\chi)-\varepsilon_h(P_1^{\mathrm{n}}u_t,\chi).\quad \forall\chi\in S_h^0. \tag{6.4.23}$$

Επιλέγοντας λοιπόν $\chi=\vartheta_t$ στην (6.4.23) και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.4.1 και την (6.4.19), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\|\vartheta_t\|_{0,\Omega}^2+C\frac{d}{dt}|\vartheta|_{1,h}^2 &\le C(\overline{c}(\vartheta_t,\vartheta_t)+\overline{a}_{NN}(\vartheta,\vartheta_t))\\ &= C(-\overline{b}(\varrho_t,\vartheta_t)-\varepsilon_h(P_1^{\mathrm{n}}u_t,\vartheta_t)),\quad t\in[0,T].\end{aligned}$$

Άρα, εφαρμόζοντας τα Λήμματα 6.4.2, 6.4.3 και την αριθμητική γεωμετρική ανισότητα στην προηγούμενη σχέση, παίρνουμε

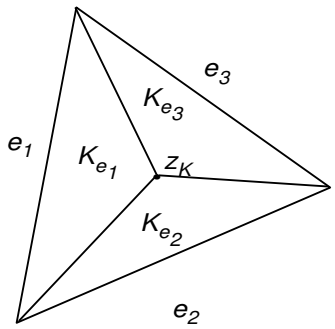
$$\frac{d}{dt}|\vartheta|_{1,h}^2\le C\|\varrho_t\|_{0,\Omega}^2+Ch^2|P_1^{\mathrm{n}}u_t|_{1,h}^2. \tag{6.4.24}$$

Λόγω του ορισμού της $P_1^{\mathrm{n}}$ είναι προφανές ότι

$$|P_1^{\mathrm{n}}u_t|_{1,h}\le|u_t|_{1,h}. \tag{6.4.25}$$

Θεωρούμε τώρα $t\in(0,T]$ και ολοκληρώνουμε την (6.4.24) στο διάστημα $[0,t]$. Τότε, σύμφωνα με την (6.4.25), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}|\vartheta(t)|_{1,h}^2 &\le |\vartheta(0)|_{1,h}^2+C\int_0^t\|\varrho_t(\tau)\|_{0,\Omega}^2\,d\tau\\ &\quad +Ch^2\int_0^t|P_1^{\mathrm{n}}u_t(\tau)|_{1,h}^2\,d\tau\\ &\le |\vartheta(0)|_{1,h}^2+C\int_0^t\|\varrho_t(\tau)\|_{0,\Omega}^2\,d\tau+Ch^2\int_0^t\|u_t(\tau)\|_{1,\Omega}^2\,d\tau.\end{aligned} \tag{6.4.26}$$




**ΣΧΗΜΑ 11**. Διαμερισμός ενός τριγώνου $K \in T_h$ σε τρία υποχωρία $K_e$.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις (6.4.11) και (6.4.13), η παραπάνω σχέση δίνει

$$|\vartheta(t)|_{1,h}^2 \le |\vartheta(0)|_{1,h}^2 + Ch^2 \int_0^t \|u_t(\tau)\|_{1,\Omega}^2 d\tau. \tag{6.4.27}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (6.4.27) και (6.4.22), η εκτίμηση (6.4.20) έπεται εύκολα. ■

**Λήμμα 6.4.4:** *Έστω ότι στην κατασκευή του δυϊκού διαμερισμού $\mathcal{B}_n$ του $T_h$ το εσωτερικό σημείο $z_K$ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $K$, για κάθε $K \in T_h$. Τότε υπάρχει μία σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε*

$$|\varepsilon_h(v,w)| \le Ch^2 |v|_{1,h} |w|_{1,h}, \quad \forall v, w \in S_h^0. \tag{6.4.28}$$

*Απόδειξη:* Σύμφωνα με τις (2.5.5) και (2.5.8), έχουμε

$$\sum_{K\in T_h} \int_K vw\,dx - \sum_{e\in E_h^{\rm in}} w(m_e) \int_{b_e} v\,dx = \sum_{K\in T_h} \int_K v(w - Q(w))\,dx$$
$$= \sum_{K\in T_h} \int_K (v - v(z_K))(w - Q(w))\,dx,$$

με $Q$ τον τελεστή που ορίσαμε στην (2.5.6), δηλαδή

$$Q(w)|_K = \sum_{e\in E_h(K)} w(m_e) q_{K_e}, \quad K \in T_h, \tag{6.4.29}$$

όπου $K_e \in \widetilde{T_h}(K)$ είναι τα μικρότερα τρίγωνα στα οποία έχουμε διαμερίσει το $K$, βλ. Σχήμα 11, και συμβολίζουμε με $q_S$ τη χαρακτηριστική συνάρτηση ενός χωρίου $S \subset \mathbb{R}^2$.

Επομένως, επειδή όπως εύκολα μπορούμε να δούμε, ο $Q$ ικανοποιεί την

$$\begin{aligned} &\|w - Q(w)\|_{0,K} \le Ch_K |w|_{1,K} \quad \forall w \in H^1(K), \\ &\int_K |w - Q(w)|\, dx \le Ch_K \int_K |\nabla w|\, dx, \quad \forall w \in H^1(K), \end{aligned} \tag{6.4.30}$$

λαμβάνουμε

$$\Big| \sum_{K \in T_h} \int_K vw\, dx - \sum_{e \in E_h \text{in}} w(m_e) \int_{b_e} v\, dx \Big| \le Ch^2 |v|_{1,K} |w|_{1,K}. \tag{6.4.31}$$

Ακόμα, επειδή

$$\begin{aligned} \int_K Q(w)\, dx &= \sum_{e \in E_h(K)} w(m_e) |K_e| = \frac{|K|}{3} \sum_{e \in E_h(K)} w(m_e) \\ &= \int_K w\, dx, \quad \forall w \in \mathbb{P}_1, \end{aligned} \tag{6.4.32}$$

λόγω του λήμματος των Bramble–Hilbert (βλ. παραδείγματος χάριν, [12, Lemma 4.3.8]), παίρνουμε ότι

$$\Big| \sum_{K \in T_h} \int_K (Q(w) - w)\, dx \Big| \le Ch^2 |w|_{\infty,2,\Omega}, \quad \forall w \in W^{2,\infty}(\Omega), \tag{6.4.33}$$

όπου $|\cdot|_{\infty,2,\Omega}$ η νόρμα του $W^{2,\infty}(\Omega)$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Sobolev (βλ., φέρ' ειπείν, [12, Theorem 1.4.6]),

$$\|f\|_{\infty,\Omega} \le C \|f\|_{2,1,\Omega}, \quad \forall f \in W^{2,1}(\Omega), \tag{6.4.34}$$

όπου $\|\cdot\|_{\infty,\Omega}$ η νόρμα του $L^\infty(\Omega)$ και $\|\cdot\|_{2,1,\Omega}$ η νόρμα του $W^{2,1}(\Omega)$, υπάρχει σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε, για $v, w \in S_h^0$,

$$\Big| \sum_{K \in T_h} \int_K (Q(vw) - vw)\, dx \Big| \le Ch^2 |v|_{1,h} |w|_{1,h}. \tag{6.4.35}$$

Συνεπώς, συνδυάζοντας τις (6.4.31) και (6.4.35), παίρνουμε

$$\begin{aligned} |\varepsilon_h(v,w)| = |\overline{b}(v,w) - \overline{c}(v,w)| &\le |\overline{b}(v,w) - \sum_{K \in T_h} \int_K vw\, dx| \\ &+ |\sum_{K \in T_h} \int_K vw\, dx - \overline{c}(v,w)| \le Ch^2 |v|_{1,h} |w|_{1,h}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε τη διαφορά $u - u_h$ στην $L^2$ νόρμα.

**Θεώρημα 6.4.2:** *Έστω $u$ η λύση του (6.1.1), με $u(\cdot,t), u_t(\cdot,t) \in H^3(\Omega)$, $t \in [0,T]$, και $u_h$ η λύση του (6.4.6). Έστω τώρα ότι στην κατασκευή του δυϊκού διαμερισμού $\mathcal{B}_n$ του $T_h$ το εσωτερικό σημείο $z_K$ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $K$, για κάθε $K \in T_h$. Τότε*

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_h(t)\|_{0,\Omega} \le \|u^0 - u_h^0\|_{0,\Omega} + Ch^2 \big(\|u^0\|_{3,\Omega} \\ + \int_0^t \|u_t(\tau)\|_{3,\Omega}\, d\tau + \big(\int_0^t \|u_t(\tau)\|_{3,\Omega}^2\, d\tau\big)^{1/2}\big),\ \text{για } t \ge 0. \end{aligned} \tag{6.4.36}$$

*Απόδειξη:* Θεωρούμε και πάλι την εξίσωση σφάλματος (6.4.23). Επιλέγοντας τώρα $\chi = \vartheta$ και χρησιμοποιώντας τις (6.4.19), (6.4.25), τα Λήμματα 6.4.2, 6.4.4, τη διακριτή ανισότητα των Poincaré–Friedrichs, βλ. Λήμμα 1.5.8, και την αριθμητική γεωμετρική ανισότητα, έχουμε

$$\frac{d}{dt}\overline{c}(\vartheta,\vartheta) \le C\|\varrho_t\|_{0,\Omega}^2 + Ch^4 |P_1^{\mathrm{n}} u_t|_{1,h}^2. \tag{6.4.37}$$

Θεωρούμε ένα $t \in (0,T]$ και ολοκληρώνουμε την (6.4.37) στο διάστημα $[0,t]$. Τότε, λόγω του Λήμματος 6.4.1 και της (6.4.25), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \|\vartheta(t)\|_{0,\Omega}^2 &\le C\|\vartheta(0)\|_{0,\Omega}^2 + C\int_0^t \|\varrho_t(\tau)\|_{0,\Omega}^2\, d\tau \\ &\quad + Ch^4 \int_0^t |P_1^{\mathrm{n}} u_t(\tau)|_{1,h}^2\, d\tau \\ &\le C\|\vartheta(0)\|_{0,\Omega}^2 + C\int_0^t \|\varrho_t(\tau)\|_{0,\Omega}^2\, d\tau \\ &\quad + Ch^4 \int_0^t \|u_t(\tau)\|_{1,\Omega}^2\, d\tau. \end{aligned} \tag{6.4.38}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.2.5 καθώς και τις (6.4.12) και (6.4.13), η παραπάνω σχέση δίνει

$$\|\vartheta(t)\|_{0,\Omega}^2 \le C\|\vartheta(0)\|_{0,\Omega}^2 + Ch^4 \int_0^t \|u_t(\tau)\|_{3,\Omega}^2 d\tau. \tag{6.4.39}$$

Επομένως, σύμφωνα με τις (6.4.12) και (6.4.39) λαμβάνουμε την επιθυμητή εκτίμηση. ■

## 6.5 ΕΝΑ ΠΛΗΡΩΣ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΣΧΗΜΑ ΣΕ ΜΗ ΕΠΙΚΑΛΥΠΤΟΜΕΝΟ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟ

Σε αυτή την παράγραφο θα αναλύσουμε ένα πλήρως διακριτό σχήμα για την (6.1.1), το οποίο προκύπτει διακριτοποιώντας την (6.4.6) ως προς το χρόνο με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler.

Θεωρούμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[0,T]$. Για $N \in \mathbb{N}$, έστω $k = T/N$ το βήμα της διαμέρισης και $t^n := nk$, $n = 0,\dots,N$. Επίσης για μία συνάρτηση $\varphi$, η οποία ορίζεται στο διάστημα $[0,T]$, θέτουμε $\varphi^n := \varphi(t^n)$ και για $v^0,\dots,v^N \in S_h^0$

$$\overline{\partial} v^n = \frac{v^n - v^{n-1}}{k}, \quad n = 0,\dots,N-1.$$

Διακριτοποιούμε λοιπόν την (6.4.6) ως προς το χρόνο με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler. Επομένως, προκύπτει το ακόλουθο πλήρως διακριτό σχήμα: Ζητούνται $U^n \in S_h^0$, $n = 0,\dots,N$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &\overline{c}(\overline{\partial} U^n, \chi) + \overline{a}_{N\,N}(U^n,\chi) \\ &\quad = \overline{b}(f(t^n),\chi), \quad \forall \chi \in S_h^0,\ n = 1,\dots,N, \\ &U^0 = u_h^0, \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

όπου η $u_h^0 \in S_h^0$ ικανοποιεί την (6.4.3). Χρησιμοποιώντας τώρα τους πίνακες $\overline{A}$ και $\overline{C}$ που θεωρήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, μπορούμε να γράψουμε την (6.5.1) στη μορφή

$$(\overline{C} + k\overline{A})\alpha^n = \overline{C}\alpha^{n-1} + k\widetilde{f}(t^n). \tag{6.5.2}$$

Λόγω του γεγονότος ότι ο $\overline{C}$ είναι διαγώνιος με μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία, της (6.4.19) και των Λημμάτων 2.5.1 και 2.5.2, ο πίνακας $\overline{C} + k\overline{A}$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, και άρα αντιστρέψιμος. Θα δείξουμε τώρα μία βέλτιστης τάξεως εκτίμηση σφάλματος στην $H^1$ νόρμα.

**Θεώρημα 6.5.1:** *Έστω $U^n$ και $u$ οι λύσεις των* (6.5.1) *και* (6.1.1)*, αντίστοιχα. Τότε υπάρχει μία σταθερά $C$, ανεξάρτητη των $k$ και $h$, τέτοια ώστε*

$$\begin{aligned} \max_{0\le n\le N} \|u(t^n) - U^n\|_{1,h} &\le C\|u^0 - u_h^0\|_{1,h} + Ch\Bigg( \|u^0\|_{2,\Omega} \\ &+ \int_0^T \|u_t(\tau)\|_{2,\Omega} + \Big(\int_0^T \|u_t(\tau)\|_{2,\Omega}^2 d\tau\Big)^{1/2}\Bigg) \\ &+ Ck\left(\int_0^T \|u_{tt}(\tau)\|_{0,\Omega}^2 d\tau\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{6.5.3}$$

*Απόδειξη:* Από την (6.4.21) έχουμε ότι ισχύει

$$u(t^n)-U^n=(u(t^n)-P_1^{\mathrm{n}}u(t^n))+(P_1^{\mathrm{n}}u(t^n)-U^n)=\varrho^n+\theta^n. \tag{6.5.4}$$

Ακόμα, από την (6.4.22), παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|\varrho^n\|_{1,h}&\le Ch\|u(t^n)\|_{2,\Omega}\\&\le Ch\big(\|u^0\|_{2,\Omega}+\int_0^{t^n}\|u_t(\tau)\|_{2,\Omega}d\tau\big),\ \ n=0,\dots,N.\end{aligned} \tag{6.5.5}$$

Επίσης με έναν παρόμοιο υπολογισμό με την (6.4.23), παίρνουμε

$$\begin{aligned}&\overline{c}(\overline{\partial}\vartheta^n,\chi)+\overline{a}_{NN}(\vartheta^n,\chi)=\overline{c}(\overline{\partial}P_1^{\mathrm{n}}u^n,\chi)+\overline{a}_{NN}(P_1^{\mathrm{n}}u^n,\chi)-\overline{(}\overline{\partial}U^n,\chi)\\&-\overline{a}_{NN}(U^n,\chi)\\&=\overline{c}(\overline{\partial}P_1^{\mathrm{n}}u^n,\chi)-\overline{b}(\overline{\partial}u^n,\chi)+\overline{b}(\overline{\partial}u^n-u_t^n,\chi)\\&\quad+\overline{b}(u_t^n,\chi)+\overline{a}_{NN}(u^n,\chi)-\overline{c}(\overline{\partial}U^n,\chi)-\overline{a}_{NN}(U^n,\chi)\\&=\overline{b}(\omega^n,\chi)-\varepsilon_h(\overline{\partial}P_1^{\mathrm{n}}u^n,\chi),\quad\forall\chi\in S_h^0,\ \ n=1,\dots,N,\end{aligned}$$

όπου

$$\omega^n:=(P_1^{\mathrm{n}}\overline{\partial}u^n-\overline{\partial}u^n)+(\overline{\partial}u^n-u_t^n)=\omega_1^n+\omega_2^n. \tag{6.5.6}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}&\overline{c}(\overline{\partial}\vartheta^n,\chi)+\overline{a}_{NN}(\vartheta^n,\chi)\\&=\overline{b}(\omega^n,\chi)-\varepsilon_h(\overline{\partial}P_1^{\mathrm{n}}u^n,\chi),\quad\forall\chi\in S_h^0,\ \ n=1,\dots,N.\end{aligned} \tag{6.5.7}$$

Επιλέγοντας τώρα $\chi=\overline{\partial}\vartheta^n$ στην (6.5.7), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}&\overline{c}(\overline{\partial}\vartheta^n,\overline{\partial}\vartheta^n)+\overline{a}_{NN}(\vartheta^n,\overline{\partial}\vartheta^n)\\&=\overline{b}(\omega^n,\overline{\partial}\vartheta^n)-\varepsilon_h(\overline{\partial}P_1^{\mathrm{n}}u^n,\overline{\partial}\vartheta^n),\quad n=1,\dots,N.\end{aligned} \tag{6.5.8}$$

Λόγω λοιπόν της (6.4.19) και του Λήμματος 6.4.1, η (6.5.8) δίνει για $n=1,\dots,N$,

$$\begin{aligned}Ck\|\overline{\partial}\vartheta^n\|_{0,\Omega}^2+|\vartheta^n|_{1,h}^2\le{}&|\vartheta^n|_{1,h}|\vartheta^{n-1}|_{1,h}+k\overline{b}(\omega^n,\overline{\partial}\vartheta^n)\\&+k\varepsilon_h(\overline{\partial}P_1^{\mathrm{n}}u^n,\overline{\partial}\vartheta^n).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα στην παραπάνω σχέση τα Λήμματα 6.4.2, 6.4.3 και την αριθμητική γεωμετρική ανισότητα, λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
|\vartheta^n|_{1,h}^2 &\le |\vartheta^{n-1}|_{1,h}^2 + Ck\|\omega^n\|_{0,\Omega}^2 \\
&\quad + Ch^2k|\overline{\partial}P_1^{\mathrm{n}}u^n|_{1,h}^2, \quad n=1,\dots,N.
\end{aligned} \tag{6.5.9}
$$

Επιπλέον, λόγω του ορισμού της $P_1^{\mathrm{n}}$, είναι προφανές ότι

$$
|\overline{\partial}P_1^{\mathrm{n}}u^n|_{1,h} \le |\overline{\partial}u^n|_{1,\Omega}. \tag{6.5.10}
$$

Συνεπώς, οι (6.5.9) και (6.5.10) δίνουν

$$
\begin{aligned}
|\vartheta^n|_{1,h}^2 &\le |\vartheta^{n-1}|_{1,h}^2 + Ck\|\omega^n\|_{0,\Omega}^2 \\
&\quad + Ch^2k|\overline{\partial}u^n|_{1,\Omega}^2, \quad n=1,\dots,N.
\end{aligned} \tag{6.5.11}
$$

Στη συνέχεια εφαρμόζοντας στην (6.5.11) το Λήμμα 6.3.1, παίρνουμε

$$
\max_{0\le n\le N}|\vartheta^n|_{1,h}^2 \le C|\vartheta^0|_{1,h}^2 + Ck\sum_{j=1}^{n}(\|\omega^j\|_{0,\Omega}^2 + h^2|\overline{\partial}u^j|_{1,\Omega}^2). \tag{6.5.12}
$$

Ακόμα, λόγω της (6.5.6), έχουμε για $j=1,\dots,N$,

$$
\begin{aligned}
\omega_1^j &= \frac{1}{k}\int_{t^{j-1}}^{t^j}(P_1^{\mathrm{n}}-I)u_t(s)\,ds \\
\text{και}\quad \omega_2^j &= -\frac{1}{k}\int_{t^{j-1}}^{t^j}(s-t^{j-1})u_{tt}(s)\,ds.
\end{aligned} \tag{6.5.13}
$$

Επίσης εύκολα παρατηρούμε ότι ισχύει

$$
|\overline{\partial}u^j|_{1,\Omega}^2 \le k^{-1}\int_{t^{j-1}}^{t^j}\|u_t(\tau)\|_{1,\Omega}^2. \tag{6.5.14}
$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις (6.4.11), (6.5.13) και (6.5.14), λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
&k\sum_{j=1}^{N}(\|\omega^j\|_{0,\Omega}^2 + h^2|\overline{\partial}u^j|_{1,\Omega}^2) \\
&\le 2k\sum_{j=1}^{N}(\|\omega_1^j\|_{0,\Omega}^2 + \|\omega_2^j\|_{0,\Omega}^2 + h^2|\overline{\partial}u^j|_{1,\Omega}^2) \\
&\le Ch^2\int_0^T\|u_t(\tau)\|_{2,\Omega}^2 d\tau + Ck^2\int_0^T\|u_{tt}(\tau)\|_{0,\Omega}^2 d\tau \\
&\quad + Ch^2\int_0^T\|u_t(\tau)\|_{1,\Omega}^2 d\tau.
\end{aligned} \tag{6.5.15}
$$

Συνεπώς, συνδυάζοντας τις (6.5.15), (6.5.12) και την διακριτή ανισότητα του Gronwall, Λήμμα 6.3.1, έχουμε

$$\begin{aligned}\max_{0\le n\le N}|\vartheta^n|_{1,h}^2 &\le C|\vartheta^0|_{1,h}^2 + Ch^2\int_0^T \|u_t(\tau)\|_{2,\Omega}^2 d\tau \\ &\quad + Ck^2\int_0^T \|u_{tt}(\tau)\|_{0,\Omega}^2 d\tau.\end{aligned} \tag{6.5.16}$$

Τελικά, από τις (6.5.5) και (6.5.16) παίρνουμε την επιθυμητή εκτίμηση (6.5.3). ■

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε μία βέλτιστης τάξεως εκτίμηση της διαφοράς $u(t^n) - U^n$ στην $L^2$ νόρμα.

**Θεώρημα 6.5.2:** *Έστω $u$ η λύση του (6.1.1), με $u(\cdot,t), u_t(\cdot,t) \in H^3(\Omega)$, $t \in J$, και $U^n$ η λύση του (6.5.1). Έστω ακόμα ότι στην κατασκευή του δυϊκού διαμερισμού $\mathcal{B}_n$ του $T_h$ το εσωτερικό σημείο $z_K$ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $K$, για κάθε $K \in T_h$. Τότε υπάρχει μία σταθερά $C$, ανεξάρτητη των $k$ και $h$, τέτοια ώστε*

$$\begin{aligned}&\max_{0\le n\le N}\|u(t^n) - U^n\|_{0,\Omega} \le C\|u^0 - u_h^0\|_{0,\Omega} \\ &\quad + Ch^2\Big\{\|u^0\|_{3,\Omega}^2 + \int_0^T \|u_t(\tau)\|_{3,\Omega} d\tau \\ &\quad + \Big(\int_0^T \|u_t(\tau)\|_{3,\Omega}^2 d\tau\Big)^{1/2}\Big\} + Ck\Big(\int_0^T \|u_{tt}(\tau)\|_{0,\Omega}^2 d\tau\Big)^{1/2}.\end{aligned} \tag{6.5.17}$$

*Απόδειξη:* Θεωρούμε όπως και στη απόδειξη του Θεωρήματος 6.5.1 την εξίσωση σφάλματος (6.5.7). Επιλέγοντας $\chi = \vartheta^n$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2k}(\overline{c}(\vartheta^n,\vartheta^n) - \overline{c}(\vartheta^{n-1},\vartheta^{n-1})) + \frac{1}{2k}(\overline{c}(\vartheta^n - \vartheta^{n-1}, \vartheta^n - \vartheta^{n-1})) \\ &\quad + |\vartheta^n|_{1,h}^2 = \overline{c}(\overline{\partial}\vartheta^n,\vartheta^n) + \overline{a}_{NN}(\vartheta^n,\vartheta^n) \\ &= \overline{b}(\omega^n,\vartheta^n) - \varepsilon_h(\overline{\partial}P_1^{\mathrm{n}}u^n,\vartheta^n), \quad n = 1,\dots,N.\end{aligned}$$

Λόγω τώρα των Λημμάτων 6.5.2, 6.4.4, της διακριτής ανισότητα των Poincaré–Friedrichs, βλ. Λήμμα 1.5.8, της (6.5.10) και της αριθμητικής γεωμετρικής ανισότητας, η παραπάνω σχέση δίνει

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2k}(\overline{c}(\vartheta^n,\vartheta^n) - \overline{c}(\vartheta^{n-1},\vartheta^{n-1})) + |\vartheta^n|_{1,h}^2 \\ &\qquad \le C\|\omega^n\|_{0,\Omega}\|\vartheta^n\|_{0,\Omega} + Ch^2|\overline{\partial}P_1^{\mathrm{n}}u^n|_{1,h}|\vartheta^n|_{1,h} \\ &\qquad \le C\|\omega^n\|_{0,\Omega}^2 + Ch^4|\overline{\partial}u^n|_{1,\Omega}^2 + |\vartheta^n|_{1,h}^2 \quad n = 1,\dots,N.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}(6.5.18)\qquad &\frac{1}{2k}(\overline{c}(\vartheta^n,\vartheta^n)-\overline{c}(\vartheta^{n-1},\vartheta^{n-1}))\\ &\le C\|\omega^n\|^2_{0,\Omega}+Ch^4|\overline{\partial}u^n|^2_{1,\Omega}\quad n=1,\dots,N.\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τώρα στην (6.5.18) το Λήμμα 6.4.1, έχουμε

$$(6.5.19)\qquad \|\vartheta^n\|^2_{0,\Omega}\le C\|\vartheta^{n-1}\|^2_{0,\Omega}+Ck\sum_{j=1}^{n}(\|\omega^j\|^2_{0,\Omega}+h^4|\overline{\partial}u^j|^2_{1,\Omega}).$$

Από την διακριτή ανισότητα του Gronwall, Λήμμα 6.3.1, και τις (6.5.6), (6.5.13), (6.5.14), (6.4.12) και (6.5.19), παίρνουμε

$$\begin{aligned}(6.5.20)\qquad \max_{0\le n\le N}\|\vartheta^n\|^2_{0,h}&\le C\|\vartheta^0\|^2_{0,\Omega}+Ch^4\int_0^T\|u_t(\tau)\|^2_{3,\Omega}d\tau\\ &+Ck^2\int_0^T\|u_{tt}(\tau)\|^2_{0,\Omega}d\tau).\end{aligned}$$

Τελικά από τις (6.4.12) και (6.5.20) έπεται η επιθυμητή εκτίμηση (6.5.17). ■

# Βιβλιογραφία


1. Adams, R.A., Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
2. Agmon, S., Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, Van Nostrand, Princeton, 1965.
3. Akrivis, G., Crouzeix, M., Makridakis, Ch., *Implicit–explicit multistep finite element methods for nonlinear parabolic problems*, Math. Comp. (to appear) (1998).
4. Arnold, D.N., Douglas, J., Jr., Thomée, V., *Superconvergence of a finite element approximation to the solution of a Sobolev equation in a single space variable*, Math. Comp. **36** (1981), 53–63.
5. Bank, R.E., Rose, D.J., *Some error estimates for the box method*, SIAM J. Numer. Anal. **24** (1987), 777–787.
6. Barenblat, G., Zheltov, I., Kochiva, I., *Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks*, J. Appl. Math. Mech. **24** (1960), 1286–1303.
7. Baughman, L., Walkington, N., *Co–volume methods for degenerate parabolic problems*, Numer. Math. **64** (1993), 45–67.
8. Benjamin, T.B., Bona, J.L., Mahony, J.J., *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **272** (1972), 47–78.
9. Bona, J.L., Chen, M., *A Boussinesq system for two–way propagation of nonlinear dispersive waves*, TICAM REPORT 96-36, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics (1996).
10. Bona, J.L., Dougalis, V.A., *An initial– and boundary–value problem for a model equation for propagation of long waves*, J. Math. Anal. Appl. **75** (1980), 503–522.
11. Bona, J.L., Smith, R., *The initial–value problem for the Korteweg–de Vries equation*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **278** (1975), 555–601.
12. Brenner, S.C., Scott, L.R., The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Springer–Verlag, New York, 1994.
13. Cai, Z., *On the finite volume element method*, Numer. Math. **58** (1991), 713–735.
14. Cai, Z., Mandel, J., McCormick, S., *The finite volume element method for diffusion equations on general triangulations*, SIAM J. Numer. Anal. **28** (1991), 392–402.
15. Champier, S., Gallouët, T., Herbin, R., *Convergence of an upstream finite volume scheme for a nonlinear hyperbolic equation on a triangular mesh*, Numer. Math. **66** (1993), 139–157.
16. Chatzipantelidis, P., *Explicit multistep methods for nonstiff partial differential equations*, Appl. Num. Math. Προς δημοσίευση (1997).

17. Chatzipantelidis, P., *A finite volume method based on the Crouzeix–Raviart element for elliptic PDE's in two dimensions*, Preprint (1997).
18. Chen, P.J., Gurtin, M.E., Williams, W.O., *On the thermodynamics of non-simple elastic materials with two temperatures*, Z. Angew. Math. Phys. **20** (1969), 107–112.
19. Chou, S.H., *Analysis and convergence of a covolume method for the generalized Stokes problem*, Math. Comp **66** (1997), 85–104.
20. Chung, S.K., Ha, S.N., *Finite element Galerkin solutions for the Rosenau Equation*, Applicable Analysis **54** (1994), 39–56.
21. Ciarlet, P.G., *Basic Error Estimates for Elliptic Problems*, in Handbook of Numerical Analysis, Vol II, North–Holland, Amsterdam, 1991, pp. 17–351.
22. Ciarlet, P.G., Raviart, P.–A., *General Lagrange and Hermite interpolation in* $\mathbb{R}^n$ *with applications to finite element methods*, Arch. Rat. Mech. Anal. **46** (1972), 177–199.
23. Coddington, E.A., Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations, Tata McGraw–Hill, New Delhi, India, 1972.
24. Crouzeix, M., Raviart, P.–A., *Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equation I*, RAIRO–$M^2$AN **7** (1973), 77–104.
25. Crumpton, P.I., Mackenzie, J.A., Morton, K.W., *Cell vertex algorithms for the compressible Navier–Stokes equations*, J. Comput. Phys. **109** (1993), 1–15.
26. Dick, E., *A flux–difference splitting method for steady Euler equations*, J. Comput. Phys. **76** (1988), 19–32.
27. Douglas, J.Jr., Dupont, T., Percell, P., Scott, R., *A family of* $C^1$ *finite elements with optimal approximation properties for various Galerkin methods for 2nd and 4th order problems*, R.A.I.R.O. Numer. Anal. **13** (1979), 227–255.
28. Dautray, R., Lions, J.–L., Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Volume 3, Spectral Theory and Applications, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, 1990.
29. Ewing, R.E., *Numerical solution of Sobolev partial differential equations*, SIAM J. Numer. Anal. **12** (1975), 345–363.
30. Ewing, R.E., *The approximation of certain parabolic equations backward in time by Sobolev equations*, SIAM J. Math. Anal. **6** (1975), 283–294.
31. Ewing, R.E., Lazarov, R.D., Vassilevski, P.S., *Local refinement techniques for elliptic problems on cell–centered grids I. Error analysis*, Math. Comp. **56** (1991), 437–461.
32. Eymard, R., Gallouët, T., Herbin, R., Finite Volume Methods, To appear in Handbook of Numerical Analysis, North–Holland, Amsterdam, 1997.
33. Gastaldi, L., Nochetto, R., *Optimal* $L^\infty$*–error estimates for nonconforming and mixed finite element methods of lowest order*, Numer. Math. **50** (1987), 587–611.
34. Godlewski, E., Raviart, P.-A., *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Springer–Verlag, New York, 1996.
35. Godunov, S.K., *A finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics*, Mat. Sb. **47** (1959), 271–306.
36. Grisvard, P., Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, Pitman, Massachusetts, 1985.
37. Guo, W., Stynes, M., *An analysis of a cell vertex finite volume method for a parabolic convection–diffusion problem*, Math. Comp. **66** (1997), 105–124.
38. Hackbusch, W., *On first and second order box schemes*, Computing **41** (1989), 277–296.
39. Hairer, E., Nørsett, S.P., Wanner, G., Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems, second revised edition, Springer–Verlag, Heidelberg, 1993.

40. Hairer, E., Wanner, G., Solving Ordinary Differential Equations II, Stiff and Differential–Algebraic Problems, Springer–Verlag, Heidelberg, 1991.
41. Hall, M.G., *A vertex centroid scheme for improved finite volume solution of the Navier–Stokes equations*, AIAA Paper 91-1540 (1991).
42. Henrici, P., Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962.
43. Herbin, R., *An error estimate for a finite volume scheme for a diffusion convection problem on a triangular mesh*, Numer. Methods Partial Differential Equations **11** (1995), 165–173.
44. Herbin, R., Labergerie, O., *Finite volume schemes for elliptic and elliptic–hyperbolic problems on triangular meshes*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **147** (1997), 85–103.
45. Keller, H.B., Cebeci, T., *Accurate numerical methods for boundary layer flow I: two–dimensional laminar flows*, in Lecture notes in Physics, Proceedings of Second International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Sringer–Verlag, Berlin (1971), 92–100.
46. Keller, H.B., Cebeci, T., *Accurate numerical methods for boundary layer flow II: two–dimensional turbulent flows*, AIAA J. **10** (1972), 1193–1199.
47. Kossioris, G., Makridakis Ch., Souganidis, P.E., *Finite volume schemes for Hamilton–Jacobi equations (*υπό προετοιμασία*)*.
48. Lazarov, R.D., Mishev, I.D., Vassilevski, P.S., *Finite volume methods for convection–diffusion problems*, SIAM J. Numer. Anal. **33** (1996), 31–55.
49. MacCormack, R.W., Paullay, A.J., *Computational efficiency achieved by time splitting of finite difference operators*, AIAA Paper n. 72-154, San Diego (1972).
50. McDonald, P.W., *The computation of transonic flow through two–dimensional gas turbine cascades*, ASME Paper n. 71-GT-89, New York (1971).
51. Michev, I.D., Finite Volume and Finite Volume Element Methods for Nonsymmetric Problems, PhD. Thesis, Texas A&M University, 1996.
52. Morton, K.W., Numerical Solution of Convection–Diffusion Problems, Chapman & Hall, London, 1996.
53. Morton, K.W., Stynes, M., *An analysis of the cell vetrex method*, RAIRO–$M^2$AN **28** (1994), 699-724.
54. Morton, K.W., Stynes, M., Süli, E., *Analysis of a cell–vetrex finite volume method for convection–diffusion problems*, Math. Comp. **66** (1997), 105–124.
55. Nitsche, J.A., *Schauder estimates for finite element approximations on second order elliptic boundary value problems*, Proc. Special Year Numer. Anal. (Babuska, Lin, Osborn, eds.), Lecture Notes No. 20, University of Maryland, 1981, pp. 290–343.
56. Park, M.A., *On the Rosenau equation in multidimensional space*, Non. Anal. **21** (1993), 77–85.
57. Preissmann, A., *Propagation des intumescences dans les canaux et rivières*, in 1st Congrès de l'Assoc. Française de Calc., AFCAL, Grenoble (1961), 433–442.
58. Quarteroni, A., Valli, A., *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer–Verlag, Berlin, 1994.
59. Rannacher, R. Scott, R., *Some optimal error estimates for piecewise linear finite element approximations*, Math. Comp. **38** (1982), 437–445.
60. Rizzi, A.W., Inouye, M., *Time split finite volume method for three dimensional blunt–body flows*, AIAA Journal **11** (1973), 1478–1485.
61. Rosenau, P., *Dynamics of dense discrete systems*, Prog. Theoretical Phys. **79** (1988), 1028–1042.

62. Roos, H.-G., Stynes, M., Tobika, L., *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations*, Springer–Verlag, Berlin, 1996.
63. Schmidt, T., *Box schemes on quadrilateral meshes*, Computing **51** (1994), 271–292.
64. Schumaker, L.L., Spline Functions: Basic Theory, Wiley, New York, 1980.
65. Showalter, R.E., Ting, T.W., *Pseudoparabolic partial differential equations*, SIAM J. Math. Anal. **1** (1970), 1–26.
66. Süli, E., *The accuracy of cell vertex finite volume methods on quadrilateral meshes*, Math. Comp. **59** (1992), 359–382.
67. Süli, E., *Convergence of finite volume schemes for Poisson's equation on nonuniform meshes*, SIAM J. Numer. Anal. **28** (1991), 1419–1430.
68. Taylor, D.W., Research on Consolidation of Clays, Massachusetts Institude of Technology Press, Cambridge, 1942.
69. Temam, R., Navier–Stokes Equations, North–Holland, Amsterdam, 1979.
70. Thomée, V., Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems, Springer–Verlag, Heidelberg, 1997.
71. Ting, T.W., *Certain nonsteady flows of second order fluids*, Arch. Rat. Mech. Anal. **14** (1963), 1–26.
72. Ting, T.W., *A cooling process according to two–temperature theory of heat conduction*, J. Math. Anal. Appl. **45** (1974), 23–31.
73. Trujillo, R., Error Analysis of the Finite Volume Element Method for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations, PhD. Thesis, University of Colorado at Denver, 1996.
74. Varga, R.S., Matrix Iterative Analysis, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, 1962.
75. Vassilevski, P.S., Petrova S.I., Lazarov, R.D., *Finite difference schemes on triangular cell–centered grids with local refinement*, SIAM J. Sci. Stat. Comput. **13** (1992), 1287-1313.
76. Zlámal, M., *On the finite element method*, Numer. Math. **12** (1968), 394–409.
77. Zouraris, G.E., *Optimal order of convergence for high–order implicit Runge–Kutta methods applied to a complex Sobolev–type equation*, Preprint (1995).
78. Ζουράρης, Γ., Ανάλυση Αριθμητικών Μεθόδων για Δυναμικές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης, 1995.