Περί της Γεωμετρίας του Χώρου των Quasi-Fuchsian Παραμορφώσεων Μιας Υπερβολικής Επιφάνειας

Ιωάννης Δ. Πλατής

Διδακτορική Διατριβή

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ηράκλειο

Δεκέμβρης 1999

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε μία κλειστή Riemann επιφάνεια S γένους $g > 1$, αντιστοιχούμε τους ακόλουθους χώρους δομών της S :

-Τον Quasifuchsian χώρο της S, το χώρο των quasi-Fuchsian δομών της S και

-Τον Teichmüller χώρο της S, τον χώρο των conformal δομών πάνω στην S.

Αυτοί οι χώροι έχουν πλούσια αναλυτικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά, και σκοπός μας είναι να μελετήσουμε την μεταξύ τους σύνδεση.

Ο Quasifuchsian χώρος $QF(S)$, μπορεί να εμφυτευτεί φυσιολογικά σε ένα μιγαδικό αριθμητικό χώρο και είναι μιγαδική πολλαπλότητα [B4].

Ο Teichmüller χώρος μπορεί να εμφυτευτεί σε ένα μιγαδικό χώρο Banach και κατ΄ αυτόν τον τρόπο γίνεται μιγαδική πολλαπλότητα [B2]. Αυτή η πολλαπλότητα συμβολίζεται με $Teich(S)$, και μπορεί να θεωρηθεί σαν μία μιγαδική υποπολλαπλότητα του $QF(S)$.

Από την άλλη μεριά, ο χώρος Teichmüller είναι κατά φυσιολογικό τρόπο μία πραγματική αναλυτική πολλαπλότητα [Kr], που συμβολίζεται με $\widetilde{F}(S)$, η οποία είναι ισόμορφη με μία πραγματική αναλυτική υποπολλαπλότητα του $QF(S)$.

Είναι γνωστό ότι ο $Teich(S)$ είναι μία Kählerian πολλαπλότητα, όπου η Kählerian μετρική του επάγεται από την Weil-Petersson μορφή και ο $\widetilde{F}(S)$ είναι μία πραγματική συμπλεκτική πολλαπλότητα [W1,2].

Σε τούτη τη διατριβή:

α) Αποδεικνύουμε ότι ο $QF(S)$ είναι μία μιγαδική συμπλεκτική πολλαπλότητα, κατασκευάζοντας μία μιγαδική συμπλεκτική δομή η οποία είναι φυσιολογική υπό το πρίσμα της υπερβολικής γεωμετρίας και μπορεί να ειδωθεί σαν την μιγαδοποίηση της πραγματικής συμπλεκτικής δομής του χώρου Teichmüller.

β) Ορίζουμε μία νέα μιγαδική δομή στον $QF(S)$, ως προς την οποία, ο $\widetilde{F}(S)$ είναι μία μιγαδική υποπολλαπλότητα του $QF(S)$.

γ) Ορίζουμε την Weil-Petersson hermitian μορφή στον $QF(S)$. Αποδεικνύουμε ότι οι δύο μιγαδικές δομές του $QF(S)$, μαζί με την μετρική που επάγει η Weil-Petersson μορφή, αναδεικνύουν μία Hyperkählerian δομή στον $QF(S)$ η οποία ενοποιεί όλες τις παραπάνω δομές και εισάγει μία νέα προοπτική για τη μελέτη τους.

Προηγούμενα Αποτελέσματα

Σταθεροποιούμε μία κλειστή (δηλαδή συμπαγή και χωρίς σύνορο) επιφάνεια Riemann S γένους $g > 1$, και ταυτίζουμε την θεμελιώδη ομάδα της $\pi_1(S)$ με την Fuchsian ομάδα Γ που δρα στο $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, Imz > 0\}$, το άνω υπερβολικό ημιεπίπεδο, και είναι τέτοια ώστε $S = \mathbb{U}/\Gamma$. Συμβολίζουμε με $\overline{S}$ την επιφάνεια με τον αντίθετο προσανατολισμό.

Teichmüller χώρος. Ο Teichmüller χώρος της επιφάνειας S, είναι το σύνολο των marked Riemann επιφανειών $[X]$, όπου η X είναι μία Riemann επιφάνεια ομοιομορφική με την S μέσω ενός ομοιομορφισμού που διατηρεί τον προσανατολισμό, και ένα marking στην ον X είναι μία επιλογή ισομορφισμού μεταξύ των θεμελιωδών ομάδων Γ της S και Γ_X της X.

Ο χώρος Teichmüller εμφανίζεται κατά πεπλεγμένο τρόπο σε εργασίες των Klein και Poincaré. Οι Fricke, Fenchel και Nielsen ήταν από τους πρώτους που μελέτησαν την πραγματική αναλυτική δομή του. Πραγματικές αναλυτικές συντεταγμένες δίνονται τοπικά από τα υπερβολικά μήκη l_i, $i = 1, ..., 6g-6$ κάποιων συγκεκριμένων απλών κλειστών γεωδαισιακών της S. Κατ' αυτόν τον τρόπο, ο χώρος Teichmüller γίνεται μία πραγματική $6g-6$ πολλαπλότητα που συμβολίζεται με $\widetilde{F}(S)$. [W1]

Στη δεκαετία του '50, οι L. Ahlfors και L. Bers ανέπτυξαν την θεωρία των quasiconformal απεικονίσεων, που αποδείχθηκε ένα ισχυρό εργαλείο για την μελέτη του χώρου Teichmüller.

Μιγαδική δομή για τον χώρο αυτόν ορίστηκε πρώτα από τον O. Teichmüller, αλλά τούτη η δομή δεν ήταν η 'σωστή'.

Ο Ahlfors όρισε μία μιγαδική δομή για τον χώρο Teichmüller και λίγο αργότερα ο L. Bers έδειξε ότι τούτη η δομή είναι φυσιολογική. Ο χώρος Teichmüller μπορεί να εμφυτευτεί φυσιολογικά σε ένα ανοικτό σύνολο ενός $3g-3$ μιγαδικού χώρου Banach,και κληρονομεί έτσι την δομή μιας $3g-3$ μιγαδικής πολλαπλότητας Banach [B2]. Τούτη η πολλαπλότητα συμβολίζεται με $Teich(S)$.

Η ομάδα των αμφιολομορφιών του $Teich(S)$ είναι διακριτή [P], και καλείται η modular ομάδα $Mod(S)$. Τούτη η ομάδα ταυτίζει δύο σημεία $[X], [Y]$ του $Teich(S)$ όταν υπάρχει μια conformal απεικόνιση από την X στην Y.

Μία φυσιολογική hermitian μορφή για τον $Teich(S)$ εισήχθηκε αρχικά από τους Weil και Petersson. Η μορφή αυτή επάγεται από ένα hermitian γινόμενο το οποίο, για κάθε σημείο $[X]$, $X = \mathbb{U}/\Gamma_X$, ορίζεται στον μιγαδικό χώρο Banach των τετραγωνικών διαφορικών $Q(\Gamma_X, \mathbb{U})$. Αυτός είναι ο χώρος των ολοκληρώσιμων ολόμορφων συναρτήσεων ϕ που ορίζονται στο $\mathbb{U}$ και που ικανοποιούν την συνθήκη $\phi(\gamma(z))(\gamma'(z))^2 = \phi(z)$ για όλα τα $\gamma \in \Gamma_X$ και για όλα τα $z \in \mathbb{U}$. Για κάθε τέτοιες ϕ, ψ το Weil-Petersson (W-P) hermitian γινόμενο h_{WP} δίνεται ως εξής:

$$h_{WP}(\phi,\psi)=\int_X \phi\overline{\psi}.$$

O $Q(\Gamma_X,\mathbb{U})$ μπορεί να ταυτιστεί με τον ολόμορφο συνεφαπτόμενο χώρο του $Teich(S)$ στο $[X]$. O Ahlfors απέδειξε ότι η Riemanian μετρική g_{WP} που επάγεται από το h_{WP} είναι Kählerian. To 1974, ο H. Royden απέδειξε ότι η ομάδα των ισομετριών είναι η $Mod(S)$ [P], και το 1976, ο Scott Wolpert απέδειξε ότι η g_{WP} είναι μη πλήρης, (βλ. [W2] και την εκεί αναφορά).

Η πραγματική μορφή ω_{WP} που επάγεται από την Kählerian μετρική στο $Teich(S)$, είναι μία πραγματική συμπλεκτική μορφή για το $\widetilde{F}(S)$, και συνεπώς η $(\widetilde{F}(S),\omega_{WP})$ είναι μία συμπλεκτική πολλαπλότητα.

Κατά τη δεκαετία του 1980, ο S.Wolpert μελέτησε εκτεταμένα την W-P συμπλεκτική γεωμετρία του χώρου Teichmüller. O Wolpert περιέγραψε την συμπλεκτική μορφή ω_{WP} μέσω πραγματικών αναλυτικών συντεταγμένων l_i, και Fenchel-Nielsen (F-N) ή twist διανυσματικών πεδίων [W1,4]. Ένα twist διανυσματικό πεδίο t_α προσαρτημένο σε μία απλή κλειστή γεωδαισιακή α της S, είναι εξ ορισμού ο απειροστός γεννήτορας μίας μονοπαραμετρικής ομάδας αμφιδιαφορίσεων του χώρου Teichmüller, όπου μία τέτοια αμφιδιαφόριση προκύπτει από την ακόλουθη παραμόρφωση της S : Κόβουμε την S κατά μήκος της α, στρέφουμε το ένα μέρος της επιφάνειας κατά γωνία θ, και ύστερα κολλάμε τα δύο κομμάτια για να πάρουμε μία νέα Riemann επιφάνεια. Τούτη η παραμόρφωση είναι γνωστή ως η F-N ή twist παραμόρφωση της S. O τύπος του Wolpert για την ω_{WP} είναι

$$\omega_{WP}(t_\alpha,t_\beta)=\sum_{p\in\alpha\cap\beta}\cos\phi(\alpha,\beta)_p$$

όπου τα t_α,t_β είναι τα twist διανύσματα που αντιστοιχούν στις α,β και $\phi(\alpha,\beta)$ είναι η γωνία των γεωδαισιακών α,β.

O χώρος Teichmüller $\widetilde{F}(S)$ επιδέχεται ολικές (F-N) πραγματικές αναλυτικές συντεταγμένες l_i,τ_i, $i=1,...,3g-3$, όπου οι l_i είναι συναρτήσεις υπερβολικού μήκους που αντιστοιχούν στις $3g-3$ απλές κλειστές γεωδαισιακές γ_i που αποτελούν μία maximal διαμέριση της S, και οι τ_i είναι οι αντίστοιχες twist συναρτήσεις. Σύμφωνα με το [W2], τούτες οι συντεταγμένες είναι κανονοκές για την συμπλεκτική πολλαπλότητα $(\widetilde{F}(S),\omega_{WP})$:

$$\omega_{WP}=\sum_{i=1}^{3g-3}dl_i\wedge d\tau_i.$$

Quasifuchsian χώρος. Μία quasi-Fuchsian παραμόρφωση της $\Gamma=\pi_1(S)$ είναι ένας ομομορφισμός ρ της Γ εντός της $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{C})$ ο οποίος προκύπτει από συζυγία με μία quasiconformal απεικόνιση του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$. Οι εικόνες $\rho(\Gamma)$ των quasi-Fuchsian παραμορφώσεων είναι quasi-Fuchsian ομάδες. Εάν G είναι μία τέτοια ομάδα, τότε το οριακό της σύνολο είναι μία καμπύλη

Jordan και η δράση της είναι γνήσια ασυνεχής στο συμπλήρωμα $D_G = D_1 \cup D_2$ αυτής της καμπύλης στο $\mathbb{C}$. Η δράση της G πάνω στα D_1, D_2 επάγει δύο Riemann επιφάνειες $X = D_1/G$ και $Y = D_2/G$, οι οποίες είναι ομοιομορφικές με έναν ομοιομορφισμό που αντιστρέφει τον προσανατολισμό. Η G δρα επίσης στνο άνω ημιχώρο $\mathbb{U}^3$, και το πηλίκο $(\mathbb{U}^3 \cup D_G)/G$ είναι μία 3-πολλαπλότητα (quasi-Fuchsian πολλαπλότητα), αμφιδιαφορική με την $S \times [0,1]$.

Ο Quasifuchsian χώρος $QF(S)$ της S, ειναι το πηλίκο του συνόλου των quasi-Fuchsian παραμορφώσεν διά την δράση της $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{C})$ με εσωτερικούς αυτομορφισμούς. Μπορεί επίσης να ειδωθεί ως το σύνολο των marked quasi-Fuchsian πολλαπλοτήτων $[M]$, όπου ένα marking πάνω στην M είναι μία επιλογή ισομορφισμού μεταξύ της Γ και της $\pi_1(M)$.

Ο $QF(S)$ έχει μία φυσιολογκή μιγαδική δομή ως χώρος αναπαραστάσεων εντός μίας μιγαδικής ομάδας Lie. Τοπολογικά είναι μία μπάλλα διάστασης $12g-12$, και ο L. Bers απέδειξε ότι είναι μία $6g-6$ μιγαδική πολλαπλότητα [B4].

Έστω $[\rho]$ ένα σημείο του $QF(S)$, με $\rho(\Gamma) = G$. Υπενθυμίζουμε ότι δύο επιφάνειες Riemann X, Y αντιστοιχούν στην G. Στο σημείο $[\rho]$ αντιστοιχούμε το ζεύγος των marked Riemann επιφανειών $([X],[Y]) \in Teich(S) \times Teich(\overline{S})$.

Τούτη η αντιστοιχία είνα ένα προς ένα και επί και συμβατή με τις μιγαδικές δομές: Η απεικόνιση

$$\Psi : QF(S) \to Teich(S) \times Teich(\overline{S})$$

που στέλνει το $[\rho]$ στο $([X],[Y])$ είναι αμφιολόμορφη.

Μιγαδικές υποπολλαπλότητες της μορφής $B_Y(S) = \Psi^{-1}(Teich(S) \times \{[Y]\})$ και $B_X(\overline{S}) = \Psi^{-1}(\{[X]\} \times Teich(\overline{S}))$, είναι αμφιολόμορφες με τα $Teich(S)$ και $Teich(\overline{S})$ αντίστοιχα. Αυτές οι υποπολλαπλότητες καλούνται Bers τομές του $QF(S)$.

Ένα άλλο υποσύνολο του Quasifuchsian χώρου με ειδικό ενδιαφέρον, είναι ο Fuchsian χώρος $F(S)$ της S. Ο $F(S)$ περιέχει σημεία $[\rho]$, για τα οποία η $\rho(\Gamma)$ είναι Fuchsian, και συνεπώς οι αντίστοιχες Riemann επιφάνειες X, Y ικανοποιούν τη συνθήκη: $Y = \overline{X}$. Είναι μια πραγματική αναλυτική $6g-6$ υποπολλαπλότητα του $QF(S)$, και μπορεί να ταυτιστεί με πραγματικά αναλυτικό τρόπο με τον χώρο Teichmüller $\widetilde{F}(S)$.(Βλ. [Kr]). Συμβολίζουμε με I_T τον σχεδόν μιγαδικό τελεστή που δρα στον εφαπτόμενο χώρο του $Teich(S)$. Δρα επίσης πάνω στον εφαπτόμενο χώρο του $\widetilde{F}(S)$, και κατ' αυτόν τον τρόπο ο $\widetilde{F}(S)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μία *σχεδόν* μιγαδική πολλαπλότητα. Από την ταύτιση του $F(S)$ με τον $\widetilde{F}(S)$, μπορούμε να δώσουμε στον $F(S)$ τη δομή μιας σχεδόν μιγαδικής πολλαπλότητας, αλλά η φυσιολογική εμφύτευσή της στον $QF(S)$ δεν είναι ολόμορφη.

Ο Χ. Κουρουνιώτης όρισε ολόμορφες συντεταγμένες για τον $QF(S)$ [K2]. Αυτές οι συντεταγμένες δίνονται τοπικά σε κάθε σημείο από τα μιγαδικά μήκη λ_i, $i = 1, ..., 6g-6$ συγκεκριμένων γεωδαισιακών της αντίστοιχης quasi-Fuchsian πολλαπλότητας. Εάν το σημείο είναι Fuchsian, τότε οι συντεταγμένες είναι πραγματικές και ίσες με τις πραγματικές αναλυτικές συντεταγμένες του Teichmüller χώρου $\widetilde{F}(S)$.

Ο Κουρουνιώτης όρισε επίσης τα διανυσματικά πεδία κάμψης στον Quasi-fuchsian χώρο. Σε κάθε απλή κλειστή καμπύλη α της S, υπάρχει προσαρτημένο ένα ολόμορφο διανυσματικό πεδίο T_α, το οποίο εξ' ορισμού είναι ο απειροστός γεννήτορας μίας 1-μιγαδικής παραμετρικής ομάδας αμφιολομορφιών του $QF(S)$, όπου μια τέτοια αμφιολομορφία ορίζεται σε κάθε σημείο $[\rho]$, από την κάμψη της αντίστοιχης 3-πολλαπλότητας κατά μήκος της γεωδαισιακής $\rho(\alpha)$. Πάνω στην εφαπτόμενη υποδέσμη του Fuchsian χώρου, το πραγματικό μέρος του T_α είναι απλώς το twist πεδίο t_α.

Μία ευριστική εικόνα. Η απεικόνιση Ψ, του Bers μας δίνει την παρακάτω ευριστική εικόνα για τον $QF(S)$ και τις υποπολλαπλότητές του:

Κάποια μπορεί να φανταστεί τον Quasifuchsian χώρο σαν ένα ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο A του μιγαδικού χώρου $\mathbb{C}^{6g-6}$. Τότε μπορεί να σχεδιάσει τις τομές του Bers $B_S(\overline{S})$ και $B_{\overline{S}}(S)$ σαν δύο $3g-3$ μιγαδικούς άξονες μέσα στο A οι οποίοι τέμνονται στο σημείο 'μηδέν', που είναι το $\Psi^{-1}([S] \times [\overline{S}])$. Για ευκολία μπορεί να υποθέσει ότι αυτοί οι άξονες τέμνονται κάθετα στο 0, αλλά αφού δεν υπάρχει κάποια μετρική, η λέξη 'κάθετα' είναι προς το παρόν χωρίς νόημα. Σε αυτή την εικόνα ο Fuchsian χώρος $F(S)$ είναι το τμήμα της $6g-6$ πραγματικής διαγωνίου του $\mathbb{C}^{6g-6}$ που περιέχεται στο A. Μπορεί επίσης να θεωρήσει το A σαν ένα υποσύνολο του $\mathbb{C}^{6g-6}$, αλλά το τελευταίο με προσαρτημένες τις τρεις κουατέρνιες μιγαδικές δομές I, J, K όπου $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -id$. Εάν ο I αντιστοιχεί στη φυσιολογική μιγαδική δομή, τότε η διαγώνιος είναι μία πραγματική υποπολλαπλότητα του (A, I) αλλά και μία μιγαδική υποπολλαπλότητα του (A, J).

Ύστερα από όλα αυτά, τα ακόλουθα ερωτήματα μπορεί να έρθουν στο νου της:

α) Ποια είναι η κατάλληλη μετρική με την οποία πρέπει να εφοδιαστεί ο $QF(S)$, έτσι ώστε οι τομές του Bers να είναι κάθετες στο 0;

β) Ποια είναι η κατάλληλη μιγαδική δομή, ανάλογη της J, έτσι ώστε ο $F(S)$ να είνα μιγαδική υποπολλαπλότητα του $QF(S)$ ως προς αυτή τη δομή;

Η εργασία μας απαντά κυρίως σ' αυτά τα ερωτήματα.

Έκθεση Των Αποτελεσμάτων

Το πρώτο μέρος της εργασιας μας είναι αφιερωμένο στη μελέτη της μιγαδικής συμπλεκτικής γεωμετρίας του $QF(S)$ η οποία αναδεικνύεται από την υπερβολική γεωμωτρία των quasi-Fuchsian πολλαπλοτήτων.

Μιγαδικές συμπλεκτικές πολλαπλότητες. Μία μιγαδική πολλαπλότητα M μιγαδικής διάστασης $2n$ καλείται μιγαδική συμπλεκτική, εάν υπάρχει μία μη εκφυλισμένη, κλειστή, $(2,0)-$ολόμορφη μορφή Ω ορισμένη παντού πάνω στην M.

Η πρώτη και η δεύτερη μεταβολή του μιγαδικού μήκους μιας γεωδαισιακής υπό την κάμψη επιδέχεται γεωμετρικής περιγραφής [K3]. Χρησιμοποιούμε τούτη την περιγραφή για να ορίσουμε μια ολόμορφη $(2,0)$ μορφή για τον $QF(S)$. Αποδεικνύουμε το παρακάτω (Θεώρημα 3.1.3)

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Υπάρχει μία μη εκφυλισμένη κλειστή ολόμορφη $(2,0)$ μορφή Ω ορισμένη παντου στο $QF(S)$ με την οποία ο $QF(S)$ γίνεται μιγαδική συμπλεκτική πολλαπλότητα. Η μορφή Ω δίνεται σε κάθε σημείο $[\rho] \in QF(S)$ από τον τύπο:*

$$\Omega_{([\rho])}(T_\alpha, T_\beta) = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \cosh \sigma(\rho(\alpha), \rho(\beta))_p$$

όπου τα T_α, T_β είναι διανύσματα κάμψης που αντιστοιχούν σε απλές κλειστές γεωδαισιακές α, β της S, και $\sigma(\rho(\alpha), \rho(\beta))$ είναι η μιγαδική απόσταση των γεωδαισιακών $\rho(\alpha), \rho(\beta)$.

Η μορφή Ω μπορεί να θεωρηθεί σαν την μιγαδοποίηση της Weil-Petersson πραγματικής συμπλεκτικής μορφής του $\widetilde{F}(S)$.

Ο Quasifuchsian χώρος $QF(S)$ επιδέχεται ολικών μιγαδικών (μιγαδικών F-N) συντεταγμένων λ_i, β_i, $i = 1, ..., 3g-3$, [K2], όπου οι λ_i είναι συναρτήσεις μιγαδικού μήκους που αντιστοιχούν στις γεωδαισιακές της διαμέρισης της S και οι β_i είναι οι αντίστοιχες συναρτήσεις κάμψης. Αποδεικνύουμε το παρακάτω (Θεώρημα 3.1.10)

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Η έκφραση της Ω σε ολικές μιγαδικές F-N συντεταγμένες είναι*

$$\Omega = \sum_{i=1}^{3g-3} d'\lambda_{\gamma_i} \wedge d'\beta_i.$$

Hyperkählerian πολλαπλότητες. Μια $4n$-διάστατη Riemannian πολλαπλότητα (M, g) καλείται Hyperkählerian εάν υπάρχουν δύο μιγαδικοί τελεστές I, J ορισμένοι πάνω στην M τέτοιοι ώστε $IJ + JI = 0$ και η g είναι Kähler μετρική ως προς I και J. Σημειώνουμε ότι η ύπαρξη τέτοιων I, J επάγει την ύπαρξη ενός τρίτου τελεστή K, ο οποίος είναι επίσης τέτοιος ώστε η (M, K, g) να είναι Kählerian πολλαπλότητα.

Μια Hyperkählerian πολλαπλότητα είναι αυτόματα μια μιγαδική συμπλεκτική πολλαπλότητα:

Κατά πρώτο λόγο είναι συμπλεκτική και ως προς τις τρεις συμπλεκτικές μορφές $\omega, \omega_1, \omega_2$ που επάγονται από τους τελεστές I, J, K αντίστοιχα. Θεωρώντας την M σαν μία I-μιγαδική πολλαπλότητα, τότε η I -ολόμορφη $(2,0)$-μορφή

$$\Omega = \omega_1 + i\omega_2$$

ορίζει μια μιγαδική συμπλεκτική δομή για την (M, I).

Η ισχύς του αντιστρόφου είναι γνωστή για την περίπτωση που η M είναι συμπαγής.

Έχοντας ορίσει ήδη μια μιγαδική συμπλεκτική δομή για τον $QF(S)$ είναι φυσιολογικό να ρωτήσουμε αν υπάρχει μια Hyperkählerian δομή, από την οποία να προκύπτει αυτή η μιγαδική συμπλεκτική δομή. Αφότου η μορφή μας Ω είναι ουσιαστικά η μιγαδοποίηση της W-P συμπλεκτικής δομής ω_{WP}, οδηγούμαστε στην W-P γεωμετρία, την οποία μελετάμε στο δεύτερο μέρος της εργασίας μας.

Πρώτα, και κατ᾽ αναλογία με τον χώρο Teichmüller, ορίζουμε το W-P hermitian γινόμενο σε κάθε σημείο $[\rho]$ του $QF(S)$. Ο ολόμορφος συνεφαπτόμενος χώρος του $QF(S)$ στο $[\rho]$ είναι ο μιγαδικός Banach χώρος των τετραγωνικών διαφορικών $Q(G)$, $G = \rho(\Gamma)$. Αυτός είναι ο χώρος των ολοκληρώσιμων ολόμορφων συναρτήσεων ϕ που ορίζονται στο D_G, το χωρίο ασυνέχειας της G, και που ικανοποιούν τη συνθήκη $\phi(g(z))(g'(z))^2 = \phi(z)$ για όλα τα $g \in G$ και για όλα τα $z \in D_G$. Για κάθε τέτοια ϕ, ψ το W-P hermitian γινόμενο h_{WP} δίνεται από

$$h^Q(\phi, \psi) = \int_{X \cup Y} \phi\overline{\psi}.$$

Από το γινόμενο, παίρνουμε την W-P Riemannian μετρική g^Q που ορίζεται στον Quasifuchsian χώρο. Το ακόλουθο αποτέλεσμά μας εξασφαλίζει την W-P Kählerian δομή του Quasifuchsian χώρου: (Θεώρημα 3.2.2)

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω Ψ η αμφιολόμορφη απεικόνιση του Bers από το $QF(S)$ επί του $\widehat{T}(S)$. Ισχύει η ακόλουθη σχέση:*

$$g^Q = (\Psi^*) g^{\widehat{T}}$$

Το ζεύγος $(QF(S), g^Q)$ είναι μία Kählerian πολλαπλότητα. Η μετρκή είναι μη πλήρης και η ομάδα των αμφιολόμορφων ισομετριών ειναι η modular ομάδα $Mod_Q(S)$.

Ο I_Q είναι ο σχεδόν μιγαδικός τελεστής στον εφαπτόμενο χώρο του $QF(S)$, από τον οποίο προκύπτει η συνήθης μιγαδική δομή. Η ομάδα $Mod_Q(S)$ είναι η (διακριτή) υποομάδα των αμφιολομορφιών του $QF(S)$ που είναι ισόμορφη με το καρτεσιανό γινόμενο ομάδων $Mod(S) \times Mod(\overline{S})$.

Κατασκευάζουμε ένα νέο σχεδόν μιγαδικό τελεστή J_Q στον εφαπτόμενο χώρο του $QF(S)$, με τις παρακάτω ιδιότητες:

α) Ο J_Q skew-μετατίθεται με τον I_Q και

β) ο περιορισμός του στην εφαπτόμενη υποδέσμη του $F(S)$ είναι απλώς ο σχεδόν μιγαδικός τελεστής I_T του χώρου Teichmüller.

Δείχνουμε έπειτα ότι οι σχεδόν μιγαδικοί τελεστές $J_Q, K_Q = I_Q J_Q$ είναι μιγαδικοί και παράλληλοι ως προς την g^Q. Κατ' αυτόν τον τρόπο παίρνουμε το κύριο αποτέλεσμά μας: (Θεωρήματα 3.2.5 και3.2.8)

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ο χώρος $QF(S)$ με τις μιγαδικές δομές I_Q, J_Q, και την Weil-Petersson riemannian μετρική g^Q είναι μία Hyperkählerian πολλαπλότητα. Ο χώρος Teichmüller $F(S)$ είναι μιγαδική υποπολλαπλότητα του $(QF(S), J_Q)$.*

Από το παραπάνω θεώρημά ς προκύπτουν αποτελέσματα που αφορούν την συμπλεκτική γεωμετρία του Quasifuchsian χώρου. Συμβολίζουμε με $\omega^Q, \omega_1^Q, \omega_2^Q$ τις τρεις Kählerian πραγματικές συμπλεκτικές μορφές που αντιστοιχούν στους I_Q, J_Q, K_Q. Το ακόλουθο θεώρημα περιγράφει την συμπλεκτική συμπεριφορά του χώρου Teichmüller μέσα στον $QF(S)$: (Θεώρημα 3.2.7)

ΘΕΩΡΗΜΑ. *i) Ο χώρος Teichmüller ως το σύνολο $F(S)$ είναι: Μία Lagrangian υποπολλαπλότητα του $QF(S)$ ως προς τις ω^Q και ω_2^Q, και μία συμπλεκτική υποπολλαπλότητα του $QF(S)$ ως προς την ω_1^Q.*

ii) Οι τομές του Bers είναι συμπλεκτικές υποπολλαπλότητες του $QF(S)$ ως προς την ω^Q και Lagrangian υποπολλαπλότητες του $QF(S)$ ως προς τις ω_1^Q και ω_2^Q.

Η μιγαδική συμπλεκτική μορφή που επάγει η Hyperkählerian δομή του $QF(S)$ είναι η

$$\Omega^Q = \omega_1^Q + i\omega_2^Q$$

είναι φυσιολογικό το ερώτημα για τη σχέση των Ω^Q και Ω. Αποδεικνύουμε: (Θεώρημα 3.3.1)

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Η μιγαδική συμπλεκτική δομή Ω^Q που επάγεται από την g^Q είναι ίση με 2Ω.*

Σχόλιο. Ο Quasifuchsian χώρος είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του χώρου $V(S)$, που είναι το πηλίκο του χώρου των ανάγωγων αναπαραστάσεων της $\pi_1(S)$ στην $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{C})$ διά την δράση της $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{C})$ με εσωτερικούς αυτομορφισμούς. Είναι γνωστό οτι χώροι της μορφής $Hom^{irr}(\pi_1(S) \to G)/\sim$, όπου η G είναι μία ημι-απλή ομάδα Lie με ένα αναλλοίωτο γινόμενο στην Lie άλγεβρά τους, είναι συμπλεκτικοί αν η G είναι πραγματική και μιγαδικοί συμπλεκτικοί αν η G είναι μιγαδική, από μία κατασκευή του W.Goldman [G1,2]. Χρησιμοποιώντας ίδιες μεθόδους με αυτές του Goldman, ο N. Hitchin απέδειξε ότι στην περίπτωση που η G είναι μιγαδική, οι χώροι αυτοί δέχονται μια

Hyperkählerian δομή [H]. Οι κατασκευές και οι αποδείξεις μας ακολουθούν έναν εντελώς διαφορετικό δρόμο. Βασίζονται στη θεωρία των quasiconformal απεικονίσεων και της υπερβολικής γεωμετρίας, και έτσι αποκαλύπτουν την αναλυτική και την γεωμετρική προοπτική του αντικειμένου.

Η εργασία αυτή χωρίζεται σε κεφάλαια.

Το Κεφάλαιο I είναι εισαγωγικό και υποδιαιρείται σε τρεις παραγράφους.

Στην παράγραφο 1.1 κάνουμε μία σύντομη αναφορά στους Möbius μετασχηματισμούς και στις Kleinian ομάδες. Μια μικρή συζήτηση περί quasiconformal απεικονίσεων λαμβάνει χώρα στην 1.2.1 και το θεώρημα ύπαρξης των Ahlfors-Bers διατυπώνεται στην 1.2.2.

Στην παράγραφο 1.2, ασχολούμαστε με Riemann επιφάνειες και τη σύνδεσή τους με τις quasiconformal απεικονίσεις (υποπαράγραφοι 1.3.1 και 1.3.2). Στην 1.3.3 περιγράφουμε το Θεώρημα Ταυτόγχρονης Ομοιομορφοποίησης του Bers.

Το Κεφάλαιο II διαιρείται σε δύο παραγράφους.

Στην παράγραφο 2.1 κάνουμε μία μια ανασκόπηση της Teichmüller θεωρίας.

Στην υποπαράγραφο 2.1.1 δίνουμε τις περιγραφές του χώρου Teichmüller τις οποίες χρησιμοποιούμε στο υπόλοιπο της εργασίας μας. Στις υποπαραγράφους 2.1.2 και 2.1.3 γίνεται μία σχετικά εκτενής συζήτηση περί της μιγαδικής δομής και της Kählerian δομής που προκύπτει από το W-P hermitian γινόμενο. Στην 2.1.4, διατυπώνουμε ορισμένα από τα αποτελέσματα που αφορούν στην F-N πραγματική αναλυτική περιγραφή και στη συμπλεκτική γεωμετρία του χώρου Teichmüller.

Στην παράγραφο 2.2 εισάγεται ο Quasifuchsian χώρος $QF(S)$. Η υποπαράγραφος 2.2.1 ανασκοπεί θέματα της θεωρίας γενικών χώρων παραμορφώσεων Kleinian ομάδων, τα οποία χρησιμοποιούμε στην περαιτέρω συζήτησή μας. Στη 2.2.2 περιοριζόμαστε στον Quasifuchsian χώρο, περιγράφοντας αναλυτικά τον ολόμορφο εφαπτόμενο και συνεφαπτόμενο χώρο σε κάθε σημείο και κυρίως την ιδέα για το πώς εισάγεται ο J_Q. Στις 2.2.3-2.2.6 επαναλαμβάνουμε σύντομα τις έννοιες του μιγαδικού μήκους, της μιγαδικής απόστασης και της κάμψης στον Quasifuchsian χώρο. Στη 2.2.7 ασχολούμαστε με την ολόμορφη φύση των διανυσματικών πεδίων κάμψης.

Η κύρια εργασία μας κείται στο Κεφάλαιο III, το οποίο διαιρείται σε τρεις παραγράφους.

Στην παράγραφο 3.1 κατασκευάζουμε την μιγαδική συμπλεκτική μορφή Ω στον $QF(S)$. Από την κατασκευή προκύπτει ένας τύπος δυϊσμού ο οποίος περιγράφει την Hamiltonian φύση των διανυσματικών πεδίων κάμψης. Στην 3.1.3, χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα αναλυτικής συνέχισης αποδεικνύουμε ότι οι μιγαδικές F-N συντεταγμένες είναι κανονοκές για την μιγαδική συμπλεκτική πολλαπλότητα $(QF(S), \Omega)$.

Την παράγραφο 3.2 ασχολούμαστε με την W-P γεωμετρία του $QF(S)$. Στην 3.2.1 ορίζουμε την W-P μετρική στον $QF(S)$ και αποδικνύουμε ότι είναι Kählerian. Εδώ επίσης περιγράφουμε την πραγματική συμπλεκτική δομή που επάγει η μετρική και ο τελεστής I_Q.

Η 3.2.2 περέχει την απόδειξη του κύριου θεωρήματος σε τρία βήματα:

Στο πρώτο βήμα ορίζουμε τους σχεδόν μιγαδικούς τελεστές J_Q, K_Q που δρουν στον εφαπτόμενο χώρο κάθε σημείου.

Στο δεύτερο βήμα, αποδεικνύουμε ότι οι τελεστές αυτοί είναι σχεδόν hermitian: H W-P μετρική παραμένει αναλλοίωτη από τη δράση τους.

Στο τρίτο βήμα αποδεικνύουμε ότι ο J_Q (άρα και ο K_Q) είναι ολοκληρώσιμος. Συμπεραίνουμε ότι ο $QF(S)$ είναι μιγαδική πολλαπλότητα ως προς και τις δύο δομές που ορίζουν οι J_Q, K_Q και επιπλέον ότι οι τελεστές αυτοί είναι παράλληλοι ως προς την μετρική. Οι συνέπειες του κύριου θεωρήματος ακολουθούν ευθύς αμέσως.

Τέλος, στην 3.3 αποδεικνύουμε ότι η μιγαδική συμπλεκτική δομή Ω είναι όντως αυτή που προκύπτει από την Hyperkählerian W-P μετρική.

Επιθυμώ να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Χρήστο Κουρουνιώτη για την επίβλεψη αυτής της εργασίας.

Διάφοροι άνθρωποι με στήριξαν ηθικά κατά τα χρόνια προετοιμασίας αυτής της διατριβής. Από αυτή τη θέση τους ευχαριστώ όλους.

Η εργασία αυτή αφιερώνεται στις γυναίκες στη ζωή μου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΟΜΑΔΕΣ KLEIN ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ RIEMANN

1.1. ΟΜΑΔΕΣ KLEIN

Για τους ορισμούς και τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στις 1.1 και 1.2 ακολουθούμε τα [B1] και [B2].

1.1.1. Μετασχηματισμοί Möbius. Ένας *Möbius μετασχηματισμός* g είναι ένας σύμμορφος αυτομορφισμός της σφαίρας του Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Μπορεί να παρασταθεί σαν την μιγαδική συνάρτηση

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ ad-bc=1,\ a,b,c,d \in \mathbb{C}$$

Συμβολίζουμε με $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$ την ομάδα που αποτελείται από 2×2 μιγαδικούς πίνακες

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

με ορίζουσα 1. Το σύνολο των Möbius μετασχηματισμών είναι μία ομάδα ισομορφική με την $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathbb{SL}(2,\mathbb{C})/\{\mathbb{I},-\mathbb{I}\}$, όπου $\mathbb{I}$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας. Η υποομάδα της που αποτελείται από μετασχηματισμούς g με $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ συμβολίζεται με $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Οι Möbius μετασχηματισμοί που είναι διαφορετικοί από τον ταυτοτικό, μπορούν να χωριστούν στις εξής κατηγορίες:

α) *Παραβολικοί*: Αυτοί που είναι συζυγείς με τον $g(z) = z+1$

β) *Ελλειπτικοί*: Αυτοί που είναι συζυγείς με τον $g(z) = \lambda z$, $\mid \lambda \mid = 1$ και

γ) *Λοξοδρομικοί*: Αυτοί που είναι συζυγείς με τον $g(z) = \lambda z$, $\mid \lambda \mid \neq 1$. Ένας λοξοδρομικός μετασχηματισμός καλείται *υπερβολικός* αν $\lambda > 0$.

Συμβολίζουμε με $\mathbb{U}$ το άνω ημιεπίπεδο του Poincaré:

$$\mathbb{U} = \{z = x+iy \in \mathbb{C},\ y > 0\}.$$

Κάθε στοιχείο της $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{R})$ απεικονίζει το $\mathbb{U}$ στον εαυτό του. Το $\mathbb{U}$ γίνεται ένα μοντέλο για την υπερβολική γεωμετρία του επιπέδου όταν εφοδιαστεί με το στοιχείο μήκους

$$ds^2 = \frac{\mid dz \mid^2}{y^2}$$

και συνεπώς η $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{R})$ μπορεί να ειδωθεί τόσο σαν την ομάδα όλων των σύμμορφων απεικονίσεων του $\mathbb{U}$ στον εαυτό του, όσο και σαν την ομάδα των μη-Ευκλείδιων κινήσεων του επιπέδου (η ομάδα ισομετριών της Riemann πολλαπλότητας $(\mathbb{U}, ds^2)$).

Κάτι παρόμοιο ισχύει για την $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{C})$. Συμβολίζουμε με $\mathbb{U}^3$ τον άνω ημιχώρο: $\mathbb{U}^3 = \{(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+\}$. Όταν εφοδιαστεί με το στοιχείο μήκους

$$ds^2 = \frac{\mid dz \mid^2 + dt^2}{t^2}$$

γίνεται ένα μοντέλο για τον μη-Ευκλείδιο 3-χώρο. Ταυτίζουμε το $(z,t) \in \mathbb{U}^3$ με το κουατέρνιο $z + tj = x + iy + tj + 0k$. Τότε κάθε στοιχείο $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ της $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{C})$ δρα πάνω στο $\mathbb{U}^3$ σύμφωνα με τον κανόνα

$$g(z+tj) = [a(z+tj)+b][c(z+tj)+d]^{-1}.$$

Η $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{C})$ είναι η ομάδα των ισομετριών της $(\mathbb{U}^3, ds^2)$.

1.1.2. Ομάδες Klein και Fuchs. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και G μία ομάδα ομοιομορφισμών που δρα πάνω στον X. Η δράση της G καλείται *γνήσια ασυνεχής* εάν για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X η σχέση $g(K) \cap K \neq \emptyset$ ισχύει μόνο για πεπερασμένο πλήθος στοιχείων $g \in G$.

Μία ομάδα Klein G είναι μία διακριτή υποομάδα της $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{C})$ που δρα γνήσια ασυνεχώς πάνω σε κάποιο υποσύνολο της $\widehat{\mathbb{C}}$.

Αποδεικνύεται ότι κάθε διακριτή υποομάδα G της $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{C})$ δρα πάντα γνήσια ασυνεχώς πάνω στο $\mathbb{U}^3$, και το πηλίκο $\mathbb{U}^3/G$ είναι μία 3-πολλαπλότητα. Παρά τούτο, η διακριτότητα της G δεν είναι ικανή για την γνήσια ασυνεχή δράση της πάνω σε ένα υποσύνολο της $\widehat{\mathbb{C}}$. Ένας ισοδύναμος με τον προηγούμενο ορισμό μιας ομάδας Klein είναι ο ακόλουθος:

Μία ομάδα Klein G είναι μία διακριτή υποομάδα της $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{C})$ της οποίας το οριακό σύνολο $\Lambda = \Lambda(G)$ δεν είναι όλη η $\widehat{\mathbb{C}}$.

Το *οριακό σύνολο* είναι το σύνολο των σημείων συσσώρευσης των τροχιών. Ένα *σταθερό σημείο* ενός Möbius μετασχηματισμού είναι ένα σημείο $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ που ικανοποιεί την σχέση $g(z) = z$. Αποδεικνύεται ότι

α) Εάν ο g είναι παραβολικός τότε έχει ένα σταθερό σημείο
β) Εάν ο g είναι ελλειπτικός τότε έχει άπειρα σταθερά σημεία στο $\widehat{\mathbb{R}^3}$
γ) Εάν ο g είναι λοξοδρομικός τότε έχει δύο σταθερά σημεία στο $\widehat{\mathbb{R}^3}$ και
δ) Εάν ο g είναι υπερβολικός τότε έχει δύο πραγματικά σταθερά σημεία.

Δίνουμε τώρα έναν ισοδύναμο με τον παραπάνω ορισμό του οριακού συνόλου μιας ομάδας Klein G.

Το οριακό σύνολο Λ μίας Kleinian ομάδας G είναι η κλειστότητα του συνόλου των σταθερών σημείων των μη ελλειπτικών στοιχείων της G.

Το *χωρίο ασυνέχειας* $\Omega = \Omega(G)$ είναι το συμπλήρωμα του Λ στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Είναι ανοικτό και πυκνό στο $\widehat{\mathbb{C}}$ και είναι το μεγαλύτερο υποσύνολο του $\widehat{\mathbb{C}}$ πάνω στο οποίο η δράση της G είναι γνήσια ασυνεχής. Οι συνεκτικές συνιστώσες του Ω καλούνται *συνιστώσες* του Ω. Μία Kleinian ομάδα καλείται *στοιχειώδης* εάν το οριακό της σύνολο είναι πεπερασμένο. Δεν θα ασχοληθούμε με τέτοιες ομάδες. Στο υπόλοιπο της εργασίας μας οι αναφερόμενες ομάδες Klein θα είναι μη στοιχειώδεις.

Μία Fuchsian ομάδα Γ είναι μία Kleinian ομάδα της οποίας όλα τα λοξοδρομικά στοιχεία είναι υπερβολικά.

Η δράση της αφήνει αναλλοίωτο ένα δίσκο ή ένα ημιεπίπεδο. Με συζυγία στην $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{C})$ μπορούμε πάντα να υποθέτουμε ότι μία Fuchsian ομάδα αφήνει αναλλοίωτο το άνω ημιεπίπεδο $\mathbb{U}$. Κατ΄ αυτόν το τρόπο το οριακό της σύνολο μπορεί να είναι

i) η επεκτεταμένη πραγματική ευθεία $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και τότε η G καλείται *πρώτου είδους*, ή

ii) ένα πουθενά πυκνό υποσύνολο της $\widehat{\mathbb{R}}$ και τότε η G καλείται *δευτέρου είδους*.

Οι Fuchsian ομάδες είναι το απλούστερο παράδειγμα Kleinian ομάδων. Η επόμενη απλή περίπτωση Kleinian ομάδων είναι αυτή των *quasi-Fuchsian* ομάδων, τις οποίες θα ορίσουμε στην 1.2.3.

1.2. QUASICONFORMAL ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Διαισθητικά, μία quasiconformal απεικόνιση του μιγαδικού επιπέδου είναι μία απεικόνιση που στο εφαπτόμενο επίπεδο μεταφέρει απειροστούς γεωμετρικούς κύκλους σε απειροστές ελλείψεις, των οποίων ο λόγος των ημιαξόνων είναι ολικά φραγμένος από μία σταθερά. Για τον ακριβή ορισμό που δίνουμε στην 1.2.1, ακολουθούμε το [E1].

1.2.1. Quasiconformal απεικονίσεις του επιπέδου. Έστω D και D' χωρία του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$ και $w : D \to D'$ ένας ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό. Για κάθε $z \in D$ θεωρούμε τους αριθμούς

$$L(z,r) = \max\{\mid w(\zeta) - w(z) \mid, \mid \zeta - z \mid = r\}$$

$$l(z,r) = \min\{\mid w(\zeta) - w(z) \mid, \mid \zeta - z \mid = r\}$$

και

$$H(z) = \limsup_{r\to 0} \frac{L(z,r)}{l(z,r)}$$

Λέμε ότι η w είναι *quasiconformal* (qc στο εξής) εάν η H είναι μία φραγμένη συνάρτηση στο D. Η qc απεικόνιση w είναι $K-$ *quasiconformal* ($K-$ qc): υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός K τέτοιος ώστε $H(z) \leq K$ για σχεδόν όλα τα z του D.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $w : D \to D'$ είναι μία C^1 αμφιδιαφόριση που διατηρεί τον προσανατολισμό. Οι μιγαδικές μερικές παράγωγοι $w_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ και $w_{\overline{z}} = \frac{\partial w}{\partial \overline{z}}$ δινονται απο τους τύπους

$$w_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$w_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Αφού η w διατηρεί τον προσανατολισμό, η Ιακωβιανή $J_w = \mid w_z \mid^2 - \mid w_{\overline{z}} \mid^2$ είναι αυστηρά θετική και μπορούμε να ελέγξουμε ότι ισξύουν τα παρακάτω:

$$L(z,r) = r(\mid w_z(z) \mid + \mid w_{\overline{z}}(z) \mid) + o(r),$$

$$l(z,r) = r(\mid w_z(z) \mid - \mid w_{\overline{z}}(z) \mid) + o(r),$$

$$H(z) = \frac{\mid w_z(z) \mid + \mid w_{\overline{z}}(z) \mid}{\mid w_z(z) \mid - \mid w_{\overline{z}}(z) \mid}.$$

Συμπεραίνουμε οτι η w είναι $K-$ qc εάν και μόνο εάν, για κάθε z στο D ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\mid w_{\overline{z}}(z) \mid \leq \frac{K-1}{K+1} \mid w_z(z) \mid . \quad (*)$$

Η σξέση αυτή αποτελεί ένα κριτήριο για να ελέγχουμε αν μία απεικόνιση είναΙ quasiconformal και επεκτείνεται και στην γενικότερη περίπτωση.

Μία συνάρτηση w έχει distributional παραγώγους $w_z, w_{\overline{z}}$ στο D εάν οι συναρτήσεις $w_z, w_{\overline{z}}$ ανήκουν στο $L^2_{loc}(D)$ και ικανοποιούν τη σχέση

$$\int\int(\phi w_z + w\phi_z)dxdy = \int\int(\phi w_{\overline{z}} + w\phi_{\overline{z}})dxdy = 0$$

για κάθε λεία συνάρτηση ϕ με συμπαγές στήριγμα στο D. Ο ορισμός της qc απεικόνισης αποδεικνύεται ισοδύναμος με τον παρακάτω:

Ένας ομοιομορφισμός $w : D \to D'$ που διατηρεί τον προσανατολισμό είναι $K-$ qc εάν η w έχει distributional παραγώγους στο D που ικανοποιούν την $(*)$ σχεδόν παντού.

Δίνουμε μερικές ιδιότητες των qc απεικονίσεων. Εάν η $w : D \to D'$ είναι $K-$ qc στο D τότε:

i) Η w είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού.
ii) $| w_z(z) |> 0$ σχεδόν παντού.
iii) $m(w(E)) = \int\int_E J_w dxdy$ για κάθε Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E \subset D$.
iv) Εάν $K = 1$ τότε η w είναι conformal.
v) Η $w^{-1} : D' \to D$ είναι $K-$ qc.
vi) Εάν η $u : D' \to D''$ είναι $K'-$ qc, τότε η $u \circ w$ είναι $KK'-$ qc.

1.2.2. Beltrami εξισώσεις. Το θεώρημα των Ahlfors-Bers. Έστω $w : D \to D'$ μία qc απεικόνιση. Τότε στο D λύνει την εξίσωση Beltrami

$$w_{\overline{z}} = \mu w_z$$

όπου $\mu = \mu(z)$ είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση του D (η *μιγαδική διαστολή* της w) που ανήκει στην ανοικτή μπάλλα του $L^\infty(D)$. Το σύνολο αυτό καλείται το σύνολο των *Beltrami διαφορικών* του D, και συμβολίζεται με $Belt(D)$. Εάν δίνεται ένα Beltrami διαφορικό μ, τότε υπάρχει μία qc απεικόνιση του D που λύνει την εξίσωση Beltrami. Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα που οφείλεται στους L. Ahlfors και L. Bers: [AB]

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω $\mu \in Belt(\mathbb{C})$ ένα διαφορικό Beltrami. Υπάρχει μία κανονικοποιημένη (κρατά σταθερά τα $0, 1$) λύση $w^\mu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ της εξίσωσης Beltrami $w_{\overline{z}} = \mu w_z$ η οποία είναι qc στο $\mathbb{C}$. Η λύση επεκτείνεται στη σφαίρα του Riemann θεωρώντας $w^\mu(\infty) = \infty$. Τούτη η λύση είναι μοναδική με την έννοια ότι κάθε άλλη qc λύση είναι της μορφής $A \circ w^\mu$ όπου A είναι ένας Möbius μετασχηματισμός.*

Αν το μ εξαρτάται ολόμορφα ως στοιχείο του μιγαδικού Banach χώρου $L^\infty(\mathbb{C})$ από μιγαδικές παραμέτρους, τότε το ίδιο ισχύει και για την w^μ : Για αρκετά μικρό ε και για κάθε z έχουμε

$$w^{\varepsilon\mu}(z) = z + \varepsilon w'[\mu](z) + o(\varepsilon),\ \varepsilon \to 0$$

Η $o(\varepsilon)$ είναι ομοιόμορφα στα συμπαγή του $\mathbb{C}$ και

$$w'[\mu](z) = \frac{\partial w^{\varepsilon\mu}(z)}{\partial \varepsilon} |_{\varepsilon=0} = -\frac{1}{\pi}\int\int_{\mathbb{C}} \mu(\zeta) R(z,\zeta) dxdy$$

όπου

$$R(z,\zeta) = \frac{z(z-1)}{\zeta(\zeta-1)(\zeta-z)}.$$

Σημείωση. Στο εξής οι κανονικοποιημένες λύσεις θα θεωρούνται πάνω στη σφαίρα του Riemann.

Εάν τώρα $\mu \in Belt(D)$ όπου το D είναι ένα ψποχωρίο του $\mathbb{C}$, τότε θεωρούμε το $Belt(D)$ ως το σύνολο των στοιχείων του $Belt(\mathbb{C})$ που είναι μηδέν έξω από το D. Τότε η w^μ είναι η qc απεικόνιση του $\mathbb{C}$ η οποία είναι conformal εκτός του D.

Έστω $D = \mathbb{U}$ το άνω ημιεπίπεδο, και $\mu \in Belt(\mathbb{U})$. Στο μ αντιστοιχεί μία μοναδική qc απεικόνιση του $\mathbb{U}$ στον εαυτό του που σταθεροποιεί τα $0, 1, \infty$. Αυτή προκύπτει ως εξής: Έστω $\widetilde{\mu} \in Belt(\mathbb{C})$ που ορίζεται ως εξής:

$$\widetilde{\mu}(z) = \begin{cases} \mu(z) & z \in \mathbb{U} \\ \overline{\mu(\overline{z})} & z \in \mathbb{L} \end{cases}$$

Η εν λόγω απεικόνιση είναι η $f^\mu = w^{\widetilde{\mu}}$ όταν η τελευταία έχει περιοριστεί στο $\mathbb{U}$.

Τα Beltrami διαφορικά που ικανοποιούν την συνθήκη

$$\mu(z) = \overline{\mu(\overline{z})}$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$ λέγονται *συμμετρικά* και ο χώρος τους συμβολίζεται με $Belt_S(\mathbb{C})$.

1.2.3. Beltrami διαφορικά και ομάδες Klein. Για τα ακόλουθα παραπέμπουμε στο [E1].

Έστω G μία Kleinian ομάδα με χωρίο ασυνέχειας Ω και οριακό σύνολο Λ. Έστω επίσης w^μ μία qc απεικόνιση του επεκτεταμένου επιπέδου. Η ομάδα

$$G^\mu = w^\mu \circ G \circ (w^\mu)^{-1} = \{w^\mu \circ g \circ (w^\mu)^{-1};\, g \in G\}$$

είναι μία ομάδα ομοιομορφισμών που δρά γνήσια ασυνεχώς πάνω στο $w^\mu(\Omega)$. Η G^μ είναι Kleinian εάν είναι μία ομάδα conformal απεικονίσεων. Δηλαδή, εάν η $w^\mu \circ g \circ (w^\mu)^{-1}$ είναι conformal για κάθε $g \in G$. Χρειάζεται ένας απλός υπολογισμός για να δούμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με τη σχέση

$$\mu(g(z))\overline{g'(z)}/g'(z) = \mu(z)$$

για κάθε $g \in G$.

Ο χώρος των G-αναλλοίωτων μιγαδικών διαφορικών $L^\infty(G)$είναι ο μιγαδικός χώρος Banach που αποτελείται από μετρήσιμες μιγαδικές ουσιαστικά φραγμένες συναρτήσεις $\mu(z)$ ορισμένες στο $\mathbb{C}$ με στήριγμα στο Ω, και που ικανοποιούν τον νόμο μετασχηματισμού

$$\mu(g(z))\overline{g'(z)}/g'(z) = \mu(z)$$

για κάθε $g \in G$ και για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Η ανοικτή μπάλλα

$$\{\mu \in L^\infty(G) : \|\mu\|_\infty < 1\}$$

με την supremum νόρμα είναι ο χώρος των διαφορικών Beltrami της G και συμβολίζεται με $Belt(G)$.

Για κάθε ένα Beltrami διαφορικό $\mu \in Belt(G)$ η ομάδα G^μ είναι πάλι Kleinian και σύμφωνα με το θεώρημα των Ahlfors-Bers τα στοιχεία της εξαρτώνται κατά ολόμορφο τρόπο από την παράμετρο μ.

Οι ομάδες G^μ καλούνται quasiconformal παραμορφώσεις της G.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η Γ είναι μία Fuchsian ομάδα και ας συμβολίσουμε με $Belt(\Gamma, \mathbb{U})$(αντ. $Belt(\Gamma)$) το σύνολο των Beltrami διαφορικών της όταν η Γ θεωρείται να δρα πάνω στο $\mathbb{U}$ (αντ. πάνω στ $\mathbb{C}-\mathbb{R}$). Συμβολίζουμε επίσης με $Belt_s(\Gamma)$ το υποσύνολο του $Belt(\Gamma)$ που αποτελείται απο συμμετρικά Beltrami διαφορικά. Αν $\mu \in Belt(\Gamma, \mathbb{U})$, τότε θεωρούμε την f^μ όπως στην 1.2.2. Η ομάδα $\Gamma^\mu = f^\mu \circ \Gamma \circ (f^\mu)^{-1}$ είναι μία Fuchsian ομάδα που δρα πάνω στο $\mathbb{U}$. Σημειώνουμε ότι αυτή η ομάδα είναι η ίδια με την $\Gamma^{\widetilde{\mu}} = w^{\widetilde{\mu}} \circ \Gamma \circ (w^{\widetilde{\mu}})^{-1}$, η $\Gamma^{\widetilde{\mu}}$ όμως θεωρείται να δρα πάνω στο μιγαδικό επίπεδο.

Οι Fuchsian ομάδες που προκύπτουν κατ΄ αυτόν το τρόπο λέγονται *Fuhsian ή πραγματικές παραμορφώσεις* της Γ. Αφού το $\widetilde{\mu}$ εξαρτάται κατά πραγματικά αναλυτικό τρόπο από το μ, το ίδιο ισχύει και για τα στοιχεία της $\Gamma^{\widetilde{\mu}}$.

Quasi-Fuchsian ομάδες. Ξεκινώντας από μία Fuchsian ομάδα Γ, και για οποιοδήποτε $\mu \in Belt(\Gamma)$, η Kleinian ομάδα Γ^μ καλείται *quasi-Fuchsian.* Είναι Fuchsian αν και μόνο αν $\mu \in Belt_s(\Gamma)$. Κατασκευάζοντας μία quasi-Fuchsian ομάδα κατ΄ αυτόν το τρόπο, οδηγούμαστε εύκολα στην απόδειξη του Θεωρήματος Ταυτόγχρονης Ομοιομορφοποίησης του Bers. (βλ. 1.3.3 παρακάτω).

1.3. RIEMANN ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

Σε αυτή την παράγραφο κάνουμε μία ανασκόπηση σε θέματα που αφορούν σε Riemann επιφάνειες και τα οποία είναι χρήσιμα για την περαιτέρω συζήτηση. Παραπέμπουμε κυρίως στο [E2] και στο βιβλίο του O. Lehto [L], κεφ. 4 και 5.

1.3.1. Riemann επιφάνειες και διαφορικά. Έστω S μία προσανατολισμένη λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$. Για κάθε τέτοια επιφάνεια το στοιχείο μήκους είναι της μορφής

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$$

όπου E, G, F είναι τα θεμελιώδη ποσά του Gauss εκφρασμένα μέσω των συντεταγμένων συναρτήσεων της αντιστρόφου της τοπικής παραμέτρου $f = (f_1, f_2, f_3)$ και $EG - F^2 > 0$. Χρησιμοποιώντας τον μιγαδικό συμβολισμό$dz = dx + idy$, $d\overline{z} = dx - idy$ μπορούμε πάντοτε να γράψουμε την παραπάνω έκφραση στην μιγαδική μορφή

$$ds = \lambda(z) \mid dz + \mu(z) d\overline{z} \mid . \quad (**)$$

Εδώ η λ είναι μία θετική συνάρτηση και η μ είναι μία μιγαδική συνάρτηση με $|\mu(z)| < 1$.

Δύο τέτοιες μετρικές ds_1, ds_2 της S καλούνται *conformally ισοδύναμε* αν είναι ανάλογες σε κάθε σημείο της S, το οποίο σημαίνει ότι η ταυτοτική απεικόνιση της S είναι conformal ως προς αυτές τις μετρικές. Μία *conformal δομή* πάνω στην S είναι μία conformal κλάση ισοδυναμίας μετρικών.

Μία Riemann επιφάνεια είναι μία προσανατολισμένη λεία επιφάνεια S εφοδιασμένη με μία conformal κλάση ισοδυναμίας μετρικών.

Ο ορισμός αυτός είναι ισοδύναμος με τον ακόλουθο:

Μία Riemann επιφάνεια S είναι μία 1-διάστατη μιγαδική πολλαπλότητα.

Πράγματι, εάν η S είναι προσανατολισμένη και έχει μία δοσμένη conformal δομή, τότε οι conformal απεικονίσεις από ανοικτά σύνολα της S στο μιγαδικό Ευκλείδιο επίπεδο που διατηρούν τον προσανατολισμό, αποτελοόν ένα μιγαδικό άτλαντα για την S. Αντίστροφα, κάθε συνεκτική μονοδιάστατη μιγαδική πολλαπλότητα έξει ένα φυσιολογικό προσανατολισμό, και μία Riemannian μετρική που είναι τέτοια ώστε οι μιγαδικές συναρτήσεις συντεταγμένων της S είναι conformal απεικονίσεις εντός του $\mathbb{C}$.

Έστω S μία Riemann επιφάνεια με μιγαδικό άτλαντα (δηλαδή conformal δομή) $\{U_i, z_i\}$. Υποθέτουμε ότι η $f : S \to \mathbb{C}$ είναι μία ολόμορφη συνάρτηση και ότι οι τοπικές παράμετροι z_i, z_j έχουν επικαλυπτόμενα πεδία ορισμού. Γράφοντας $f_i = f \circ z_i^{-1}, f_j = f \circ z_j^{-1}$ και θεωρώντας τις z_i, z_j σαν μιγαδικές μεταβλητές, τότε διαφορίζοντας τη σχέση $f_i(z_i) = f_j(z_j)$ έχουμε

$$f_i' dz_i = f_j' dz_j$$

Αυτή η σχέση ορίζει τοπικά το (αναλλοίωτο) διαφορικό της f. Γενικότερα

Ένα (m, n) διαφορικό πάνω σε μία Riemann επιφάνεια S είναι μία συλλογή φ από συναρτήσεις $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν την

$$\varphi_i \left(\frac{dz_i}{dz_j}\right)^m \left(\frac{d\overline{z_i}}{d\overline{z_j}}\right)^n = \varphi_j$$

στο $U_i \cap U_j$.

Είναι φανερό ότι τα (m, n) διαφορικά είναι μιγαδικοί τανυστές της S. Τα σπουδαιότερα είδη διαφορικών είναι:

Το σύνολο των Beltrami διαφορικών $Belt(S)$ είναι το σύνολο που αποτελείται από Lebesgue μετρήσιμα $(-1, 1)$ διαφορικά μ της S που ικανοποιούν την $\| \mu \|_\infty < 1$.

Το σύνολο των τετραγωνικών διαφορικών $Q(S)$ που αποτελείται από τα ολόμορφα $(2,0)$ διαφορικά της S.

Σημειώνουμε ότι τα Beltrami διαφορικά μπορούν να ολοκληρωθούν ως προς το Lebesgue μέτρο, η απόλυτη τιμή ενός τετραγωνικού διαφορικού είναι ένα $(1,1)$ διαφορικό και το τανυστικό γινόμενο ενός Beltrami διαφορικού με ένα τετραγωνικό διαφορικό είναι ένα $(1,1)$ διαφορικό, δηλαδή ένα στοιχείο εμβαδού για την S.

1.3.2. Riemann επιφάνειας και qc απεικονίσεις. Δίνουμε τον ορισμό της quasiconformal απεικόνισης μεταξύ Riemann επιφανειών.[L] σελ.176.

Ένας ομοιομορφισμός $f : S_1 \to S_2$ δύο Riemann επιφανειών καλείται $K-$ qc αν για οποιεσδήποτε τοπικές παραμέτρους z_i ενός άτλαντα της S_i, $i = 1, 2$, η απεικόνιση $z_2 \circ f \circ z_1^{-1}$ είναι $K-$ qc στο σύνολο στο οποίο ορίζεται. Η απεικόνιση f είναι qc εάν είναι $K-$ qc για κάποιο πεπερασμένο $K \geq 1$.

Καλούμε δύο Riemann επιφάνειες S_1, S_2 *quasiconformally ισοδύναμες* εάν υπάρξει μία qc απεικόνιση $f : S_1 \to S_2$. Μία τέτοια απεικόνιση καθορίζει ένα στοιχείο $\mu \in Belt(S_1)$. Αν $\mu = 0$ τότε f είναι conformal (δηλαδή ολόμορφη) και οι S_1, S_2 καλούνται *conformally ισοδύναμες.*

Riemann επιφάνειες και Fuchsian ομάδες. Ομοιομορφοποίηση. Το ακόλουθο θεώρημα που οφείλεται στον Ahlfors κατηγοριοποιεί τις Riemann επιφάνειες. Ειναι επίσης γνωστό ως το Θεώρημα Απεικόνισης του Riemann για Riemann επιφάνειες. Παραπέμπουμε για μία ελαφρώς παραλλαγμένη μορφή του στο [L] σελ.143-145.

ΘΕΩΡΗΜΑ. (Ahlfors) *Έστω S μία Riemann επιφάνεια. Τότε είναι conformally ισοδύναμη με μία από τις παρακάτω: i) $\mathbb{C}$ ii) $\mathbb{C} - \{0\}$ iii) $\widehat{\mathbb{C}}$ iv) $\mathbb{C}/L$ όπου L είναι ένα lattice και v) $\mathbb{U}/\Gamma$ όπου Γ είναι μία Fuchsian ομάδα.*

Το παραπάνω θεώρημα απαντά στο πρόβλημα της *ομοιομορφοποίησης* Riemann επιφανειών, δηλαδή της παραμέτρησης τους από μονοτιμες ολόμορφες ή μερόμορφες συναρτήσεις.

Δίνουμε παρακάτω ορισμένα βασικά αποτελέσματα της θεωρίας. Οι αποδείξεις τους μπορούν να βρεθούν στο [L] σελ. 177-181.

Ανύψωση qc απεικονίσεων. Οι qc απεικονίσεις και τα Beltrami διαφορικά επιφανειών Riemann, μπορούν να ανυψωθούν σε qc απεικονίσεις και διαφορικά των αντιστοιχων επιφανειών και ομάδων κάλυψης.

Έστω S_1, S_2 Riemann επιφάνειες και $f : S_1 \to S_2$ μία qc απεικόνιση. Υποθέτουμε ότι η $(\widehat{S}, \pi_i)$, είναι η καθολική επιφάνεια κάλυψης της S_i, $i =$

$1, 2$, και η Γ_i είναι η ομάδα κάλυψης της $\widehat{S}$ πάνω από την S_i.(Η επιφάνεια κάλυψης πρέπει να είναι η ίδια και για τις δύο S_i αφού είναι quasiconformally ισοδύναμες). Κάθε ανύψωση $\widehat{f} : \widehat{S} \to \widehat{S}$ της f είναι qc.

Εάν $S_i = \mathbb{U}/\Gamma_i$, $i = 1, 2$, και η $f : S_1 \to S_2$ είναι qc, τότε το αντίστοιχο $\mu \in Belt(S_1)$ μπορεί να ανυψωθεί σε ένα στοιχε·ιο του $Belt(\Gamma_1, \mathbb{U})$, το οποίο συμβολίζουμε πάλι με μ.

Ύπαρξη. *Έστω $S = \mathbb{U}/\Gamma$ μία Riemann επιφάνεια και $\mu \in Belt(S)$. Τότε υπάρχει μία qc απεικόνιση f της S επί μιας άλλης Riemann επιφάνειας με μιγαδική διαστολή μ, η οποία καθορίζεται μοναδικά ως προς conformal απεικονίσεις.*

Χάριν της περαιτέρω συζήτησης, σκιαγραφούμε την απόδειξη: Δοθέντος $\mu \in Belt(S)$ μπορούμε να το θεωρήσουμε σαν ένα στοιχείο $\mu \in Belt(\Gamma, \mathbb{U})$. Όπως στην 1.2.3 προκύπτει μία qc απεικόνιση $f^\mu : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ η οποία είναι μοναδική υπό την εννοια του θεωρήματος ύπαρξης των Ahlfors-Bers. Η ομάδα $\Gamma^\mu = f^\mu \circ \Gamma \circ (f^\mu)^{-1}$ είναι Fuchsian και η $S^\mu = \mathbb{U}/\Gamma^\mu$ είναι μία Riemann επιφάνεια. (Η S^μ είναι η επιφάνεια S με conformal δομή την προκύπτουσα από το μ). Εάν οι $pr : \mathbb{U} \to S$, $pr' : U \to S^\mu$ είναι οι κανονικές προβολές, τότε η f ορίζεται από τη σχέση

$$f \circ pr = pr' \circ f^\mu.$$

Η μοναδικότητα της f έπεται από την μοναδικότητα της f^μ.

Conformal δομές και Beltrami διαφορικά. Μια σημαντική συνέπεια του θεωρήματος ύπαρξης είναι ότι το $Belt(S)$ βρίσκεται σε ένα προς ένα αντιστοιχία με το σύνολο των conformal δομών πάνω στην Riemann επιφάνεια S. Πράγματι, ένα στοιχείο του $Belt(S)$ ορίζεται από την μορφή της μετρικής (**). Αντιστρόφως, δοθέντος ενός στοιχείου μ του $Belt(S)$, τότε από το θεώρημα ύπαρξης, παίρνουμε μια conformal δομή για την S.

Ισομορφίες ομάδων που προκύπτουν από qc απεικον΄σεις. Ομοτοπία. Τα ακόλουθα αποτελέσματα παίζουν σημαντικό ρόλο στη θεωρία χώρων Teichmüller:

Έστω $S = \mathbb{U}/\Gamma$ και $S' = \mathbb{U}/\Gamma'$ δύο Riemann επιφάνειες και $f_i : S \to S'$, $i = 1, 2$, δύο qc απεικονίσεις. Έστω $\widehat{f_1}$ μία ανύψωση της f_1. Τότε οι f_1 και f_2 επάγουν τον ίδιο ισομορφισμό μεταξύ των Γ και Γ' εάν υπάρχει μία ανύψωση $\widehat{f_2}$ της f_2 η οποία ισούται με την $\widehat{f_1}$ πάνω στο οριακό σύνολο της Γ.

Έστω $S = \mathbb{U}/\Gamma$ μία Riemann επιφάνεια και $f : S \to S$ μία conformal απεικόνιση ομοτοπική με την ταυτοτική. Τότε η f είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Μέχρι εδώ, όλα τα προαναφερθέντα αποτελέσματα ισχύουν για οποιεσδήποτε Riemann επιφάνειες. Σε ότι ακολουθεί, θα ασχολούμαστε μόνο με *κλειστές* (δηλαδή συμπαγείς και χωρίς σύνορο) Riemann επιφάνειες. Μία κλειστή Riemann επιφάνεια γένους $g > 1$, είναι της μορφής $\mathbb{U}/\Gamma$ όπου η Γ είναι μία Fuchsian ομάδα πρώτου είδους που περιέχει μόνο υπερβολικά στοιχεία.

Κάθε δύο κλειστές Riemann επιφάνειες τοι ίδιου γένους είναι quasiconformally ισοδύναμες.

Έστω $S = \mathbb{U}/\Gamma$ και $S' = \mathbb{U}/\Gamma'$ δύο κλειστές Riemann επιφάνειες γένους $g > 1$ και $f_i : S \to S'$, $i = 1, 2$, δύο qc απεικονίσεις. Τότε η f_1 είναι ομοτοπική με την f_2 εάν υπάρχουν qc ανυψώσεις $\widehat{f}_1$ και $\widehat{f}_2$ που ταυτίζονται πάνω στο ∂U.

Ένας οποιοσδήποτε ομοιομορφισμός δύο Riemann επιφανειών που διατηρεί τον προσανατολισμό δεν είναι κατ' ανάγκη ομοτοπικός με μία qc απεικόνιση. Όμως στην περίπτωση των κλειστών επιφανειών έχουμε το ακόλουθο θεώρημα που οφείλεται στον Teichmüller:

Έστω $S = \mathbb{U}/\Gamma$ και $S' = \mathbb{U}/\Gamma'$ δύο κλειστές Riemann επιφάνειες του ίδιου γένους $g > 1$. Τότε κάθε κλάση ομοτοπίας ομοιομορφισμών που διατηρούν τον προσανατολισμό της S επί της S' περιέχει μία qc απεικόνιση.

1.3.3. Ταυτόγχρονη ομοιομορφοποίηση. 'Εστω S_1, S_2 κλειστές Riemann επιφάνειες γένους $g > 1$. Λόγω του θεωρήματος ομοιομορφοποίησης μπορούμε να διαλέξουμε μία Fuchsian ομάδα Γ_1 έτσι ώστε $\mathbb{U}/\Gamma_1 = \overline{S_1}$, η ανάκλαση της S_1. 'Επεται τότε ότι, $S_1 = \mathbb{L}/\Gamma_1$, όπου $\mathbb{L} = \{z = x + iy,\ y < 0\}$ είναι το κάτω ημιεπίπεδο. Διαλέγουμε μία άλλη Fuchsian ομάδα Γ_2, έτσι ώστε $S_2 = \mathbb{U}/\Gamma_2$. Έστω $f : \overline{S_1} \to S_2$ μία qc απεικόνιση. Τότε η f μπορεί να ανυψωθεί σε μία qc απεικόνιση του $\mathbb{U}$ στον εαυτό του. Για απλότητα και στο εξής θα συμβολίζουμε τις ανυψώσεις πάλι με f. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mu = f_{\overline{z}}/f_z$ στο $\mathbb{U}$, και το στοιχείο μ^* του $Belt(\Gamma_1, \mathbb{U})$ που ορίζεται από τις σχέσεις: $\mu^* = \mu$ στο $\mathbb{U}$ και $\mu^* = 0$ αλλού. Τότε η $G = \Gamma_1^{\mu^*}$ είναι quasi-Fuchsian. Είναι τώρα φανερό ότι ισχύουν τα παρακάτω:

$$f^{\mu^*}(\mathbb{U})/G = S_2, \quad f^{\mu^*}(\mathbb{L})/G = S_1$$

και οι S_1, S_2 είναι ομοιομορφικές μέσω ενός ομοιομορφισμού που διατηρεί τον προσανατολισμό. Λέμε τότε ότι η quasi-Fuchsian ομάδα G *αναπαριστάνει* τις Riemann επιφάνειες S_1, S_2 ή ισοδύναμα, τις Fuchsian ομάδες Γ_1, Γ_2. Παραπέμπουμε στο [B3] για περαιτέρω λεπτομέρειες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

TEICHMÜLLER ΚΑΙ QUASIFUCHSIAN ΧΩΡΟΙ

2.1. TEICHMÜLLER ΧΩΡΟΣ

Σταθεροποιούμε στο εξής μία κλειστή Riemann επιφάνεια $S = \mathbb{U}/\Gamma$ γένους $g > 1$.

2.1.1. Ορισμοί του χώρου Teichmüller.

Ο Teichmüller χώρος μίας Riemann επιφάνειας. [W1] Θεωρούμε τριάδες της μορφής $(S', [f], S)$ όπου $[f]$ είναι η κλάση ομοτοπίας της quasiconformal απεικόνισης f της επιφάνειας S στην S'. Ορίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας στον χώρο αυτών των τριάδων ως εξής:

-$(S_1, [f_1], S) \sim (S_2, [f_2], S)$ *εάν υπάρχει μία conformal απεικόνιση της* S_1 *στην* S_2 *ομοτοπική με την* $f_2 \circ f_1^{-1}$.

Μία κλάση ισοδυναμίας $[X] = [(X, [f], S)]$ είναι μία *marked Riemann επιφάνεια* , και ο χώρος Teichmüller $Teich(S)$ είναι το σύνολο των marked Riemann επιφανειών. Η κλάση ισοδυναμίας του στοιχείου $(S, [id], S)$ καλείται η *αρχή* του $Teich(S)$ και θα συμβολίζεται με $[id]$.

Ο Teichmüller χώρος μιας Fuchsian ομάδας. [W1] Θεωρούμε τριάδες της μορφής (Γ', ρ, Γ) όπου η Γ' είναι μία Fuchsian ομάδα που δρα πάνω στο $\mathbb{U}$ και ο $\rho : \Gamma \to \Gamma'$ είναι ένας ισομορφισμός Fuchsian ομάδων που διατηρεί τον προσανατολισμό. Ορίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας στον χώρο αυτών των τριάδων ως εξής:

-$(\Gamma_1, \rho_1, \Gamma) \sim (\Gamma_2, \rho_2, \Gamma)$ *εάν υπάρχει ένας πραγματικός Möbius μετασχηματισμός* A *τέτοιος ώστε* $A\Gamma_1 A^{-1} = \Gamma_2$, $\rho_2 = AdA \circ \rho_1$.

Η κλάση ισοδυναμίας $[\Gamma'] = [(\Gamma', \rho, \Gamma)]$ είναι μία *marked Fuchsian ομάδα*, και ο χώρος Teichmüller $Teich(\Gamma, \mathbb{U})$, είναι το σύνολο των marked Fuchsian ομάδων. Η αρχή $[id]$ εδώ, είναι η κλάση ισοδυναμίας της τριάδας (Γ, id, Γ).

Ισομορφισμός: [B2] θεώρημα VII. *Εάν* $S = \mathbb{U}/\Gamma$ *τότε οι χώροι* $Teich(S)$ *και* $Teich(\Gamma, \mathbb{U})$ *είναι κανονικά ισομορφικοί.*

Teichmüller χώροι και Beltrami διαφορικά. Έστω $L^{\infty}(\Gamma, \mathbb{U})$ *ο χώρος* των Γ-αναλλοίωτων διαφορικών, και $Belt(\Gamma, \mathbb{U})$ το σύνολο των Γ-ανναλοίωτων Beltrami διαφορικών.

Έστω $\mu \in Belt(\Gamma, \mathbb{U})$. Θεωρούμε τις εξισώσεις Beltrami

$$w_{\overline{z}} = \begin{cases} \mu w_z & z \in \mathbb{U} \\ 0 & z \in \mathbb{L} \end{cases} \quad (1)$$

$$f_{\overline{z}} = \begin{cases} \mu f_z & z \in \mathbb{U} \\ \overline{\mu(\overline{z}) f_z} & z \in \mathbb{L} \end{cases} \quad (2)$$

Συμβολίζουμε με w^{μ}, f^{μ}, τις μοναδικές κανονικοποιημένες quasiconformal λύσεις των (1) και (2) αντίστοιχα.

Από τους παραπάνω ορισμούς μπορούμε εύκολα να δούμε ότι:

1. Ο $Teich(\Gamma, \mathbb{U})$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμιών quasiconformal απεικονίσεων $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ που είναι τέτοιες ώστε η $f \circ \Gamma \circ f^{-1} = \Gamma'$ να είναι πάλι μία Fuchsian ομάδα, και όπου δύο τέτοιες qc απεικονίσεις f_1, f_2του $\mathbb{U}$ είναι ισοδύναμες εάν ταυτίζομνται πάνω στον πραγματικό άξονα. Έχουμε δει στην 1.2.3 ότι μία τέτοια απεικόνιση επάγει έναν ισομορφισμό $\rho_f : \Gamma \to \Gamma'$. Εάν η f είναι ο περιορισμός στο $\mathbb{U}$ μιας f^{μ}, λύσης της (2), τότε η Γ' είναι πάντα Fuchsian. Σε κάθε κλάση ισοδυναμίας $[f]$ αντιστοιχούμε το σημείο $[\Gamma'] = [(\Gamma', \rho_f, \Gamma)] \in Teich(\Gamma, \mathbb{U})$. Κάθε τριάδα (Γ', ρ, Γ) είναι ισοδύναμη με μία της μορφής $(\Gamma', \rho_f, \Gamma)$.

2. Ο χώρος $Teich(\Gamma, \mathbb{U})$ είναι ο χώρος κλάσεων ισοδυναμίας Beltrami διαφορικών. Υποθέτουμε ότι οι f_1, f_2 είναο οι περιορισμοί στο $\mathbb{U}$ της f^{μ_1} και f^{μ_2} λύσεων της (2) αντίστοιχα. Βλέπουμε ότι η σχέση ισοδυναμίας μεταξύ απεικονίσεων καθορίζει μία σχέση ισοδυναμίας μεταξύ Beltrami διαφορικών: $\mu_1 \sim \mu_2$ αν και μόνο αν $f^{\mu_1} \sim f^{\mu_2}$. Άρα μια κλάση ισοδυναμίας $[\mu]$ αναπαριστάνει επίσης ένα σημείο του $Teich(\Gamma, \mathbb{U})$.

3. Σε κάθε $[\mu]$, αντιστοιχούμε το σημείο $[S^{\mu}] = [(S^{\mu}, [id], S)]$ του $Teich(S)$. Κάθε τριάδα $(X, [f], S)$ είναι ισοδύναμη με μία της μορφής $(S^{\mu}, [id], S)$. Συνεπώς ο $Teich(S)$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας $[S^{\mu}]$.

2.1.2. Μιγαδική δομή. Ο χώρος Teichmüller της S είναι μία μιγαδική πολλαπλότητα μιγαδικής διάστασης $3g - 3$. Στα επόμενα θα περιγράψουμε τη μιγαδική του δομή. Θα εργαζόμαστε με το χώρο $T(\Gamma, \mathbb{U})$ και παραπέμπουμε στο [W2] για ότι ακολουθεί.

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $Q(\Gamma, \mathbb{U})$ των $\Gamma-$*αναλλοίωτων ολοκληρώσιμων τετραγωνικών διαφορικών*. Ένα στοιχείο $\phi \in Q(\Gamma, \mathbb{U})$ είναι μία ολόμορφη συνάρτηση $\phi(z)$ πάνω στο $\mathbb{U}$ που ικανοποιεί τον νόμο μετασχηματισμού:

$$\phi(\gamma(z))(\gamma'(z))^2 = \phi(z)$$

για όλα τα $\gamma \in \Gamma$ και για όλα τα $z \in \mathbb{U}$ όπως επίσης και τη συνθήκη

$$\int_S |\, \phi \,| < \infty$$

Κάθε στοιχείο του $Q(\Gamma, \mathbb{U})$ ορίζει ένα $(2,0)$ διαφορικό της S.

Δοθέντων $\mu \in L^\infty(\Gamma, \mathbb{U})$ και $\phi \in Q(\Gamma, \mathbb{U})$ η φυσιολογική ζεύξη

$$(\mu, \phi) = \int_S \mu\phi$$

είναι καλά ορισμένη αφότου το γινόμενο $\mu\phi$ είναι μία Γ -αναλλοίωτη μορφή εμβαδού. Έστω

$$Q(\Gamma, \mathbb{U})\perp = N(\Gamma, \mathbb{U})$$

ο μηδενικός χώρος της ζεύξης. Οι δυ¨ικοί διανυσματικοί χώροι $R(\Gamma, \mathbb{U}) = L^\infty(\Gamma, \mathbb{U})/N(\Gamma, \mathbb{U})$ και $Q(\Gamma, \mathbb{U})$ έχουν μιγαδική διάσταση $3g-3$.

Μιγαδική δομή. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\widehat{\Phi} : Belt(\Gamma, \mathbb{U}) \to Teich(\Gamma, \mathbb{U})$$

που στέλνει κάθε $\mu \in Belt(\Gamma, \mathbb{U})$ στην marked Fuchsian ομάδα $[f^\mu \Gamma (f^\mu)^{-1}] \in Teich(\Gamma, \mathbb{U})$, όπου f^μ είναι λύση της (2). Η $\widehat{\Phi}$ είναι επί και ορίζουμε μιγαδική δομή πάνω στο $Teich(\Gamma, \mathbb{U})$ απαιτώντας από την $\widehat{\Phi}$ να είναι ολόμορφη.

ΓΕΓΟΝΟΣ 2.1.1. *Για $\mu \in L^\infty(\Gamma, \mathbb{U})$ η σχέση $\widehat{\Phi}'_{(0)}(\mu) = 0$ είναι ισοδύναμη με την $(\mu, \phi) = 0$ για κάθε $\phi \in Q(\Gamma, \mathbb{U})$. Ο πυρήνας της απεικόνισης διαφορικού στην αρχή είναι ο χώρος $N(\Gamma, \mathbb{U})$.*

ΓΕΓΟΝΟΣ 2.1.2. *Ο ολόμορφος εφαπτόμενος (αντ. συνεφαπτόμενος) χώρος στην αρχή, αντιστοιχεί στον $R(\Gamma, \mathbb{U})$ «αντ. $Q(\Gamma, \mathbb{U})$).*

Ο σχεδόν μιγαδικός τελεστής I_T ορισμένος πάνω στον ολόμορφο εφαπτόμενο χώρο στην αρχή, προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό με i στον $R(\Gamma, \mathbb{U})$. Κάθε coset αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο του υποχώρου $L_c^\infty(\Gamma, \mathbb{U})$ του $L^\infty(\Gamma, \mathbb{U})$ που περιέχει *κανονικά* διαφορικά, δηλαδή διαφορικά της μορφής

$$(Imz)^2\overline{\phi}, \phi \in Q(\Gamma, \mathbb{U}).$$

Υπάρχει ένας φυσιολογικός τελεστής προβολής

$$P : L^\infty(\Gamma, \mathbb{U}) \to L_c^\infty(\Gamma, \mathbb{U})$$

που δίνεται από την

$$P[\mu](z) = \frac{12(Imz)^2}{\pi} \int\int_{\mathbb{U}} \frac{\mu(\zeta)}{(\zeta - \overline{z})^4} dxdy, \quad z \in \mathbb{U}.$$

Ο τελεστής προβολής δίνει τον αντίστροφο του ισομορφισμού

$$L_c^\infty(\Gamma, \mathbb{U}) \to R(\Gamma, \mathbb{U}).$$

Συνεπώς ο $L_c^\infty(\Gamma, \mathbb{U})$ δίδει ένα άλλο μοντέλο για τον ολόμορφο εφαπτόμενο χώρο στην αρχή.

Τοπικές μιγαδικές συντεταγμένες μπορούν να περιγραφούν σε μία περιοχή της αρξής ως εξής: [W3] Διαλέγουμε

$$\mu_1, ..., \mu_{3g-3} \in L^\infty(\Gamma, \mathbb{U})$$

των οποίων τα $N(\Gamma, \mathbb{U})$ cosets αποτελούν μία βάση του ολόμορφου εφαπτόμενου χώρου στην αρχή. Δοθέντος $\mu \in Belt(\Gamma, \mathbb{U})$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$\widetilde{a^\mu} : Belt(\Gamma, \mathbb{U}) \to Belt(\Gamma^\mu, \mathbb{U})$$

ούτως ώστε να ικανοποιεί την σχέση

$$f^{\widetilde{a^\mu}(\nu)} = f^\nu \circ (f^\mu)^{-1}$$

για κάθε $\nu \in Belt(\Gamma, \mathbb{U})$. Αναλυτικά

$$\widetilde{a^\mu}(\nu) = \left(\frac{\nu - \mu}{1 - \overline{\mu}\nu} \frac{f_z^\mu}{\overline{f_z^\mu}} \right) \circ (f^\mu)^{-1}.$$

Αυτή η απεικόνιση είναι μία ένα προς ένα αμφιολόμορφία (με την έννοια των Frechét παραγώγων) του $Belt(\Gamma, \mathbb{U})$ επί του $Belt(\Gamma^\mu, \mathbb{U})$. Η επαγόμενη απεικόνιση

$$a^\mu : Teich(\Gamma, \mathbb{U}) \to Teich(\Gamma^\mu, \mathbb{U})$$

που ορίζεται από την

$$a^\mu([\nu]) = [\widetilde{a^\mu}(\nu)]$$

στέλνει το $[\mu] \in Teich(\Gamma, \mathbb{U})$ στην αρχή του $Teich(\Gamma^\mu, \mathbb{U})$. Διαλέγουμε μια περιοχή V του μηδενός στο $\mathbb{C}^{3g-3}$ αρκετά μικρή ούτως ώστε εάν $t = (t_1, ..., t_{3g-3}) \in V$ τότε το

$$\mu(t) = \sum_{j=1}^{3g-3} t_j \mu_j$$

ικανοποιεί την $\|\mu(t)\|_\infty < 1$. Θεωρούμε την ένα προς ένα και επί μιγαδική γραμμική απεικόνιση

$$L^\mu : L^\infty(\Gamma, \mathbb{U}) \to L^\infty(\Gamma^\mu, \mathbb{U})$$

που δίνεται από τον τύπο

$$L^{\mu}(\nu) = \left(\frac{\nu}{1- \mid \mu \mid^2} \frac{f^{\mu}_{z}}{\overline{f^{\mu}_{\overline{z}}}} \right) \circ (f^{\mu})^{-1}.$$

(Σημειώνουμε ότι $L^{\mu}(\nu) = \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{a^{\mu}}(\mu + t\nu) \mid_{t=0}$βλ. [A1]). Η συντεταγμένη απεικόνιση

$$\widetilde{\Phi} : V \to Teich(\Gamma, \mathbb{U})$$

δίνεται τότε από τον τύπο $\widetilde{\Phi}(t) = [\Gamma^{\mu(t)}]$. Τα ολόμοτφα εφαπτόμενα διανύσματα περιγράφονται μέσω αυτης της απεικόνισης από τον τύπο

$$\frac{\partial}{\partial t_j(\mu)} \mid_t = L^{\mu(t)}(\mu_j) mod N(\Gamma^{\mu(t)}, \mathbb{U}) \in R(\Gamma^{\mu(t)}, \mathbb{U}).$$

Αναφέρουμε εδώ το ακόλουθο [L] σελ. 211:

ΓΕΓΟΝΟΣ 2.1.3. *Quasiconformally ισοδύναμες Riemann επιφάνειες έχουν αμφιολόμορφους Teichmüller χώρους.*

Ξανά η μιγαδική δομή. Αν και απαιτήσαμε από την απεικόνιση προβολής $\widehat{\Phi}$ να είναι ολόμορφη, η μιγαδική δομή που προκύπτει πάνω στον χώρο Teichmüller είναι φυσιολογική. Τούτο μπορεί να ειδωθεί μέσα από την *εμφύτευση του Bers* [B2], την οποία περιγράφουμε παρακάτω.

Είδαμε ότι δύο Beltrami διαφορικά μ, ν είναι ισοδύναμα αν και μόνο αν $f^{\mu} = f^{\nu}$ πάνω στον επεκτεταμένο πραγματικό άξονα $\widehat{\mathbb{R}}$.

Το ακόλουθο οφείλεται στον Bers:

ΓΕΓΟΝΟΣ 2.1.4. *$f^{\mu} = f^{\nu}$πάνω στον $\widehat{\mathbb{R}}$ αν και μόνο αν $w^{\mu} = w^{\nu}$ στο $\mathbb{L}$, όπου οι τελευταίες συναρτήσεις είανι λύσεις της* (1).

Ο χώρος Teichmüller μπορεί να ταυτιστεί με κανονικό τρόπο με ένα φραγμένο χωρίο του μιγαδικού διανυσματικού χώρου $B(\Gamma, \mathbb{L})$των $\Gamma-$αναλλοίωτω *φραγμένων τετραγωνικών διαφορικών.* Ένα στοιχείο $\phi \in B(\Gamma, \mathbb{L})$ είναι μία φραγμένη ολόμορφη συνάρτηση $\phi(z)$ στο $\mathbb{L}$, δηλαδή

$$\parallel \phi \parallel_{*} = sup\{ \frac{\phi(z)}{y^2}, \, z \in \mathbb{L}\} < \infty$$

και ικανοποιεί το νόμο μετασχηματισμού

$$\phi(\gamma(z))(\gamma'(z))^2 = \phi(z)$$

για όλα τα $\gamma \in \Gamma$ και για όλα τα $z \in \mathbb{L}$. Έστω ϕ^{μ} η *schwarzian παράγωγος* της conformal απεικόνισης w^{μ} στο $\mathbb{L}$:

$$\phi^\mu = \left(\frac{(w^\mu)''}{(w^\mu)'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{(w^\mu)''}{(w^\mu)'}\right)^2$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (AHLFORS-WEILL-BERS):
α) Η ϕ^μ είναι ένα στοιχείο του $B(\Gamma, \mathbb{L})$ και ισχύει ότι

$$\| \phi^\mu \|_* < 6.$$

β) Η απεικόνιση

$$B : Belt(\Gamma, \mathbb{U}) \to B(\Gamma, \mathbb{L})$$

που ορίζεται από την σχέση $B(\mu) = \phi^\mu$ είναι μία ανοικτή και ολόμορφη απεικόνιση Banach χώρων και έχει μία ολόμορφη section σ_μ πάνω στη μπάλλα $B(0,2)$ του $B(\Gamma, \mathbb{L})$: Αν $\phi \in B(0,2)$ τότε το $\sigma_\mu(\phi)$ που ορίζεται από την $\sigma_\mu(\phi)(z) = -2y^2\phi(\overline{z})$, $z \in \mathbb{U}$ είναι ένα στοιχείο του $Belt(\Gamma, \mathbb{U})$.

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [L] σελ. 207. Η απεικόνιση B επάγει μία απεικόνιση

$$\Phi_B : Teich(\Gamma, \mathbb{U}) \to B(\Gamma, \mathbb{L})$$

όπου η Φ_B είναι ένα προς ένα από το 2.1.4, και ο $Teich(\Gamma, \mathbb{U})$ είναι σε μία φυσιολογική ένα προς ένα αντιστοιχία με το σύνολο των conformal απεικονίσεων w^μ. Ο $Teich(\Gamma, \mathbb{U})$ ταυτίζεται με το υποσύνολο

$$\{\phi^\mu, \mu \in Belt(\Gamma, \mathbb{U})\},$$

του $B(\Gamma, \mathbb{L})$. Η μιγαδική δομή που προκύπτει κατ᾽ αυτό τον τρόπο, αποδεικνύεται ότι συμπίπτει με αυτήν που ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [L], σελ. 208-211.

Modular ομάδα. Η *modular ομάδα* $Mod(S)$ ή $Mod(\Gamma, \mathbb{U})$ είναι η ομάδα όλων των qc απεικονίσεων h του $\mathbb{U}$ τέτοιων ώστε $h \circ \gamma \circ h^{-1} \in \Gamma$ για κάθε $\gamma \in \Gamma$ modulo την ομάδα αυτών των απεικονίσεων που ικανοποιούν την σχέση $h \circ \gamma \circ h^{-1} = \gamma$ για όλα $\gamma \in \Gamma$. Υπάρχει ένας ομομορφισμός της ομάδας αυτής μέσα στην ομάδα των αμφιολομορφιών του χώρου Teichmüller: αν η h είναι ένας αντιπρόσωπος ενός coset, τότε αυτό απεικονίζεται στην αμφιολομορφία γ_h, όπου

$$\gamma_h([f^\mu]) = [f^\mu \circ h^{-1}]$$

για κάθε $[f^\mu]$. Η modular ομάδα αποδεικνύεται ότι είναι το σύνολο αυτών των αμφιολομορφιών. [P]

Πραγματικός εφαπτόμενος χώρος. Στα επόμενα, θα δώσουμε μία περιγραφή του πραγματικού εφαπτόμενου χώρου, και της δράσης του σχεδόν μιγαδικού τελεστή I_T πάνω σ΄ αυτόν. Η περιγραφή είναι μέσω του χώρου των συμμετρικών διαφορικών $L_S^\infty(\Gamma)$.

Ο $L_S^\infty(\Gamma)$ είναι ισόμορφος με τον $L^\infty(\Gamma,\mathbb{U})$ όταν ο τελευταίος θεωρηθεί σαν πραγματικός διανυσματικός χώρος.

Ο ισομορφισμός $L^\infty(\Gamma,\mathbb{U}) \to L_S^\infty(\Gamma)$ δίνεται από την

$$\mu \to \widetilde{\mu} = \begin{cases} \mu(z) & z \in \mathbb{U} \\ \overline{\mu(\overline{z})} & z \in \mathbb{L} \end{cases}$$

Σημειώνουμε ότι μέσω αυτού του ισομορφισμού το σύνολο $Belt(\Gamma,\mathbb{U})$ απεικονίζεται στο $Belt_S(\Gamma)$. Ορίζουμε ένα μιγαδικό τελεστή στο $L_S^\infty(\Gamma)$ ως εξής: Για $\widetilde{\mu}$ συμμετρικό, ο τελεστής I_S δίνεται από

$$(I_S(\widetilde{\mu}))(z) = \begin{cases} i\widetilde{\mu}(z) & z \in \mathbb{U} \\ -i\widetilde{\mu}(z) & z \in \mathbb{L} \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι αν $\mu \in L^\infty(\Gamma,\mathbb{U})$, τότε

$$\mu = \frac{1}{2}(\widetilde{\mu} - iI_S(\widetilde{\mu})).$$

Τώρα εάν $\mu \in L^\infty(\Gamma,\mathbb{U})$ είναι ένας αντιπρόσωπος του ολόμορφου εφαπτόμενου διανύσματος $\frac{\partial}{\partial z(\mu)}$, και $\frac{\partial}{\partial x(\mu)}$είναι το αντίστοιχο πραγματικό διάνυσμα, τότε η παραπάνω σχέση μπορεί να ειδωθεί σαν τον ισομορφισμό της άλγεβρας Lie των απειροστών αυτομορφισμών του τελεστή I_T με την άλγεβρα Lie των ολόμορφων διανυσματικών πεδίων., δηλαδή

$$\frac{\partial}{\partial z(\mu)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)} - iI_T\frac{\partial}{\partial x(\mu)}\right).$$

Ο μιγαδικός τελεστής οριζόμενος κατ΄ αυτόν τον τρόπο, διαφέρει κατά πρόσημο από αυτόν που έχει οριστεί στο [G]. Εκεί, η μιγαδική δομή του χώρου Teichmüller περιγράφεται μέσω του Hilbert μετασχηματισμού.

2.1.3. Weil-Petersson γεωμετρία. Για ότι ακολουθεί παραπέμπουμε στο [W2] και τις εκεί αναφορές. Ο χώρος Teichmüller έχει μία φυσιολογική hermitian δομή. Για $\phi,\psi \in Q(\Gamma,\mathbb{U})$ ορίζουμε

$$h^*(\phi,\psi) = \int_S \phi\overline{\psi}$$

Το οποίο είναι το *Weil-Petersson* hermitian γινόμενο στον συνεφαπτόμενο χώρο στην αρχή. Η αντιστοιχη περιγραφή για τον ολόμορφο εφαπτόμενο χώρο προκύπτει από το γεγονός ότι $KerP = N(\Gamma,\mathbb{U})$: Πράγματι

$$\int_S \mu\phi = \int_S P[\mu]\phi$$

για όλα τα $\mu \in L^\infty(\Gamma, \mathbb{U})$ και $\phi \in Q(\Gamma, \mathbb{U})$. Το Weil-Petersson hermitian γινόμενο στον ολόμορφο εφαπτόμενο χώρο $L_c^\infty(\Gamma, \mathbb{U})$ στην αρχή δίνεται τότε απλά από την

$$h(\mu, \nu) = \int_S \mu\overline{\nu}.$$

Η hermitian μορφή στον ολόμορφο εφαπτόμενο χώρο στην αρχή του $Teich(\Gamma, \mathbb{U})$ δίνεται από την

$$h\left(\frac{\partial}{\partial z(\mu)}, \frac{\partial}{\partial z(\nu)}\right) = \int_S P[\mu]\overline{P[\nu]}.$$

και η επαγόμενη riemannian μετρική στον πραγματικό εφαπτόμενο χώρο στην αρχή είναι απλά η

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right) = 2Re\{\int_S P[\mu]\overline{P[\nu]}\}.$$

Η μετρική είναι Kählerian, με αρνητική ολόμορφη τμηματική καμπυλότητα, μη πλήρης και η ομάδα των αμφιολόμορφων ισομετριών της είναι η $Mod(S)$. Η πραγματική (συμπλεκτική) W-P μορφή ω_{WP} που προκύπτει από την μετρική δίνεται από την

$$\omega_{WP}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right) = g\left(I_T\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right) = -2Im\{\int_S P[\mu]\overline{P[\nu]}\}.$$

Η W-P hermitian μορφή μπορεί να οριστεί παντού κατά τον ακόλουθο τρόπο: Αν $[\xi]$, $\xi \in Belt(\Gamma, \mathbb{U})$, είναι ένα σημείο του $Teich(\Gamma, \mathbb{U})$, τότε μπορεί να θεωρηθεί σαν την αρχή του χώρου $Teich(\Gamma^\xi, \mathbb{U})$. Η απεικόνιση

$$a^\xi : Teich(\Gamma, \mathbb{U}) \to Teich(\Gamma^\xi, \mathbb{U})$$

είναι αμφιολόμορφη και απεικονίζει το $[\xi] \in Teich(\Gamma, \mathbb{U})$ στην αρχή $[id_\xi]$ του $Teich(\Gamma^\xi, \mathbb{U})$. Έχοντας ορίσει το W-P γινόμενο h^ξ στον εφαπτόμενο χώρο στην αρχή του $Teich(\Gamma^\xi, \mathbb{U})$, έχουμε το γινόμενο h στο σημείο $[\xi] \in Teich(\Gamma, \mathbb{U})$. Αναλυτικά, για $\mu, \nu \in L^\infty(\Gamma, \mathbb{U})$,

$$h_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial z(\mu)}, \frac{\partial}{\partial z(\nu)}\right) = h^\xi\left(\frac{\partial}{\partial z(L^\xi\mu)}, \frac{\partial}{\partial z(L^\xi\nu)}\right) = ((a^\xi)^* h^\xi)_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial z(\mu)}, \frac{\partial}{\partial z(\nu)}\right).$$

2.1.4. Πραγματικά αναλυτική δομή και συμπλεκτική γεωμετρία του χώρου Teichmüller. Σε αυτή τη παράγραφο παραθέτουμε μερικά γνωστά αποτελέσματα περί την πραγματικά αναλυτική και την συμπλεκτική δομή του χώρου Teichmüller.

Σαν πραγματικά αναλυτική πολλαπλότητα ο χώρος Teichmüller θα συμβολίζεται πάλι με $Teich(S)$.

Για τις έννοιες του *γεωδαισιακού μήκους* και των *twist* συναρτήσεων, όσο και για τον ακριβή ορισμό του *Fenchel-Nielsen διανυσματικού πεδίου*, παραπέμπουμε στα [W1,2]. Τα θεωρήματα 2.1.5. και 2.1.6 εξασφαλίζουν πραγματικά αναλυτικές συντεταγμένες για τον χώρο Teichmüller. Στο θεώρημα 2.1.7 περιγράφεται μία τοπική βάση για τον πραγματικό εφαπτόμενο χώρο. Μία πλήρης περιγραφή της W-P συμπλεκτικής μορφής δίνεται στο θεώρημα 2.1.8.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.5. [W1]: *Δοθείσης μιας διαμέρισης της επιφάνειας S από $3g-3$ απλές κλειστές γεωδαισιακές γ_i, υπάρχουν συναρτήσεις γεωδαισιακού μήκους $l_{\gamma_i} : Teich(S) \to \mathbb{R}$ και twist συναρτήσεις $\tau_i : Teich(S) \to \mathbb{R}$ $i = 1, ..., 3g-3$ οι οποίες αποτελούν ένα ολικό σύστημα πραγματικά αναλυτικών συντεταγμένων για τον $Teich(S)$. (Fenchel-Nielsen συντεταγμένες του χώρου Teichmüller).*

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.6. [W1]: *Δοθείσης μιας διαμέρισης της επιφάνειας S από $3g-3$ απλές κλειστές γεωδαισιακές γ_i, τότε για κάθε $[\rho] \in Teich(S)$ υπάρχει μία περιοχή $V([\rho])$ και $3g-3$ απλές κλειστές καμπύλες α_i με η $\gamma_i \cap \alpha_j = \emptyset$ εάν $i \neq j$ τέτοιες ώστε οι συναρτήσεις γεωδαισιακού μήκους $l_{\gamma_i}, l_{\alpha_i}$ $i = 1, ..., 3g-3$ αποτελούν ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων του $Teich(S)$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.7 [W1]: *Έστω γ_i, α_i όπως στο θεώρημα 2.1.6. Τα twist διανυσματικά πεδία $t_{\gamma_i}, t_{\alpha_i}$ αποτελούν μία τοπική βάση του πραγματικού εφαπτόμενου χώρου του $Teich(S)$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.8. [W2,4]: *Η πραγματική μορφή ω_{WP} που προκύπτει από την W-P μετρική δίνει στο $Teich(S)$ δομή συμπλεκτικής πολλαπλότητας. Η μορφή ω_{WP} ικανοποιεί τα παρακάτω:*

i) $(\omega_{WP})_{([\rho])}(t_\alpha, t_\beta) = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \cos\theta(\rho(\alpha), \rho(\beta))_p$

όπου t_α, t_β είναι τα twist διανύσματα που αντιστοιχούν στις γεωδαισιακές α, β της S, και $\theta(\rho(\alpha), \rho(\beta))_p$ είναι η γωνία μεταξύ των γεωδαισιακών $\rho(\alpha), \rho(\beta)$ στο $\mathbb{U}$.

ii) Το twist πεδίο t_α είναι hamiltonian για τη συνάρτηση γεωδαισιακού μήκους l_α, δηλαδή

$$\omega_{WP}(t_\alpha, \cdot) = -dl_\alpha$$

iii) Η έκφραση της ω_{WP} σε ολικές Fenchel-Nielsen συντεταγμένες είναι

$$\omega_{WP} = \sum_{i=1}^{3g-3} dl_{\gamma_i} \wedge d\tau_i$$

2.2. QUASIFUCHSIAN ΧΩΡΟΣ

2.2.1. Χώροι παραμόρφωσης Kleinian ομάδων και το θεώρημα του Bers. Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη Kleinian ομάδα με χωρίο ασυνέχειας Ω και οριακό σύνολο Λ. Το πηλίκο Ω/G είναι μία μιγαδική πολλαπλότητα, μία ξένη ένωση Riemann επιφανειών. [A1]

Θεωρούμε τον χώρο των G-αναλλοίωτων διαφορικών $L^\infty(G)$ και τη μοναδιαία του μπάλλα $Belt(G)$. Έστω $\mu \in Belt(G)$. Με w^μ συμβολίζουμε την μοναδική κανονικοποιημένη λύση της εξίσωσης Beltrami

$$w_{\overline{z}} = \mu w_z \quad (3)$$

Όπως έχουμε δει στην 1.2.3, η συνάρτηση w^μ επάγει ένα quasiconformal ισομορφισμό της G σε μία άλλη Kleinian ομάδα, δηλαδή $\rho_w : G \to w^\mu G (w^\mu)^{-1}$.Καλούμε δύο τέτοιους ισομορφισμούς ρ_{w_1}, ρ_{w_2} ισοδύναμους, εάν υπάρχει ένα στοιχείο A της $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{C})$ τέτοιο ώστε $\rho_{w_1} = AdA \circ \rho_{w_2}$. Η ισοδυναμία των ισομορφισμών είναι η ίδια με την ισοδυναμία των διαφορικών Beltrami, όπου δύο τέτοια διαφορικά μ, ν είναι ισοδύναμα αν $w^\mu = w^\nu$ στο Λ.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας

$$Def(G) = Hom_{qc}(G \to \mathbb{PSL}(2,\mathbb{C}))/ \sim$$

είναι ο *χώρος παραμόρφωσης* της G. [Kr].

Ο χώρος παραμόρφωσης $Def(G)$ δέχεται μία φυσιολογική μιγαδική δομή. Θεωρούμε την ακόλουθη απεικόνιση

$$\Phi : Belt(G) \to Def(G)$$

που στέλνει κάθε $\mu \in Belt(G)$ στην κλάση του $[\mu] = [w^\mu] \in Def(G)$. Η απεικόνιση Φ είναι επί, και ολόμορφη αφού από το θεώρημα των Ahlfors-Bers έχουμε ότι αν το $\mu \in Belt(G)$ εξαρτάται ολόμορφα από μιγαδικές παραμέτρους, τότε το ίδιο ισχύει και για την w^μ.

Θεώρημα του Bers. Το ακόλουθο θεώρημα, τροποποιημένο εδώ για τους σκοπούς μας, οφείλεται στον L. Bers [B4], [Kr]:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.1. *Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη Kleinian ομάδα με χωρίο ασυνέχειας Ω το οποίο αποτελείται από απλά συνεκτικές συνιστώσες. Τότε ο $Def(G)$ είναι μία συνεκτική μιγαδική πολλαπλότητα, αμφιολόμορφη με ένα καρτεσιανό γινόμενο χώρων Teichmüller.*

Συμβολίζουμε με $Q(G)$ το διανυσματικό χώρο των *$G-$αναλλοίωτων τετραγωνικών διαφορικών.* Ένα στοιχείο $\phi \in Q(G)$ είναι μια ολόμορφη συνάρτης $\phi(z)$ του Ω που ικανοποιεί τη σχέση

$$\phi(g(z)(g'(z))^2 = \phi(z)$$

για όλα τα $g \in G$ και $z \in \Omega$ και είναι τέτοια ώστε

$$\int_{\Omega/G} \mid \phi \mid < \infty$$

Μία φυσιολογική ζεύξη μπορεί να οριστεί ως εξής: Δοθέντων $\mu \in L^{\infty}(G)$ και $\phi \in Q(G)$ τότε

$$(\mu, \phi) = \int_{\Omega/G} \mu\phi$$

Συμβολίζουμε με $N(G) \subset L^{\infty}(G)$ τον μηδενικό χώρο της ζεύξης. Οι χώροι $R(G) = L^{\infty}(G)/N(G)$ και $Q(G)$ είναι πεπερασμένης διάστασης και δυϊκοί ως προς τη ζεύξη. [A1] Επιπλέον έχουμε το ακόλουθο: [B5]

ΓΕΓΟΝΟΣ 2.2.2. *Έστω $\Phi : Belt(G) \to Def(G)$ η κανονική απεικόνιση $\xi \to [\xi]$ και $\mu \in L^{\infty}(G)$. Τότε $\Phi'_{(0)}(\mu) = 0$ αν και μόνο αν $(\mu, \phi) = 0$ για κάθε $\phi \in Q(G)$. Κατά συνέπεια, ο ολόμορφος εφαπτόμενος (αντ. συνεφαπτόμενος) χώρος στην αρχή του $Def(G)$ μπορεί να ταυτιστεί με τον $R(G)$ (αντ. $Q(G)$).*

Μπορούμε τώρα να ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία όπως και στην περίπτωση του χώρου Teichmüller για να περιφράψουμε τοπικές μιγαδικές συντεταγμένες σε μια περιοχή της αρχής: Έστω $d = dim_{C}(R(G))$. Διαλέγουμε πάλι $\mu_1, ..., \mu_d \in L^{\infty}(G)$ των οποίων τα $N(G)$ cosets αποτελούν μία βάση του ολόμορφου εφαπτόμενου χώρου στην αρχή. Δοδέντος οποιουδήποτε $\mu \in Belt(G)$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$\widetilde{a^{\mu}} : Belt(G) \to Belt(G^{\mu})$$

από τη σχέση

$$w^{\widetilde{a^{\mu}}(\nu)} = w^{\nu} \circ (w^{\mu})^{-1}$$

όπου $G^{\mu} = w^{\mu} \circ G \circ (w^{\mu})^{-1}$, w^{μ} είναι η κανονικοποιημένη λύση της (3), και $\nu \in Belt(G)$. Η $\widetilde{a^{\mu}}$ δίνεται από

$$\widetilde{a^{\mu}}(\nu) = \left(\frac{\nu - \mu}{1 - \overline{\mu}\nu} \frac{w^{\mu}_{z}}{\overline{w^{\mu}_{z}}} \right) \circ (w^{\mu})^{-1}.$$

Τούτη η απεικόνιση είναι ένα προς ένα αμφιολόμορφη του $Belt(G)$ επί του $Belt(G^{\mu})$. Η επαγόμενη απεικόνιση

$$a^\mu : Def(G) \to Def(G^\mu)$$

ορίζεται από την

$$a^\mu([\nu]) = [\widetilde{a^\mu}(\nu)]$$

και απεικονίζει το $[\mu] \in Def(G)$ στην αρχή του $Def(G^\mu)$.

Διαλέγουμε μία περιοχή V του μηδενός στο $\mathbb{C}^d$ αρκετά μικρή ούτως ώστε εάν $t = (t_1, ..., t_d) \in V$ τότε το

$$\mu(t) = \sum_{j=1}^{d} t_j \mu_j$$

ικανοποιεί την $\|\mu(t)\|_\infty < 1$. Θεωρούμε την μιγαδική γραμμική ένα προς ένα και επί απεικόνιση

$$L^\mu : L^\infty(G) \to L^\infty(G^\mu)$$

που δίνεται από

$$L^\mu(\nu) = \left(\frac{\nu}{1-|\mu|^2} \frac{w_z^\mu}{\overline{w_z^\mu}} \right) \circ (w^\mu)^{-1}.$$

Η συντεταγμενική απεικόνιση $\widetilde{\Phi} : V \to Def(G)$ είναι τότε η $\widetilde{\Phi}(t) = [\mu(t)]$. Τα συντεταγμενικά ολόμορφα εφαπτόμενα διανύσματα είναι τα

$$\frac{\partial}{\partial t_j(\mu)}|_t = L^{\mu(t)}(\mu_j) mod N(G^{\mu(t)}) \in R(G^{\mu(t)}).$$

ΓΕΓΟΝΟΣ 2.2.3. [B4] *Quasiconformally ισοδύναμες Kleinian ομάδες έχουν αμφιολόμορφους χώρους παραμορφώσεων.*

2.2.2. Quasifuchsian χώρος. Έστω Γ μία Fuchsian ομάδα. Διατηρούμε τις υποθέσεις μας για την Γ, δηλαδή ότι είναι πεπερσμένα παραγόμενη, και ταυτισμένη με τη θεμελιώδη ομάδα μιας κλειστής επιφάνειας Riemann S γένους $g > 1$. Θεωρουμε την Γ να δρα πάνω στο $\mathbb{U} \cup \mathbb{L}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ο χώρος $QF(S)$ των quasi-Fuchsian δομών της S (ο Quasi-fuchsian χώρος* στο εξής) είναι απλά ο $Def(\Gamma)$.

Θεωρουμε ένα $\mu \in Belt(\Gamma)$ και την w^μ, την μοναδική κανονικοποιημένη λύση της (3). Έστω ο

$$\rho_w : \Gamma \to \Gamma^\mu$$

με $\Gamma^\mu = w^\mu \Gamma (w^\mu)^{-1}$, να είναι ο επαγόμενος ομομορφισμός ομάδων. Υπενθυμίζουμε ότι η Γ^μ είναι quasi-Fuchsian, (όταν το μ είναι συμμετρικό τότε η Γ^μ είναι Fuchsian) και επίσης ότι αν τα $\Omega_{\mathbb{U}} = w^\mu(\mathbb{U})$, $\Omega_{\mathbb{L}} = w^\mu(\mathbb{L})$ είναι οι ξένες αναλλοίωτες συνιστώσες του χωρίου ασυνέχειάς της, τότε τα πηλίκα $\Omega_{\mathbb{U}}/\Gamma^\mu, \Omega_{\mathbb{L}}/\Gamma^\mu$ είναι Riemann επιφάνειες που είναι ομοιομορφικές μέσω ενός ομοιομορφισμού που αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Το θεώρημα 2.2.1 του Bers διατυπώνεται στην περίπτωση του $QF(S)$ όπως παρακάτω:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.4. *Ο $QF(S)$ είναι μία συνεκτική μιγαδική πολλαπλότητα μιγαδικής διάστασης $6g-6$. Υπάρχει μία αμφιολομορφία*

$$\Psi : QF(S) \to Teich(S) \times Teich(\overline{S}).$$

Μπορούμε να περιγράψουμε την Ψ ως εξής: (ακολουθούμε το [Kr]) Θεωρούμε την

$$\eta_{\Gamma} : L^\infty(\Gamma) \to L^\infty(\Gamma, \mathbb{U}) \times L^\infty(\Gamma, \mathbb{L})$$

που απεικονίζει κάθε στοιχείο $\mu \in L^\infty(\Gamma)$ στο ζεύγος $(\mu_{\mathbb{U}} = \mu_{|\mathbb{U}}, \mu_{\mathbb{L}} = \mu_{|\mathbb{L}}) \in L^\infty(\Gamma, \mathbb{U}) \times L^\infty(\Gamma, \mathbb{L})$.

Η απεικόνιση Ψ είναι η επαγόμενη από την η_{Γ} όταν η τελευταία περιοριστεί στην ανοικτή μοναδιαία μπάλλα και απεικονίζει το $[\mu]$ στο $([\mu_{\mathbb{U}}], [\mu_{\mathbb{L}}]) \in Teich(S) \times Teich(\overline{S})$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 2.2.5. Ο Quasifuchsian χώρος μπορεί να ειδωθεί και με τον ακόλουθο τρόπο: [M] Έστω $\mathbb{U}^3$ ο υπερβολικός άνω ημιχώρος. Εάν Ω είναι το χωρίο ασυνέχειας της G τότε η υπερβολική 3-πολλαπλότητα $M = (\mathbb{U}^3 \cup \Omega)/G$ είναι αμφιδιαφορομορφική με την $S \times [0,1]$. Καλούμε την M *quasi-Fuchsian πολλαπλότητα.* Η M έχει μία υπερβολική δομή στο εσωτερικό της και μία προβολική δομή στο σύνορο. Συνεπώς κάθε σημείο του $QF(S)$ προσδιορίζει ένα ζεύγος προβολικών επιφανειών των οποίων η ένωση είναι το σύνορο της M. Το ζεύγος των υποκείμενων conformal δομών πάνω σ' αυτές τις επιφάνειες συμβολίζεται με $([\partial_c M], [\overline{\partial_c} M])$ και είναι ένα στοιχείο του γινομένου $Teich(S) \times Teich(\overline{S})$. Ο χώρος $QF(S)$ είναι ο χώρος των *marked quasi-Fuchsian πολλαπλοτήτων*: Μία κλάση $[M]$ της M είναι μία επιλογή ισομορφισμού μεταξύ της θεμελιώδους ομάδας της $\pi_1(M)$ και της $\Gamma \equiv \pi_1(S)$. Μιλώντας μ' αυτούς τους όρους, η απεικόνιση Ψ του Bers στέλνει το $[M]$ στο $([\partial_c M], [\overline{\partial_c} M])$.

ΣΧΟΛΙΟ 2.2.6. *(Τομές του Bers)* Ο χώρος $Teich(S)$ (αντ. $Teich(\overline{S})$) είναι μιγαδικά ισόμορφος με την μιγαδική υποπολλαπλότητα του $QF(S)$ της οποίας τα σημεία είναι οι marked πολλαπλότητες $[M]$ όπου $\overline{\partial_c} M = \overline{S}$ (αντ. η μιγαδική υποπολλαπλότητα του $QF(S)$ της οποίας τα σημεία είναι οι marked πολλαπλότητες $[M]$ όπου $\partial_c M = S$.)

Ο χώρος Teichmüller ως ο χώρος των Fuchsian παραμορφώσεων είναι μία πραγματικά αναλυτική υποπολλαπλότητα του $QF(S)$: Έστω ι η ανέλιξη

$$\iota(z) = \overline{z},\ z \in \mathbb{C}.$$

Επάγει μία ανέλιξη β του $Belt(\Gamma)$, $\mu \to \iota \circ \mu \circ \iota$ και ακολούθως μία ανέλιξη $\widetilde{\beta}$ του $QF(S)$

$$\widetilde{\beta}([w^{\mu}]) = [\beta(\mu)].$$

Ο Teichmüller χώρος μπορεί να ταυτιστεί πραγματικά αναλυτικά με το σύνολο των σταθερών σημείων αυτής της ανέλιξης. [K-M]. Το σύνολο αυτό είναι το υποσύνολο $F(S)$ των Fuchsian παραμορφώσεων του $QF(S)$:

$$F(S) = Hom_{qc}(\Gamma \to \mathbb{PSL}(2,\mathbb{R}))/\sim$$

ή, με όρους της παραπάνω σημείωσης

$$F(S) = \{[M] \in QF(S) :\ \overline{\partial_c}M = \overline{\partial_c M}\}.$$

Modular ομάδα. Η *modular ομάδα* $Mod_Q(S)$ή $Mod_Q(\Gamma)$ είναι η ομάδα όλων των quasiconformal ομοιομορφισμών h του μιγαδικού επιπέδου, που είναι τέτοιοι ώστε $h \circ \gamma \circ h^{-1} \in \Gamma$ για όλα τα $\gamma \in \Gamma$ modulo την ομάδα αυτών των ομοιομορφισμών που ικανοποιούν την σχέση $h \circ \gamma \circ h^{-1} = \gamma$ για όλα τα $\gamma \in \Gamma$. Όπως και στην περίπτωση του χώρου Teichmüller, υπαρχει ένας ομομρφισμός αυτής της ομάδας στην ομάδα των αμφιολομορφιών του $QF(S)$ ως εξής: αν ο h είναι ένας αντιπρόσωπος ενός coset, τότε το coset αυτό απεικονίζεται στην αμφιολομορφία γ_h, όπου

$$\gamma_h([w^{\mu}]) = [w^{\mu} \circ h^{-1}]$$

για κάθε $[w^{\mu}] \in QF(S)$.

Ολόμορφος εφαπτόμενος και συνεφαπτόμενος χώρος στην αρχή. Ο ολόμορφος εφαπτόμενος (αντ. συνεφαπτόμενος) χώρος στην αρχή του $QF(S)$ ταυτίζεται σύμφωνα με τη συζήτησή μας στην 2.2.1 με τον $R(\Gamma) = L^{\infty}(\Gamma)/N(\Gamma)$ (αντ. τον $Q(\Gamma)$). Η εναλλακτική περιγραφή του ολόμορφου εφαπτόμενου χώρου είναι αυτή του χώρου $L^{\infty}_c(\Gamma)$ των κανονικών διαφορικών. Ένα στοιχείο $\mu \in L^{\infty}(\Gamma)$ είναι κανονικό αν είναι της μορφής $\mu = (Imz)^2\overline{\phi},\ \ \phi \in Q(\Gamma)$. Μπορούμε εύκολα να πιστοποιήσουμε την ισχύ της παρακάτω:

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2.7. *$\mu \in L^{\infty}_c(\Gamma)$ αν και μόνο αν $\mu_{\mathbb{U}} \in L^{\infty}_c(\Gamma,\mathbb{U}), \mu_{\mathbb{L}} \in L^{\infty}_c(\Gamma,\mathbb{L})$.*

Ο τελεστής προβολής $P_{\mathbb{C}} : L^{\infty}(\Gamma) \to L^{\infty}_c(\Gamma)$ δίδεται με τον προφανή τρόπο:

$$P_{\mathbb{C}}[\mu](z) = \begin{cases} P_{\mathbb{U}}[\mu_{\mathbb{U}}](z) & z \in \mathbb{U} \\ P_{\mathbb{L}}[\mu_{\mathbb{L}}](z) & z \in \mathbb{L} \end{cases}$$

όπου $\mu_{\mathbb{U}} = \mu_{|\mathbb{U}}$, $\mu_{\mathbb{L}} = \mu_{|\mathbb{L}}$ και οι $P_{\mathbb{U}}$, $P_{\mathbb{L}}$ είναι οι τελεστές προβολής $L^\infty(\Gamma, \mathbb{U}) \to L^\infty_c(\Gamma, \mathbb{U})$, $L^\infty(\Gamma, \mathbb{L}) \to L^\infty_c(\Gamma, \mathbb{L})$ αντίστοιχα.

Πραγματικός εφαπτόμενος χώρος στην αρχή. Χρειαζόμαστε το παρακάτω προπαρασκευαστικό λήμμα:

ΛΗΜΜΑ 2.2.8. *Υπάρχει ένας ισομορφισμός:*

$$L^\infty(\Gamma) \simeq L^\infty_S(\Gamma) \oplus_R iL^\infty_S(\Gamma) = L^\infty_S(\Gamma) \otimes \mathbb{C}$$

Αρχικά ας παρατηρήσουμε ότι το ευθύ άθροισμα έχει νόημα αφότου ο $L^\infty_S(\Gamma)$ είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος. Ορίζουμε ένα τελεστή συμμετρικοποίησης $S : L^\infty(\Gamma) \to L^\infty_S(\Gamma)$ που στέλνει κάθε $\mu \in L^\infty(\Gamma)$ στο $S(\mu) \in L^\infty_S(\Gamma)$ όπου

$$S(\mu)(z) = \frac{\mu(z) + \overline{\mu(\overline{z})}}{2}$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Τετριμμένα ελέγχουμε ότι $S\Big|_{L^\infty_S(\Gamma)} = id$, και $S^2 = S$, όπου το τελευταίο υποδηλώνει ότι ο S είναι ένας τελεστής προβολής. Ακόμη, ο S είναι ένα προς ένα και επί όταν περιοριστεί στα σύνολα $L^\infty(\Gamma, \mathbb{U})$ και $L^\infty(\Gamma, \mathbb{L})$αντίστοχα. Τώρα εάν $\mu \in L^\infty(\Gamma)$ γράφουμε

$$\mu = S(\mu) + iS(-i\mu)$$

και ο ζητούμενος ισομορφισμός ορίζεται από την παραπάνω σχέση.

Έστω μ ένας αντιπρόσωπος του ολόμορφου εφαπτόμενου διανύσματος $\frac{\partial}{\partial z(\mu)}$και συμβολίζουμε με I τον πολλαπλασιασμό με i στο $L^\infty_c(\Gamma)$ που ορίζει τον μιγαδικό τελεστή I_Q στον ολόμορφο εφαπτόμενο χώρο στην αρχή του $QF(S)$. Η σχέση $\mu = S(\mu)+iS(-i\mu)$ επάγει ότι για κάθε εφαπτόμενη διεύθυνδη $\frac{\partial}{\partial x(\mu)}$που αντιστοιχεί στο $\frac{\partial}{\partial z(\mu)}$ στον υποκείμενο εφαπτόμενο χώρο, υπάρχει ένα ζεύγος

$$\left(\frac{\partial}{\partial x(S(\mu))}, \frac{\partial}{\partial x(S(-i\mu))}\right)$$

Fuchsian εφαπτόμενων διευθύνσεων στην αρχή. Μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{\partial}{\partial x(\mu)} = \frac{\partial}{\partial x(S(\mu))} + I_Q \frac{\partial}{\partial x(S(-i\mu))}.$$

Υπό το πρίσμα της απεικόνισης Ψ, η σχέση $\eta_\Gamma(\mu) = (\mu_{\mathbb{U}}, \mu_{\mathbb{L}})$ επάγει την

$$\Psi_* \left(\frac{\partial}{\partial z(\mu)}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial z(\mu_{\mathbb{U}})}, \frac{\partial}{\partial z(\mu_{\mathbb{L}})}\right)$$

όπου τα

$$\frac{\partial}{\partial z(\mu_{\mathbb{U}})}, \frac{\partial}{\partial z(\mu_{\mathbb{L}})}$$

είναι ολόμορφα εφαπτόμενα διανύσματα στην αρχή των $Teich(S)$, $Teich(\overline{S})$ αντιστοίχως. Έστω

$$\frac{\partial}{\partial x(\mu_{\mathbb{U}})}, \frac{\partial}{\partial x(\mu_{\mathbb{L}})}$$

τα αντίστοιχα πραγματικά εφαπτόμενα διανύσματα. Αφού η Ψ είναι ολόμορφη, έχουμε

$$\Psi_* \left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)} \right) = \Psi_* \left(\frac{\partial}{\partial x(S(\mu))}, \frac{\partial}{\partial x(S(-i\mu))} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x(\mu_{\mathbb{U}})}, \frac{\partial}{\partial x(\mu_{\mathbb{L}})} \right).$$

Στην παράγραφο 2.1.1 είδαμε ότι ο μιγαδικός τελεστής I_T του Teichmüller χώρου επάγεται από τον μιγαδικό τελεστή I_S του $L^\infty_S(\Gamma)$. Παρά τούτο, ο I_S *δεν* ισούται με τον I στην μιγαδοποίηση: αν $\mu = S(\mu) + iS(-i\mu) \in L^\infty(\Gamma)$ τότε

$$I_S(\mu)(z) = I_S(S(\mu))(z) + iI_S(S(-i\mu))(z) = \begin{cases} i\mu(z) & z \in \mathbb{U} \\ -i\mu(z) & z \in \mathbb{L} \end{cases}$$

ενώ $I(\mu) = i\mu$ παντού στο $\mathbb{C}$. Αυτό ανακλά το γεγονός ότι ο χώρος Teichmüller, όταν θεωρηθεί ως ο χώρος των πραγματικών παραμορφώσεων, είναι μια πραγματική υποπολλαπλότητα του $QF(S)$ (βλ. Σημ. 2.2.4).

Από την άλλη, είναι εύκολο να δούμε ότι ο I_S είναι ίσος με την μιγαδική δομή του $L^\infty(\Gamma, \mathbb{U})$ όταν περιοριστεί στο $L^\infty(\Gamma, \mathbb{U})$, και είναι ίσος με τον συζυγή μιγαδικό τελεστή του $L^\infty(\Gamma, \mathbb{L})$ όταν περιοριστεί στο $L^\infty(\Gamma, \mathbb{L})$. Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι ο I_S μετατίθεται με τον I στον $L^\infty(\Gamma)$.

Θεωρούμε τον τελεστή $\overline{I_S}$ που ορίζεται για κάθε $\mu \in L^\infty(\Gamma)$ από την σχέση

$$\overline{I_S}(\mu)(z) = I_S(S(\mu))(z) - iI_S(S(-i\mu))(z)$$

και τον οποίο θα συμβολίζουμε στο εξής με J. Βλέπουμε ότι ο J *skew-μετατίθεται* με τον I :

$$IJ + JI = 0.$$

Η αναλυτική μορφή του J είναι η

$$J(\mu)(z) = \begin{cases} i\overline{\mu(\overline{z})} & z \in \mathbb{U} \\ -i\overline{\mu(\overline{z})} & z \in \mathbb{L} \end{cases}$$

Ο σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι από τον J προκύπτει ένας μιγαδικός τελεστής J_Q πάνω στον $QF(S)$, για τον οποίο ο $QF(S)$ είναι μία μιγαδική πολλαπλότητα. Θα ασχοληθούμε με αυτό στο Κεφάλαιο III. Προς το παρόν στρέφουμε τη συζήτηση μας προς τους χώρους παραμορφώσεων quasi-Fuchsian ομάδων.

Χώρος παραμόρφωσης μιας quasi-Fuchsian ομάδας. Υποθέτουμε ότι η G είναι μία πεπερασμένα παραγόμενη quasi-Fuchsian ομάδα και $\Omega = \Omega_{\mathbb{U}} \cup \Omega_{\mathbb{L}}$ είναι το χωρίο ασυνέχειάς της. Υπάρχουν conformal Riemannian απεικονίσεις

$$\varphi : \mathbb{U} \to \Omega_{\mathbb{U}},\ \chi : \mathbb{L} \to \Omega_{\mathbb{L}}$$

που είναι τέτοιες ώστε οι ομάδες

$$\Gamma_{\mathbb{U}} = (\varphi)^{-1} \circ G \circ \varphi,\ \ \Gamma_{\mathbb{L}} = (\chi)^{-1} \circ G \circ \chi$$

να είναι Fuchsian ομάδες που δρουν στα $\mathbb{U}$ και $\mathbb{L}$ αντίστοιχα. Διατυπώνουμε το θεώρημα του Bers για την περίπτωση μιας quasi-Fuchsian ομάδας:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.9. *Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη quasi-Fuchsian ομάδα. Ο $Def(G)$ είναι μία συνεκτική μιγαδική πολλαπλότητα. Υπάρχει μία αμφιολομορφία*

$$\Psi_G : Def(G) \to Teich(\Gamma_U, \mathbb{U}) \times Teich(\Gamma_L, \mathbb{L})$$

Θεωρούμε την $\eta_G : L^\infty(G) \to L^\infty(\Gamma_U, \mathbb{U}) \times L^\infty(\Gamma_L, \mathbb{L})$ που στέλνει κάθε $\mu \in L^\infty(G)$ στο $(\mu_{\mathbb{U}}, \mu_{\mathbb{L}}) \in L^\infty(\Gamma_{\mathbb{U}}, \mathbb{U}) \times L^\infty(\Gamma_{\mathbb{L}}, \mathbb{L})$ όπου

$$\mu_{\mathbb{U}}(z) = (\mu \circ \varphi)(z)\frac{\overline{\varphi'(z)}}{\varphi'(z)},\ \ z \in \mathbb{U},$$

$$\mu_{\mathbb{L}}(z) = (\mu \circ \chi)(z)\frac{\overline{\chi'(z)}}{\chi'(z)},\ \ z \in \mathbb{L}.$$

Η η_G είναι ένα προς ένα και επί και απεικονίζει το $Belt(G)$ στο $Belt(\Gamma_{\mathbb{U}}, \mathbb{U}) \times Belt(\Gamma_{\mathbb{L}}, \mathbb{L})$. Η Ψ_G ορίζεται έτσι ώστε απεικονίζει κάθε $[\mu]$ στο $([\mu_{\mathbb{U}}], [\mu_{\mathbb{L}}])$.

Ο ολόμορφος εφαπτόμενος (αντ. συνεφαπτόμενος) χώρος στην αρχή του $Def(G)$ είναι ο χώρος $R(G)$ (αντ. $Q(G)$). Ο ολόμορφος εφαπτόμενος χώρος περιγράφεται εναλλακτικά από τον χώρο $L^\infty_c(G)$ των κανονικών Beltrami διαφορικών του Ω. Ένα στοιχείο $\mu \in L^\infty(G)$ καλείται κανονικό αν είναι της μορφής $\mu = (\lambda_\Omega)^{-2}\overline{\phi},\ \ \phi \in Q(G)$, όπου λ_Ω είναι η υπερβολική μετρική του Ω. Μπορούμε να επαληθεύσουμε εύκολα την ακόλουθη:

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2.10. *$\mu \in L^\infty_c(G)$ αν και μόνο αν τα $\mu_{\mathbb{U}}, \mu_{\mathbb{L}}$ είναι στοιχεία των $L^\infty_c(\Gamma_{\mathbb{U}}, \mathbb{U}), L^\infty_c(\Gamma_{\mathbb{L}}, \mathbb{L})$ αντίστοιχα.*

Ο τελεστής προβολής $P_{\Omega} : L^{\infty}(G) \to L^{\infty}_c(G)$ *είναι ο*

$$P_{\Omega} = (\eta_G)^{-1} \circ (P_{\mathbb{U}} \times P_{\mathbb{L}}) \circ \eta_G$$

όπου $P_{\mathbb{U}}, P_{\mathbb{L}}$ *είναι οι τελεστές προβολής των* $L^{\infty}_c(\Gamma_{\mathbb{U}}, \mathbb{U}), L^{\infty}_c(\Gamma_{\mathbb{L}}, \mathbb{L})$ *αντίστοιχα.*

Απόδειξη. Αφού η η_G είναι μία ένα προς ένα και επί απεικόνιση του $L^{\infty}_c(G)$ στο $L^{\infty}_c(\Gamma_{\mathbb{U}}, \mathbb{U}) \times L^{\infty}_c(\Gamma_{\mathbb{L}}, \mathbb{L})$, ο P_{Ω} είναι καλά ορισμένος. Επίσης, αφού είναι $P^2_{\mathbb{U}} = P_{\mathbb{U}}$ και $P^2_{\mathbb{L}} = P_{\mathbb{L}}$, προκύπτει ότι $P^2_{\Omega} = P_{\Omega}$. □

Εφαπτόμενοι χώροι του $QF(S)$ σε κάθε σημείο. Έστω $\xi \in Belt(\Gamma)$ και $[\xi] \in QF(S)$. Ως συνήθως συμβολίζουμε με w^{ξ} την μοναδική κανονικοποιημένη λύση της (3). Η ομάδα $\Gamma^{\xi} = w^{\xi} \circ \Gamma \circ (w^{\xi})^{-1}$ είναι quasi-Fuchsian.

Η απεικόνιση

$$a^{\xi} : QF(S) \to Def(\Gamma^{\xi})$$

(βλ. παρ. 2.2.1) είναι αμφιολόμορφη. Έχουμε ότι

i) ο ολόμορφος εφαπτόμενος χώρος στην αρχή του $Def(\Gamma^{\xi})$ είναι ο

$$L^{\infty}_c(\Gamma^{\xi}) = (\widetilde{a^{\xi}})_*(L^{\infty}_c(\Gamma))$$

και

ii) ο ολόμορφος συνεφαπτόμενος χώρος στην αρχή είναι ο

$$Q(\Gamma^{\xi}) = ((a^{\xi})^{-1})^*(Q(\Gamma)).$$

Συνεπώς εάν $\mu \in L^{\infty}(\Gamma)$ τότε

$$\left(\frac{\partial}{\partial z(\mu)}\right)_{([\xi])} = P_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}(\mu)] = (a^{\xi}_*)^{-1}_{([id_{\xi}])} \left(\frac{\partial}{\partial z(L^{\xi}(\mu))}\right)_{([id_{\xi}])}$$

όπου το $[id_{\xi}]$ είναι η αρχή του $Def(\Gamma^{\xi})$.

Έστω $\mu = S(\mu) + iS(-i\mu) \in L^{\infty}(\Gamma)$. Τότε

$$\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}\right)_{([\xi])} = (a^{\xi}_*)^{-1}_{([id_{\xi}])} \left(\frac{\partial}{\partial x(L^{\xi}(S(\mu)))}, \frac{\partial}{\partial x(L^{\xi}(S(-i\mu)))}\right)_{([id_{\xi}])}$$

2.2.3. Μιγαδική απόσταση και μιγαδικό μήκος. Γεωμετρικές παράμετροι για το $QF(S)$, έπονται μέσω της έννοιας της μιγαδικής απόστασης (βλ. [K3]): αν οι α, β είναι δύο γεωδαισιακές στον άνω ημιχώρο $\mathbb{U}^3$, και γ είναι η κοινή τους κάθετος, τότε *μιγαδική απόσταση* μεταξύ των α και β είναι $\sigma = d + i\phi$, όπου d είναι η υπερβολική απόσταση μεταξύ των α και β, και ϕείναι η διεδρική γωνία μεταξύ του επιπέδου που περιέχει τις α και γ και του επιπέδου που περιέχει τις β και γ. Εάν ο h είναι μία μη παραβολική ισομετρία του $\mathbb{U}^3$, και α είναι μία γεωδαισιακή κάθετη στον άξονα της h, τότε η *μιγαδική μετατόπιση* της h είναι η μιγαδική απόσταση των α και $h(\alpha)$. Αν η α είναι μία απλή κλειστή γωεδαισιακή της S, και h είναι ένα στοιχείο του $\pi_1(S) = \Gamma$ που αντιστοιχεί στην α, τότε το *μιγαδικό μήκος* της α στο σημείο $[\rho] \in QF(S)$, που συμβολίζεται με $\lambda_\alpha([\rho])$, είναι απλά η μιγαδική μετατόπιση του $\rho(h)$. Για κάθε τέτοια α, η *συνάρτηση μιγαδικού μήκους*

$$\lambda_\alpha : QF(S) \to \mathbb{C}$$

που ορίζεται κατ' αυτόν το τρόπο είναι μία ολόμορφη συνάρτηση του $QF(S)$. Σημειώνουμε ότι

$$\lambda_\alpha = l_\alpha + i\vartheta_\alpha$$

όπου l_α είναι η συνάρτηση γεωδαισιακού μήκους και ϑ_α είναι μία συνάρτηση γωνίας που προκύπτει από το φανταστικό μέρος της μιγαδικής μετατόπισης.

2.2.4. Κάμψη στον Quasifuchsian χώρο. Στα [K1,3] ο Χ. Κουρουνιώτης όρισε έναν ολόμορφο μετασχηματισμό του $QF(S)$ που καλείται παραμόρφωση κάμψης, και ο οποίος είναι η γενίκευση στο $QF(S)$ τόσο της Fenchel-Nielsen όσο και της quakebending παραμόρφωσης [E-M], που ορίζονται στον χώρο Teichmüller. Η κατασκευή του Κουρουνιώτη περιγράφεται αναλυτικά στο [K1]. Εδώ θα δώσουμε μία σύντομη περίληψη της κατασκευής αυτής. Έστω ότι η α είναι μία απλή κλειστή γεωδαισιακή της S. Για κάθε $[\rho] \in QF(S)$ και t σε μια περιοχή του 0 στο $\mathbb{C}$, παίρνουμε μια νέα quasi-Fuchsian δομή $B_\alpha(t,\rho)$ ως εξής: υποθέτουμε για απλότητα ότι $[\rho] \in F(S)$, δηλαδή η $\rho(\Gamma) = \Gamma'$ είναι Fuchsian, και ότι η $\widetilde{\alpha}$ είναι η γεωδαισιακή του άνω ημιεπιπέδου $\mathbb{U}$ που αντιστοιχεί στην α. Όλες οι εικόνες $\Gamma'(\widetilde{\alpha})$ κείνται στο $\mathbb{U} \subset \mathbb{U}^3$. Θέλουμε να απεικονίσουμε κάθε συνιστώσα του $\mathbb{U} - \Gamma'(\widetilde{\alpha})$ ισομετρικά σε ένα επίπεδο διδιάστατο κομμάτι του $\mathbb{U}^3$, με τρόπο ώστε κάθε συνιστώσα να μετακινείται ως προς τις γειτονικές της κατά μιγαδική απόσταση t. Εάν το t είναι αρκετά μικρό, τότε μπορουμε να κατασκευάσουμε έναν quasiconformal ομοιομορφισμό $w : \mathbb{U}^3 \to \mathbb{U}^3$, ο οποίος κάνει ακριβώς αυτό, και ο οποίος ορίζει μία quasi-Fuchsian δομή $B_\alpha(t,\rho) : \Gamma \to \mathbb{PSL}(2,\mathbb{C})$ (κάμψη του ρ ως προς α) και απεικονίζει κάθε γ στο $w \circ \rho(\gamma) \circ w^{-1}$. Για την μη-Fuchsian περίπτωση, σημειώνουμε μόνο ότι όλες οι αναγκαίες πληροφορίες κωδικοποιούνται από την σειρά των άκρων σημείων των γεωδαισιακών πάνω στο οριακό σύνολο της αντίστοιχης quasi-Fuchsian ομάδας. Επιπλέον, και κάτω από προυποθέσεις διακριτότητας, η $B_\alpha(t,\rho)$ ορίζει μία τοπική ολόμορφη ροή του $QF(S)$.

2.2.5. Μεταβολές των μιγαδικών συναρτήσεων των γεωδαισιακών. Προσαρτημένο στην κάμψη ως προς α βρίσκεται ένα ολόμορφο διανυσματικό πεδίο (βλ. πρόταση 2.2.12 παρακάτω)

$$T_\alpha([\rho]) = \frac{d}{dt}(0)(B_\alpha(t,\rho))$$

που καλείται διανυσματικό πεδίο κάμψης (προσαρτημένο στην α). Τα διανυσματικά πεδία κάμψης σχετίζονται με τις συναρτήσεις μιγαδικού μήκους με ταυτότητες οι οποίες είναι οι γενικεύσεις στον $QF(S)$ ανάλογων ταυτοτήτων που οφείλονται στον S. Wolpert. [W1,2]

Έστω α μία απλή κλειστή γεωδαισιακή της S και λ_α η συνάρτηση μιγαδικού μήκους της. Υποθέτουμε ότι η β είναι μία άλλη απλή κλειστή γεωδαισιακή της S. Η πρώτη μεταβολή $T_\beta \lambda_\alpha$ της λ_α υπό την κάμψη ως προς β είναι

$$T_\beta \lambda_\alpha = \frac{d}{dt}(0)(\lambda_\alpha(B_\beta(t,\rho)))$$

Αν η γ είναι μία άλλη απλή κλειστή γεωδαισιακή της S, τότε η δεύτρη μεταβολή $T_\gamma T_\beta \lambda_\alpha$ της λ_α υπό την κάμψη ως προς β και γ είναι

$$T_\gamma T_\beta \lambda_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}(0,0)(\lambda_\alpha(B_\beta(t, B_\gamma(s,\rho))))$$

Οι μεταβολές του μιγαδικού μήκους έχουν τις ακόλουθες γεωμετρικές αναπαραστάσεις: [K3]

$$T_\beta \lambda_\alpha = \sum_{p\in\alpha\cap\beta} \cosh\sigma(\rho(\beta),\rho(\alpha))_p$$

$$T_\gamma T_\beta \lambda_\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\sinh\frac{1}{2}\lambda_\alpha}\{\sum_{p\in\alpha\cap\beta}\sum_{q\in\alpha\cap\gamma} \sinh\sigma(\rho(\alpha),\rho(\beta))_p \sinh\sigma(\rho(\alpha),\rho(\gamma))_q \cosh(\frac{1}{2}\lambda_\alpha - \sigma(p,q)\}+$$

$$+\frac{1}{2\sinh\frac{1}{2}\lambda_\beta}\sum_{p\in\alpha\cap\beta}\sum_{r\in\beta\cap\gamma}\{\sinh\sigma(\rho(\alpha),\rho(\beta))_p \sinh\sigma(\rho(\beta),\rho(\gamma))_r \cosh(\frac{1}{2}\lambda_\alpha - \sigma(p,r)\}.$$

Οι ακόλουθες ταυτότητες που οφείλονται στον Χ. Κουρουνιώτη [K3], είναι αυτές που θα καθοδηγήσουν την κατασκευή της μιγαδικής συμπλεκτικής δομής του $QF(S)$ που θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο:

1. $T_\alpha \lambda_\beta + T_\beta \lambda_\alpha = 0$

2. $T_\alpha T_\beta \lambda_\gamma + T_\beta T_\alpha \lambda_\gamma + T_\gamma T_\beta \lambda_\alpha = 0$

2.2.6. Μιγαδικές συντεταγμένες. Τα επόμενα θεωρήματα εξασφαλίζουν μιγαδικές συντεταγμένες για το $QF(S)$. [K2]

Δοθείσης μιας διαμέρισης της επιφάνειας S από $3g-3$ απλές κλειστές γεωδαισιακές γ_i, υπάρχουν συναρτήσεις μιγαδικού μήκους $\lambda_{\gamma_i} : QF(S) \to \mathbb{C}$ και συναρτήσεις κάμψης $\beta_i : QF(S) \to \mathbb{C}$ $i = 1, ..., 3g-3$ που αποτελούν ένα ολικό σύστημα ολόμορφων συντεταγμένων για τον $QF(S)$.(ολικές μιγαδικές F-N συντεταγμένες).

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.11. *Δοθείσης μιας διαμέρισης της επιφάνειας S από $3g-3$ απλές κλειστές γεωδαισιακές γ_i, τότε για κάθε $[\rho] \in QF(S)$ υπάρχει μία περιοχή $V([\rho])$ και $3g-3$ απλές κλειστές καμπύλες α_i με $\gamma_i \cap \alpha_j = \emptyset$ εάν $i \neq j$ τέτοιες ώστε οι συναρτήσεις μιγαδικού μήκους $\lambda_{\gamma_i}, \lambda_{\alpha_i}$ $i = 1, ..., 3g-3$ να αποτελούν ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων για το $QF(S)$.*

2.2.7. Ολόμορφη φύση των διανυσματικών πεδίων κάμψης. Η ακόλουθη βρίσκεται στο [K2] (Prop. 3.10):

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2.13. *Έστω α μία απλή κλειστή γεωδαισιακή της S. Το T_α ειναι ένα ολόμορφο διανυσματικό πεδίο του $QF(S)$.*

Αφού το T_α είναι ολόμορφο, μπορεί να γραφεί ως

$$T_\alpha = \frac{1}{2}(F_\alpha - iI_Q F_\alpha)$$

όπου το F_α είναι ένα πραγματικό διανυσματικό πεδίο και ο I_Q είναι ο μιγαδικός τελεστής στον εφαπτόμενο χώρο του $QF(S)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2.14. *Έστω α, β απλές κλειστές γεωδαισιακές της S και T_α το αντίστοιχο ολόμορφο διανυσματικό πεδίο κάμψης του $QF(S)$. Τότε στον εφαπτόμενο χώρο του $F(S)$ έχουμε*

$$F_\alpha l_\beta = t_\alpha l_\beta, \quad (I_Q F_\alpha) l_\beta = 0$$

όπου το t_α είναι το twist διανυσματικό πεδίο που αντιστοιχεί στην α και l_β η συνάρτηση γεωδαισιακού μήκους της β.

Απόδειξη. Μετά από στοιχειώδεις υπολογισμούς έχουμε

$$T_\alpha \lambda_\beta = \frac{1}{2}(F_\alpha - iI_Q F_\alpha)(l_\beta + i\vartheta_\beta) = \frac{1}{2}(F_\alpha l_\beta + (I_Q F_\alpha)\vartheta_\beta) + \frac{i}{2}(F_\alpha \vartheta_\beta - (I_Q F_\alpha) l_\beta)$$

Από την άλλη

$$T_\alpha \lambda_\beta = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \cosh \sigma(\rho(\alpha), \rho(\beta))_p =$$

$$\sum_{p \in \alpha \cap \beta} \cosh d(\rho(\alpha), \rho(\beta))_p \cos \phi(\rho(\alpha), \rho(\beta))_p + i \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \sinh d(\rho(\alpha), \rho(\beta))_p \sin \phi(\rho(\alpha), \rho(\beta))_p$$

Εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη και εφαρμόζοντας τις συνθήκες Cauchy-Riemann προκύπτει:

$$F_\alpha l_\beta = (I_Q F_\alpha)\vartheta_\beta = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \cosh d(\rho(\alpha), \rho(\beta))_p \cos \phi(\rho(\alpha), \rho(\beta))_p$$

$$F_\alpha \vartheta_\beta = -(I_Q F_\alpha) l_\beta = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \sinh d(\rho(\alpha), \rho(\beta))_p \sin \phi(\rho(\alpha), \rho(\beta))_p$$

Στα Fuchsian σημεία έχουμε ότι $d(\rho(\alpha), \rho(\beta)) = 0$ αφού $\rho(\alpha), \rho(\beta)$ είναι τεμνόμενες γεωδαισιακές στο $\mathbb{U}^3$, και συνεπώς

$$F_\alpha l_\beta = t_\alpha l_\beta = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \cos \phi(\rho(\alpha), \rho(\beta))_p$$

και

$$(I_Q F_\alpha) l_\beta = 0.$$

$\square$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.2.15. *Όταν περιοριστεί στην εφαπτόμενη υποδέσμη του $F(S)$, το F_α είναι το twist διανυσματικό πεδίο t_α.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ QUASIFUCHSIAN ΧΩΡΟΥ

3.1. ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΣΥΜΠΛΕΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Σε τούτη τη παράγραφο θα περιγράψουμε αναλυτικά την κατασκευή μιας μιγαδικής συμπλεκτικής μορφής για τον $QF(S)$. Θα συζητήσουμε πρώτα ορισμένα γενικά ζητήματα που αφορούν σε μιγαδικές συμπλεκτικές πολλαπλότητες.

3.1.1. Μιγαδικές συμπλεκτικές πολλαπλότητες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1.1. Έστω M μία $2n$ μιγαδική πολλαπλότητα. Λέμε ότι η M είναι *μιγαδική συμπλεκτική* πολλαπλότητα εάν έχει μία μιγαδική συμπλεκτική δομή, δηλαδή εάν υπάρχει μία μη εκφυλισμένη, κλειστή $(2,0)$-μορφή Ω ορισμένη παντού στη M.

Είναι απλό να ελέγξουμε ότι μία μιγαδική συμπλεκτική πολλαπλότητα είναι επίσης μία πραγματική συμπλεκτική πολλαπλότητα· Αν Ω είναι η μιγαδική συμπλεκτική μορφή της M, τότε $\Omega = \omega + i\varphi$ και οι ω, φ είναι μη εκφυλισμένες πραγματικές κλειστές 2-μορφές που ορίζουν συμπλεκτικές δομές στην M.

Παραθέτουμε ορισμούς και ιδιότητες που ισχύουν για μιγαδικές συμπλεκτικές πολλαπλότητες. Η απόδείξεις των τελευταιων είναι ανάλογες με αυτές στην πραγματική περίπτωση και μπορούν να βρεθούν στο [L-M].

1. Η ολόμορφη μορφή Ω ορίζει έναν ισομορφισμό μεταξύ της ολόμορφης εφαπτόμενης και συνεφαπτόμενης δέσμης του M. Για κάθε $p \in M$ και κάθε ολόμορφο διάνυσμα $Z \in T^{(1,0)}_{(p)}(M)$, ο ισομορφισμός περιγράφεται από την ολόμορφη 1-μορφή $\Omega(Z)$ όπου

$$\Omega(Z)_{(p)} = \Omega_{(p)}(Z, \cdot)$$

2. Έστω f μία ολόμορφη συνάρτηση του M. Το ολόμορφο διανυσματικό πεδίο $H^{\mathbb{C}}_f$ που ικανοποιεί την

$$\Omega(H^{\mathbb{C}}_f)(\Xi) = \Omega(H^{\mathbb{C}}_f, \Xi) = -d'f(\Xi) = -\Xi f.$$

για κάθε ολόμορφο διανυσματικό πεδίο Ξ του M, θα καλείται το *μιγαδικό Hamiltonian* της f. (Με d' συμβολίζουμε τον ολόμορφο διαφορικό τελεστή του M. Εάν d είναι ο συνήθης διαφορικός τελεστής, τότε $d = d' + d''$ όπου d'' είναι ο αντιολόμορφος τελεστής του M).

3. Εάν ϕ_t είναι η τοπική ολόμορφη ροή του $H_f^{\mathbb{C}}$, τότε για αρκετά μικρό t έχουμε

$$\phi_t^* \Omega = \Omega.$$

4. Εάν L_Z είναι η Lie παράγωγος ως προς το ολόμορφο διανυσματικό πεδίο Z, τότε

$$L_{H_f^{\mathbb{C}}}(\Omega) = 0.$$

5. Έστω ότι σε μία περιοχή ενός σημείου p μιας μιγαδικής συμπλεκτικής πολλαπλότητας (M, Ω) υπάρχουν συντεταγμένες $(z_1, ..., z_{2n})$ τέτοιες ώστε η Ω να εκφράζεται ως εξής:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} d' z_i \wedge d' z_{i+n}.$$

Τότε οι $(z_1, ..., z_{2n})$ καλούνται κανονικές συντεταγμένες για την M στην περιοχή του p.

3.1.2. Κατασκευή της μιγαδικής συμπλεκτικής δομής. Ξεκινάμε με την ακόλουθη:

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1.2. *Έστω γ_i, α_i όπως στο θεώρημα 2.2.11. Τα διανυσματικά πεδία κάμψης $T_{\gamma_i}, T_{\alpha_i}$ σχηματίζουν μία τοπική βάση του ολόμορφου εφαπτόμενου χώρου του $QF(S)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μία ανοικτή περιοχή $V([\rho_0])$ του $[\rho_0] \in QF(S)$ και τοπικές συντεταγμένες

$$(\lambda_{\gamma_1}, ..., \lambda_{\gamma_{3g-3}}, \lambda_{\alpha_1}, ..., \lambda_{\alpha_{3g-3}})$$

Τα διανύσματα κάμψης $T_{\gamma_i}, T_{\alpha_i}$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $\frac{\partial}{\partial \lambda_{\gamma_i}}, \frac{\partial}{\partial \lambda_{\alpha_i}}$: Σε κάθε $[\rho] \in V([\rho_0])$ έχουμε

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & A \\ -A & B \end{bmatrix} \left[\ \tfrac{\partial}{\partial \lambda} \ \right]$$

όπου:

$$[T] = [T_{\gamma_1}, ..., T_{\gamma_{3g-3}}, T_{\alpha_1}, ..., T_{\alpha_{3g-3}}]^T,$$

$$\left[\ \tfrac{\partial}{\partial \lambda} \ \right] = \left[\frac{\partial}{\partial \lambda_{\gamma_1}}, ..., \frac{\partial}{\partial \lambda_{\gamma_{3g-3}}}, \frac{\partial}{\partial \lambda_{\alpha_1}}, ..., \frac{\partial}{\partial \lambda_{\alpha_{3g-3}}} \right]^T,$$

ο πίνακας B είναι ένας μη μηδενικός $(3g-3)\times(3g-3)$ μιγαδικός πίνακς με στοιχεία $T_{\alpha_i}\lambda_{\alpha_j}$ ή 0, και ο πίνακας A είαναι ένας διαγώνιος λ $(3g-3)\times(3g-3)$ πίνακας με στοιχεία

$$T_{\gamma_i}\lambda_{\alpha_i} = \sum_{p\in\gamma_i\cap\alpha_i}\cosh\sigma(\rho(\gamma_i),\rho(\alpha_i))_p$$

συνεπώς η ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι ίση με $(-1)^{3g-3}(\det A)^2$ η οποία είναι διάφορη του μηδενός, αφού σε κάθε $[\rho]\in V([\rho_0])$ έχουμε $T_{\gamma_i}\lambda_{\alpha_i}\neq 0$ για κάθε $i=1,...,3g-3$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.3. *Υπάρχει μία μη εκφυλισμένη κλειστή ολόμορφη $(2,0)$ μορφή Ω ορισμένη παντου στο $QF(S)$ με την οποία ο $QF(S)$ γίνεται μιγαδική συμπλεκτική πολλαπλότητα. Η μορφή Ω δίνεται σε κάθε σημείο $[\rho]\in QF(S)$ από τον τύπο:*

$$\Omega_{([\rho])}(T_\alpha,T_\beta) = \sum_{p\in\alpha\cap\beta}\cosh\sigma(\rho(\alpha),\rho(\beta))_p$$

όπου τα T_α, T_β είναι διανύσματα κάμψης που αντιστοιχούν σε απλές κλειστέ-ς γεωδαισιακές α,β της S, και $\sigma(\rho(\alpha),\rho(\beta))$είναι η μιγαδική απόσταση των γεωδαισιακών $\rho(\alpha),\rho(\beta)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα δοθεί σε βήματα:

ΒΗΜΑ 1. *Τοπικός ορισμός της μορφής.*

Ορίζουμε πρώτα τοπικά μία κλειστή ολόμορφη 2-μορφή στον ολόμορφο εφαπτόμενο χώρο του $QF(S)$. Έστω $V([\rho_0])$ μία ανοικτή περιοχή του $[\rho_0]\in QF(S)$, $(\lambda_{\gamma_1},...,\lambda_{\gamma_{3g-3}},\lambda_{\alpha_1},...,\lambda_{\alpha_{3g-3}})$ τοπικές συντεταγμένες της $V([\rho_0])$ και $T_{\gamma_i},T_{\alpha_i}$ $i=1,...,3g-3$ η βάση του ολόμορφου εφαπτόμενου χώρου που αποτελείται από διανύσματα κάμψης. Για δείκτες α,β που κινούνται στους δείκτες γ_i,α_i θέτουμε για κάθε $[\rho]\in V([\rho_0])$

$$\Omega_{([\rho])}(T_\alpha,T_\beta) = T_{\alpha_{([\rho])}}\lambda_\beta = \sum_{p\in\alpha\cap\beta}\cosh\sigma(\rho(\alpha),\rho(\beta))_p$$

Από την πρώτη ταυτότητα του Κουρουνιώτη, προκύπτει αμέσως η αντισυμμετρικότητα της Ω. Από την άλλη, η Ω είναι ολόμορφη, αφότου οι ποσότητες $T_\alpha\lambda_\beta$ είναι όλες ολόμορφες συναρτήσεις στην $V([\rho_0])$.

ΒΗΜΑ 2. *Ανεξαρτησία από την επιλογή των συντεταγμένων.*

Η μορφή Ω δεν εξαρτάται από την επιλογή των τοπικών συντεταγμένων. Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε α,β απλές κλειστές γεωδαισιακές της S και επαληθεύουμε την ισχύ του παραπάνω τύπου για την Ω. Πράγματι, από την πρόταση 3.1.2, υπάρχουν ολόμορφες συναρτήσεις f^i_α, g^i_α και f^i_β, g^i_β $i=$

$1,...,3g-3$ ορισμένες στην $V([\rho_0])$ τέτοιες ώστε

$$T_\alpha = f^i_\alpha T_{\gamma_i} + g^i_\alpha T_{\alpha_i}$$

$$T_\beta = f^i_\beta T_{\gamma_i} + g^i_\beta T_{\alpha_i}$$

όπου πάνω και κάτω δείκτες υποδηλώνουν άθροιση. Υπολογίζουμε τώρα απευθείας:

$$\Omega(T_\alpha, T_\beta) = \Omega(f^i_\alpha T_{\gamma_i} + g^i_\alpha T_{\alpha_i}, f^i_\beta T_{\gamma_i} + g^i_\beta T_{\alpha_i}) =$$

$$f^i_\alpha f^j_\beta \Omega(T_{\gamma_i}, T_{\gamma_j}) + f^i_\alpha g^j_\beta \Omega(T_{\gamma_i}, T_{\alpha_j}) + g^i_\alpha f^j_\beta \Omega(T_{\alpha_i}, T_{\gamma_j}) + g^i_\alpha g^j_\beta \Omega(T_{\alpha_i}, T_{\alpha_j}) =$$

$$f^i_\alpha f^j_\beta T_{\gamma_i}\lambda_{\gamma_j} + f^i_\alpha g^j_\beta T_{\gamma_i}\lambda_{\alpha_j} + g^i_\alpha f^j_\beta T_{\alpha_i}\lambda_{\gamma_j} + g^i_\alpha g^j_\beta T_{\alpha_i}\lambda_{\alpha_j} =$$

$$f^j_\beta (f^i_\alpha T_{\gamma_i} + g^i_\alpha T_{\alpha_i})\lambda_{\gamma_j} + g^j_\beta (f^i_\alpha T_{\gamma_i} + g^i_\alpha T_{\alpha_i})\lambda_{\alpha_j} = f^j_\beta T_\alpha \lambda_{\gamma_j} + g^j_\beta T_\alpha \lambda_{\alpha_j} =$$

$$= -f^j_\beta T_{\gamma_j}\lambda_\alpha - g^j_\beta T_{\alpha_j}\lambda_\alpha = -T_\beta \lambda_\alpha = T_\alpha \lambda_\beta .$$

ΒΗΜΑ 3. Η Ω *είναι κλειστή.*

Θεωρούμε διανυσματικά πεδία κάμψης $T_\alpha, T_\beta, T_\gamma$ πάνω σε απλές κλειστές καμπύλες α, β, γ της S αντίστοιχα. Τότε

$$d'\Omega(T_\alpha, T_\beta, T_\gamma) = T_\alpha \Omega(T_\beta, T_\gamma) - T_\beta \Omega(T_\alpha, T_\gamma) + T_\gamma \Omega(T_\alpha, T_\beta) -$$

$$-\Omega([T_\alpha, T_\beta], T_\gamma) + \Omega([T_\alpha, T_\gamma], T_\beta) - \Omega([T_\beta, T_\gamma], T_\alpha) =$$

$$T_\alpha T_\beta \lambda_\gamma - T_\beta T_\alpha \lambda_\gamma + T_\gamma T_\alpha \lambda_\beta - [T_\alpha, T_\beta]\lambda_\gamma + [T_\alpha, T_\gamma]\lambda_\beta - [T_\beta, T_\gamma]\lambda_\alpha =$$

$$T_\alpha T_\beta \lambda_\gamma - T_\beta T_\alpha \lambda_\gamma - T_\gamma T_\beta \lambda_\alpha - T_\alpha T_\beta \lambda_\gamma + + T_\beta T_\alpha \lambda_\gamma + T_\alpha T_\gamma \lambda_\beta - T_\gamma T_\alpha \lambda_\beta -$$

$$-T_\beta T_\gamma \lambda_\alpha + T_\gamma T_\beta \lambda_\alpha = 0.$$

ΒΗΜΑ 4. Η Ω *είναι μη εκφυλισμένη.*

Έστω ότι υπάρχει ένα ολόμορφο διανυσματικό πεδίο Z τέτοιο ώστε να είναι $\Omega(Z, W) = 0$ για όλα τα ολόμορφα διανυσματικά πεδία W. Η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με τις $6g-6$ εξισώσεις

$$\Omega(Z, T_\alpha) = 0$$

όπου ο α είναι ένας δείκτης που κινείται στους δείκτες γ_i, α_i $i = 1, ..., 3g-3$. Μία έκφραση για το Z σε τοπικές συντεταγμένες είναι

$$Z = f^i T_{\gamma_i} + g^i T_{\alpha_i}$$

για κάποιες ολόμορφες συναρτήσεις f^i, g^i. Προκύπτει τότε από τις

$$\Omega(Z, T_{\gamma_i}) = 0$$

ότι $g^i = 0$, αφού

$$\Omega(T_{\gamma_i}, T_{\gamma_j}) = 0$$

και

$$\Omega(T_{\alpha_i}, T_{\gamma_j}) = \begin{cases} \sum_{p \in \alpha_i \cap \gamma_j} \cosh \sigma(\rho(\alpha_i), \rho(\gamma_j))_p & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Συνεπώς $Z = f^i T_{\gamma_i}$, και με το ίδιο σκεπτικό παίρνουμε από τις εξισώσεις $\Omega(Z, T_{\alpha_i}) = 0$ ότι $f^i = 0$. Άρα $Z = 0$ και η Ω είναι μη εκφυλισμένη. $\square$

Δύο άμεσες συνέπειες του θεωρήματος 3.1.3 έπονται:

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.1.4. *Έστω B_t η τοπική ολόμορφη ροή που προκύπτει από την κάμψη. Τότε*

$$B_t^* \Omega = \Omega.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.1.5. *Για κάθε διανυσματικό πεδίο κάμψης T_α, ισχύει:*

$$L_{T_\alpha}(\Omega) = 0.$$

Το επόμενο θεώρημα είναι επίσης προφανές και γενικεύει τον τύπο δυϊσμού του Wolpert (Θεώρημα 2.1.4. ii)):

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.6. ***(Τύπος Δυϊσμού)**: Έστω α μία απλή κλειστή γεωδαισιακή της επιφάνειας S. Το διανυσματικό πεδίο κάμψης T_α είναι το μιγαδικό Hamoltonian της συνάρτησης μιγαδικού μήκους λ_α :*

$$H^{\mathbb{C}}_{\lambda_\alpha} = T_\alpha$$

δηλαδή

$$\Omega(T_\alpha, \cdot) = -d'\lambda_\alpha$$

3.1.3. Έκφραση της Ω σε ολικές μιγαδικές F-N συντεταγμένες.

Σε αυτή τη παράγραφο θα αποδείξουμε το ανάλογο με το θεώρημα 2.1.4iii) του Wolpert. Χρειαζόμαστε πρώτα ένα επιχείρημα αναλυτικής συνέχισης.

ΛΗΜΜΑ 3.1.7. *Έστω D ένα ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}^n$, και $F : D \to \mathbb{C}$ μία ολόμορφη συνάρτηση*

$$F = F(z_1, ...z_n),\ z_i = x_i + iy_i\ i = 1, ..., n.$$

Έστω ότι το D περέχει τμήματα των

$$\mathbb{R}^i = \{\overline{x_i} \in \mathbb{C}^n, \overline{x_i} = (0, ..., x_i, ..., 0, 0, ..., 0)\}$$

για κάθε $i = 1, ..., n$, και είναι $F(x_1, ...x_n, 0, ..., 0) = 0$ για κάθε $(x_1, ...x_n, 0, ..., 0) \in D$. Τότε $F \equiv 0$ στο D.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα πολυδίσκο $\Delta = \Delta(\overline{x_1^0}, r_1) \times ... \times \Delta(\overline{x_n^0}, r_n)$ όπου

$$\overline{x_i^0} = (0, ..., x_i^0, ..., 0, 0, ..., 0) \in D$$

για κάθε $i = 1, ..., n$ και $r_i > 0$ είναι αρκετά μικρά ώστε $\Delta \subset D$. Τώρα

$$F_{|_\Delta}(x_1, ...x_n, 0, ..., 0) = 0$$

και έτσι $F_{|_\Delta} = 0$. Αφού η F μηδενίζεται σε ένα ανοικτό του D, υποχρεωτικά μηδενίζεται παντού στο D. $\square$

Έστω τώρα $\Omega = \omega_1 + i\omega_2$. Θεωρούμε την πραγματική συμπλεκτική μορφή ω_{WP} της πραγματικής υποπολλαπλότητας $F(S) \cong Teich(S)$ του $QF(S)$. (Εδώ ο $Teich(S)$ νοείται ως πραγματική πολλαπλότητα).

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.8. *Έστω ω_{WP} η συμπλεκτική μορφή του $Teich(S)$ και ω_1, ω_2 περιορισμένες στην εφαπτόμενη υποδέσμη του $F(S)$. Τ'οτε $\omega_1 = \omega_{WP}$ και $\omega_2 = 0$.*

Απόδειξη. Έστω α, β απλές κλειστές καμπύλες της S και t_α, t_β τα αντίστοιχα twist διανυσματικά πεδία. Σε οποιοδήποτε σημείο $[\rho]$ του $F(S)$ έχουμε

$$(\omega_{WP})_{([\rho])}(t_\alpha, t_\beta) = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \cos\theta(\rho(\alpha), \rho(\beta))_p = \frac{d}{dx}\,|_{x=0}\,(l_\beta(B_\alpha(x, \rho)) =$$

από τον ολόμορφο χαρακτήρα της κάμψης

$$= Re\left[\frac{d}{dt}\,|_{t=x+iy=0}\,(\lambda_\beta(B_\alpha(t, \rho))\right] = Re[T_{\alpha_{([\rho])}}\lambda_\beta] =$$

από τον ορισμό της Ω

$$= Re[\Omega_{([\rho])}(T_\alpha, T_\beta)] = \omega_{1_{([\rho])}}(F_\alpha, F_\beta) =$$

από το πόρισμα 2.2.14

$$= \omega_{1_{([\rho])}}(t_\alpha, t_\beta).$$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται η δεύτερη σχέση. Στα Fuchsian σημεία είναι:

$$\omega_{1_{([\rho])}}(t_\alpha, t_\beta) = \omega_{2_{([\rho])}}(F_\alpha, F_\beta) = Im[T_{\alpha_{([\rho])}} \lambda_\beta] = 0.$$

$\square$

Το προηγούμενο θεώρημα μας δίνει πληροφορίες που αφορούν στη συμπλεκτική συμπεριφορά του $Teich(S)$ μέσα στον $QF(S)$. Έστω (M, ω) μία συμπλεκτική πολλαπλότητα διάστασης $2n$. Η υποπολλαπλότητα N διάστασης n καλειται α) συμπλεκτική αν η ω_N, ο περιορισμός της ω στην εφαπτόμενη υποδέσμη του N είναι μία συμπλεκτική μορφή για το N, και β) Lagrangian αν $\omega_N = 0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα 3.1.8 έχουμε το ακόλουθο:

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.1.9. *Ο χώρος Teichmüller είναι : α) ω_1-συμπλεκτική υποπολλαπλότητα του $QF(S)$ και β) ω_2 -Lagrangian υποπολλαπλότητα του $QF(S)$.*

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε το κύριο θεώρημα αυτής της παραγράφου:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.10. *Η έκφραση της Ω σε ολικές μιγαδικές F-N συντεταγμένες είναι*

$$\Omega = \sum_{i=1}^{3g-3} d'\lambda_{\gamma_i} \wedge d'\beta_i$$

Επίσης

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial\beta_i}, \cdot\right) = -d'\lambda_{\gamma_i} \quad \Omega\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_i}}, \cdot\right) = d'\beta_i$$

και άρα τα ολόμορφα διανυσματικά πεδία $\frac{\partial}{\partial\beta_i}, \frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_i}}$ *είναι μιγαδικά Hamiltonian για την μορφή Ω.*

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 3.1.11. Οι συντελεστές της Ω εκφρασμένοι σε μιγαδικές F-N συντεταγμένες δεν εξαρτώνται από τις παραμέτρους κάμψης. Είναι γνωστό ότι αν η Ω είναι μία (2,0) μορφή και Z, Z_1, Z_2είναι ολόμορφα διανυσματικά πεδία της μιγαδικής πολλαπλότητας M, τότε για την Lie παράγωγο L_Z της Ω ισχύει:

$$L_Z\Omega(Z_1, Z_2) = Z\Omega(Z_1, Z_2) - \Omega([Z, Z_1], Z_2) - \Omega(Z_1, [Z, Z_2]).$$

Θέτουμε $Z = \frac{\partial}{\partial\beta_j}$ για κάποιο j και $Z_1, Z_2 \in \{\frac{\partial}{\partial\beta_i}, \frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_i}}\}$. Αφού $\frac{\partial}{\partial\beta_j} = H^{\mathbb{C}}_{\lambda_{\gamma_j}}$, είναι $L_{\frac{\partial}{\partial\beta_j}}\Omega = 0$. Αφού τα Z, Z_1, Z_2 είναι συντεταγμενικά διανυσματικά πεδία, μετατίθενται και άρα:

$$\frac{\partial}{\partial\beta_j}\Omega(\frac{\partial}{\partial\beta_i},\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_i}})=0$$

που αποδεικνύει ότι οι συντελεστές της Ω είναι ανεξάρτητοι από τις παραμέτρους κάμψης.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.10. Από τον τύπο δυϊσμού του θεωρήματος 3.1.6, βλέπουμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial\beta_i},\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_j}}\right)=-\delta_{ij},$$

και

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial\beta_i},\frac{\partial}{\partial\beta_j}\right)=0,$$

για κάθε $i,j=1,...,3g-3$. Άρα,

$$\Omega=\sum_{i=1}^{3g-3}d'\lambda_{\gamma_i}\wedge d'\beta_i+\sum_{1\leq i<j\leq 3g-3}\Omega\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_i}},\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_j}}\right)d'\lambda_{\gamma_i}\wedge d'\lambda_{\gamma_j}$$

Κατευθείαν υπολογισμοί μας οδηγούν στις ακόλουθες εκφράσεις του πραγματικού και φανταστικού μέρους της Ω :

$$\omega_1=Re\Omega=\sum_{i=1}^{3g-3}(dl_{\gamma_i}\wedge d\tau_i-d\vartheta_i\wedge d\psi_i)+$$

$$+\sum_{1\leq i<j\leq 3g-3}Re\left[\Omega\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_i}},\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_j}}\right)\right](dl_{\gamma_i}\wedge dl_{\gamma_j}-d\vartheta_i\wedge d\vartheta_j)-$$

$$-\sum_{1\leq i<j\leq 3g-3}Im\left[\Omega\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_i}},\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_j}}\right)\right](d\vartheta_i\wedge dl_{\gamma_j}-dl_{\gamma_i}\wedge d\vartheta_j)$$

και

$$\omega_2=Im\Omega=\sum_{i=1}^{3g-3}(d\vartheta_i\wedge d\tau_i-dl_{\gamma_i}\wedge d\psi_i)+$$

$$+\sum_{1\leq i<j\leq 3g-3}Re\left[\Omega\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_i}},\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_j}}\right)\right](d\vartheta_i\wedge dl_{\gamma_j}-dl_{\gamma_i}\wedge d\vartheta_j)+$$

$$+\sum_{1\leq i<j\leq 3g-3}Im\left[\Omega\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_i}},\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_j}}\right)\right](dl_{\gamma_i}\wedge dl_{\gamma_j}-d\vartheta_i\wedge d\vartheta_j)$$

όπου

$$Re\left[\Omega\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_i}},\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_j}}\right)\right]=\omega_1\left(\frac{\partial}{\partial l_{\gamma_i}},\frac{\partial}{\partial l_{\gamma_j}}\right)$$

και

$$Im\left[\Omega\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_i}},\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_j}}\right)\right]=\omega_2\left(\frac{\partial}{\partial l_{\gamma_i}},\frac{\partial}{\partial l_{\gamma_j}}\right).$$

Όταν περιοριστούμε στην εφαπτόμενη δέσμη του $F(S)$ οι συναρτήσεις ϑ_i,ψ_i είναι όλες μηδέν, άρα σ' αυτήν την περίπτωση

$$\Omega=\sum_{i=1}^{3g-3}dl_{\gamma_i}\wedge d\tau_i+\sum_{1\le i<j\le 3g-3}\Omega\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_i}},\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_j}}\right)dl_{\gamma_i}\wedge dl_{\gamma_j}.$$

Θα δείξουμε ότι οι ολόμορφες συναρτήσεις

$$\Omega_{ij}([\rho])=\Omega_{([\rho])}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_i}},\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_j}}\right)$$

είναι πραγματικές όταν περιοριστούν στον $F(S)$. Έστω $[\rho]$ ένα σημείο του $F(S)$. Τότε από την πρόταση 3.1.2, έχουμε ότι σε μία περιοχή του $[\rho]$ είναι

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_i}}=f^j_{\gamma_i}T_{\gamma_j}+g^j_{\gamma_j}T_{\alpha_j}$$

όπου οι $f^j_{\gamma_i},g^j_{\gamma_j}$ είναι ολόμορφες συναρτήσεις ορισμένες σ' αυτήν τη περιοχή. Σύμφωνα με την εξίσωση πινάκων στην πρόταση 3.1.2, παίρνουμε πολλαπλασιάζοντας με τον αντίστροφο πίνακα ότι

$$\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\right]=\begin{bmatrix}A^{-1}BA^{-1} & -A^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{bmatrix}[T]$$

Άρα

$$\left[\frac{\partial}{\partial\lambda_\gamma}\right]=\begin{bmatrix}A^{-1}BA^{-1} & -A^{-1}\end{bmatrix}[T]$$

όπου

$$\left[\frac{\partial}{\partial\lambda_\gamma}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_{3g-3}}}\right]^T$$

Υπενθυμίζουμε ότι τα στοιχεία του διαγώνιου πίνακα A είναι της μορφής $T_{\gamma_i}\lambda_{\alpha_i}$ ή 0 ενώ τα στοιχεία του πίνακα B είναι της μορφής $T_{\alpha_i}\lambda_{\alpha_j}$ ή 0. Όλες αυτές οι ποσότητες (και τελικά οι ποσότητες $f^j_{\gamma_i},g^j_{\gamma_j}$ που είναι τα στοιχεία των πινάκων $A^{-1}BA^{-1}$ και $-A^{-1}$ αντίστοιχα) παίρνουν πραγματικές τιμές στα

Fuchsian σημεία. Πράγματι, αν $[\rho]$ είναι ένα τέτοιο σημείο τότε

$$T_\alpha \lambda_\beta = \sum_{p\in\alpha\cap\beta} \cos\phi(\rho(\alpha),\rho(\beta))_p$$

όπου οι α,β είναι δείκτες που κινούνται πάνω στους δείκτες $\gamma_i,\alpha_i,\ i=1,...,3g-3$. Μετά από αυτό, εύκολα βλέπει κανείς ότι στο σημείο $[\rho]$ έχουμε:

$$\Omega_{ij} = \Omega\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_i}},\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_j}}\right) =$$

$$\Omega(f^l_{\gamma_i}T_{\gamma_l} + g^l_{\gamma_i}T_{\alpha_l},\ f^k_{\gamma_j}T_{\gamma_k} + g^k_{\gamma_j}T_{\alpha_k}) =$$

$$f^l_{\gamma_i}f^k_{\gamma_j}T_{\gamma_l}\lambda_{\gamma_k} + f^l_{\gamma_i}g^k_{\gamma_j}T_{\gamma_l}\lambda_{\alpha_k} +$$

$$+g^l_{\gamma_i}f^k_{\gamma_j}T_{\alpha_l}\lambda_{\gamma_k} + g^l_{\gamma_i}g^k_{\gamma_j}T_{\alpha_l}\lambda_{\alpha_k}$$

το οποίο είναι πραγματικός αριθμός όταν υπολογιστεί στο $[\rho]$. Από το θεώρημα 3.1.8 και τον τύπο δυϊσμού του Wolpert για την ω_{WP} έχουμε:

$$Re\left[\Omega\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_i}},\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_j}}\right)\right] = \omega_1\left(\frac{\partial}{\partial l_{\gamma_i}},\frac{\partial}{\partial l_{\gamma_j}}\right) = \omega_{WP}\left(\frac{\partial}{\partial l_{\gamma_i}},\frac{\partial}{\partial l_{\gamma_j}}\right) = 0$$

και

$$Im\left[\Omega\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_i}},\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_j}}\right)\right] = \omega_2\left(\frac{\partial}{\partial l_{\gamma_i}},\frac{\partial}{\partial l_{\gamma_j}}\right) = 0$$

στα σημεία του $F(S)$. Οι ολόμορφες συναρτήσεις

$$\Omega_{ij} = \Omega_{ij}(\lambda_{\gamma_1},...,\lambda_{\gamma_{3g-3}},\beta_1,...,\beta_{3g-3})$$

ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του λήμματος 3.1.7, και άρα είναι ταυτοτικά μηδέν στον $QF(S)$. Το θεώρημά μας αποδείχτηκε. □

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 3.1.12. Οι συναρτήσεις μιγαδικού μήκους λ_{γ_i} είναι πλήρως ορισμένες από τις γεωδαισιακές γ_i της διαμέρισης της επιφάνειας S. Αλλά για να ορίσουμε τις συναρτήσεις κάμψης β_i, χρειαζόμαστε μία επιλογή διαμέρισης της S. Καταλήγουμε στο ότι τα $d'\beta_i$ και τα μιγαδικά Hamiltonian διανυσματικά πεδία $\frac{\partial}{\partial\lambda_{\gamma_i}}$ εξαρτώνται από την επιλογή της διαμέρισης.

3.2. WEIL-PETERSSON ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

3.2.1. Kählerian γεωμετρία. Έστω G μία πεπερσμένα παραγόμενη quasi-Fuchsian ομάδα. Συμβολίζουμε ως συνήθως με $\Omega = \Omega_{\mathbb{U}} \cup \Omega_{\mathbb{L}}$ το χωρίο ασυνέχειάς της και έστω $\Gamma_{\mathbb{U}},\Gamma_{\mathbb{L}}$ οι Fuchsian ομάδες που προκύπτουν από τις conformal Riemann απεικονίσεις

$$\varphi:\ \mathbb{U}\to\Omega_{\mathbb{U}},\ \chi:\ \mathbb{L}\to\Omega_{\mathbb{L}}.$$

Η υπερβολική μετρική λ_Ω του Ω ορίζεται έτσι ώστ

$$\lambda_\Omega \mid_{\Omega_{\mathbb{U}}} = \lambda_{\Omega_{\mathbb{U}}} \quad \lambda_\Omega \mid_{\Omega_{\mathbb{L}}} = \lambda_{\Omega_{\mathbb{L}}}$$

όπου οι υπερβολικές μετρικές στα $\Omega_{\mathbb{U}}, \Omega_{\mathbb{L}}$ είναι ορισμένες από τις σχέσεις

$$\lambda_{\Omega_{\mathbb{U}}} = (\varphi^{-1})^* \lambda_{\mathbb{U}} \quad \lambda_{\Omega_{\mathbb{L}}} = (\chi^{-1})^* \lambda_{\mathbb{L}}$$

με $\lambda_{\mathbb{U}}, \lambda_{\mathbb{L}}$ τις συνήθεις υπερβολικές μετρικές στο άνω και κάτω ημιεπίπεδο αντίστοιχα.

Δοθέντων $\mu \in L^\infty(G)$ και $\phi \in Q(G)$ θεωρούμε τη ζεύξη

$$(\mu, \phi)_{Def(G)} = \int_{\Omega/G} \mu\phi = \int_{\Omega_{\mathbb{U}}/G} (\mu \mid_{\Omega_{\mathbb{U}}})(\phi \mid_{\Omega_{\mathbb{U}}}) + \int_{\Omega_{\mathbb{L}}/G} (\mu \mid_{\Omega_{\mathbb{L}}})(\phi \mid_{\Omega_{\mathbb{L}}}).$$

Από το δεξιό σκέλος της εξίσωσης προκύπτει ότι η ζεύξη είναι καλά ορισμένη. Οι πεπερασμένης διάστασης χώροι $R(G) \simeq L_c^\infty(G)$ και $Q(G)$ είναι δυϊκοί ως προς τη ζεύξη.

Έστω $\mu \in L^\infty(G)$ και $\phi \in Q(G)$. Θεωρούμε το ζεύγος $(\mu_{\mathbb{U}}, \mu_{\mathbb{L}}) = \eta_G(\mu)$ και επίσης τα $\phi_{\mathbb{U}}(z) = (\phi \circ \varphi)(z)(\varphi'(z))^2$ και $\phi_{\mathbb{L}}(z) = (\phi \circ \chi)(z)(\chi'(z))^2$. Παρατηρούμε ότι με αλλαγή των μεταβλητών παίρνουμε

$$(\mu, \phi)_{Def(G)} = \int_{\mathbb{U}/\Gamma_{\mathbb{U}}} \mu_{\mathbb{U}}\phi_{\mathbb{U}} + \int_{L/\Gamma_{\mathbb{L}}} \mu_{\mathbb{L}}\phi_{\mathbb{L}} = (\mu_{\mathbb{U}}, \phi_{\mathbb{U}})_{Teich(\Gamma_{\mathbb{U}})} + (\mu_{\mathbb{L}}, \phi_{\mathbb{L}})_{Teich(\Gamma_{\mathbb{L}})}.$$

Weil-Petersson hermitian γινόμενο και μετρική του $QF(S)$.

Ξεκινάμε ορίζοντας το γινόμενο στον ολόμορφο εφαπτόμενο και συνεφαπτόμενο χώρο στην αρχή του $Def(G)$.

Έστω $\mu, \nu \in L_c^\infty(G)$ και $\phi, \psi \in Q(G)$. Το *Weil-Petersson hermitian γινόμενο* ορίζεται από την

$$h^{Def(G)}(\mu, \nu) = \int_{\Omega/G} \mu\overline{\nu}$$

και το αντίστοιχο γινόμενο στον συνεφαπτόμενο χώρο από την

$$h^{*Def(G)}(\phi, \psi) = \int_{\Omega/G} \phi\overline{\psi}$$

Συμβολίζουμε με $\widehat{T}(G)$ το καρτεσιανό γινόμενο $Teich(\Gamma_{\mathbb{U}}, \mathbb{U}) \times Teich(\Gamma_{\mathbb{L}}, \mathbb{L})$ και με

$$h^{\widehat{T}(G)} = h^{T(\Gamma_{\mathbb{U}})} \times h^{T(\Gamma_{\mathbb{L}})}$$

το hermitian γινομενο, όπου τα $h^{T(\Gamma_{\mathbb{U}})}, h^{T(\Gamma_{\mathbb{L}})}$ είναι τα Weil-Petersson hermitian γινόμενα στους $L_c^\infty(\Gamma_{\mathbb{U}}, \mathbb{U}), L_c^\infty(\Gamma_{\mathbb{L}}, \mathbb{L})$ αντίστοιχα. Έστω η

$$\eta_G : L_c^\infty(G) \to L_c^\infty(\Gamma_{\mathbb{U}}, \mathbb{U}) \times L_c^\infty(\Gamma_{\mathbb{L}}, \mathbb{L})$$

περιορισμένη στα κανονικά διαφορικά, και η^*_G την δυϊκή απεικόνιση από το $Q(\Gamma_{\mathbb{U}}, \mathbb{U}) \times Q(\Gamma_{\mathbb{L}}, \mathbb{L})$ επί του $Q(G)$.

$h^{Def(G)} = \eta^*_G(h^{\widehat{T}(G)})$

Για $\mu, \nu \in L^\infty_c(G)$ έχουμε

$$h^{Def(G)}(\mu, \nu) = \int_{\Omega/G} \mu\overline{\nu} =$$

$$= \int_{(\Omega_{\mathbb{U}})/G} (\mu \mid_{\Omega_{\mathbb{U}}})(\overline{\nu \mid_{\Omega_{\mathbb{U}}}}) + \int_{(\Omega_{\mathbb{L}})/G} (\mu \mid_{\Omega_{\mathbb{L}}})(\overline{\nu \mid_{\Omega_{\mathbb{L}}}}).$$

Αλλάζοντας τις μεταβλητές, καταλήγουμε:

$$\int_{\mathbb{U}/\Gamma_{\mathbb{U}}} \mu_{\mathbb{U}}\overline{\nu}_{\mathbb{U}} + \int_{\mathbb{L}/\Gamma_{\mathbb{L}}} \mu_{\mathbb{L}}\overline{\nu}_{\mathbb{L}} = h^{\widehat{T}(G)}(\eta_G(\mu), \eta_G(\nu)) = \eta^*_G(h^{\widehat{T}(G)})(\mu, \nu).$$

Μετά από αυτήν την προπαρασκευαστική συζήτηση είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε την Weil-Petersson hermitian μορφή στον $QF(S)$. Έστω $\mu, \nu \in L^\infty(\Gamma)$, $[\xi]$ τυχόν σημείο του $QF(S)$, και $(\frac{\partial}{\partial z(\mu)})_{([\xi])}, (\frac{\partial}{\partial z(\nu)})_{([\xi])}$ τα αντίστοιχα ολόμορφα διανύσματα στο $[\xi]$.

Η *Weil-Petersson hermitian μορφή του* $QF(S)$ ορίζεται ως εξής:

$$H^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial z(\mu)}, \frac{\partial}{\partial z(\nu)}\right) = h^{Def(\Gamma^\xi)}(P_{\Omega^\xi}[L^\xi\mu], P_{\Omega^\xi}[L^\xi\nu])$$

$$= \int_{\Omega^\xi/\Gamma^\xi} P_{\Omega^\xi}[L^\xi\mu]\overline{P_{\Omega^\xi}[L^\xi\nu]}.$$

Η *Weil-Petersson Riemannian μετρική* που επάγεται από την $H^{Q(S)}$ ειναι:

$$g^Q_{([\xi])}(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}) = 2Re\{H^Q_{([\xi])}(\frac{\partial}{\partial z(\mu)}, \frac{\partial}{\partial z(\nu)}\} = 2Re\{\int_{\Omega^\xi/\Gamma^\xi} P_{\Omega^\xi}[L^\xi\mu]\overline{P_{\Omega^\xi}[L^\xi\nu]}\}.$$

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει την σχέση των Weil-Petersson γεωμετριών του $QF(S)$ και του $\widehat{T}(S) = Teich(S) \times Teich(\overline{S})$, το τελευταίο με την μετρική γινόμενο $g^{\widehat{T}} = g^{T(S)} + g^{T(\overline{S})}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2.2. *Έστω Ψ η αμφιολόμορφη απεικόνιση του Bers από το $QF(S)$ επί του $\widehat{T}(S)$. Ισχύει η ακόλουθη σχέση:*

$$g^Q = (\Psi^*)g^{\widehat{T}}$$

Το ζεύγος $(QF(S), g^Q)$ είναι μία Kählerian πολλαπλότητα. Η μετρική είναι μη πλήρης και η ομάδα των αμφιολόμορφων ισομετριών είναι η modular ομάδα $Mod_Q(S)$.

Χρειαζόμαστε πρώτα ένα λήμμα:

ΛΗΜΜΑ 3.2.3. *Έστω* $[\xi] \in QF(S)$, $\eta(\xi) = (\xi_{\mathbb{U}}, \xi_{\mathbb{L}})$.
Τότε ισχύει ότι:

$$(L^{\xi_{\mathbb{U}}} \times L^{\xi_{\mathbb{L}}}) \circ \eta_{\Gamma} = \eta_{\Gamma^{\xi}} \circ L^{\xi}.$$

Απόδειξη. Έστω $\mu \in L^{\infty}(\Gamma)$ και $\varphi^{\xi} : \mathbb{U} \to \Omega^{\xi}_{\mathbb{U}}$, $\chi^{\xi} : \mathbb{L} \to \Omega^{\xi}_{\mathbb{L}}$ οι κανονικοποιημένες conformal απεικονίσεις. Τότε

$$(\eta_{\Gamma^{\xi}} \circ L^{\xi})(\mu) = \left((L^{\xi}\mu \circ \varphi^{\xi})(z) \frac{\overline{(\varphi^{\xi})'(z)}}{(\varphi^{\xi})'(z)}, (L^{\xi}\mu \circ \chi^{\xi})(z) \frac{\overline{(\chi^{\xi})'(z)}}{(\chi^{\xi})'(z)} \right).$$

Τώρα,

$$(L^{\xi}\mu \circ \varphi^{\xi})(z) \frac{\overline{(\varphi^{\xi})'(z)}}{(\varphi^{\xi})'(z)} = \frac{\mu((w^{\xi})^{-1} \circ \varphi^{\xi})(z))}{1- \mid \xi((w^{\xi})^{-1} \circ \varphi^{\xi})(z)) \mid^2} \frac{w^{\xi}_{z}}{\overline{f w^{\xi}}} (w^{\xi})^{-1}(\varphi^{\xi}(z)) \frac{\overline{(\varphi^{\xi})'(z)}}{(\varphi^{\xi})'(z)},$$

όπου η w^{ξ} είναι η μοναδική κανονικοποιημένη λύση της (3) που αντιστοιχεί στο ξ. Έστω $f^{\xi_{\mathbb{U}}}$ η μοναδική κανονικοποιημένη λύση της (2) που αντιστοιχεί στο $\xi_{\mathbb{U}}$. Τότε οι $f^{\xi_{\mathbb{U}}}$ και $(\varphi^{\xi})^{-1} \circ w^{\xi}$ είναι ίσες στο $\mathbb{U}$: Παρατηρούμε ότι οι κανονικοποιημένες συναρτήσεις $f^{\xi_{\mathbb{U}}}$ και w^{*} που ορίζεται έτσι ώστε $w^{*} = (\varphi^{\xi})^{-1} \circ w^{\xi}$ στο $\mathbb{U}$ και $w^{*} = f^{\xi_{\mathbb{U}}}$ στο $\mathbb{L}$ είναι ίσες, αφού λύνουν την ίδια εξίσωση Beltrami στο μιγαδικό επίπεδο. Άρα στο $\mathbb{U}$ έχουμε

$$(w^{\xi})^{-1} \circ \varphi^{\xi} = (f^{\xi_{\mathbb{U}}})^{-1}$$

Συνακόλουθα,

$$(L^{\xi}\mu \circ \varphi^{\xi})(z) \frac{\overline{(\varphi^{\xi})'(z)}}{(\varphi^{\xi})'(z)} = \frac{\mu((f^{\xi_{\mathbb{U}}})^{-1}(z))}{1- \mid \xi_{\mathbb{U}}((f^{\xi_{\mathbb{U}}})^{-1}(z)) \mid^2} \frac{f^{\xi_{\mathbb{U}}}_{z}}{\overline{f^{\xi_{\mathbb{U}}}_{\overline{z}}}} ((f^{\xi_{\mathbb{U}}})^{-1}(z)) = (L^{\xi_{\mathbb{U}}}\mu_{U})(z),$$

και με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε επίσης ότι

$$(L^{\xi}\mu \circ \chi^{\xi})(z) \frac{\overline{(\chi^{\xi})'(z)}}{(\chi^{\xi})'(z)} = \frac{\mu((f^{\xi_{\mathbb{L}}})^{-1}(z))}{1- \mid \xi((f^{\xi_{\mathbb{L}}})^{-1}(z)) \mid^2} \frac{f^{\xi_{\mathbb{L}}}_{z}}{\overline{f^{\xi_{\mathbb{L}}}_{\overline{z}}}} ((f^{\xi_{\mathbb{L}}})^{-1}(z)) = (L^{\xi_{L}}\mu_{\mathbb{L}})(z).$$

Απόδειξη του θεωρήματος 3.2.2. Η επαγόμενη μετρική γινόμενο στον $\widehat{T}(S)$ είναι Kählerian και αφού η Ψ είναι αμφιολόμορφη, το ίδιο είναι και η $(\Psi^{*})g^{\widehat{T}}$. Χρειάζεται μόνο να δείξουμε την ισχύ της ισότητας των μετρικών.

Έστω $\xi \in Belt(\Gamma)$, $[\xi] \in QF(S)$, $\eta_{\Gamma}(\xi) = (\xi_{\mathbb{U}}, \xi_{\mathbb{L}})$ και $\mu \in L^{\infty}(\Gamma)$, $\eta_{\Gamma}(\mu) = (\mu_{\mathbb{U}}, \mu_{\mathbb{L}})$. Έχουμε ότι

$$\Psi_{*} \left(\frac{\partial}{\partial z(\mu)} \right)_{([\xi])} = \left(\frac{\partial}{\partial z(\mu_{\mathbb{U}})}, \frac{\partial}{\partial z(\mu_{\mathbb{L}})} \right)_{([\xi_{\mathbb{U}}],[\xi_{\mathbb{L}}])}$$

Για $\mu, \nu \in L^{\infty}(\Gamma)$

$$g^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)},\frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right)=2Re\{H^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial z(\mu)},\frac{\partial}{\partial z(\nu)}\right)\}=$$

$$2Re\{h^{Def(\Gamma^\xi)}(P_{\Omega^\xi}[L^\xi\mu],P_{\Omega^\xi}[L^\xi\nu])\}.$$

Από την πρόταση 3.2.1 το τελευταίο είναι ίσο με

$$2Re\{\eta^*_{\Gamma^\xi}(h^{Def(\Gamma^\xi)})(P_{\Omega^\xi}[L^\xi\mu],P_{\Omega^\xi}[L^\xi\nu])\}=$$

$$2Re\{h^{\widehat{T}(\Gamma^\xi)}(\eta_{\Gamma^\xi}(P_{\Omega^\xi}[L^\xi\mu]),\eta_{\Gamma^\xi}(P_{\Omega^\xi}[L^\xi\nu]))\}.$$

Από την πρόταση 2.2.9 τούτο γίνεται

$$2Re\{h^{\widehat{T}(\Gamma^\xi)}((P_{\mathbb{U}}\times P_{\mathbb{L}})[\eta_{\Gamma^\xi}(L^\xi\mu)],(P_{\mathbb{U}}\times P_{\mathbb{L}})[\eta_{\Gamma^\xi}(L^\xi\nu)])\}$$

το οποίο από το λήμμα 3.2.3 είναι ίσο με

$$2Re\{h^{\widehat{T}(\Gamma^\xi)}((P_{\mathbb{U}}\times P_{\mathbb{L}})[(L^{\xi_{\mathbb{U}}}\times L^{\xi_{\mathbb{L}}})(\mu_{\mathbb{U}},\mu_{\mathbb{L}})],(P_{\mathbb{U}}\times P_{\mathbb{L}})[(L^{\xi_{\mathbb{U}}}\times L^{\xi_{\mathbb{L}}})(\mu_{\mathbb{U}},\mu_{\mathbb{L}})])\}=$$

$$2Re\left\{h^{\widehat{T}}_{(\Psi([\xi]))}\left(\left(\frac{\partial}{\partial z(\mu_{\mathbb{U}})},\frac{\partial}{\partial z(\mu_{\mathbb{L}})}\right),\left(\frac{\partial}{\partial z(\nu_{\mathbb{U}})},\frac{\partial}{\partial z(\nu_{\mathbb{L}})}\right)\right)\right\}=$$

$$g^{\widehat{T}}_{(\Psi([\xi]))}\left(\Psi_*\frac{\partial}{\partial x(\mu)},\Psi_*\frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right)=(\Psi^*g^{\widehat{T}})_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)},\frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right).$$

Η μετρική g^Q είναι μη πλήρης λόγω της μη πληρότητας της $g^{\widehat{T}}$. Αφού η ομάδα των Weil-Petersson ισομετριών στον $Teich(S)$ (αντ. $Teich(\overline{S})$) είναι η $Mod(S)$ (αντ. $Mod(\overline{S})$) και η $g^{\widehat{T}}$ είναι μία Riemannian μετρική γινόμενο, προκύπτει ότι η ομάδα των αμφιολόμορφων ισομετριών του $\widehat{T}(S)$ είναι η $Mod(S)\times Mod(\overline{S})$. Θα επιβεβαιώσουμε την ισομορφία αυτής της ομάδας με την $Mod_Q(S)$.

Έστω h ένας quasiconformal αυτομορφισμός του μιγαδικού επιπέδου και $\gamma_h\in Mod_Q(S)$ που δρα πάνω στον $QF(S)$ ως εξής: Για κάθε $[w^\mu]\in QF(S)$

$$\gamma_h([w^\mu])=([w^\mu\circ h^{-1}])$$

Ορίζουμε μία αμφιολόμορφη απεικόνιση $\widetilde{\gamma_h}$ του $Teich(S)\times Teich(\overline{S})$ στον εαυτό του από τη σχέση

$$\widetilde{\gamma_h}=\Psi\circ\gamma_h\circ\Psi^{-1}$$

Ο ζητούμενος ισομορφισμός είναι ο $R: Mod_Q(S)\to Mod(S)\times Mod(\overline{S})$ όπου

$$R(\gamma_h)=\widetilde{\gamma_h}$$

Φανερά, για κάθε γ_h, το $\widetilde{\gamma_h} \in Mod(S) \times Mod(\overline{S})$ και ο R είναι ένας ομομορφισμός ομάδων. Επίσης ο R είναι ένα προς ένα:

$$\ker R = \{\gamma_h : \widetilde{\gamma_h} = \Psi \circ \gamma_h \circ \Psi^{-1} = id\} = \{id\}$$

Τέλος, ο R είναι επί: Αν $\widetilde{\gamma} \in Mod(S) \times Mod(\overline{S})$ τότε το $\gamma = \Psi^{-1} \circ \widetilde{\gamma} \circ \Psi$ είναι ένα στοιχείο της $Mod_Q(S)$ και $R(\gamma) = \widetilde{\gamma}$. Συνεπώς, η ομάδα των αμφιολόμορφων ισομετριών του $Q(S)$ είναι η $Mod_Q(S)$. □

Weil-Petersson συμπλεκτική γεωμετρία. Για την πραγματική συμπλεκτική μορφή ω^Q που επάγεται από την g^Q έχουμε

$$\omega^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right) = g^Q_{([\xi])}\left(I_Q \frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right) =$$

$$-2Im\{\int_{\Omega^\xi/\Gamma^\xi} P_{\Omega^\xi}[L^\xi \mu]\overline{P_{\Omega^\xi}[L^\xi \nu]}\},$$

το οποίο από το θεώρημα 3.2.2 είναι ίσο με

$$(\Psi^* \omega^{\widehat{T}})_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right)$$

όπου

$$\omega^{\widehat{T}} = \omega^{T(S)}_{WP} + \omega^{T(\overline{S})}_{WP} \equiv Pr_1^* \omega^{T(S)}_{WP} + Pr_2^* \omega^{T(\overline{S})}_{WP}.$$

Οι απεικονίσεις

$$Pr_1 : \widehat{T}(S) \to Teich(S) \;\; Pr_2 : \widehat{T}(S) \to Teich(\overline{S})$$

είναι οι κανονικές ολόμορφες προβολές και οι $\omega^{T(S)}_{WP}$, $\omega^{T(\overline{S})}_{WP}$ είναι οι πραγματικές συμπλεκτικές μορφές που επάγονται από τις Weil-Petersson μετρικές στις πολλαπλότητες $Teich(S), Teich(\overline{S})$ αντίστοιχα.

Για περαιτέρω χρήση αποδεικνύουμε το επόμενο

Λημμα 3.2.4. *Έστω $[\xi] \in QF(S)$, $\mu, \nu \in L^\infty(\Gamma)$ και $S : L^\infty(\Gamma) \to L^\infty_S(\Gamma)$ ο τελεστής συμμετρικοποίησης. Τότε*

$$g^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right) =$$

$$g^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(\mu))}, \frac{\partial}{\partial x(S(\nu))}\right) + g^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(-i\mu))}, \frac{\partial}{\partial x(S(-i\nu))}\right) +$$

$$+\omega^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(-i\mu))}, \frac{\partial}{\partial x(S(\nu))}\right) - \omega^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(\mu))}, \frac{\partial}{\partial x(S(-i\nu))}\right).$$

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι κάθε $\mu \in L^{\infty}(\Gamma)$ μπορεί να φραφεί ως $\mu = S(\mu) + iS(-i\mu)$. Έτσι

$$g^{Q}_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right) = 2Re\{\int_{\Omega^{\xi}/\Gamma^{\xi}} P_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}\mu]\overline{P_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}\nu]}\} =$$

$$2Re\{\int_{\Omega^{\xi}/\Gamma^{\xi}} P_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}(S(\mu) + iS(-i\mu))]\overline{P_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}(S(\nu) + iS(-i\nu))]}\} =$$

αφού η L^{ξ} είναι μιγαδικά γραμμική

$$2Re\{\int_{\Omega^{\xi}/\Gamma^{\xi}} P_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}(S(\mu)) + iL^{\xi}(S(-i\mu))]\overline{P_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}(S(\nu)) + iL^{\xi}(S(-i\nu))]}\} =$$

αφού ο $P_{\Omega^{\xi}}$ είναι μιγαδικά γραμμικός

$$2Re\{\int_{\Omega^{\xi}/\Gamma^{\xi}} (P_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}(S(\mu))] + iP_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}(S(-i\mu))])(\overline{P_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}(S(\nu))] + iP_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}(S(-i\nu))]})\} =$$

$$2Re\{\int_{\Omega^{\xi}/\Gamma^{\xi}} (P_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}(S(\mu))] + iP_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}(S(-i\mu))])(\overline{P_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}(S(\nu))]} - i\overline{P_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}(S(-i\nu))]})\} =$$

$$2Re\{\int_{\Omega^{\xi}/\Gamma^{\xi}} P_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}(S(\mu))](\overline{P_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}(S(\nu))]}\}+$$

$$2Re\{\int_{\Omega^{\xi}/\Gamma^{\xi}} P_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}(S(-i\mu))]\overline{P_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}(S(-i\nu))]}\}-$$

$$2Im\{\int_{\Omega^{\xi}/\Gamma^{\xi}} P_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}(S(-i\mu))]\overline{P_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}(S(\nu))]}\}+$$

$$2Im\{\int_{\Omega^{\xi}/\Gamma^{\xi}} P_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}(S(\mu))\overline{P_{\Omega^{\xi}}[L^{\xi}(S(-i\nu))]}\}$$

και προκύπτει το ζητούμενο. □

3.2.2. Hyperkählerian γεωμετρία. Παραπέμπουμε στο [Be], κεφ. 14, για τον ορισμό των Hyperkählerian πολλαπλοτήτων και για τα γενικότερα αποτελέσματα που παρατίθενται παρακάτω.

Μία $4n$-διάστατη Riemannian πολλαπλότητα (M, g) *καλείται Hyperkählerian* αν και μόνο αν υπάρχουν δύο μιγαδικές δομές I και J ορισμένες στην M τέτοιες ώστε:

$a)$ $IJ + JI = 0$

$b)$ Η g είναι Kähler μετρική ως προς I και J.

Αμέσως φαίνεται ότι η $K = IJ$ είναι μία μιγαδική δομή και η g είναι επίσης Kähler για την K. Γενικότερα, δοθέντος $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ τότε η $xI + yJ + zK$ είναι μία μιγαδική δομή του M παράλληλη ως προς g. Διαλέγουμε μία από αυτές τις δομές (ας πούμε την I) και θεωρούμε το M ως I-μιγαδική πολλαπλότητα. Ένα σημαντικό γεγονός που αφορά στις Hyperkählerian πολλαπλότητες είναι ότι ο Ricci τανυστής καμπυλότητάς τους είναι μηδέν.

Έχουμε επίσης ότι

Μία Hyperkählerian πολλαπλότητα είναι μιγαδική συμπλεκτική πολλαπλότητα.

Πράγματι, η μιγαδική 2-μορφή Ω που ορίζεται από την

$$\Omega(X, Y) = g(JX, Y) + ig(KX, Y)$$

είναι μη εκφυλισμένη, παράλληλη ως προς g και I-ολόμορφη.

Το αντίστροφο αληθεύει στην περίπτωση όπου η M είναι μία συμπαγής πολλαπλότητα, αλλά δεν είναι γνωστό αν ισχύει το ίδιο στην γενικότερη περίπτωση. Παραδείγματα για την μη συμπαγή περίποτωση έχουν δοθεί μεταξύ άλλων από τους Calabi, Hitchin [C],[H].

Σε τούτη την υποπαράγραφο θα αποδείξουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2.5. *Ο χώρος $QF(S)$ με τις μιγαδικές δομές I_Q, J_Q και την Weil-Petersson Riemannian μετρική g^Q είναι μία Hyperkählerian πολλαπλότητα.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα δοθεί σε βήματα. Αφού ήδη έχουμε δείξει ότι η πολλαπλότητα $(QF(S), g^Q, I_Q)$ είναι Kählerian, απομένει να δείξουμε τα ακόλουθα:

-Υπάρχουν μιγαδικοί τελεστές J_Q, K_Q στο $QF(S)$, που skew μετατίθενται με τον I_Q.
-Τούτοι οι τελεστές είναι παράλληλοι ως προς την g^Q.

ΒΗΜΑ 1. *Σχεδόν μιγαδικοί τελεστές.*

Έχουμε δεί στην 2.2.2 ότι υπάρχει ένας φυσιολογικά ορισμένος μιγαδικός τελεστής J στον $L^\infty(\Gamma)$ που skew αντιμετατίθεται με τον standard μιγαδικό τελεστή I. Υπενθυμίζουμε ότι είναι

$$J(\mu)(z) = \begin{cases} i\overline{\mu(\overline{z})} & z \in \mathbb{U} \\ -i\overline{\mu(\overline{z})} & z \in \mathbb{L} \end{cases}$$

για κάθε $\mu \in L^\infty(\Gamma)$. Θα ορίσουμε σχεδόν μιγαδικές δομές J_Q, K_Q παντού στον $QF(S)$ τέτοιους ώστε η Riemannian μετρική g^Q που επάγεται από το Weil-Petersson γινόμενο παραμένει αναλλοίωτη από τη δράση τους. Επικεντρώνουμε την προσοχή μας στον J_Q. Έστω $\mu \in L^\infty(\Gamma)$ και $[\xi]$ τυχόν σημείο του $QF(S)$. Έστω

$$\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}\right)_{([\xi])}, \left(\frac{\partial}{\partial z(\mu)}\right)_{[\xi]}, \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}(\mu)}\right)_{([\xi])}$$

το προσαρτημένο πραγματικό, ολόμορφο και αντιολόμορφο εφαπτόμενο διάνυσμα στο $[\xi]$ αντίστοιχα (βλ. 2.2.2.). Μιλώντας με μιγαδικούς όρους, μπορούμε να ορίσουμε τον J_Q μέσω των δύο τελεστών

$$(J'_Q)_{([\xi])} : T^{(1,0)}_{([\xi])}(QF(S)) \to T^{(0,1)}_{([\xi])}(QF(S))$$

$$(J''_{Q(S)})_{([\xi])} : T^{(0,1)}_{([\xi])}(QF(S)) \to T^{(1,0)}_{([\xi])}(QF(S))$$

που ικανοποιούν τις συνθήκες

$$J'_Q \circ J''_Q = -id_{|_{T^{(0,1)}}}$$

$$J''_Q \circ J'_Q = -id_{|_{T^{(1,0)}}}$$

σε κάθε σημείο $[\xi]$. Θέτουμε

$$(J'_Q)_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial z(\mu)}\right)_{([\xi])} = \overline{P_{\Omega^\xi}[L^\xi(J(\mu))]} = \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}(J(\mu))}\right)_{([\xi])}$$

$$(J''_Q)_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}(\mu)}\right)_{([\xi])} = P_{\Omega^\xi}[L^\xi(J(\mu))] = \left(\frac{\partial}{\partial z(J(\mu))}\right)_{([\xi])}$$

Τώρα, σε πραγματικούς όρους είναι

$$(J_Q)_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}\right)_{([\xi])} = 2Re\{P_{\Omega^\xi}[L^\xi(J(\mu))]\} = \left(\frac{\partial}{\partial x(J_M(\mu))}\right)_{([\xi])}$$

Με ανάλογο τρόπο, ορίζεται ένας σχεδόν μιγαδικός τελεστής K_Q στον $QF(S)$, που επάγεται από τον μιγαδικό τελεστή K του $L^\infty(\Gamma)$ που δίνεται από

$$K(\mu)(z) = \begin{cases} -\overline{\mu(\overline{z})} & z \in \mathbb{U} \\ \overline{\mu(\overline{z})} & z \in \mathbb{L} \end{cases}$$

Τα παραπάνω μας οδηγούν στο ακόλουθο:

-Οι $(QF(S), J_Q)$ και $(QF(S), K_Q)$ είναι σχεδόν μιγαδικές πολλαπλότητες.

ΒΗΜΑ 2. *Σχεδόν hermitian δομή.*

Μία σχεδόν μιγαδική Riemannian πολλαπλότητα (M, g, I) καλείται *σχεδόν hermitian* αν για οποιαδήποτε διανυσματικά πεδία X, Y της M ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$g(IX, IY) = g(X, Y)$$

Θα αποδείξουμε ότι:

-Οι $(QF(S), g^Q, J_{_Q})$ και $(QF(S), g^Q, K_{_Q})$ ειναι σχεδόν hermitian πολλαπλότητες.

Είναι αρκετό να αποδειχτεί μόνο ο πρωτος ισχυρισμός, καθώς ο δεύτερος έπεται αμέσως από αυτόν. Έστω $[\xi] \in QF(S)$ και $\mu, \nu \in L^\infty(\Gamma)$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$g^Q_{([\xi])}\left(J_{_Q}\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, J_{_Q}\frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right) = g^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right)$$

Αποδεικνύουμε την παραπάνω σχέση πρώτα για την περίπτωση όπου $\mu, \nu \in L^\infty_{_S}(\Gamma)$. Είναι φανερό ότι ο J είναι τότε ο $I_{_S}$. Συνεπώς

$$g^Q_{([\xi])}\left(J_{_Q}\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, J_{_Q}\frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right) = g^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(I_{_S}(\mu))}, \frac{\partial}{\partial x(I_{_S}(\nu))}\right) =$$

$$(\Psi^* g^{\widehat{T}})_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(I_{_S}(\mu))}, \frac{\partial}{\partial x(I_{_S}(\nu))}\right) =$$

$$g^{\widehat{T}}_{(\Psi([\xi]))}\left((\frac{\partial}{\partial x(i\mu_{_\mathbb{U}})}, \frac{\partial}{\partial x(-i\mu_{_\mathbb{L}})}), (\frac{\partial}{\partial x(i\nu_{_\mathbb{U}})}, \frac{\partial}{\partial x(-i\nu_{_\mathbb{L}})})\right) =$$

$$g^{T(S)}_{([\xi_{\mathbb{U}}])}\left(\frac{\partial}{\partial x(i\mu_{_U})}, \frac{\partial}{\partial x(i\nu_{_U})}\right) + g^{T(\overline{S})}_{([\xi_{\mathbb{L}}])}\left(\frac{\partial}{\partial x(-i\mu_{_\mathbb{L}})}, \frac{\partial}{\partial x(-i\nu_{_\mathbb{L}})}\right) =$$

$$g^{T(S)}_{([\xi_{\mathbb{U}}])}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu_{_\mathbb{U}})}, \frac{\partial}{\partial x(\nu_{_\mathbb{U}})}\right) + g^{T(\overline{S})}_{([\xi_{\mathbb{L}}])}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu_{_\mathbb{L}})}, \frac{\partial}{\partial x(\nu_{_\mathbb{L}})}\right) =$$

$$g^{\widehat{T}}_{(\Psi([\xi]))}\left((\frac{\partial}{\partial x(\mu_{_\mathbb{U}})}, \frac{\partial}{\partial x(\mu_{_\mathbb{L}})}), (\frac{\partial}{\partial x(\nu_{_\mathbb{U}})}, \frac{\partial}{\partial x(\nu_{_\mathbb{L}})})\right) =$$

$$(\Psi^* g^{\widehat{T}})_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right) = g^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right).$$

Επιπρόσθετα, από την skew-μεταθετικότητα των $J_{_Q}$ και $I_{_Q}$ και την παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι για κάθε $\mu, \nu \in L^\infty_{_S}(\Gamma)$ ισχύει ότι:

$$\omega^Q_{([\xi])}\left(J_{_Q}\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, J_{_Q}\frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right) = -\omega^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right).$$

Εφαρμόζουμε το λήμμα 2.1.4 και παίρνουμε

$$g^Q_{([\xi])}\left(J_Q\frac{\partial}{\partial x(\mu)},J_Q\frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right)=g^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(J(\mu))},\frac{\partial}{\partial x(J(\nu))}\right)=$$

$$=g^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(J(\mu)))},\frac{\partial}{\partial x(S(J(\nu)))}\right)+g^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(-iJ(\mu)))},\frac{\partial}{\partial x(S(-iJ(\nu)))}\right)+$$

$$+\omega^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(-iJ(\mu)))},\frac{\partial}{\partial x(S(J(\nu)))}\right)-\omega^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(J(\mu)))},\frac{\partial}{\partial x(S(-iJ(\nu)))}).\right)$$

Αφού ο J skew μετατίθεται με τον I, αυτό είναι

$$g^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(J(\mu)))},\frac{\partial}{\partial x(S(J(\nu)))}\right)+g^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(J(i\mu)))},\frac{\partial}{\partial x(S(J(i\nu)))}\right)+$$

$$+\omega^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(J(i\mu)))},\frac{\partial}{\partial x(S(J(\nu)))}\right)-\omega^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(J(\mu)))},\frac{\partial}{\partial x(S(J(i\nu)))}\right).$$

Από την άλλη οι J και S μετατίθενται: $SJ=JS$. Άρα, η προηγούμενη έκφραση γίνεται

$$g^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(J(S(\mu)))},\frac{\partial}{\partial x(J(S(\nu)))}\right)+g^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(J(S(i\mu)))},\frac{\partial}{\partial x(J(S(i\nu)))}\right)+$$

$$+\omega^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(J(S(i\mu)))},\frac{\partial}{\partial x(J(S(\nu)))}\right)-\omega^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(J(S(\mu)))},\frac{\partial}{\partial x(J(S(i\nu)))}\right).$$

Στην περίπτωση των συμμετρικών διαφορικών, το γινόμενο είναι αναλλοίωτο και η συμπλεκτική μορφή είναι skew-αναλλοίωτη. Άρα η προηγούμενη παράσταση ισούται με

$$g^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(\mu))},\frac{\partial}{\partial x(S(\nu))}\right)+g^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(i\mu))},\frac{\partial}{\partial x(S(i\nu))}\right)+$$

$$-\omega^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(i\mu))},\frac{\partial}{\partial x(S(\nu))}\right)+\omega^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(\mu))},\frac{\partial}{\partial x(S(i\nu))}\right).$$

Αλλά αυτό είναι ίσο με

$$g^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(\mu))},\frac{\partial}{\partial x(S(\nu))}\right)+g^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(-i\mu))},\frac{\partial}{\partial x(S(-i\nu))}\right)+$$

$$+\omega^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(-i\mu))},\frac{\partial}{\partial x(S(\nu))}\right)-\omega^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(\mu))},\frac{\partial}{\partial x(S(-i\nu))}\right)$$

το οποίο, από το λήμμα 3.2.4 είναι το

$$g^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right).$$

ΒΗΜΑ 3. *Ολοκληρωσιμότητα και Kählerian δομή.*

Από το θεώρημα των Newlander-Nirenberg, μία σχεδόν μιγαδική δομή J μίας πολλαπλότητας M είναι μιγαδική και συνεπώς η M είναι J-μιγαδική πολλαπλότητα ανν ο τελεστής J είναι ολοκληρώσιμος, δηλαδή ισοδύναμα, ο J δεν έχει στρέψη. Εάν η πολλαπλότητα είναι σχεδόν hermitian, έστω ∇ η Riemannian συνοχή της. Η συνοχή λέγεται σχεδόν μιγαδική αν $\nabla_X J = 0$ για κάθε διανυσματικό πεδίο X της M. Εάν συμβαίνει αυτό, τότε η M είναι J-μιγαδική Kählerian πολλαπλότητα.

Έστω ∇ η Riemannian συνοχή της g^Q. Θα αποδείξουμε ότι

-Η ∇ είναι σχεδόν μιγαδική ως προς τον J_Q :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}} J_Q = 0$$

για κάθε $\mu \in L^\infty(\Gamma)$.

Αρκεί να αποδείξουμε τη σχέση

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}}\left(J_Q \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right) = J_Q\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}} \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right)$$

για κάθε $\mu, \nu \in L^\infty(\Gamma)$. Ξεκινάμε από την $\widetilde{\nabla}$, την Riemannian συνοχή του $\widehat{T}(S)$. Αυτή είναι $I_{T(S)} \times I_{T(\overline{S})}$ σχεδόν μιγαδική. Ισχυριζόμαστε ότι είναι επίσης $I'_{\widehat{T}} = I_{T(S)} \times (-I_{T(\overline{S})})$ σχεδόν μιγαδική. Πράγματι, κατευθείαν επιβεβαιώνουμε ότι ο $I'_{\widehat{T}}$ είναι ένας μιγαδικός τελεστής για τον $\widehat{T}(S)$ και άρα, η στρέψη του N είναι μηδέν. Επιπλέον, η $g^{\widehat{T}}$ παραμένει αναλλοίωτη από την δράση του $I'_{\widehat{T}(S)}$ και ισχύει το ακόλουθο για την αντίστοιχη θεμελιώδη μορφή Ω' :

$$\Omega' = \omega^{T(S)}_{WP} - \omega^{T(\overline{S})}_{WP}$$

Έπεται ότι η Ω' είναι κλειστή. Τώρα αν $\widehat{\mu}, \widehat{\nu}, \widehat{\xi} \in L^\infty(\Gamma, U) \times L^\infty(\Gamma, L)$, η ακόλουθη σχέση ικανοποιείται [K-N] (Prop. 4.2, Chpt IX, p.148):

$$4g^{\widehat{T}}\left((\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x(\widehat{\mu})}} I'_{\widehat{T}})\frac{\partial}{\partial x(\widehat{\nu})}, \frac{\partial}{\partial x(\widehat{\xi})}\right) = 6d\Omega'\left(\frac{\partial}{\partial x(\widehat{\mu})}, I'_{\widehat{T}}\frac{\partial}{\partial x(\widehat{\nu})}, I'_{\widehat{T}}\frac{\partial}{\partial x(\widehat{\xi})}\right) -$$

$$-6d\Omega'\left(\frac{\partial}{\partial x(\widehat{\mu})}, \frac{\partial}{\partial x(\widehat{\nu})}, \frac{\partial}{\partial x(\widehat{\xi})}\right) + g^{\widehat{T}}\left(N\left(\frac{\partial}{\partial x(\widehat{\nu})}, \frac{\partial}{\partial x(\widehat{\xi})}\right), I'_{\widehat{T}(S)}\frac{\partial}{\partial x(\widehat{\mu})}\right).$$

Αφού $d\Omega' = 0$ και $N = 0$ συμπεραίνουμε ότι

$$\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x(\widehat{\mu})}} I'_{\widehat{T}} = 0.$$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις: Έστω πρώτα ότι το ν είναι ένα συμμετρικό διαφορικό. Τότε, για κάθε σημείο $[\xi]$ και $\mu \in L^{\infty}(\Gamma)$, ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$(J_Q)_{([\xi])} \left(\frac{\partial}{\partial x(\nu)} \right)_{([\xi])} = ((\Psi_*)^{-1} \circ I'_{\widehat{T}} \circ \Psi_*)_{([\xi])} \left(\frac{\partial}{\partial x(\nu)} \right)_{([\xi])}$$

Αφού ο $I'_{\widehat{T}}$ είναι ένας ολοκληρώσιμος τελεστής και η Ψ είναι αμφιολόμορφη, έχουμε

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}} \left(J_Q \frac{\partial}{\partial x(\nu)} \right) = J_Q \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}} \frac{\partial}{\partial x(\nu)} \right)$$

για κάθε $\mu \in L^{\infty}(\Gamma)$, και $\nu \in L^{\infty}_{sym}(\Gamma)$. Έστω τώρα ν ένα οποιοδήποτε διαφορικό. Αφού

$$\left(\frac{\partial}{\partial x(\nu)} \right)_{([\xi])} = \left(\frac{\partial}{\partial x(S(\nu))} \right)_{([\xi])} + \left(I_Q \frac{\partial}{\partial x(S(-i\nu))} \right)_{([\xi])}$$

έχουμε:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}} J_Q \left(\frac{\partial}{\partial x(\nu)} \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}} J_Q \left(\frac{\partial}{\partial x(S(\nu))} \right) + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}} J_Q \left(I_Q \frac{\partial}{\partial x(S(-i\nu))} \right) =$$

αφού οι I_Q και J_Q skew-μετατίθενται

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}} J_Q \left(\frac{\partial}{\partial x(S(\nu))} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}} I_Q J_Q \left(\frac{\partial}{\partial x(S(-i\nu))} \right) =$$

αφού ο I_Q είναι ολοκληρώσιμος

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}} J_Q \left(\frac{\partial}{\partial x(S(\nu))} \right) - I_Q \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}} J_Q \left(\frac{\partial}{\partial x(S(-i\nu))} \right) \right) =$$

από την πρώτη περίπτωση

$$J_Q \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}} \left(\frac{\partial}{\partial x(S(\nu))} \right) \right) - I_Q J_Q \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}} \left(\frac{\partial}{\partial x(S(-i\nu))} \right) \right) =$$

πάλι από την skew-μεταθετικότητα

$$J_Q \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}} \left(\frac{\partial}{\partial x(S(\nu))} \right) \right) + J_Q I_Q \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}} \left(\frac{\partial}{\partial x(S(-i\nu))} \right) \right) =$$

από την ολοκληρωσιμότητα του I_Q

$$= J_Q\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(\nu))}\right)\right) + J_Q\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}} I_Q\left(\frac{\partial}{\partial x(S(-i\nu))}\right)\right) =$$

$$= J_Q\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(\nu))}\right) + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}} I_Q\left(\frac{\partial}{\partial x(S(-i\nu))}\right)\right) =$$

$$= J_Q\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}}\left(\frac{\partial}{\partial x(S(\nu))} + I_Q\frac{\partial}{\partial x(S(-i\nu))}\right)\right) =$$

$$= J_Q(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x(\mu)}}\frac{\partial}{\partial x(\nu)}).$$

Είναι τώρα άμεσο το ότι η σψνοχή είναι επίσης σχεδόν μιγαδική ως προς τον τελεστή K_Q.

Η απόδειξη του θεωρήματος 3.2.5 ολοκληρώνεται εδώ. □

Ακολουθεί μια σειρά συνεπειών του θεωρήματος 3.2.5: Η πρώτη είναι προφανής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2.6. *Οι θεμελιώδεις μορφές που αντιστοιχούν στις Kaehlerian πολλαπλότητες* $(QF(S), g^Q, J_Q)$, $(QF(S), g^Q, K_Q)$ *αντίστοιχα,*

$$\omega^Q_{1_{([\xi])}}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right) = g^Q_{([\xi])}\left(J_Q\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right)$$

$$\omega^Q_{2_{([\xi])}}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right) = g^Q_{([\xi])}\left(K_Q\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right)$$

είναι κλειστές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2.7. *i) Ο χώρος Teichmüller ως το σύνολο* $F(S)$ *είναι: Μία Lagrangian υποπολλαπλότητα του* $QF(S)$ *ως προς τις* ω^Q *και* ω^Q_2, *και μία συμπλεκτική υποπολλαπλότητα του* $QF(S)$ *ως προς την* ω^Q_1.

ii) Οι τομές του Bers είναι συμπλεκτικές υποπολλαπλότητες του $QF(S)$ *ως προς την* ω^Q *και Lagrangian υποπολλαπλότητες του* $QF(S)$ *ως προς τις* ω^Q_1 *και* ω^Q_2.

Απόδειξη. i) Έστω $\mu, \nu \in L^\infty_S(\Gamma)$ και $[\xi] \in F(S)$ (δηλαδή το ξ είναι ένα συμμετρικό διαφορικό Beltrami.). Θα αποδείξουμε ότι ο περιορισμός της ω^Q στην εφαπτόμενη υποδέσμη του $F(S)$, είναι ίσος με το 0. Υπολογίζουμε απευθείας

$$\omega^Q_{([\xi])}(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}) =$$

$$-2Im\left\{\int_{\mathbb{U}/\Gamma^\xi} P_{\mathbb{U}}[L^\xi\mu]\overline{P_{\mathbb{U}}[L^\xi\nu]}+\int_{L/\Gamma^\xi} P_{\mathbb{L}}[L^\xi(\overline{\mu(\overline{z})})]\overline{P_{\mathbb{L}}[L^\xi(\overline{\nu(\overline{z})})]}\right\}.$$

Σημειώνουμε ότι για $\xi \in Belt_s(\Gamma)$,η L^ξ απεικονίζει το $L^\infty_S(\Gamma)$ πάνω στο $L^\infty_S(\Gamma^\xi)$. Άρα, αλλάζοντας τη μεταβλητή στο δεξιό ολοκλήρωμα και βγάζοντας τα συζυγή, παίρνουμε ότι η πιο πάνω έκφραση ισούται με

$$-2Im\left\{\int_{\mathbb{U}/\Gamma^\xi} P_{\mathbb{U}}[L^\xi\mu]\overline{P_{\mathbb{U}}[L^\xi\nu]}+\overline{\int_{\mathbb{U}/\Gamma^\xi} P_{\mathbb{U}}[L^\xi\mu]\overline{P_{\mathbb{U}}[L^\xi\nu]}}\right\}=$$

$$-2Im\left\{2Re\left\{\int_{\mathbb{U}/\Gamma^\xi} P_{\mathbb{U}}[L^\xi\mu]\overline{P_{\mathbb{U}}[L^\xi\nu]}\right\}\right\}=0.$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο περιορισμός της ω^Q_1 στην εφαπτόμενη υποδέσμη του $F(S)$, είναι ίσος με $2\omega_{WP}$. Υπενθυμίζουμε ότι εάν $\mu \in L^\infty_S(\Gamma)$ τότε $J = I_S$. Έτσι,

$$\omega^Q_{1_{([\xi])}}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)},\frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right)=$$

$$2Re\left\{\int_{\mathbb{U}/\Gamma^\xi} P_{\mathbb{U}}[L^\xi(i\mu)]\overline{P_{\mathbb{U}}[L^\xi\nu]}-\int_{\mathbb{L}/\Gamma^\xi} P_{\mathbb{L}}[L^\xi(i\mu)]\overline{P_{\mathbb{L}}[L^\xi\nu]}\right\}=$$

$$-2Im\left\{\int_{\mathbb{U}/\Gamma^\xi} P_{\mathbb{U}}[L^\xi\mu]\overline{P_{\mathbb{U}}[L^\xi\nu]}-\int_{\mathbb{L}/\Gamma^\xi} P_{\mathbb{L}}[L^\xi\mu]\overline{P_{\mathbb{L}}[L^\xi\nu]}\right\}=$$

$$-4Im\left\{\int_{\mathbb{U}/\Gamma^\xi} P_{\mathbb{U}}[L^\xi\mu]\overline{P_{\mathbb{U}}[L^\xi\nu]}\right\}=2\omega_{WP_{([\xi])}}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)},\frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right).$$

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι ο περιορισμός της ω^Q_2 στην εφαπτόμενη υποδέσμη του $F(S)$, είναι 0. Πράγματι, εάν $\mu \in L^\infty_S(\Gamma)$ τότε

$$K(\mu)(z)=\begin{cases} -\mu(z) & z\in\mathbb{U} \\ \mu(z) & z\in\mathbb{L}\end{cases}$$

το οποίο δεν είναι συμμετρικό και κατά συνέπεια $K_Q = 0$ όταν περιοριστεί στην εφαπτόμενη υποδέσμη του $F(S)$. Άρα

$$\omega^Q_{2_{([\xi])}}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)},\frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right)=0.$$

ii) Χωρίς βλάβη της γενικότητας ασχολούμαστε μόνο με την τομή του Bers

$$B(S)=\Psi^{-1}(Teich(S)\times\{[\overline{S}]\}).$$

Έστω $\mu,\nu \in L^\infty(\Gamma,\mathbb{U})$ και $[\xi]\in B(S)$ (δηλαδή $\xi = 0$ στο ν $\mathbb{L}$.)

$$\omega^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)},\frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right)=$$

$$-2Im\left\{\int_{\Omega^\xi_{\mathbb{U}}/\Gamma^\xi} P_{\Omega^\xi_{\mathbb{U}}}[L^\xi\mu]\overline{P_{\Omega^\xi_{\mathbb{U}}}[L^\xi\nu]}\right\}=\omega_{WP_{([\xi])}}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)},\frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right).$$

Κατ' αυτόν το τρόπο, ο περιορισμός της ω^Q στην εφαπτόμενη υποδέσμη της $B(S)$ ορίζει μία συμπλεκτική δομή για την $B(S)$. Ελέγχεται εύκολα ότι

$$\Psi^*(\omega^{T(S)}_{WP}\times\{0\})=(\omega^Q\mid_{B(S)})$$

όπου εδώ η Ψ είναι περιορισμένη στην $B(S)$. Εάν τώρα $\mu\in L^\infty(\Gamma,\mathbb{U})$ τότε

$$J(\mu)(z)=\begin{cases}0 & z\in\mathbb{U}\\ -i\overline{\mu(\overline{z})} & z\in\mathbb{L}\end{cases}$$

και

$$K(\mu)(z)=\begin{cases}0 & z\in\mathbb{U}\\ \overline{\mu(\overline{z})} & z\in\mathbb{L}\end{cases}$$

Άρα, οι J_Q και K_Q είναι μηδέν όταν περιοριστούν στην εφαπτόμενη υποδέσμη της $B(S)$. Συνεπώς

$$\omega^Q_{1_{([\xi])}}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)},\frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right)=\omega^Q_{2_{([\xi])}}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)},\frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right)=0.$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2.8. *Ο χώρος Teichmüller $F(S)$ είναι μιγαδική υποπολλαπλότητα του $(QF(S),J_Q)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την immersion

$$\iota_S:(L^\infty_S(\Gamma),I_S)\to(L^\infty(\Gamma),J)$$

με τύπο

$$\iota_S(\mu)=\mu$$

Είναι φανερό ότι η ι_S είναι μία ολόμορφη απεικόνιση. Από την ι_S προκύπτει η immersion

$$\iota_F:(F(S),I_T)\to(QF(S),J_Q)$$

που απεικονίζει κάθε $[\xi]$ στον εαυτό του για κάθε $\xi\in Belt_S(\Gamma)$. Μένει μόνο να δειχτεί ότι η ι_F είναι σχεδόν μιγαδική, δηλαδή ότι ικανοποιεί την σχέση

$$J_Q\circ(\iota_F)_*=(\iota_F)_*\circ I_T$$

Πράγματι, ας θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο $\frac{\partial}{\partial x(\mu)}$, $\mu\in L^\infty_S(\Gamma)$. Τότε

$$(J_Q \circ (\iota_F)_*)\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}\right) = J_Q\left(\frac{\partial}{\partial x(\iota_S(\mu))}\right) = \frac{\partial}{\partial x(J(\iota_S(\mu)))} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x(\iota_S(I_S(\mu)))} = (\iota_F)_*\left(\frac{\partial}{\partial x(I_S(\mu))}\right) = (\iota_F)_* \circ I_T)\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}\right).$$

Συνεπώς, (βλ. [K-N], Lemma of section 8, Chpt. IX) η ι_F είναι ολόμορφη και η $(F(S), I_T)$ είναι μιγαδική υποπολλαπλότητα του $(QF(S), J_Q)$. □

3.3. ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΣΥΜΠΛΕΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (ΞΑΝΑ)

Σ' αυτή τη παράγραφο θα αποδείξουμε ότι η μιγαδική συμπεκτική δομή του $QF(S)$ που κατασκευάσαμε στην 3.1, είναι αυτή που προκύπτει από την W-P Hyperkählerian μετρική.

Έστω η Ω^Q η κλειστή $(2,0)$ μορφή που προκύπτει από την Hyperkählerian μετρική g^Q από την σχέση

$$\Omega^Q_{([\xi])}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right) = \omega^Q_{1_{([\xi])}}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right) + i\omega^Q_{2_{([\xi])}}\left(\frac{\partial}{\partial x(\mu)}, \frac{\partial}{\partial x(\nu)}\right)$$

Όπως σημειώσαμε στην αρχή της 3.2, τούτη η μορφή ορίζει μια μιγαδική συμπλεκτική δομή για τον $QF(S)$. Θα αποδείξουμε το ακόλουθο

Θεωρημα 3.3.1. $\Omega^Q = 2\Omega$.

Απόδειξη. Από το θεώρημα 3.2.7 και το θεώρημα 3.1.8, έχουμε ότι οι ολόμορφες μορφές Ω^Q, 2Ω ταυτίζονται στην εφαπτόμενη υποδέσμη του $F(S)$. Με άλλα λόγια, αν εκφράσουμε την ολόμορφη μορφή $\Omega^Q - 2\Omega$ σε ολικές μιγαδικές συντεταγμένες $\lambda_{\gamma_i} = l_{\gamma_i} + \vartheta_i$, $\beta_i = \tau_1 + \psi_i$, $i = 1, ..., 3g-3$ και θεωρήσουμε τους ολόμορφους συντελεστές $F_{\alpha\beta}(\lambda_{\gamma_1}, ..., \lambda_{\gamma_{3g-3}}, \beta_1, ..., \beta_{3g-3})$ της $\Omega^Q - 2\Omega$, τότε

$$F_{\alpha\beta}(l_{\gamma_1}, ..., l_{\gamma_{3g-3}}, \tau_1, ..., \tau_{3g-3}, 0, ..., 0, 0, ..., 0) = 0$$

Αφού $(l_{\gamma_i}, \tau_i) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, ..., n$, [W4], εφαρμόζουμε το λήμμα 3.1.7 για να πάρουμε $F_{\alpha\beta} \equiv 0$. Συνεπώς οι Ω^Q και 2Ω ταυτίζονται παντού στον $QF(S)$. □

Έστω (M, Ω) μία μιγαδική συμπλεκτική πολλαπλότητα και N μία μιγαδική υποπολλαπλότητα της M. Καλούμε την N *μιγαδικά συμπλεκτική* αν ο περιορισμός της Ω στην ολόμορφη εφαπτόμενη υποδέσμη της N δίνει μία μιγαδική συμπλεκτική δομή στην N. Καλούμε την N *complex Lagrangian* αν η Ω είναι μηδέν παντού στην ολόμορφη εφαπτόμενη υποδέσμη της N.

Θεωρημα 3.3.2. *Οι τομές του Bers είναι μιγαδικές Lagrangian υποπολλαπλότητες της $(QF(S), \Omega^Q)$.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα 3.2.7 ii) οι τομές του Bers είναι Lagrangian υποπολλαπλότητες του $QF(S)$ ως προς ω_1^Q, ω_2^Q. Το ζητούμενο τώρα έπεται αμέσως. $\square$

Βιβλιογραφία

[A1] L. Ahlfors. *Finitely generated Kleinian groups.* Amer. J. Math. **86** (1964), 413-429; **87** (1965), 759.

[A2] L. Ahlfors. *Some remarks on Teichmüller's space of Riemann surfaces.* Ann. of Math. **74** (1961), 171-191.

[A-B] L. Ahlfors and L. Bers. *Riemann's mapping theorem for variable metrics.* Ann. of Math. **72** (1960), 385-404.

[B1] L. Bers. *What is a Kleinian group?* Lecture Notes on Mathematics **400** (Springer-Verlag, 1974), 1-14.

[B2] L. Bers. *Uniformization, Moduli, and kleinian groups.* Bull. Lon. Math. Soc. **4** (1972), 257-300.

[B3] L. Bers. *Simultaneous uniformization.* Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 94-97.

[B4] L. Bers. *Spaces of Kleinian groups.* Lecture Notes on Mathematics **155** (Springer-Verlag, 1970), 9-34.

[B5] L. Bers. *On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups I.* Annals of Mathematics, **91** (1970), 570-600.

[Be] A. Besse. *Einstein manifolds.* Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[C] E. Calabi. *Metriques Kähleriennes et fibres holomorphes.* Ann. Ecol. Norm. Sup. **12** (1979), 269-294.

[E1] C. J. Earle. *Quasiconformal mappings and uniformization.* Lecture Notes on Mathematics **400** (Springer-Verlag, 1974), 15-23.

[E2] C. J. Earle. *Teicmüller theory.* In Discrete groups and automorphic forms, edited by W. J. Harvey, (Academic Press 1977), 143-162.

[E-M] D.B.A. Epstein, A. Marden. *Convex hulls in hyperbolic space.* In Analytical and Geometric aspects of hyperbolic space, Lon. Math. Soc. Lecture Notes series **111**, (Cambridge Univ. Press, 1987)

[G] F. Gardiner. *Infinitesimal bending and twisting in one dimensional dynamics.* Trans. Amer. math. Soc. **347** (1995), 915-937.

[G1] W. Goldman. *The symplectic nature of fundamental groups of surfaces.* Adv. in Math. **54** (1984), 200-225.

[G2] W. Goldman. *Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations,* Univ. of Maryland Preprint, revised edition, 1984.

[H] N. Hitchin. *Hyperkähler manifolds.* Seminaire Bourbaki **44** (1991-92), n. 748.

[K1] C. Kourouniotis. *Bending in the space of quasi-Fuchsian structures.* Glasgow Mathematics Journal, **33** (1991), 41-49.

[K2] C. Kourouniotis. *Complex length coordinate for quasi- Fuchsian groups.* Mathematika, **41** (1994), 173-188.

[K3] C. Kourouniotis. *The geometry of bending quasifuchsian groups.* Lon. Math. Soc. Lecture Notes Series, **173** (1992), 148-164.

[Kr] I. Kra. *On spaces of Kleinian groups.* Comment. Math. Helv. **47** (1972), 53-69.

[K-N] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry* Vol II. Interscience publishers, New York, 1969.

[K-M] I. Kra and B. Maskit. *The deformation space of a Kleinian group.* Amer. J. Math. **103** (1981), 1065-1102.

[L] O. Lehto. *Univalent functions and Teichmüller spaces.* Springer- Verlag, New York, 1987.

[L-M] P. Liebermann and C-M. Marle. *Symplectic geometry and analytical mechanics.* D. Reidel Publ. Co, Great Britain, 1984.

[M] C. T. McMullen. *Complex earthquakes and Teichmüller theory.* J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 283-320.

[R] H. Royden. *Automorphisms and isometries of Teichmüller space.* Ann. of Math. Study 66, Princeton University Press, Princeton 1971.

[W1] S.Wolpert. *The Fenchel-Nielsen deformation.* Ann. of Math. **115** (1982), 501-528.

[W2] S.Wolpert. *On the symplectic geometry of deformations of a hyperbolic surface.* Ann. of Math. **17** (1983), 207-234.

[W3] S. Wolpert. *Thurston's Riemannian metric for Teichmüller space.* J. Diff. Geom. **23** (1986), 143-174.

[W4] S.Wolpert. *On the Weil-Petersson geometry of the moduli space of curve*s. Amer. J. Math. **107** (1985) 969-997.