Διπλωματικη Εργασια

Σεπτεμβριος 2015

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΛΑΤΟΥΣ ΓΙΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Γεωργιος Αντσιαδης, ΑΜ: 1

Πανεπιστήμιο Κρήτης, Σχολή Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών
ΠΜΣ Εφαρμοσμένα και Υπολογιστικά Μαθηματικά
Μοντελοποίηση και Ανάλυση σε Εφαρμοσμένες Επιστήμες

Εαρινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών κι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης υπό την επίβλεψη της Καθηγήτριας του Τμήματος κ. Γεωργίας Καραλή.

Φέρει τον τίτλο «Εξισώσεις Πλάτους για Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις».

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς τους Καθηγητές του Τμήματος: Καθηγητή κ. Σπύρο Καμβύση και Αναπληρωτή καθηγητή κ. Νίκο Ευφραιμίδη για τον χρόνο και κόπο που διέθεσαν ως μέλη της εξεταστικής επιτροπής.

Ιδιαιτέρως δε, θέλω να ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπουσα καθηγήτρια, κ. Γεωργία Καραλή, για την άψογη καθοδήγησή της μέχρι το πέρας αυτής της μελέτης, καθώς και για την αμέριστη συμπαράσταση και υπομονή που επέδειξε. Επίσης θέλω να την ευχαριστήσω για τη συνεπέστατη στάση που είχε κατά τη διάρκεια της συνεργασίας μας και για τις καίριες υποδείξεις και ανεκτίμητες συμβουλές της.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά κάποια άτομα του οικείου περιβάλλοντός μου, την οικογένειά μου, Θεοχάρη και Βηβλεέμ (γονείς) και Μελπομένη (αδερφή) για την ηθική τους συμπαράσταση καθώς και τους Ανυσιάδη Σωκράτη, Σατσλίδου Ευθυμία, Ανυσιάδου Στυλιανή, Ανυσιάδου Σοφία, Γιαννουκάκο Σταύρο Παναγιώτη, Σταυρόπουλο Δημήτρη, Στρατάκη Μικαέλα Νικολέτα, Τριπολιτάκη Νικολέτα, Φουντουλάκη Ασπασία, Σκλήφα Κωνσταντίνα, Μαρκοπούλου Σταυρούλα, Χατζηγιαννίδου Δήμητρα, Παπαδογιάννη Πέτρο και Βεΐζη Αρίων για την έμπρακτη και ηθική βοήθειά τους.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

1.1 Εισαγωγή

Η θεωρία διακλαδώσεων για στοχαστικές ΜΔΕ ($SPDE's$) δεν έχει πλήρως αναπτυχθεί ακόμα. Σε αντίθεση με τις στοχαστικές ΣΔΕ ($SDE's$), ειδικά σε μονοδιάστατο χώρο φάσης που υπάρχουν πολλά παραδείγματα (όπως π.χ. υπάρχει μια λεπτομερής ταξινόμηση για πιθανά σενάρια διακλάδωσης). Άλλα ήδη σε δισδιάστατο χώρο φάσης υπάρχουν πολλά ανοιχτά προβλήματα.

Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό είναι ότι υπάρχουν διάφορες προσεγγίσεις περιγράφοντας διακλαδώσεις σε στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες μερικές φορές αποδίδουν διαφορετικά αποτελέσματα. Πολυάριθμα άρθρα ασχολούνται με την μελέτη σχέσεων και διαφορών τέτοιων εννοιών. Μία είναι η φαινομενολογική διακλάδωση ($P\!-\!bifurcation$), η οποία αναζητά ποιοτικές αλλαγές στην μοναδική αμετάβλητη μέτρηση για την αντίστοιχη $Markov$ ημιομάδα. Άλλη μία είναι η δυναμική διακλάδωση ($D-bifurcation$), η οποία χαρακτηρίζεται μέσω αμετάβλητων μετρήσεων για τυχαία δυναμικά συστήματα. Θα μπορούσε κανείς απλώς να εξετάσει την αλλαγή στην δομή του τυχαίου τελεστή.

Εάν υποθέσουμε ότι έχουμε φαινομενική διακλάδωση, τότε για εξισώσεις με επιπρόσθετο θόρυβο είναι συνήθως εύκολο να αντλήσουμε την μοναδικότητα των αμετάβλητων μετρήσεων κάτω από πολύ ήπιες μη εκφυλισμένες συνθήκες σχετικά με τον θόρυβο. Επιπλέον, η αμετάβλητη μέτρηση είναι η λύση της πολύ γνωστής εξίσωσης $Kolmogorov$. Αλλά σε αντίθεση με αυτό, δεν υπάρχουν καθόλου παραδείγματα που να περιγράφουν ποιοτικά την δομή των αμετάβλητων μετρήσεων.

Εξάλλου υπάρχουν πολλά παραδείγματα που απορρέουν από την ύπαρξη των τυχαίων τελεστών για $SPDE's$. Αλλά υπάρχουν λίγα μόνο αποτελέσματα για την λεπτομερή δομή των τυχαίων τελεστών. Για παράδειγμα, άνω φράγματα για την διάσταση είναι ευρέως γνωστά, αλλά σε πολλά παραδείγματα με επιπρόσθετο θόρυβο, ο τυχαίος τελεστής είναι απλά ένα σημείο. Η δομή ενός τυχαίου τελεστή κοντά σε ένα ντετερμινιστικό σημείο μελετήθηκε και δείχθηκε ότι ο τυχαίος τελεστής υφίστατο την διακλάδωση. Αυτό είχε επιτευχθεί κοιτάζοντας την τοπική διάσταση των αντίστοιχων σταθερών και ασταθών αμετάβλητων μετρήσεων (συλλέξεων) σε μία μικρή γειτονιά γύρω από το σταθερό σημείο.

Οι τυχαίοι τελεστές για $SDE's$ και $SPDE's$ κοντά στην διακλάδωση είναι το κύριο θέμα έρευνας. Αλλά όταν κοιτάμε την δομή ενός τυχαίου τελεστή, είναι απλά ένα μοναδικό τυχαίο σημείο για πολλά προβλήματα με επιπρόσθετο θόρυβο. Όπως για παράδειγμα στην εργασία των $Crauel$ και $Flandoli$ βλέπουμε ότι δεν υπάρχει διακλάδωση στο επίπεδο των τυχαίων τελεστών, όταν ο θόρυβος είναι επιπρόσθετος. Αυτό παρατηρήθηκε πρόσφατα και για μονότονες $SPDE's$. Αλλά, αυτά τα αποτελέσματα δείχνουν ότι διαφορετικές έννοιες της διακλάδωσης αποδίδουν διαφορετικά αποτελέσματα, όπως τα περισσότερα από αυτά τα παραδείγματα εκθέτουν φαινομενική διακλάδωση. Αλλά η διακλάδωση μπορεί να φανεί μόνο από την κατανομή των πιθανοτήτων ή την δυναμική ενός σταθερού σημείου στον χρόνο. Επίσης, υπάρχουν πολλά ερωτήματα για το πρόβλημα του τελεστή που είναι ένα μόνο τυχαίο σημείο, ακόμη και για ένα απλό δισδιάστατο χώρο φάσης.

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε μία κάπως διαφορετική προσέγγιση. Αντί να κοιτάμε την διακλάδωση των αντικειμένων για χρόνο στο άπειρο, θα κοιτάμε στην τυπική παροδική συμπεριφορά της λύσης της $SPDE's$. Εδώ παροδικός σημαίνει πιθανόν μεγάλα, αλλά πεπερασμένα, χρονικά διαστήματα. Αλλά ας σημειωθεί ότι, σε πολλά παραδείγματα, τα τυπικά παροδικά δυναμικά δεν είναι πολύ καλά περιγραγφημένα. Μία εξαίρεση είναι η δουλειά των $Bergund$ και $Gentz$, όπου μία λεπτομερής περιγραφή των δυναμικών προερχόταν από μικρής διάστασης χώρο φάσεων. Τα αποτελέσματα μας επιτρέπουν να κουβαλάμε μερικά από αυτά (τα αποτελέσματα) αμέσως πάνω σε $SPDE's$.

Η προσέγγιση που παρουσιάζεται βασίζεται στο γεγονός ότι κοντά σε μία μεταβολή (αλλαγή) της σταθερότητας η δυναμική της $SPDE's$ οδηγείται από κάποιους κυρίαρχους τρόπους. Αυτές ακριβώς είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του γραμμικού φορέα με ιδιοτιμές κοντά στο 0. Οι εξισώσεις πλάτους θα περιγράψουν αυτά τα ουσιώδη δυναμικά. Αυτό είναι ευρέως γνωστό στην κοινωνία της Φυσικής κι έχει αυστηρά καθοριστεί για την ντετερμινιστική ΜΔΕ. Για ΜΔΕ σε απεριόριστα πεδία αυτές οι εξισώσεις πλάτους είναι επίσης γνωστές σαν Εξισώσεις Διαμόρφωσης.

Σε επίσημο επίπεδο, όπως έχει αναφερθεί, υπάρχουν πολυάριθμες λύσεις που χρησιμοποιούν μη αυστηρή ανάλυση πολλαπλής κλίμακας για τον υπολογισμό μειωμένων περιγραφών για το δυναμικό.

Το κύριο μέρος αυτής της εργασίας είναι να καθιερώσει αυστηρές λύσεις για την προσέγγιση των $SPDE's$ μέσω εξισώσεων πλάτους και να απαντήσει σε ερωτήματα όπως το πως ο θόρυβος επιρεάζει την δυναμική των συστημάτων κοντά στην μεταβολή της σταθερότητας. Αυτό έχει πολλές ενδιαφέρον εφαρμογές, όπως τη δημιουργία πρότυπης κρισιμότητας ή όπως την δομή των αμετάβλητων μέτρων των $SPDE's$, όπου δίνει μία εικόνα της φαινομενολογικής διακλάδωσης σε $SPDE's$.

Εμείς επικεντρονώμαστε σε εξισώσεις με μικρό θόρυβο σε μία γειτονιά γύρω από την μεταβολή της σταθερότητας. Μια παρόμοια αλλά εμφανώς διαφορετική προσέγγιση είναι η διάσημη θεωρία των $Freidlin$ και $Wentzell$ πάνω σε μεγάλες επιπτώσεις απόκλισης. Αυτά επισημαίνουν την επίδραση των πολύ μικρών θορύβων, για παράδειγμα σχετικά με την έξοδο από τομείς της έλξης ενός ντετερμινιστικού μοντέλου. Παρ' όλα αυτά, τα φαινόμενα αυτά εμφανίζονται μόνο σε κλίμακες χρόνου, τα οποία είναι εκθετικά μεγάλα στην δυναμική του θορύβου. Έτσι, όπως ο θόρυβος που προκαλείται για παράδειγμα από πολύ μικρές θερμικές διακυμάνσεις, όλα αυτά τα αποτελέσματα είναιπροφανώς δύσκολα να τα ανυχνεύσουμε στα πειράματα.

Η δική μας άποψη είναι διαφορετική, θεωρώντας όχι μόνο μικρό θόρυβο, αλλά και μικρές παραμέτρους στην εξίσωση. Αυτό αντανακλά το γεγονός ότι μας ενδιαφέρει, σε πειράματα όπου υπάρχει, να προσπαθεί να πάρει παραμέτρους αρκετά κοντά στην αλλαγή της σταθερότητας, προκυμένου να φανούν τα αποτελέσματα αυτής της διακλάδωσης των δυναμικών του μοντέλου.

Αν η απόσταση από την αλλαγή (μεταβολή) της σταθερότητας είναι επαρκώς μικρή, τότε η επιρροή από μικρό θόρυβο είναι ευκόλως ανιχνεύσιμη στα πειράματα, όπως η δουλειά των $Ahlers$ και $Rehberg$, που ασχολούνται με την διαμόρφωση προτύπων κάτω από το όριο της αστάθειας σε προβλήματα μεταφοράς. Στα μοντέλα τύπου $Benard$ για υγρούς κρυστάλλους επαληθεύτηκε πειραματικά ότι κοντά στην μεταβολή της σταθερότητας, υπάρχει σημαντική επίδραση του θορύβου στην δυναμική που οδηγεί στον σχηματισμό μοτίβου σε διάφορες νομοτελειακές σταθερές εξισώσεις. Αυτό εικαζόταν πολύ καιρό. Η κύρια δυσκολία του πειράματος ήταν να σταθεροποιηθούν οι παράμετροι ελέγχου (για παράδειγμα η μεταφορά θερμοκρασίας των $Rayleigh - Benard$), για την ακρίβεια της αντοχής του θορύβου, η οποία είναι εξαιρετικά μικρή σε περίπτωση θερμικών διακυμάνσεων. Η μη αυστηρή εξήγηση των πειραματικά εξακριβωμένων επιδράσεων βασίζεται σε μία τυπική επέκταση της λύσης στην ισχύ θορύβου και ο διαχωρισμός μεταξύ αργών και γρήγορων συστατικών, ώστε να προκύψει μια αποτελεσματική εξίσωση για τα πλάτη του κυρίαρχου μοτίβου. Αυτό είναι επίσης γνωστό και ως επέκταση πολλαπλής κλίμακας.

Σε φραγμένα χωρία για $SPDE's$ η προσέγγιση μέσω εξισώσεων πλάτους ήταν αυστηρά επαληθευμένη. Θα παρουσιάσουμε όλη την θεωρία για ένα απλό μοντέλο με πολλαπλασιαστικό θόρυβο, επίσης γνωστό και ως παραμετρικός θόρυβος, ο οποίος δεν έχει εξεταστεί πριν.

Η περίπτωση της απειρίας ή απλά των πολύ μεγάλων περιοχών είναι σημαντικά διαφορετική. Τα πλάτη των κυρίαρχων τρόπων υπόκεινται σε διαφοροποίηση μεγάλου βεληνεκούς στο χώρο και ως εκ τούτου δεν δίνονται από μία ΣΔΕ, αλλά αντ' αυτού από μία $SPDE$. Στην περίπτωση των μεγάλων αλλά οριοθετημένων περιοχών η περιοχή οριοθετείται αλλά κλιμακόνεται σε σχέση με την απόσταση από την διακλάδωση.

Σε όλα αυτά τα άρθρα για την στοχαστική περίπτωση, θεωρούμε θόρυβο που είναι από τη μία μεριά αρκετά μικρός όπως δίνεται από το πείραμα, αλλά από την άλλη πλευρά αρκετά μεγάλος σε σχέση με την απόσταση από την διακλάδωση. Όπως συζητήθηκε πριν, η ιδέα είναι ότι προσπαθούμε να ρυθμίσουμε την παράμετρο διακλάδωσης αρκετά κοντά σην διακλάδωση, προκειμένου να δούμε μαζί τα στοχαστικά αποτελέσματα και την μικρή γραμμική σταθερότητα ή αστάθεια των εξισώσεων πλάτους. Φυσικά, θα μπορούσαμε να εξετάσουμε την διαφορετική κλιμάκωση μεταξύ αυτών των δύο μικρών ποσοτήτων, χάνοντας τον θόρυβο ή την γραμμική σταθερότητα/αστάθεια στην προσέγγιση. Αξίζει να σημειωθεί ότι ανάλογα με τον τύπο της εξίσωσης, η κλιμάκωση της σύζευξης μεταξύ της αντοχής του θορύβου και της απόστασης από την διακλάδωση μπορεί να αλλάξει, προκειμένου να πάρουμε μία ενδιαφέρουσα στοχαστική εξίσωση πλάτους.

Κεφάλαιο 2

Βασικές γνώσεις πιθανοτήτων

Έστω X ένα οποιοδήποτε σύνολο. Ονομάζουμε σ-Άλγεβρα στο X οποιοδήποτε σύνολο A έχει τις εξής ιδιότητες.

1. Τα στοιχεία του A είναι υποσύνολα του X. Δηλαδή $A \subset P(X)$.
2. $\varnothing, X \in A$.
3. Αν $A \in A$ τότε $X \setminus A \in A$.
4. Αν $A_n \in A$ για κάθε $n \geq 1$ τότε $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in A$.

Παρατήρηση Επειδή τα στοιχεία του A είναι σύνολα, αντί σύνολο συνηθίζουμε να λέμε το A και οικογένεια. Όμως αυτός ο όρος δεν σημαίνει τίποτα παραπάνω από τον όρο σύνολο.
Ο πιο πάνω ορισμός λέει λοιπόν ότι η A είναι κλειστή στα συμπληρώματα και στις αριθμήσιμες ενώσεις.

Ορισμός σ-Άλγεβρα που παράγεται από την C λέμε την τομή όλων των σ-Αλγεβρών που περιέχουν την C. Την συμβολίζουμε με $\sigma(C)$ με σύμβολα,

$$\sigma(C) := \cap_{A \in H} A$$

Δηλαδή η $\sigma(C)$ περιέχει ακριβώς όλα τα σύνολα $B \subset X$ με την ιδιότητα

$$B \in A \text{ για κάθε } \sigma\text{-Άλγεβρα } A \text{ στο } X \text{ με } A \supset X.$$

Παρατήρηση Η $\sigma(C)$ είναι πράγματι σ-Άλγεβρα και περιέχει τα στοιχεία της C. Μάλιστα είναι η μικρότερη σ-Άλγεβρα που περιέχει την οικογένεια C, γιατί οποιαδήποτε σ-Άλγεβρα A που περιέχει την C είναι στοιχείο του H, οπότε $\sigma(C) \subset A$.

Σύνολα Borel

Έστω X τοπολογικός χώρος, και O το σύνολο των ανοιχτών συνόλων του X. Σύνολα Borel στον X ονομάζουμε τα στοιχεία της σ-Άλγεβρας

$$B(X) := \sigma(O).$$

Η $B(X)$ είναι η μικρότερη σ-Άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοιχτά σύνολα. Γενικά η οικογένεια O των ανοιχτών συνόλων δεν είναι σ-Άλγεβρα. Γι αυτό την μεγαλώνουμε όσο πιο λίγο γίνεται ώσπου να πάρουμε μία σ-Άλγεβρα.

Πρόταση 2.0.1. *Κάθε ανοιχτό ή κλειστό υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου είναι σύνολο Borel.*

Πρόταση 2.0.2. *Κάθε υποδιάστημα του R είναι σύνολο Borel .*

Έστω U μία σ-Άλγεβρα υποσυνόλων του W. Ονομάζουμε την $P : U \to [0,1]$ μέτρο πιθανότητας ως εξής:

1. $P(\varnothing) = 0, P(W) = 1.$
2. *Αν* $A_1, A_2, ... \in U$, *τότε*
$$P(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$
3. *Αν* $A_1, A_2, ...$ *είναι διακριτά σύνολα στο* U *τότε*
$$P(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Έπεται ότι αν $A, B \in U$, *τότε*

$$A \subseteq B \text{ συνεπάγεται } P(A) \leq P(B).$$

Ο (W, U, P) *ονομάζεται Χώρος Πιθανότητας υπό την προϋπόθεση ότι* W *είναι οποιοδήποτε σύνολο,* U *είναι μία σ-Άλγεβρα υποσυνόλων του* W *και* P *είναι ένα μέτρο πιθανότητας του* U.

2.1 Αξιώματα Πιθανοτήτων

1. (Μη αρνητικότητα) $P(A) \geq 0$ για κάθε γεγονός A.
2. (Προσθετικότητα) Εάν A και B είναι δύο ξένα μεταξύ τους γεγονότα, τότε η πιθανότητα της ένωσης τους ικανοποιεί τη σχέση

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

3. (Κανονικοποίηση) Η πιθανότητα ολόκληρου του δειγματικού χώρου Ω είναι ίση με $P(\Omega) = 1$.

Διακριτός Νόμος Πιθανοτήτων

Εάν ο δειγματικός χώρος αποτελείται από ένα πεπερασμένο πλήθος αποτελεσμάτων, τότε ο νόμος πιθανότητας προσδιορίζεται από τις πιθανότητες των γεγονότων τα οποία αποτελούνται από ένα μοναδικό στοιχείο. Πιο συγκεκριμένα, η πιθανότητα κάθε γεγονότος $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$ είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων των στοιχείων του:

$$P(\{S_1, S_2, ..., S_n\}) = P(S_1) + P(S_2) + ... + P(S_n).$$

Διακριτός Ομοιόμορφος Νόμος Πιθανοτήτων

Εάν ο δειγματικός χώρος αποτελείται από n δυνατά αποτελέσματα τα οποία έχουν την ίδια πιθανότητα (δηλαδή, όλα τα γεγονότα τα οποία έχουν ένα μοναδικό στοιχείο έχουν την ίδια πιθανότητα), τότε η πιθανότητα οποιοδήποτε γεγονότος A είναι

$$P(A) = \frac{N(A)}{n}.$$

2.2 Ιδιότητες Νόμων Πιθανοτήτων

Θεωρούμε ένα νόμο πιθανότητας και έστω ότι τα A, B, και C είναι γεγονότα. Ισχύουν τα εξής:

1. Εάν $A \subset B$, τότε $P(A) \leq P(B)$.
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
3. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.
4. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$.

2.3 Δεσμευμένη Πιθανότητα

- Η δεσμευμένη πιθανότητα ενός γεγονότος A, δεδομένου ενός γεγονότος B με $P(B) > 0$, ορίζεται ως

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

  και προσδιορίζει έναν καινούριο (υπό δέσμευση) νόμο πιθανότητας στον ίδιο δειγματικό χώρο Ω. Πιο συγκεκριμένα, όλες οι ιδιότητες των νόμων πιθανότητας ισχύουν για τους υπό δέσμευση νόμους πιθανότητας.

- Οι δεσμευμένες πιθανότητες μπορούν να θεωρηθούν ως ένας νόμος πιθανότητας στο καινούριο δειγματικό χώρο B, επειδή όλη η δεσμευμένη πιθανότητα συγκεντρώνεται στο B.

- Στην περίπτωση που τα δυνατά αποτελέσματα είναι πεπερασμένα και ισοπίθανα, έχουμε

$$P(A \mid B) = \frac{N(A)}{N(B)}.$$

Παρατήρηση Η δεσμευμένη πιθανότητα ορίζει έναν αποδεκτό νόμο πιθανότητας, διότι :

- Η μη αρνητικότητα είναι ξεκάθαρη.
- $P(\Omega \mid B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.
- Αν A_1, A_2 ξένα τότε

$$P(A_1 \cup A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B).$$

Κανόνας Πολλαπλασιασμού

Αν υποθέσουμε ότι όλα τα υπό δέσμευση γεγονότα έχουν θετική πιθανότητα, έχουμε
$P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n \mid \cap_{i=1}^{n-1} A_i)$.

2.4 Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Έστω $A_1, \cdots A_n$ ξένα μεταξύ τους σύνολα που σχηματίζουν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου (κάθε δυνατό αποτέλεσμα περιέχεται σε ακριβώς ένα από τα γεγονότα $A_1, ..., A_n$) και υποθέτουμε ότι $P(A_i) > 0$, για κάθε i. Τότε για κάθε γεγονός B, έχουμε

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n).$$

2.5 Κανόνας του Bayes

Έστω ότι $A_1, A_2, \cdots, A_n$ είναι ξένα μεταξύ τους γεγονότα που αποτελούν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου, κι έστω ότι $P(A_i) > 0$, για κάθε i. Τότε, για κάθε γεγονός B με $P(B) > 0$, έχουμε

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B/A_1) + \cdots + P(A_n)P(B/A_n)}.$$

2.6 Ανεξαρτησία

- Δύο γεγονότα A και B λέγονται ανεξάρτητα εάν

  $$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

  Εάν επιπλέον, $P(B) > 0$, η ανεξαρτησία ισοδυναμεί με τη συνθήκη $P(A \mid B) = P(A)$.

- Εάν τα A και B είναι ανεξάρτητα, το ίδιο είναι και τα A και B^c.

- Δύο γεγονότα A και B λέγονται υπό δέσμευση ανεξάρτητα, δεδομένου ενός άλλου γεγονότος C με $P(C) > 0$, εάν

  $$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)P(B \mid C).$$

  Εάν επιπλέον $P(B \cap C) > 0$, η δεσμευμένη ανεξαρτησία είναι ισοδύναμη με την συνθήκη

  $$P(A \mid B \cap C) = P(A \mid C).$$

- Η ανεξαρτησία δεν συνεπάγεται δεσμευμένη ανεξαρτησία και αντίστροφα.

Η αρχή της Αρίθμησης

Θεωρούμε μία διαδικασία η οποία περιλαμβάνει r στάδια. Υποθέτουμε ότι :

1. Υπάρχουν n_1 δυνατά αποτελέσματα στο πρώτο στάδιο.
2. Για κάθε δυνατό αποτέλεσμα του πρώτου σταδίου, υπάρχουν n_2 δυνατά αποτελέσματα στο δεύτερο στάδιο.
3. Πιο γενικά, για κάθε δυνατό αποτέλεσμα των πρώτων $i-1$ σταδίων, υπάρχουν n_i δυνατά αποτελέσματα στο i-οστό στάδιο.

Τότε, ο συνολικός αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων της συνολικής διαδικασίας είναι

$$n_1 n_2 \cdots n_r.$$

Σύνοψη των Αποτελεσμάτων Αρίθμησης

- Μεταθέσεις των n αντικειμένων : $n!$
- $k-$μεταθέσεις των n αντικειμένων : $\frac{n!}{(n-k)!}$.
- Συνδιασμοί με k από n αντικείμενα : n ανά $k = \frac{n!}{k!(n-k!}$
- Διαμερίσεις των n αντικειμένων σε r ομάδες, με την i-οστή ομάδα να έχει n_i αντικείμενα:

$$n \text{ ανά } n_1, n_2, \cdots n_r = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

Ανεξαρτησία για οικογένειες και τυχαίες μεταβλητές

Ορισμός Έστω χώρος πιθανότητας (Ω, F, P). Έστω $\{A_i : i \in I\} \subset F$ ένα σύνολο ενδεχομένων.

1. Τα $\{A_i : i \in I\} \subset F$ λέγονται ανεξάρτητα μεταξύ τους αν για κάθε $k \geq 2$ και $i_1, i_2, ..., i_k \in I$, διαφορετικά στοιχεία του I, ισχύει

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \cdots \cap A_{ik}) = P(A_{i1})P(A_{i2})P(A_{ik}).$$

2. Τα $\{A_i : i \in I\} \subset F$ λέγονται ανεξάρτητα ανά δύο μεταξύ τους αν για κάθε $i_1, i_2 \in I$, διαφορετικά στοιχεία του I, ισχύει

$$P(A_{i1} \cap A_{i2}) = P(A_{i1})P(A_{i2})$$

Ορισμός Έστω $(G_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια υποσυνόλων της F, δηλαδή $G_i \subset F$ για κάθε $i \in I$. Η $(G_i)_{i\in I}$ λέγεται ανεξάρτητη αν για κάθε επιλογή $\{A_i : i \in I\}$ συνόλων, με $A_i \in G_i$ για κάθε $i \in I$ τα $\{A_i : i \in I\}$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Ορισμός Οι τυχαίες μεταβλητές $\{X_i : i \in I\}$ καλούνται ανεξάρτητες μεταξύ τους αν η οικογένεια των παραγόμενων σ-αλγεβρών $(\sigma(X_i))_{i\in I}$ είναι ανεξάρτητη.
Αυτό ισοδυναμεί με το να έχουμε

$$P(X_{i1} \in A_1, X_{i2} \in A_2, ..., X_{ik} \in A_k) = P(X_{i1} \in A_1)P(X_{i2} \in A_2) \cdots P(X_{ik} \in A_k)$$

για κάθε $k \geqslant 2, i_1, i_2, ..., i_k \in I$ διαφορετικούς δείκτες και $A_1, A_2, ..., A_k \in B(R)$. Το ενδεχόμενο στο αριστερό μέλος της τελευταίας σχέσης είναι συντομογραφία για το

$$X_{i1}^{-1}(A_1) \cap X_{i2}^{-1}(A_2) \cap \cdots \cap X_{ik}^{-1}(A_k)$$

.

Πρόταση 2.6.1. *Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X, Y \geqslant 0$ ή $E(X), E(Y) < \infty$. Τότε*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Πρόταση 2.6.2. *Έστω $(\nu_i)_{i\in I}$ οικογένεια κατανομών στο R, με I ένα οποιοδήποτε σύνολο δεικτών. Υπάρχει χώρος πιθανότητας (Ω, F, P) και τυχαίες μεταβλητές $(Q_i)_{i\in I}$ σε αυτόν ώστε*

- *Οι $(X_i)_{i\in I}$ να είναι ανεξάρτητες.*
- *$\mu_X = \nu_X$ για κάθε $i \in I$. Δηλαδή η X_i έχει την προκαθορισμένη κατανομή n_i.*

Τα λήμματα Borel-Cantelli

Πρόταση 2.6.3. *Έστω $(A_i)_{i\geqslant 1}$ ακολουθία μετρήσιμων συνόλων σε ένα χώρο πιθανότητας.*

1. *(1ο λήμμα Borel- Cantelli). Αν $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ τότε $P(\limsup_n A_n) = 0$.*

2. *(2ο λήμμα Borel- Cantelli). Αν* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ *και τα* $\{A_n : n \geqslant 1\}$ *είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, τότε* $P(\limsup_n A_n) = 1$.

Ορισμός Μέτρο στον (X, A) λέμε κάθε συνάρτηση $\mu : A \longrightarrow [0, \infty]$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

2. $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n \geqslant 1}$ ξένων ανά δύο στοιχείων της A.

Η τριάδα (X, A, μ) λέγεται χώρος μέτρου και τα στοιχεία της A, μετρήσιμα σύνολα.

Ορισμός Ένα μέτρο μ σε έναν μετρήσιμο χώρο (X, A) λέγεται πεπερασμένο αν $\mu(X) < \infty$, ενώ λέγεται μέτρο πιθανότητας αν $\mu(X) = 1$.
Και αντίστοιχα, ο χώρος μέτρου (X, A, μ) λέγεται χώρος πεπερασμένου μέτρου ή χώρος πιθανότητας. Για έναν χώρο πιθανότητας συνήθως χρησιμοποιείται ο συμβολισμός (Ω, F, P) και αυτό θα κάνουμε από εδώ και στο εξής.

Πρόταση 2.6.4. *Έστω* μ *ένα μέτρο στον* (X, A). *Τότε*

1. $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *για κάθε ακολουθία* $(A_i)_{i \geqslant 1}$ *στοιχείων του* A.

2. *Αν* $A, B \in A$, $A \supset B$ *τότε* $\mu(A) \leq \mu(B)$ *και αν* $\mu(A) < \infty$ *τότε* $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

3. *Αν* $(A_i)_{i \geqslant 1}$ *είναι αύξουσα ακολουθία στοιχείων της* A, *τότε* $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$.

4. *Αν* $(A_i)_{i \geqslant 1}$ *είναι μία φθίνουσα ακολουθία στοιχείων της* A *με* $\mu(A_1) < \infty$, *τότε* $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$.

2.7 Τυχαίες μεταβλητές και μέση τιμή

Ορισμός Μετρήσιμη συνάρτηση σε έναν μετρήσιμο χώρο (Ω, F) λέμε κάθε συνάρτηση

$$X : \Omega \to [-\infty, \infty]$$

τέτοια ώστε

$$X^{-1}(A) \in F$$

για κάθε $A \in B([-\infty, \infty])$.
Επίσης λέμε ότι η X είναι μετρήσιμη ως προς σ-άλγεβρα F (ή και F-μετρήσιμη), ειδικά όταν στον ίδιο χώρο, μελετάμε πολλές σ-άλγεβρες ταυτόχρονα. Στην περίπτωση που ο Ω είναι τοπολογικός χώρος, μία $B(\Omega)$-μετρήσιμη συνάρτηση την λέμε Borel-μετρήσιμη.
Σε έναν χώρο πιθανότητας (Ω, F, P), μία μετρήσιμη συνάρτηση λέγεται τυχαία μεταβλητή.

Παρατήρηση Γιατί απαιτούμε από μία συνάρτηση X να έχει την παραπάνω ιδιότητα; Γιατί όταν ορίσουμε και ένα μέτρο πιθανότητας P στην F, θέλουμε να μπορούμε να μιλάμε για πιθανότητες της μορφής $P(X \in [a,b])$, δηλαδή $P(X^{-1}([a,b]))$. Πρέπει επομένως το $X^{-1}([a,b])$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της P, το οποίο είναι το F. Άρα χρειαζόμαστε την $X^{-1}(A) \in F$ σίγουρα για A κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του R. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να το ζητήσουμε για κάθε σύνολο $A(R)$.

Πρόταση 2.7.1. *Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές και $\alpha \in R$. Τότε τυχαίες μεταβλητές είναι επίσης οι συναρτήσεις*

$$\alpha X, |, X+Y, XY, X/Y, min\{X,Y\}, max\{X,Y\}, X^+, X^-$$

όπου η εν λόγω συνάρτηση ορίζεται ώστε να είναι σταθερή και ίση με μία αυθαίρετη πεπερασμένη σταθερά στο σύνολο των σημείων απροσδιοριστίας $(\infty - \infty, 0 \times \infty, c/0)$.

Πρόταση 2.7.2. *Έστω $(X_n)_{n\geqslant 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Τότε:*

1. *Οι συναρτήσεις*

   $$\inf_{n\geqslant 1} X_n, \sup_{n\geqslant 1} X_n, \liminf_{n\to\infty} X_n, \limsup_{n\to\infty} X_n,$$

   είναι επίσης τυχαίες μεταβλητές.

2. *Αν η $(X_n)_{n\geqslant 1}$συγκλίνει σημειακά σε μία συνάρτηση X, τότε η $X = \lim X_n$ είναι τυχαία μεταβλητή.*

Ορισμός Μία συνάρτηση $X : \Omega \to R$ λέγεται απλή αν η εικόνα της είναι πεπερασμένο σύνολο. Αν οι διαφορετικές τιμές που παίρνει μία απλή συνάρτηση είναι $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ και θέσουμε $A_i := X^{-1}(\{\alpha_i\})$ τότε η $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ είναι μία διαμέριση του Ω και η X γράφεται

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}.$$

Προφανώς μία απλή X είναι τυχαία μεταβλητή αν και μόνο αν τα σύνολα $A_1, A_2, ..., A_n$ είναι μετρήσιμα.

Πρόταση 2.7.3. *Έστω $X : \Omega \to [0,\infty]$ τυχαία μεταβλητή. Τότε υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία (δηλαδή $X_n(w) \leqslant X_{n+1}(w)$ για κάθε $w \in \Omega$ και $n \geqslant 1$) $(X_n)_{n\geqslant 1}$ μη αρνητικών, απλών, τυχαίων μεταβλητών ώστε $X = \lim_{n\to\infty} X_n$ κατά σημείο.*

Ορισμός Για μία συνάρτηση $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$, παραγόμενη σ-άλγεβρα από την X ονομάζουμε το σύνολο

$$\sigma(X) := \{X^{-1}(A) : A \in B(R)\},$$

η οποία είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα στο Ω η οποία κάνει την X τυχαία μεταβλητή στον $(\Omega, \sigma(X))$. Βέβαια αν η X είναι τυχαία μεταβλητή στον (Ω, F), τότε θα έχουμε $\sigma(X) \subset F$.

Ορισμός Μέσης Τιμής
Θα ορίσουμε σε τρία βήματα την μέση τιμή για τυχαίες μεταβλητές ορισμένες σε έναν χώρο πιθανότητας $\Omega, F, P)$.

1. Για μία απλή μη αρνητική τυχαία μεταβλητή
$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 1_{A_i},$$
ορίζουμε την μέση τιμή ως
$$E(X) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(A_i).$$

2. Για μία τυχαία μεταβλητή X με τιμές στο $[0, \infty)$, ορίζουμε
$$E(X) := \sup\{E(Y) : Y \text{ απλή, με } 0 \leqslant Y \leqslant X\}.$$

3. Για μία τυχαία μεταβλητή X με τιμές στο $[-\infty, \infty]$, ορίζουμε
$$E(X) = E(X^+) - E(X^-)$$
εφόσων δεν προκύπτει μορφή $\infty - \infty$. Αν $E(X^+) = E(X^-) = \infty$ τότε η $E(X)$ δεν ορίζεται.

Δύο ειδικές περιπτώσεις είναι οι εξής:

1. Αν η X ισούται με μία σταθερά $c \in R$, τότε $E(X) = c$ γιατί η X είναι απλή με $n = 1$, $A_1 = \Omega$, $\alpha_1 = c$.
2. Αν $X = 1_A$ με $A \in F$, τότε $E(X) = P(A)$.

Πρόταση 2.7.4. *Έστω $X, Y : \Omega \to [0, \infty]$ τυχαίες μεταβλητές και $\alpha \in R$.*

1. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
2. $E(\alpha X) = \alpha E(X)$.
3. *Αν* $X \leqslant Y$, *τότε* $E(X) \leqslant E(Y)$.
4. *Αν* $P(X = Y) = 1$ *τότε* $E(X) = E(Y)$.
5. $E(X) = 0$ *αν και μόνο αν* $P(X = 0) = 1$.

6. *Αν* $E(X) < \infty$ *τότε* $P(X = \infty) = 0$.

Για X *τυχαία μεταβλητή με τιμές στο* $[-\infty, \infty]$, *η* $| X |= X^+ - X^-$ *και η 1) της προηγούμενης πρότασης δίνουν ότι* $E | X |= E(X^+) + E(X^-)$. *Άρα η* $E(X)$ *ορίζεται και είναι πεπερασμένος αριθμός αν και μόνον αν* $E | X |< \infty$. *Επίσης η συνθήκη* $E | X |< \infty$ *δίνει με χρήση της πιο πάνω ότι* $P(X \in \{-\infty, \infty\}) = 0$ *δηλαδή με πιθανότητα 1, η* X *παίρνει πεπερασμένες τιμές.*

Πρόταση 2.7.5. *Αν* X, Y *τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο* R *με* $E | X |, E | Y |< \infty$ *και* $\alpha \in R$, *τότε*

1. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
2. $E(\alpha X) = \alpha E(X)$.
3. *Αν* $X \leqslant Y$, *τότε* $E(X) \leqslant E(Y)$.
4. *Αν* $P(X = Y) = 1$ *τότε* $E(X) = E(Y)$.

Ανισότητα Jensen

Έστω X τυχαία μεταβλητή με $E(X < \infty)$ και f κυρτή συνάρτηση σε ένα διάστημα $I \subset R$ με $P(X \in I) = 1$ και $E | f(X) |< \infty$. Τότε

$$f(E(X) \leqslant E(f(X).$$

Για X τυχαία μεταβλητή με $E|X| < \infty$, ορίζουμε την διασπορά της ως

$$Var(X) := E((X - E(X))^2).$$

Η μέση τιμή της $E(X)$, όπως έχουμε σημειώσει, είναι πραγματικός αριθμός λόγω της $E|X| < \infty$. Η διασπορά όμως ενδέχεται να παίρνει την τιμή ∞.

Ανισότητα Hölder

Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές , $p \in (1, \infty)$, και $q \in (1, \infty)$ τέτοιο ώστε $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Τότε:

$$E | XY |\leqslant \| X \|_p \| Y \|_q .$$

Ειδική περίπτωση της Hölder ($p = q = 1/2$) είναι η Caushy-Schwarz.

$$E | XY |\leqslant E(X^2)^{1/2} E(Y^2)^{1/2}.$$

Πρόταση 2.7.6. *Για κάθε τυχαία μεταβλητή X και $1 < r < s$, ισχύει*

$$\| X \|_r \leqslant \| X \|_s.$$

Θεώρημα Ο μετρικός χώρος $(L^p(P), d_p)$ είναι πλήρης.

2.8 Δεσμευμένη μέση τιμή

Ορισμός Για X τυχαία μεταβλητή στον (Ω, F, P), με $E \mid X \mid < \infty$, δεσμευμένη μέση τιμή της X ως προς την σ-άλγεβρα G ονομάζουμε οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή Y έχει τις εξής ιδιότητες

1. Η Y είναι G-μετρήσιμη
2. Ισχύει
$$\int_A X dP = \int_A Y dP$$
για κάθε $A \in G$.

Γενικά για μία τυχαία μεταβλητή, το να είναι μετρήσιμη ως προς μία σ-άλγεβρα μας λέει ότι είναι απλό αντικείμενο. Αν είναι μετρήσιμη ως προς μία σ-άλγεβρα που παράγεται από διαμέριση με n στοιχεία, τότε μπορεί να παίρνει το πολύ n διαφορετικές τιμές.
Ο ορισμός λοιπόν μας λέει ότι αν θέλουμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα της X σε σύνολα της υποάλγεβρας G, δεν είναι ανάγκη να χρησιμοποιούμε την X, η οποία μπορεί να είναι αρκετά περίπλοκη συνάρτηση. Υπάρχει η Y που είναι απλούστερο αντικείμενο από την X και μπορεί να κάνει την ίδια δουλειά.

Πρόταση 2.8.1. *(Ύπαρξη και μοναδικότητα)*

1. *Μία δεσμευμένη μέση τιμή Y και X ως προς την G υπάρχει.*
2. *Για οποιαδήποτε δεσμευμένη τιμη Y της X ως προς την G, ισχύει $E \mid Y \mid \leqslant E \mid X \mid < \infty$.*
3. *Αν Y, Y' είναι δύο δεσμευμένες μέσες τιμές της X ως προς την G, τότε $P(Y = Y') = 1$.*

2.9 Σημασία της δεσμευμένης μέσης τμής

Η δεσμευμένη μέση τιμή $E(X \mid G)$ δίνει την καλύτερη εκτίμηση για την X δεδομένης της πληροφορίας που δίνει η σ-άλγεβρα G.
Οι έννοιες 'εκτίμηση' και 'πληροφορία' είναι ασαφείς και ελάχιστα τις διασαφηνίζουμε παρακάτω. Η πιο πάνω φράση απλώς προσφέρει έναν τρόπο να σκεφτόμαστε για την δεσμευμένη μέση τιμή.

Γενικά, για μία σ-άλγεβγρα $G \subset F$ ως προς πληροφορία που κρατάει η G θεωρούμε την εξής γνώση:
Όταν γίνεται το πείραμα το οποίο μοντελοποιεί ο χώρος πιθανότητας (Ω, F, P) και προκύπτει ένα αποτέλεσμα $\omega \in \Omega$ (το οποίο εμείς δεν ξέρουμε), η πληροφορία της G είναι το σε ποιά στοιχεία της ανήκει και σε ποιά δεν ανήκει το ω. Δηλαδή η πληροφορία ενδεχομένως να μην μας πει ποιο ακριβώς είναι το ω, αλλά θα το περιορίσει. Εμείς βεβαίως ξέρουμε τα πάντα για την τριάδα (Ω, F, P) και την συνάρτηση X και μπορούμε να κάνουμε υπολογισμούς πιθανοτήτων και μέσων τιμών.

Βασικές Ιδιότητες

Πρόταση 2.9.1. *Έστω $X \in L^1(\Omega, F, P)$ και $G \subset F$ σ-άλγεβρα.*

1. $E(E(X \mid G)) = E[X]$.
2. *Αν η X είναι G-μετρήσιμη, τότε* $E(X) = X$.

.

Πρόταση 2.9.2. *Έστω $X, Y \in L_1(\Omega, F, P), a, b \in R$*

1. $E(aX + bY \mid G) = aE(X \mid G) + bE(Y \mid G)$.
2. *Αν $X \geqslant 0$, τότε $E(X \mid G) \geqslant 0$.*
3. *Αν $X \leqslant Y$, τότε $E(X \mid G) \leqslant E(Y \mid G)$.*

Πρόταση 2.9.3. *Έστω $X \in L_1(\Omega, F, P)$ και $G_1 \subset G_2 \subset F$ σ-άλγεβρες. Τότε*

1. $E(E(X/G_1)/G_2)) = E(X/G_1)$
2. $E(E(X/G_2)/G_1)) = E(X/G_1)$.

Πρόταση 2.9.4. *Έστω $X \in L^1(\Omega, F, P)$ και $Y : \Omega \to R$ συνάρτηση G-μετρήσιμη ώστε $E \mid XY \mid < \infty$. Τότε*

$$E(XY/G) = YE(X/G).$$

Πρόταση 2.9.5. *(Ανισότητα Jensen) Έστω $X \in L_1(\Omega, F, P)$ και f κυρτή συνάρτηση σε ένα διάστημα $I \subset R$ με $P(X \in I) = 1$ και $E \mid f(X) \mid < \infty$. Τότε*

$$f(E(X/G)) \leqslant E(f(X/G).$$

Η ανισότητα Jensen έχει την εξής χρήσιμη συνέπεια.

Πόρισμα Για $X \in L_1(\Omega, F, P)$ και $p \geqslant 1$ ισχύει

$$\|E(X \diagup G)\|_p \leqslant \|X\|_p.$$

Λήμμα Fatou

Αν οι X_n είναι μη αρνητικές, τότε

$$E(\liminf_{n\to\infty} X_n \diagup G) \leqslant \liminf_{n\to\infty} E(X_n \diagup G).$$

Θεώρημα μονότονης σύγκλισης

Αν $0 \leqslant X_n \leqslant X_{n+1}$ για κάθε $n \geqslant 1$, τότε

$$E(\lim_{n\to\infty} X_n \diagup G) = \lim_{n\to\infty} E(X_n \diagup G).$$

Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης

Αν οι $\{X_n : n \geqslant 1\}$ συγκλίνουν με πιθανότητα 1 σε μία τυχαία μεταβλητή X και υπάρχει $Y \in L^1(P)$ με $\mid X_n \mid \leqslant Y$ για κάθε $n \geqslant 1$, τότε $X \in L^1(P)$ και

$$(\lim_{n\to\infty} X_n \diagup G) = \lim_{n\to\infty} E(X_n \diagup G).$$

Η δεσμευμένη μέση τιμή ως προβολή

Το σύνολο $H := L^2(\Omega, F, P)$ εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο $(X, Y) \mapsto E(XY) = \int XY dP$ είναι χώρος $Hilbert$. Ο $H_0 := L^2(\Omega, F, P)$ είναι υπόχωρος του H και μάλιστα κλειστός. Έχουμε ορίσει την δεσμευμένη μέση τιμή ως προς την G για τα στοιχεία του $L^1(\Omega, F, P) \supset H$. Όμως για τα στοιχεία του H, η δεσμευμένη μέση τιμή έχει την εξής γεωμετρική ερμηνεία.

Πρόταση 2.9.6. *Η απεικόνιση $T : H \to H_0$ με $T(X) = E(X \diagup G)$ είναι ορθογώνια προβολή στον υπόχωρο H_0.*

Ανισότητα Markov

Εάν μία τυχαία μεταβλητή X παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές, τότε

$P(X \geqslant \alpha) \leqslant E[X]/\alpha$, για κάθε $\alpha > 0$.

Ανισότητα Chebyshev

Εάν X είναι μία τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2, τότε

$$P(\mid X-\mu \mid \geqslant c) \leqslant \frac{\sigma^2}{c^2}, \text{ για κάθε } c>0.$$

2.10 Ο Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με την ίδια κατανομή και μέση τιμή μ. Για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε
$P(\mid M_n - \mu \mid \geqslant \epsilon) = P(\mid \frac{(X_1+\cdots+X_n)}{n-\mu} \mid \geqslant \epsilon) \to 0$, όπως $n \to \infty$.

Ορισμός Σύγκλιση μίας Ακολουθίας Πραγματικών Αριθμών

Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω α ένας άλλος πραγματικός αριθμός. Η ακολουθία α_n συγκλίνει στον α, ή $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, εάν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα n_0 τέτοιο ώστε η

$$\mid \alpha_n - \alpha \mid \leqslant \epsilon,$$

για κάθε $n \geqslant n_0$.

2.11 Σύγκλιση κατά Πιθανότητα

Έστω $Y_1, Y_2, \ldots$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (όχι απαραίτητα ανεξάρτητων) κι έστω α ένας πραγματικός αριθμός. Η ακολουθία Y_n συγκλίνει στον α κατα πιθανότητα, εάν για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} P(\mid Y_n - \alpha \mid \geqslant \epsilon) = 0.$$

2.12 Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ μία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με την ίδια κατανομή, με κοινή μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 και ορίζουμε την

$$Z_n = (X_1 + \cdots + X_n - n\mu)/\sigma\sqrt{n}.$$

Τότε η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής της Z_n συγκλίνει στην τυποποιημένη κανονική Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής

$$\Phi(z) = 1/\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}dx,$$

υπό την έννοια ότι

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leqslant z) = \Phi(z), \text{ για κάθε } z.$$

Κανονική Προσέγγιση βασισμένη στο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Έστω $X_1 + \cdots + X_n$, όπου οι X_i είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με την ίδια κατανομή, με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Εάν το n είναι μεγάλο, η πιθανότητα $P(S_n \leqslant c)$ μπορεί να προσεγγιστεί με το να μεταχειριστούμε την S_n σαν να ήταν κανονική, σύμφωνα με την παρακάτω διαδικασία.

1. Υπολογίστε την μέση τιμή $n\mu$ και την διασπορά $n\sigma^2$ της S_n.
2. Υπολογίστε την κανονικοποιημένη τιμή $z = (c - n\mu)/\sigma\sqrt{n}$.
3. Χρησιμοποιήστε την προσέγγιση

   $$P(S_n \leqslant c) \approx \Phi(z),$$

   όπου η $\Phi(z)$ είναι διαθέσιμη από τους πίνακες της κανονικής Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής.

Προσέγγιση De Moivre-Laplace Διωνυμικής

Εάν η S_n είναι μία διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους n και p, όπου το n είναι μεγάλο και οι k, l είναι μη αρνητικοί ακέραιοι, τότε η

$$P(k \leqslant S_n \leqslant l) \approx \Phi((l + 1/2 - np)/\sqrt{np(1-p)}) - \Phi((k - 1/2 - np)/\sqrt{np(1-p)}).$$

2.13 Ο Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ μία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με την ίδια κατανομή και με μέση τιμή μ. Τότε, η ακολουθία των δειγματικών μέσων τιμών $M_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ συγκλίνει στο μ, με πιθανότητα 1, υπό την ένοια ότι

$$P(\lim_{n\to\infty}(X_1 + \cdots + X_n)/n = \mu) = 1.$$

Σύγκλιση με Πιθανότητα 1

Έστω $Y_1, Y_2, ...$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (όχι απαραίτητα ανεξάρτητων) που συνδέονται με το ίδιο μοντέλο πιθανότητας. Έστω c ένας πραγματικός αριθμός. Ισχύει ότι η Y_n συγκλίνει στο c με πιθανότητα 1 (ή σχεδόν σίγουρα) εάν η

$$P(\lim_{n\to\infty} Y_n = c) = 1.$$

Πόρισμα Έστω $(X_n)_{n\geqslant 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών.

1. (Θεώρημα Beppo Levi). Αν οι X_n είναι μη αρνητικές, τότε
$$E(\sum_{n=1}^{\infty} X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n).$$
2. Αν οι X_n παίρνουν τιμές στο $[-\infty, \infty]$ και $\sum_{n=1}^{\infty} E \mid X_n \mid < \infty$ τότε με πιθανότητα 1 η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ συγκλίνει σε μια τυχαία μεταβλητή με τιμές στο R και το παραπάνω θεώρημα ισχύει. Τα δύο μέλη της είναι πραγματικοί αριθμοί.

Σχετικά με το πρώτο μέρος του παραπάνω πορίσματος. Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} X_n, \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n)$ συγκλίνουν (με το ∞ ως ενδεχόμενη τιμή) γιατί είναι σειρές μη αρνητικών όρων.

Ορισμός Κατανομή μίας τυχαίας μεταβλητής X με τιμές στο R ονομάζουμε το μέτρο $\mu_X : B(R) \to [0,1]$ με
$$\mu_X(A) := P(X \in A) = P(X^{-1}(A)).$$

Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι το μ_X είναι μέτρο πιθανότητας. Η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής με τιμές στο R καθορίζεται από την κατανομή της και μόνο. Δεν εξατάται από την συγκεκριμένη φύση των συνόλων Ω, F.

Πρόταση 2.13.1. *Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο R και κατανομή μ_X. Τότε για $h : R \to R$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση ισχύει*

$$E(h(X)) = \int_R h(x) d\mu_X(x)$$

αν $h \geqslant 0$ ή $\int_R \mid h(x) \mid d\mu_X(x) < \infty$. Επιπλέον η μέση τιμή στο αριστερό μέλος ορίζεται αν και μόνο αν ορίζεται η μέση τιμή στο δεξί.
Παρατηρούμε ότι στο αριστερό μέλος έχουμε την μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $h(X)$ στον χώρο (Ω, F, P), ενώ στο δεξί έχουμε την μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής h στον χώρο $(R, B(R), \mu_X)$.

Κεφάλαιο 3

Κίνηση Brown λήμμα Itô

3.1 Ορισμός

Μία στοχαστική ανέλιξη $\{B(t) : t \geqslant 0\}$ ορισμέμη σε έναν χώρο πιθανότητας (Ω, F, P) και με τιμές στο R λέγεται (μονοδιάστατη) κίνηση Brown αν ισχύουν τα εξής:

1. Η ανέλιξη έχει ανεξάρτητες προαυξήσεις. Δηλαδή για κάθε $n \geqslant 1$ και $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, οι τυχαίες μεταβλητές

   $$B(t_2) - B(t_1), B(t_3) - B(t_2), ..., B(t_n) - B(t_{n-1})$$

   είναι ανεξάρτητες.

2. Για κάθε $0 \leqslant s < t$, η τυχαία συνάρτηση $B_t - B_s$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $t - s$.

3. Με πιθανότητα 1, η συνάρτηση $t \to B(t)$ είναι συνεχής.

Μία κίνηση Brown για την οποία με πιθανότητα 1 ισχύει $B(0) = x$, λέγεται κίνηση Brown που ξεκινάει από το x, ενώ όταν $x = 0$, μία τέτοια ανέλιξη λέγεται τυπική κίνηση Brown.
Αν ξέρουμε την κατανομή της $B(0)$, όλες οι πεπερασμένης διάστασης κατανομές της B υπολογίζονται. Ας υποθέσουμε ότι η B ξεκινάει ντετερμινιστικά από το x, δηλαδή $B(0) = x$. Τότε για $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, η κατανομή του διανύσματος

$$(B(t_1) - B(t_0), B(t_2) - B(t_1), ..., B(t_n - B(t_{n-1}))$$

καθορίζεται μοναδικά από τις ιδιότητες 1),2) του ορισμού. Είναι αυτή ενός διανύσματος

$$(\sqrt{t_1 - t_o}X_1, \sqrt{t_2 - t_1}X_2, \sqrt{t_n - t_{n-1}}X_n)$$

όπου οι $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές. Άρα και η κατανομή του

$$(B(t_1), B(t_2), ..., B(t_n))$$

καθορίζεται μοναδικά.

Απλές Ιδιότητες

Η κίνηση Brown ορίζει στον χώρο πιθανότητας στον οποίο ορίζεται μια φυσιολογική διήθηση. Την $(F_t)_{t\geqslant 0}$ με

$$F_t := \sigma(\{B(s) : s \in [0,t]\})$$

για κάθε $t \in [0, \infty)$.

Πρόταση 3.1.1. *(Μετατόπιση) Έστω B κίνηση Brown και $t_0 \geqslant 0$. Ορίζουμε την ανέλιξη X ως*

$$X(t) := B(t_0 + t) - B(t_0) \text{ για κάθε } t \in [0, \infty).$$

Τότε:

1. *Η X είναι τυπική κίνηση Brown.*
2. *Η X είναι ανεξάρτητη από την F_{t_o}.*

Πρόταση 3.1.2. *Έστω B τυπική κίνηση Brown. Ορίζουμε την ανέλιξη X ως*

$$X(t) := -B(t) \text{ για κάθε } t \in [0, \infty).$$

Τότε η X είναι τυπική κίνηση Brown.

Πρόταση 3.1.3. *(Αλλαγή Κλίμακας) Έστω B τυπική κίνηση Brown και $c \neq 0$. Ορίζουμε την ανέλιξη X ως*

$$X(t) := \tfrac{1}{c}B(c^2 t) \text{ για κάθε } t \in [0, \infty).$$

Τότε η X είναι τυπική κίνηση Brown.

Η ιδιότητα αλλαγής κλίμακας είναι πολύ χρήσιμη σε υπολογισμούς. Για παράδειγμα, αν ορίσουμε $T_\alpha^B := \inf\{t \geqslant 0 : B(t) = \alpha\}$ τον χρόνο που απαιτείται ώστε η τυπική κίνηση *Brown* B να χτυπήσει το α, τότε

$$T_\alpha^B =^d \alpha^2 T_1^B.$$

Πράγματι, επειδή για την κίνηση *Brown* $X^\alpha := B(\alpha^2 \cdot)/\alpha$ έχουμε $B(t) = \alpha \Leftrightarrow X^\alpha(t/\alpha^2) = 1$, έπεται ότι

$$T_\alpha^B = \alpha^2 T_1^{X^\alpha} =^d \alpha^2 T_1^B.$$

3.2 Επισκέψεις στο 0

Η κίνηση *Brown* έχει αρκετά ακανόνιστο γράφημα. Για παράδειγμα, το μήκος του γραφήματος σε οποιοδήποτε διάστημα είναι άπειρο. Και η ίδια η κίνηση, ως συνάρτηση του χρόνου, δεν είναι διαφορίσιμη πουθενά. Εδώ θα δούμε ότι μόλις ξεκινάει από το 0, αμέσως χτυπάει και θετικές και αρνητικές τιμές. Δηλαδή δεν είναι δυνατόν να υπάρχει διάστημα $(0, \epsilon)$ όπου η κίνηση να διατηρεί πρόσημο.

Θεωρούμε τους τυχαίους χρόνους

$$T^- := \inf\{t > 0 : B(t) < 0\},$$

$$T^+ := \inf\{t > 0 : B(t) > 0\}.$$

Πρόταση 3.2.1. *Έστω B τυπική κίνηση Brown. Τότε, με πιθανότητα 1, ισχύει*

$$T^- = T^+ = 0.$$

3.3 Πολυδιάστατη κίνηση Brown

Ορισμός Έστω $d \geqslant 1$ φυσικός αριθμός και $B^{(1)}, B^{(2)}, ..., B^{(d)}$ ανεξάρτητες μονοδιάστατες κινήσεις *Brown*. Την ανέλιξη

$$\begin{pmatrix} B^{(1)}(t) \\ B^{(2)}(t) \\ \cdots \\ B^{(d)}(t) \end{pmatrix},$$

$t \in [0, +\infty)$ ονομάζουμε $d-$διάστατη κίνηση *Brown*.

Η $d-$διάστατη κίνηση $Brown$ περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου στον R^d. Σε κάθε συντεταγμένη η κίνηση του σωματιδίου είναι μία μονοδιάστατη κίνηση $Brown$ και οι κινήσεις $Brown$ που αντιστοιχούν στις d συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες. Η κίνηση που απασχόλησε τους $Brown$ και $Einstein$ ήταν η τρισδιάστατη κίνηση $Brown$.

3.4 Martingales σχετικές με την κίνηση Brown

Συζητώντας για $martingales$ σχετικές με την κίνηση $Brown$ θα χρησιμοποιήσουμε την διήθηση που παράγει η ίδια η κίνηση, δηλαδή

$$F_t := \sigma(\{B_s : s \in [0, t]\})$$

για κάθε $t \in [0, \infty)$.

Θεώρημα Έστω B τυπική κίνηση $Brown$. Οι ακόλουθες ανελίξεις είναι $martingales$.

1. $\{B(t) : t \geqslant 0\}$.
2. $\{B(t)^2 - t : t \geqslant 0\}$.
3. $\{e^{(t) - \lambda^2 t/2} : t \geqslant 0\}$, με $\lambda \in R$ δεδομένο.

Ορισμός Έστω $f : A \to R$ συνάρτηση με πεδίο ορισμού $A \subset R$. Για $\alpha \in [0, \infty)$ και $x_0 \in A$, η f λέγεται τοπικά $\alpha - H\ddot{o}lder$ συνεχής στο x_0 αν υπάρχουν $\epsilon > 0$ και $c \in R$ ώστε

$$\mid f(x) - f(x_0) \mid \leqslant C \mid x - x_0 \mid^\alpha$$

για όλα τα $x \in A$ με $\mid x - x_0 \mid < \epsilon$.

Το φράγμα $\sqrt{h \log(1/h)}$ του παραπάνω θεωρήματος δίνει εύκολα την $\alpha - H\ddot{o}lder$ συνέχεια για $\alpha < 1/2$.

Πόρισμα Έστω $\alpha \in [0, 1/2)$. Με πιθανότητα 1, η κίνηση $Brown$ είναι τοπικά $\alpha - H\ddot{o}lder$ συνεχής.

3.5 Μη διαφορισιμότητα

Έστω συνάρτηση $f : A \to R$, με $A \subset R$, $x_0 \in A$ και $C \in (0, \infty)$. Λέμε ότι η f είναι $Lipschitz$ στο x_0 με σταθερά C αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $\mid f(x) - f(x_0) \mid \leqslant C \mid x - x_0 \mid$. Προφανώς αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη (με πεπερασμένη παράγωγο) σε ένα σημείο x_0 εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, τότε είναι

Lipschitz στο x_0 με σταθερά $\mid f'(x_0) \mid +1$.

Θεώρημα Με πιθανότητα 1, η κίνηση *Brown* δεν είναι διαφορίσιμη σε κανένα σημείο του $[0, \infty)$.

3.6 Κατασκευή μονοδιάστατης διαδικασίας Wiener

Το κύριο ζήτημα είναι να αποδειχθεί ότι η κίνηση *Brown* υπάρχει στην πραγματικότητα.
Η μέθοδός μας θα αναπτύξει μία επίσημη επέκταση του λευκού θορύβου $\xi(\cdot)$ σε όρους μίας έξυπνα επιλεγμένης ορθοκανονικής βάσης $L^2(0,1)$, ο χώρος όλων των πραγματικών τιμών, τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ορισμένων στο (0,1). Στη συνέχεια θα ενσωματώσουμε την προκύπτουσα έκφραση στο χρόνο, δείχνοντας ότι αυτή η σειρά συγκλίνει, και στη συνέχεια να αποδείξουμε ότι έχουμε χτίσει μία διαδικασία *Wiener*.
Θα ξεκινήσουμε με ένα λήμμα.

Λήμμα Έστω $W(\cdot)$ να είναι μία μονοδιάστατη κίνηση *Brown*. Τότε

$$E(W(t)W(s)) = t \wedge s = min(s,t) \text{ για } t \geq 0, s \geq 0$$

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι $t \geq s \geq 0$. Τότε

$$\begin{aligned} E(W(t)W(s)) &= E((W(s) + W(t) - W(s))W(s)) \\ &= E(W^2(s)) + E((W(t) - W(s))W(s)) \\ &= s + E(W(t) - W(s))E(W(s)) \\ &= s = t \wedge s. \end{aligned}$$

όπου $W(s)$ ακολουθεί την $N(0,s)$ και $W(t) - W(s)$ είναι ανεξάρτητη του $W(s)$.

Παρατήρηση Η επίσημη παράγωγος ως προς τον χρόνο της $W(t)$ είναι

$$W(t) = \frac{dW(t)}{dt} = \xi(t)$$

η οποία είναι μονοδιάστατος Λευκός Θόρυβος. Επιπροσθέτως, έχουμε τον χαρακτηριστικό τύπο

$$E(\xi(t)\xi(t)) = \delta_0(s-t),$$

όπου δ_0 είναι η μονάδα μάζας στο 0.

Παρατήρηση Γιατί ο $W(t) = \xi(t)$ ονομάζεται λευκός θόρυβος.
Αν $X(\cdot)$ είναι οποιαδήποτε πραγματικών τιμών στοχαστική διαδικασία με $E(X^2(t)) < \infty$ για κάθε $t \geqslant 0$, ορίζουμε

$$r(t,s) := E(X(t)X(s)), (t,s \geqslant 0),$$

ως την συνάρτηση αυτοσισχέτισης της $X(\cdot)$. Αν $r(t,s) = c(t-s)$ για μία συνάρτηση $c : R \to R$ και αν $E(X(t)) = E(X(s))$ για κάθε $t, s \geq 0$, η $X(\cdot)$ ονομάζεται στάσιμη υπό την ευρεία έννοια. Η διαδικασία λευκού θορύβου $\xi(\cdot)$ είναι εξ ορισμού Γκαουσιανή, στάσιμη υπό την ευρεία έννοια, με $c(\cdot) = \delta_0$.
Γενικά, ορίζουμε

$$f(\lambda) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} c(t) dt (\lambda \in R)$$

να είναι φασματικό πεπρωμένο της διαδικασίας $X(\cdot)$. Για τον λευκό θόρυβο έχουμε

$$f(\lambda) := \tfrac{1}{2\pi} \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \delta_0 dt \text{ για κάθε } \lambda.$$

Έτσι το φασματικό πεπρωμένο της $\xi(\cdot)$ είναι επίπεδο, το οποίο σημαίνει ότι όλες οι συχνότητες συμβάλλουν εξίσου στην συνάρτηση συσχέτισης, όπως αναλογικά όλα τα χρώματα συμβάλλουν εξίσου για να φτιάξουν λευκό φως.

3.7 Τυχαίες σειρές Fourier

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $\{\psi_n\}_{n=0}$ είναι μία πλήρης ορθοκανονική βάση της $L^2(0,1)$, όπου οι $\psi_n = \psi_n(t)$ είναι συναρτήσεις $0 \leqslant t \leqslant 1$ μόνο και δεν είναι τυχαίες μεταβλητές. Η ορθοκανονικότητα σημαίνει ότι

$$\textstyle\int_0^1 \psi_n(s)\psi_m(s) ds = \delta_{mn} \text{ για κάθε } m, n.$$

Επίσημα γράφουμε

$$\xi(t) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_n(t) \ (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$A_n = \int_0^1 \xi(t)\psi_n(t) dt.$$

Αναμένουμε ότι οι A_n είναι ανεξάρτητες και Γκαουσιανές, με $E(A_n) = 0$.
Ως εκ τούτου για να είμαστε συνεπείς πρέπει να έχουμε για $m \neq n$.

$$\begin{aligned} 0 = E(A_n)E(A_m) &= E(A_n A_{m)} \\ &= \int_0^1 E(\xi(t)\xi(s))\psi_n(t)\psi_m(s)dtds \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \delta_0(s-t)\psi_n(t)\psi_m(s)dtds \\ &= \int_0^1 \psi_n(s)\psi_m(s)ds. \end{aligned}$$

Αλλά αυτό είναι αυτομάτως σωστό αφού η ψ_n είναι ορθογώνια. Ομοίως

$$E(A_n^2) = \int_0^1 \psi_n^2(s)ds = 1.$$

Συνεπώς αν οι A_n είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την $N(0,1)$. Είναι λογικό να πιστεύουμε ότι ο παραπάνω τύπος είναι σωστός και βγάζει νόημα. Αλλά μετά η κίνηση $Brown$ $W(\cdot)$ θα πρέπει να δωθεί σαν

$$W(t) := \int_0^1 \xi(s)ds = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_o^t \psi_n(s)ds.$$

Αυτό δείχνει αληθές για κάθε ορθοκανονική βάση και θα το κάνουμε σαφές ώντας πιο αυστηροί αυτό παρακάτω όπου θα διαλέξουμε μία ειδική καλή βάση.

3.8 Στοχαστικά ολοκληρώματα

Θυμόμαστε από την εισαγωγή ότι θέλουμε να ανακαλύψουμε μία θεωρία στοχαστικών εξισώσεων της μορφής

$$\begin{aligned} dX &= b(X,t)dt + B(X,t)dW \\ X(0) &= X_0 \end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(X,s)ds + \int_0^t B(X,s)dW$$

για κάθε $t \geqslant 0$. Αλλά προτού διαβάσουμε και λύσουμε τέτοιες ολοκληρωτικές εξισώσεις, πρέπει πρώτα να ορίσουμε

$$\int_0^T GdW$$

για μία ευρεία τάξη στοχαστικών διαδικασιών G έτσι ώστε το δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης να βγάζει νόημα. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αυτό δεν είναι καθόλου προφανές. Για παράδειγμα, αν $t \to W(t,\omega)$ είναι άπειρη παραλλαγή για σχεδόν κάθε ω, τότε $\int_0^T GdW$ απλά δεν μπορεί να κατανοηθεί σαν ένα συνηθισμένο ολοκλήρωμα.

Ορισμός Έστω τωρα $n = m = 1$. Ένας πιθανός ορισμός είναι μέσω του $Paley, Wiener$ και $Zygmund$. Ας υποθέσουμε την συνάρτηση $g : [0,1] \to R$ η οποία είναι συνεχώς διαφορίσιμη με $g(0) = g(1) = 0$. Αξίζει να σημειωθεί ότι η g είναι μία συνηθησμένη ντετερμινιστική συνάρτηση και δεν είναι στοχαστική διαδικασία.
Ορίζουμε

$$\int_0^1 gdW = -\int_0^1 gdt$$

Ας σημειωθεί ότι $\int_0^1 gdW$ είναι ως εκ τούτου τυχαία μεταβλητή. Ας κοιτάξουμε τώρα τις ιδιότητες που ακολουθούν από τον παραπάνω ορισμό:

Λήμμα 3.8.1. *Οι ιδιότητες του ολοκληρώματος $Paley - Wiener - Zygmund$.*

1. $E(\int_0^1 gdW) = 0.$
2. $E((\int_0^1 gdW)^2) = \int_0^1 g^2dt.$

Απόδειξη

1. $E(\int_0^1 gdW) = -\int_0^1 g^{\square}E(W(t))dW$, όπου $E(W(t)) = 0$.
2. $E((\int_0^1 gdW)^2) = E(\int_0^1 g^{\square}W(t)dt \int_0^1 g^{\square}W(s)ds) =$

   $\int_0^1 \int_0^1 g^{\square}(t)g^{\square}(s)E(W(t)W(s))dsdt =$

   $\int_0^1 g^{\square}(t)(\int_0^1 sg^{\square}(s)ds + \int_0^1 tg^{\square}(s)ds)dt =$

   $\int_0^1 g^{\square}(tg(t) - \int_0^t gds - tg(t))dt =$

   $\int_0^1 g^{\square}(-\int_0^t gds)dt = \int_0^1 g^2dt.$

Έστω $g \in L^2(0,1)$. Μπορούμε να πάρουμε μία ακολουθία C^1 συναρτήσεων g_n, όπως παραπάνω, τέτοιες ώστε $\int_0^1 (g_m - g)^2dt \to 0$. Με την βοήθεια της 2) :

$$E((\int_0^1 g_mdW - \int_0^1 g_ndW)^2) = \int_0^1 (g_m - g_n)^2dt.$$

και ως εκ τούτου $\{\int_0^1 g_n dW\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία $Cauchy$ στο $L^2(\Omega)$. Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε

$$\int_0^1 gdW := \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n dW.$$

Παρατήρηση Ο διευρυμένος ορισμός εξακολουθεί να ικανοποιεί τις ιδιότητες 1) και 2).

Αυτός είναι ένας λογικός ορισμός του $\int_0^1 gdW$, εκτός από το ότι αυτός έχει νόημα μόνο για τις συναρτήσεις $g \in L^2(0,1)$ και όχι για στοχαστικές διαδικασίες. Αν επιθυμούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα στην 1)

$$\int_0^1 B(X,s)dW,$$

τότε το ολοκληρωτέο $B(X,s)$ είναι μία στοχαστική διαδικασία και ο ανωτέρω ορισμός δεν είναι αρκετός.

Πρέπει να αναπτύξουμε έναν ορισμό για μία ευρύτερη κατηγορία των ολοκληρωτέων (αν και ο ορισμός που τελικά θα αποφασίσουμε θα συμφωνεί με τον ορισμό των $Paley$, $Wiener$, $Zygmund$ αν η g τυχαίνει να είναι μία ντετερμινιστική C^1 συνάρτηση, με $g(0) = g(1) = 0$).

3.9 Αόριστα ολοκληρώματα Itô

Ορισμός Έστω $G \in L^2(0,T)$. Ορίζουμε

$$I(t) := \int_0^t GdW, (0 \leqslant t \leqslant T),$$

να είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της $G(\cdot)$. Αξίζει να σημειωθεί ότι $I(0) = 0$.

Σε αυτή την παράγραφο θα λάβουμε υπόψην μας κάποιες ιδιότητες του $I(\cdot)$, δηλαδή το ότι είναι μία $martingale$ κι έχει απλά συνεχόμενα μονοπάτια. Αυτά θα μας φανούν πολύ χρήσιμα στην απόδειξη του $Itô's\ Formula$ και στις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις στο επόμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα

1. Αν $G \in L^2(0,T)$, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα $I(\cdot)$ είναι μία $martingale$.

2. Επί πλέον, $I(\cdot)$ έχει μία εκδοχή με συνεχόμενα απλά μονοπάτια.

Πλέον, όταν αναφερόμαστε στο $I(\cdot)$, πάντα θα αναφερόμαστε σε αυτή την εκδοχή. Δεν θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό της 1).

Itô's Formula

Ορισμός Υποθέτουμε ότι $X(\cdot)$ είναι μία $real-valued$ στοχαστική διαδικασία που ικανοποιεί την

$$X(r) = X(s) + \int_s^r F dt + \int_s^r G dW,$$

για κάποιες συναρτήσεις $F \in L^1(0,T)$, $G \in L^2(0,T)$ και $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. Επίσης λέμε ότι η $X(\cdot)$ ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική

$$dX = F dt + G dW,$$

για $0 \leqslant t \leqslant T$.

Πρέπει να δώσουμε ιδιαίτερη σημασία στο ότι τα διαφορικά σύμβολα είναι απλά μία συντομογραφία για τις παραπάνω ολοκληρωτικές εκφράσεις.
Κυριολεκτώντας $''dX'','' dt''$ και $''dW''$ δεν έχουν νόημα από μόνες τους.

Θεώρημα 3.9.1. *Itô's Formula*

Θεωρούμε ότι η $X(\cdot)$ έχει την στοχαστική διαφορική

$$dX = F dt + G dW,$$

για $F \in L^1(0,T)$, $G \in L^2(0,T)$. Υποθέτουμε $u : R \times [0,T] \to R$ είναι συνεχής συνάρτηση και οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς.
Θέτουμε

$$Y(t) := u(X(t), t).$$

Μετα, η Y έχει την στοχαστική διαφορική

$$dY = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} G^2 dt =$$

$$(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} F + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} G^2) dt + \frac{\partial u}{\partial x} G dW.$$

Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ του Itô .

Παρατηρήσεις

1. Το επιχείρημα των $u, \frac{\partial u}{\partial t}$, κ.λ.π. από πάνω είναι $(X(t), t)$.

2. Ενόψει των ορισμών μας, η παραπάνω έκφραση εννοεί για όλα τα $0 \leqslant s \leqslant r \leqslant T$, ότι

$$Y(r) - Y(s) = u(X(r), r) - u(X(s), s) =$$
$$\int_s^r \frac{\partial u}{\partial t}(X,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(X,t)F + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X,t)G^2 dt + \int_s^r \frac{\partial u}{\partial x}(X,t)GdW$$

σχεδόν σίγουρα.

3. Αφού $X(t) = X(0) + \int_0^t F ds + \int_0^t GdW$, η $X(\cdot)$ έχει συνεχόμενα μονοπάτια του δείγματος σχεδόν σίγουρα. Επίσης σχεδόν για κάθε ω, η συναρτήσεις

$$t \to \tfrac{\partial u}{\partial t}(X(t), t),\ \tfrac{\partial u}{\partial x}(X(t), t),\ \tfrac{\partial^2}{\partial x^2}(X(t), t)$$

είναι συνεχείς και άρα και τα ολοκληρώματα της παραπάνω παρατήρησης ορίζονται.

3.10 Κανόνας Παραγωγής του Itô

Υποθέτουμε ότι

$$dX_1 = F_1 dt + G_1 dW$$
$$dX_2 = F_2 dt + G_2 dW$$

$(0 \leqslant t \leqslant T)$, για $F_i \in L^1(0,T), G_i \in L^2(0,T)(i = 1, 2)$.

Έπεται

$$d(X_1, X_2) = X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + G_1 G_2 dt.$$

Παρατηρήσεις

1. Η έκφραση $G_1 G_2 dt$ εδώ είναι ο διορθωτικός όρος του *Itô*. Η ολοκληρωτική μορφή του κανόνα παραγωγής είναι η ολοκλήρωση κατά τύπο του *Ito*:

$$\int_s^r X_2 dX_1 = X_1(r)X_2(r) - X_1(s)X_2(s) - \int_s^r X_1 dX_2 - \int_s^r G_1 G_2 dt.$$

2. Αν είτε G_1 ή G_2 είναι πανομοιότυπα ίσα με 0, τότε παίρνουμε τον συνηθισμένο λογισμό ολοκλήρωσης κατά τύπο. Αυτό επιβεβαιώνει τον ορισμό των $Paley-Wiener-Zygmund$

$$\int_0^1 g dW = -\int_0^1 g^{\square} W dt,$$

για ντετερμινιστικές C^1 συναρτήσεις g, με $g(0) = g(1) = 0$, το οποίο συμφωνεί με τον ορισμό του *Itô*.

3.11 Γενικευμένος τύπος Itô

Υποθέτουμε ότι $dX^i = F^i dt + G^i dW$, με τα $F^i \in L^1(0,T), G^i \in L^2(0,T)$ για $i = 0, 1, \cdots, n$. Αν η συνάρτηση $u : R^n \times [0,T] \to R$ είναι συνεχής, με συνεχείς μερικές παραγώγους $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, (i, j = 1, \cdots, n)$, τότε:

$$d(u(X^1, \cdot, X^n, t)) = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dX^i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} G^i G^j dt.$$

3.12 Το ολοκλήρωμα του Itô σε μεγαλύτερες διαστάσεις

Σημείωση

1. Έστω $W(\cdot) = (W^1(\cdot), \cdots, W^m(\cdot))$ να είναι μία $m-$διάστατη κίνηση $Brown$.
2. Υποθέτουμε ότι η $F(\cdot)$ είναι μία οικογένεια μη προβλέψιμων $\sigma-$αλγεβρών , με την έννοια ότι :
   (α′) $F(t) \supseteq F(s)$ για όλα τα $t \geqslant s \geqslant 0$.
   (β′) $F(t) \supseteq W(t) = U(W(s) \mid 0 \leqslant s \leqslant t)$.
   (γ′) Η $F(t)$ είναι ανεξάρτητη του $W^+(t) := U(W(s) - W(t) \mid t \leq s < \infty)$.

Ορισμός

1. Μία $M^{n\times m} - valued$ Στοχαστική διαδικασία $G = ((G^{ij}))$, ανήκει στον $L^2_{n\times m}(0,T)$ αν
$$G^{ij} \in L^2(0,T)(i = 1, \cdots, nj = 1, \cdots, m).$$
2. Μία $R^n - vallued$ στοχαστική διαδικασία $F = (F^1, F^2, \cdots, F^n)$, ανήκει στον $L^1_n(0,T)$ αν
$$F^i \in L^1(0,T)(i = 1, \cdots, n).$$

Ορισμός Αν $G \in L^2_{n\times m}(0,T)$, τότε
$$\int_0^T G dW$$
είναι μία $R^n - valued$ τυχαία μεταβλητή, της οποίας η $i-$οστή συνηστώσα είναι
$$\sum_{j=1}^{m} \int_0^T G^{ij} dW^j (i = 1, \cdots, n).$$

Προσεγγίζοντας με βήμα διαδικασιών όπως πριν , μπορούμε να ορίσουμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα Αν $G \in L^2_{n\times m}(0,T)$, τότε

$$E(\int_0^T GdW) = 0,$$

και

$$E(\mid \int_0^T GdW \mid^2) = E(\int_0^T \mid G \mid^2 dt),$$

όπου $\mid G \mid^2 := \sum_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m} \mid G^{ij} \mid^2$.

Ορισμός Αν $X(\cdot) = (X^1(\cdot), \cdots, X^n(\cdot))$ είναι μία $R^n - valued$ στοχαστική διαδικασία τέτοια ώστε

$$X(r) = X(s) + \int_s^r Fdt + \int_s^r GdW$$

για κάποιες $F \in L^1_n(0,T)$,$G^2_{n\times m}(0,T)$ και $0 \leqslant s \leqslant r \leqslant T$, τότε λέμε ότι η $X(\cdot)$ έχει την στοχαστική διαφορική

$$dX = Fdt + GdW.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$dX^i = F^i dt + \sum_{j=1}^m G^{ij} dW^j$$

για $i = 1, \cdots, n$.

3.13 Τύπος του Itô σε $n-$διαστάσεις

Υποθέτουμε ότι $dX = Fdt + GdW$, όπως παραπάνω. Έστω η συνάρτηση $u : R^n \times [0,T]$ να είναι συνεχής, με συνεχείς μερικές παραγώγους $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, (i,j = 1, \cdots, n)$. Τότε

$$d(u(X(t),t)) = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dX^i + \frac{1}{s}2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{l=1}^m G^{il}G^{jl}dt,$$

όπου το επιχείρημα των μερικών παραγώγων της u είναι $(X(t),t)$.

Λήμμα (Άλλη απλή στοχαστική διαφορική.)

Έστω οι $W(\cdot)$ και $Y(\cdot)$ να είναι ανεξάρτητες μονοδιάστατες κινήσεις *Brown*. Τότε

$$d(WY) = WdY + YdW.$$

Συγκρίνουμε την περίπτωση $W = Y$. Δεν υπάρχει κανένας διορθωτικός όρος $''dt''$ εδώ, αφού W, Y είναι ανεξάρτητες.

Λήμμα (Παραγώμενος κανόνας του *Itô* με διάφορες κινήσεις *Brown*.)

Υποθέτουμε ότι
$$dX_1 = F_1 dt + \sum_{k=1}^{m} G_1^k dW^k$$
και
$$dX_2 = F_2 dt + \sum_{l=1}^{m} G_2^l dW^l,$$
όπου $F_i \in (0,T)$ και $G_i^k \in L^2(0,T)$ για $i = 1, 2$και $k = 1, \cdots, m$.
Τότε
$$d(X_1X_2) = X_1 dX_2 + X_2 dX_1 + \sum_{k=1}^{m} G_1^k G_2^k dt.$$
Η απόδειξη είναι μια τροποποίηση του εν λόγω μονοδιάστατου παραγώμενου κανόνα του *Itô*, όπως πριν με το νέο εξαγόμενο
$$d(W^iW^j) = W^i dW^j + W^j dW^i + \delta_{ij} dt,$$
σύμφωναμε το παραπάνω λήμμα.

Εναλλακτική σημειογραφία Όταν
$$dX = Fdt + GdW,$$
μερικές φορές γράφουμε
$$H^{ij} := \sum_{k=1}^{m} G^{ik} G^{jk}.$$
Τότε ο τύπος του *Itô* γίνεται,
$$Du(X,t) = (\frac{\partial u}{\partial t} + F \cdot Du + 1/2H : D^2u)dt + Du \cdot GdW,$$
όπου $Du = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdot, \frac{\partial u}{\partial x_n})$ είναι η κλίση της u στις $x-$μεταβλητές,
$$D^2u = ((\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}))$$
ο πίνακας **Hessian** και
$$F \cdot Du = \sum_{i=1}^{n} F^i \frac{\partial u}{\partial x_i},$$
$$H : D^2u = \sum_{i,j=1}^{n} H^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$
$$Du \cdot GdW = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} G^{ik} dW^k.$$

3.14 Πως να θυμόμαστε τον τύπο του Itô

Μπορούμε να υπολογίσουμε συμβολικά το

$$d(u(X,t)) = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dX^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dX^i dX^j,$$

και στη συνέχεια, να απλοποιήσουμε τον όρο $''dX^i dX^j''$ με το να το επεκτείνουμε προς τα έξω και χρησιμοποιώντας τους τυπικούς κανόνες πολλαπλασιασμού έχουμε

$$(dt)^2 = 0, dt dW^k = 0, dW^k dW^l = \delta_{kl} dt$$

$(k, l = 1, \cdots, m)$.
Η προηγούμενη θεωρία παρέχει μια αυστηρή έννοια για όλα αυτά.

Κεφάλαιο 4

Στοχαστικές Διαφορικές και Εξισώσεις Πλάτους

4.1 Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις

Είμαστε τελικά έτοιμοι να ασχοληθούμε με τις Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις.

Ορισμός 1. Έστω $W(\cdot)$ να είναι μία $m-$διάστατη κίνηση $Brown$ και X_0 μία $n-$διάστατη τυχαία μεταβλητή η οποία είναι ανεξάρτητη του $W(\cdot)$. Από εδώ και στο εξής θα παίρνουμε

$$F(t) := U(X_0, W(s))(0 \leqslant s \leqslant t))(t \geqslant 0),$$

η $\sigma-$άλγεβρα που παρήχθηκε από το X_0 και το ιστορικό της διαδικασίας $Wiener$ μέχρι την χρονική στιγμή t.

2. Υποθέτουμε ότι δίνεται $T > 0$ και

$$b : R^n \times [0, T] \to R^n$$

$$B : R^n \times [0, T] \to M^{n\times m}$$

οι οποίες είναι δοθείσες συναρτήσεις (Προσοχή, δεν είναι τυχαίες μεταβλητές). Προβάλουμε τα συστατικά αυτών των συναρτήσεων γράφοντας

$$b = (b^1, b^2, \cdots, b^n), \text{ και } B \text{ πίνακας.}$$

4.1.1 Ύπαρξη και Μοναδικότητα των λύσεων

Εδώ απευθυνόμαστε στο πρόβλημα χτισίματος των λύσεων σε Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις. Ξεκινάμε με το να γράψουμε μία περίπτωση

1. **Περίπτωση σε μία διάσταση**.
Έστω $b : R \to R$ να είναι C^1, με $|b'| \leqslant L$ για κάποια σταθερά L, και προσπαθούμε να λύσουμε την μονοδιάστατη Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση

$$dX = b(X)dt + dW \tag{4.1}$$

$$X(0) = x$$

όπου $x \in R$. Τώρα η Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση σημαίνει

$$X(t) = x + \int_0^t b(X)ds + W(t),$$

για όλους τους χρόνους $t \geqslant 0$, κι αυτή η διατύπωση υποδηλώνει ότι προσπαθούμε μία διαδοχική μέθοδο προσέγγισης για να κατασκευάσουμε μία λύση. Έτσι ορίζουμε $X^0(t) \equiv x$, και μετά

$$X^{n+1}(t) := x + \int_0^t b(X^n)ds + W(t)(t \geqslant 0)$$

για $n = 0, 1, \cdots$. Μετά γράφουμε

$$D^n(t) := \max_{0 \leqslant s \leqslant t} |X^{n+1}(s) - X^n(s)|(n = 0, 1, \cdots)$$

και αξίζει να σημειωθεί ότι για δοθέν συνεχές απλό μονοπάτι κίνησης $Brown$, έχουμε

$$D^0(t) := \max_{0 \leqslant s \leqslant t} |\int_0^s b(x)dr + W(s)| \leqslant C$$

για όλους τους χρόνους $0 \leqslant t \leqslant T$, όπου η C εξαρτάται από το ω.
Τώρα ισχυριζόμαστε ότι

$$D^n(t) \leqslant C\frac{L^n}{n!}t^n$$

για $n = 0, 1, \cdots, 0 \leqslant t$. Για να δούμε ότι ισχύει η παραπάνω ανύσωση πρέπει να κάνουμε τον εξής συλλογισμό:

$$D^n(t) = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} |\int_0^s b(X^n(r)) - b(X^{n-1}(r))dr|$$
$$\leqslant L\int_0^t D^{n-1}(s)ds \leqslant L\int_0^t C\frac{L^{n-1}s^{n-1}}{(n-1)!}ds,$$

όπου από την υπόθεση επαγωγής

$$= C\frac{L^n t^n}{n!}$$

Μία οπτική του ισχυρισμού, για $m \geqslant n$ είναι ότι έχουμε

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} |X^m(t) - X^n(t)| \leqslant C\sum_{k=n}^{\infty} \frac{L^k T^k}{k!} \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Έτσι σχεδόν για κάθε η $\omega, X^n(\cdot)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $0 \leqslant t \leqslant T$ στην οριακή διαδικασία $X(\cdot)$.

2. Λύση της Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης μέσω αλλαγής μεταβλητών

Εδώ έχουμε να κάνουμε με μία διαδικασία για την επίλυση της Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης μέσω έξυπνης αλλαγής των μεταβλητών.
Δεδομένου μίας γενικής μονοδιάστατης Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης της μορφής

$$dX = b(X)dt + \sigma(X)dW \tag{4.2}$$

$$X(0) = x,$$

ας λύσουμε αρχικά την

$$dY = f(Y)dt + dW \tag{4.3}$$

$$Y(0) = y,$$

όπου η f θα επιλυθεί αργότερα, και ψάχνουμε να βρούμε μία συνάρτηση u, τέτοια ώστε

$$X := u(Y)$$

που να λύνει την δική μας Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση (4.2). Αξίζει να σημειωθεί ότι μπορούμε αρχικά να λύσουμε την (4.3) σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα. Υποθέτωντας για την ώρα ότι οι u και f είναι γνωστές, υπολογίζουμε χρησιμοποιώντας την $Ito's formula$ ότι

$$dX = u^{'}(Y)dY + \tfrac{1}{2}u^{''}(Y)dt$$

$$= [u^{'}f + \tfrac{1}{2}u^{''}]dt + u^{'}dW.$$

Έτσι, η $X(\cdot)$ λύνει την (4.2) υπό την προϋπόθεση ότι

$$u^{'}(Y) = \sigma(X) = \sigma(u(Y)),$$

$$u^{'}(Y)f(Y) + \tfrac{1}{2}u^{''}(Y) = b(X) = b(u(Y)),$$

και

$$u(y) = x$$

Έτσι, ας λύσουμε αρχικά την Συνήθη Διαφορική Εξίσωση

$$u'(z) = \sigma(u(z))$$

$$u(y) = x$$

με $z \in R$, όπου $' = \frac{d}{dz}$, και μετά, αφού η u είναι γνωστή, λύνουμε την

$$f(z) = \tfrac{1}{\sigma(u(z))}[b(u(z)) - \tfrac{1}{2}u''(z)].$$

Δεν θα συζητήσουμε εδώ τις συνθήκες υπό τις οποίες όλα αυτά είναι πιθανά.
Αξίζει να σημειωθεί ότι και οι δύο μέθοδοι περιγράφουν πάνω από την αποφυγή όλων των εκτημώμενων *martingales*.

3. **Γενικό Θεώρημα Ύπαρξης και Μοναδικότητας**

Ξεκινάμε με ένα πολύ σημαντικό λήμμα.

Λήμμα *GRONWALL*

Έστω ϕ και f να είναι δύο μη αρνητικές συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται για $0 \leqslant t \leqslant T$ κι έστω $C_0 \geqslant 0$ που υποδηλώνει μία σταθερά. Αν

$$\phi(t) \leqslant C_0 + \textstyle\int_0^t f\phi ds \text{ για όλα τα } 0 \leqslant t \leqslant T,$$

τότε

$$\phi(t) \leqslant C_0 \exp^{\int_0^t fds} \text{ για όλα τα } 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Απόδειξη
Θέτω $\Phi(t) := C_0 + \int_0^t f\phi ds$. Τότε $\Phi' = f\phi \leqslant f\Phi$, και άρα

$$(\exp^{-\int_0^t fds}\Phi)' = (\Phi' - f\Phi)\exp^{-\int_0^t fds} \leqslant (f\Phi - f\Phi)\exp^{-\int_0^t fds} = 0$$

Ως εκ τούτου,

$$\Phi(t)\exp^{-\int_0^t fds} \leqslant \Phi(0)\exp^{-\int_0^t fds} = C_0,$$

κι έτσι

$$\phi(t) \leqslant \Phi(t) \leqslant C_0 \exp^{-\int_0^t fds}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΥΠΑΡΞΗΣ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
Έστω ότι $b : R^n \times [0,T] \to R^n$ και $B : R^n \times [0,T] \to M^{m\times n}$ είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

α)

$$|b(x,t) - b(\widehat{x},t)| \leqslant L|x - \widehat{x}|$$

$$|B(x,t) - B(\widehat{x},t)| \leqslant L|x - \widehat{x}|$$

β)

$$|b(x,t)| \leqslant L(1 + |x|)$$

$$|B(x,t)| \leqslant L(1 + |x|)$$

για όλα τα $0 \leqslant t \leqslant T, x \in R^n$ και για κάποια σταθερά L.

Έστω X_0 να είναι οποιαδήποτε R^n-βαθμού τυχαία μεταβλητή έτσι ώστε

$$E(|X_0|^2) < \infty$$

και

$$X_0 \text{ να είναι ανεξάρτητη της } W^+(0),$$

όπου $W(\cdot)$, είναι μία δοθείσα $m-$διάστατη κίνηση $Brown$.
Έτσι, υπάρχει μία μοναδική λύση $X \in L_n^2(0,T)$ της Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης

$$dX = b(X,t)dt + B(X,t)dW$$

$$X(0) = X_0$$

με $(0 \leqslant t \leqslant T)$.

Παρατήρηση

1 Μοναδική σημαίνει ότι αν $X, \widehat{X} \in L_n^2(0,T)$ με σχεδόν σίγουρα συνεχή απλά μονοπάτια, όπου και οι δύο λύνουν την Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση, τότε

$$P(X(t) = \widehat{X}(t) \text{ για όλα τα } 0 \leqslant t \leqslant T) = 1.$$

2 Η υπόθεση α) και β)του θεωρήματος λέει ότι b και B είναι ομοιόμορφα $Lipschitz$ συνεχείς στην μεταβλητή x. Αξίζει να σημειωθεί επίσης ότι η υπόθεση β) πράγματι προκύπτει από την α).

4.2 Εξισώσεις Πλάτους

Η βασική διαφορά ανάμεσα σε μικρά και μεγάλα πεδία είναι η ύπαρξη ενός μεγάλου φασματικού χάσματος τάξης $O(1)$ στον γραμμικοποιημένο τελεστή της ΜΔΕ. Σε φραγμένα χωρία, έχουμε έναν πεπερασμένο αριθμό $e = (e_1, ..., e_n)$ ιδιοδιανυσμάτων, όπως οι αντίστοιχες ιδιοτιμές αλλάζουν πρόσημο στην μεταβολή της σταθερότητας. Αν είμαστε κοντά στην διακλάδωση, όλες οι άλλες ιδιοτιμές είναι αρνητικές και επαρκώς μακριά από το 0. Επίσημα επιχειρήματα εύκολα δείχνουν ότι τα πλάτη $A \in \mathbb{R}^n$ των κυρίαρχων τρόπων δίνουν αυτή την λεγόμενη εξίσωση πλάτους, ενώ η λύση u της $SPDE's$ έχει προσεγγιστεί από

$$u(t,x) = (\epsilon^2 t)e(x) + O(\epsilon^2),$$

όπου ϵ^2 είναι μία τυπική κλίμακα για την απόσταση από την διακλάδωση.

Σε μη φραγμένες ή απλά πολύ μεγάλες περιοχές, η εικόνα αυτή αλλάζει εντελώς. Ακόμα και πολύ κοντά στην διακλάδωση ένας μεγάλος αριθμός τρόπων είναι ήδη πάνω από το όριο της σταθερότητας, αλλά εξακολουθεί να είναι μικρό. Στη περίπτωση αυτή, το πλάτος A υπόκειται σε επιβράδυνση διαμορφώσεων στον χώρο, λαμβάνοντας υπόψην τον μεγάλο αριθμό των ασθενών σταθερών τρόπων. Η λύση u δίνεται πλέον τώρα από την

$$u(t,x) = \epsilon A(\epsilon^2 t, \epsilon x)e(x) + O(\epsilon^2)$$

και το A πληρεί μία (στοχαστική) ΜΔΕ, η οποία καλείται εξίσωση πλάτους ή εξίσωση διαμόρφωσης. Το τυπικό παράδειγμα είναι η στοχαστική πολύπλοκη εξίσωση $Ginzburg-Landau$. Ένα βασικό σημείο είναι ότι η εξίσωση πλάτους για το A είναι ανεξάρτητη του ϵ. Αν και τα μονοπάτια της διαδικασίας $\{A(T)\}_{T\geqslant 0}$ εξαρτούνται ρητά από το ϵ, αυτή η εξάρτηση εξαφανίζεται από το επίπεδο των μέτρων πιθανότητας λόγω των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του θορύβου. Έτσι οποιοδήποτε αποτέλεσμα για την εξίσωση πλάτους μεταφέρει στην ανακλιμακώμενη δήλωση για την αρχική συνθήκη, δείχνει ότι το $\epsilon > 0$ είναι μικρό. Αυτό για παράδειγμα είναι σημαντικό για τα αποτελέσματα για τον τύπο των προτύπων. Θα μπορούσαμε επίσης να αναφερθούμε σε αυτό το γεγονός ως ένα είδος της κανονικής μορφής θεωρίας, όπως η εξίσωση πλάτους για πολλά παραδείγματα θα είναι πάντα του ίδιου τύπου $Ginzburg - Landau$.

Πρέπει πρώτα να παρουσιάσουμε αποτελέσματα επίσημης παραγωγής μιας εξίσωσης πλάτους. Γι΄ αυτό τον λόγο χρειαζόμαστε κυβικές μη γραμμικότητες, όπου επίσης παίρνουμε υψηλού βαθμού διορθώσεις υπόψην. Οι τετραγωνικές μη γραμμικότητες παρουσιάζουν ειδικές ιδιότητες, όπως σε πολλά παραδείγματα οι κυρίαρχοι τρόποι δεν αντιστοιχίζονται με κυρίαρχες λειτουργίες με την γραμμικότητα.

4.2.1 Επίσημοι Υπολογισμοί

Σε αυτή την ενότητα, θα συζητήσουμε την επίσημη παραγωγή των εξισώσεων πλάτους και διορθώσεις υψηλότερης τάξης. Ως εκτούτου, χρησιμοποιούμε ανάλυση πολλαπλής κλίμακας για άμβλυνση της εξίσωσης στις βασικές δυναμικές, η οποία συνεπάγεται την επέκταση όλων των όρων σε μία μικρή παράμετρο. Αυτό είναι γνωστό για πολλά παραδείγματα.

Ας εξετάσουμε παραβολικές ημι-γραμμικές $SPDE's$ με επιπρόσθετο εξαναγκασμό κοντά σε μία αλλαγή της σταθερότητας. Ας υποθέσουμε ότι ο θόρυβος είναι από την τάξη της απόστασης από την διακλάδωση. Η χρήση του προσθετικού θορύβου είναι μόνο κυρίως για την απλότητα της παρουσίασης, κι όχι πολύ περιοριστική. Το γενικό πρότυπο είναι μία εξίσωση του τύπου

$$\theta_t u = Lu + \epsilon^2 Au + F(u) + \epsilon^2 \xi, \tag{4.4}$$

όπου $L \to dissipative$ τελεστής με μη μηδενική πεπερασμένη διάσταση πυρήνα $\epsilon^2 Au$ είναι μια μικρή (γραμμική) ντετερμινιστική διατάραξη, F είναι μη γραμμικότητα, $\xi \to \xi(t,x)$ είναι ο Γκαουσιανός θόρυβος, ο οποίος θα πρέπει να ληφθεί για να είναι σε χρόνο και μπορεί να είναι λευκός ή ένχρωμος. Για να είμαστε πιο συγκεκριμένοι, υποθέτουμε ότι ξ είναι μία γενικευμένη διαδικασία Γκαουσιανή, έτσι ώστε για την μέση τιμή και τη συσχέτιση να έχουμε

$$E_\xi(t,x) = 0 \text{ και } E_\xi(t,x)\xi(s,y) = \delta(t-s)q(x-y)$$

για κάποια κατάλληλη χωρική συνάρτηση συσχετισμού (ή κατανομής) q. Αν q είναι η κατανομή δ, τότε καλούμε το ξ χωροχρονικό λευκό θόρυβο. Σε ευτή την περίπτωση η $\xi = \theta_t w$ είναι μία γενικευμένη παράγωγος κυλινδρικής διαδικασίας $Wiener$ $\{W(t)\}_{t\geqslant 0}$ σε ένα κατάλληλο χώρο $Hilbert$. Για κάθε q μπορούμε πάντα να γράφουμε $\xi = \theta_t QW$ για κάποιο γραμμικό τελεστή Q. Για τον επίσημο υπολογισμό στην περίπτωση φραγμένου χωρίου, βασιζόμαστε κυρίως στις κλιμακούμενες ιδιότητες του θορύβου στον χρόνο. Για να είμαστε πιο ακριβείς, χρειαζόμαστε ότι $\epsilon^{-1}\xi(\epsilon^{-2}T,x)$ και $\xi(T,x)$ είναι για όλες τις εκδοχές $\epsilon > 0$ για την ίδια διαδικασία θορύβου. Αυτό είναι εύκολο να εξακριβωθεί στο επίπεδο των συναρτήσεων συσχέτισης χρησιμοποιώντας τις κλιμακόμενες ιδιότητες της $Delta-$διακλάδωσης.

4.2.2 Κυβικές Μη Γραμμικότητες

Ένα ενδιαφέρον παράδειγμα μιας τέτοιας εξίσωσης με κυβική μη γραμμμικότητα έχει δοθεί από την εξίσωση $Rayleigh - Benard$, η οποία χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά ως ένα μοντέλο παιχνιδιού θερμοδυναμικής αστάθειας στο πρόβλημα $Rayleigh - Benard$. Η επίσημη $SPDE$ είναι

$$\theta_t u = -(1-\Delta)^2 u + \epsilon^2 vu - u^3 + \epsilon^2 \xi. \tag{4.5}$$

Είναι προφανές από τον τύπο ότι $L = -(1-\Delta)^2$, $A = vI$ για κάποιο $v \in [-1,1]$ και $F(u) = -u^3$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουμε περιοδικά οριοθετημένες συνθήκες στον τομέα $[0, 2\pi l]^d$ διάστασης $d \in N$ και ακεραίου αριθμού μήκους $l > 0$. Αυτή είναι κυρίως η ευκολία να διασφαλιστεί δηλαδή το ότι η αλλαγή της σταθερότητας είναι ακριβώς στο $v = 0$. Μετά από ελαφρές τροποποιήσεις μπορούμε να τροποποιήσουμε μη ακεραία μήκη $l > 0$ ή μη τετραγωνισμένες περιοχές.

Θεωρούμε μία εξίσωση τύπου (4.4) ή (4.5). Έστω F να είναι κυβική (π.χ. $F(u) = F(u,u,u)$ είναι τρίγραμμη) και χαρακτηρίζει τον πυρήνα (ή μηδενόχωρο) του L από το N. Χαρακτηρίζοντας την ορθογώνια προβολή πάνω από το N με P_c και θέτωντας $P_s = I - P_c$, τότε έχουμε φτιάξει τη ακόλουθη υπόθεση:

$$u(t) = \epsilon\alpha(\epsilon^2 t) + \epsilon^2 b(\epsilon^2 t) + \epsilon^2 \psi(t) + O(\epsilon^3), \tag{4.6}$$

με α, $b \in N$ και $\psi \in S := N^{\perp}$ το οποίο είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του N στο H.

Αυτή η υπόθεση αιτιολογείται από το γεγονός ότι λόγω της γραμμικής απόσβεσης τάξης 1 του S, οι τρόποι στο S αναμένονται να αναπτύσονται σε χρονικές κλίμακες τάξης 1, ενώ οι τρόποι στο N αναμένονται να συμετάσχουν σε πολύ πιο αργές χρονικές στιγμές κλίμακες τάξης ϵ^{-2}. Αυτό οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι έχουμε ένα καλά ορισμένο φασματικό χάσμα τάξης O(1) μεταξύ 0 και πρώτης μη μηδενικής ιδιοτιμής. Δεν χρησιμοποιούμε χαμηλότερης τάξης όρους, αφού αναμένουμε ότι οι μικρές λύσεις παρμένουν μικρές. Επιπρόσθετα, χρησιμοποιώντας γραμμική ή μη γραμμική σταθερότητα, είναι πιθανόν να επαληθευτεί ότι το τυπικό μέγεθος μιας λύσης αντιστοιχεί με εκείνη που προβλέπεται από την υπόθεση (4.6). Η αυστηρή δήλωση αυτών των ευρετικών επιχειρημάτων καλείται 'αποτέλεσμα προσελκισιμότητας'.

Συνδέοντας την υπόθεση (4.5) με την (4.4) και επανακλιμακώνοντας στην χαληλή χρονικά κλίμακα $T = \epsilon^2 t$ και επεκτείνοντας σε τάξεις του ϵ, παίρνουμε συλλέγοντας όλους τους όρους τάξης ϵ^3 στο N

$$\theta_{T\alpha}(T) = A_c\alpha(T) + F_c(\alpha(T)) + \theta_T\beta(T). \tag{4.7}$$

Εδώ, $\beta(T) = \epsilon P_c Q W(\epsilon^{-2}T)$ είναι η διαδικασία $Wiener$ στο N με ανεξάρτητες διανομείς του ϵ, και γράφουμε $A_c = P_c A$ και $F_c = P_c F$ για συντομία.

Αυτή η προσέγγιση ονομάζεται εξίσωση πλάτους και είναι ευρέως γνωστή για πολλά παραδείγματα στην φυσική και στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Επιπλέον, υπάρχουν πολυάριθμες παραλλαγές αυτής της μεθόδου. Ωστόσο, τα περισσότερα από αυτά τα αποτελέσματα είναι μη αυστηρές προσεγγίσεις που χρησιμοποιούν αυτού του τύπου ανάλυση πολλαπλής κλίμακας.

Παρατήρηση Ένα βασικό σημείο είναι ότι η προσέγγιση μέσω εξισώσεων πλάτους είναι, τουλάχιστον στον τομέα της διανομής, εντελώς ανεξάρτητη από την μικρή παράμετρο ϵ, όπως η εξίσωση πλάτους είναι σε γενικές γραμμές $\epsilon-$ανεξάρτητη. Ως εκ τούτου, εμείς δεν θα χρησιμοποιούμε έναν δείκτη ϵ για ο α. Αν και τα μονοπάτια β της κίνησης $Brown$ σε μια εξίσωση πλάτους εξαρτόνται ουσιαστικά από το ε, λόγω της επανακλημάκωσης στον χρόνο, η διανομή του β είναι ουσιαστικά ανεξάρτητη του ϵ. Αυτό συμβαίνει λόγω του ότι επανακλιμακώσαμε τις ιδιότητες της διαδικασίας $Wiener$, οι οποίες αναφέρουν ότι η διαδικασία $\{eW(\epsilon^{-2}t)\}_{t\geqslant 0}$ είναι μία εκδοχή της διαδικασίας $Wiener$ $\{W(t)\}_{t\geqslant 0}$ για όλα τα $\epsilon > 0$. Ως εκ τούτου, από την ασθενή μοναδικότητα των λύσεων, η κατανομή των λύσεων του (4.7) είναι πραγματικά ανεξάρτητη από το ϵ. Έτσι, επίσης, αμελούμε την εξάρτηση του α από το ϵ στον συμβολισμό.

Ας επιστρέψουμε τώρα σε υψηλότερης τάξης διορθώσεις. Έχουμε ήδη διαπιστώσει ότι οι αργές λειτουργίες (ή πλάτη των κυρίαρχων τρόπων) αποσυνδέονται από τις γρήγορες λειτουργίες, τουλάχιστον κατά προσέγγιση προς την πρώτη τάξη του ϵ. Θα δούμε τώρα ότι αυτό εξακολουθεί να ισχύει για τις διορθώσεις δεύτερης τάξης, επίσης.

Συλλέγοντας όρους τάξης ϵ^2 σε αποδόσεις S για ψ, η γραμμική εξίσωση είναι

$$\theta_t\psi(t) = L_s\psi(t) + P_s\xi(t), \tag{4.8}$$

όπου $L_s = P_s L$. Μπορούμε να δείξουμε επιπρόσθετα ότι $b = 0$.

Δεν είναι εύκολο να προχωρήσουμε σε υψηλότερης τάξης διορθώσεις, αφού περιλαμβάνουν συνδέσμους υψηλών και χαμηλών τρόπων, με αποτέλεσμα, να γίνει η προσεγγιστική εξίσωση πολύ πιο πολύπλοκη. Επιπλέον, χρειάζεται επίσημα να δικαιολογίσουμε τα τετραγωνικά συναρτησοειδή των όρων του θορύβου, τα οποία είναι εξαιρετικά προβληματικά.

4.2.3 Άλλα είδη μη γραμμικοτήτων

Οι κυβικές μη γραμμικότητες δεν είναι ειδικές και μπορούμε να επεκτείνουμε την μέθοδο σε πολλά διαφορετικά είδη με γραμμικοτήτων. Μπορούμε απλά να εξετάσουμε τις διαφορές κλιμάκωσης του θορύβου και της γραμμικής σταθερότητας/αστάθειας για να αποκτήσουμε ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα. Αν δεν προσαρμόσουμε την κλιμάκωση, χάνουμε είτε την γραμμική αστάθεια ή τον θόρυβο της εξίσωσης πλάτους.

Ας υποθέσουμε σε αυτό το σημείο ότι η $F^{(n)}$ είναι κάποια πολυγραμμική μη γραμμικότητα, η οποία είναι ομογενής βαθμού $n \in N$ με $n \geqslant 2$. Μετά, η αντοχή του θορύβου της $SPDE's$ (4.4) πρέπει να αλλάξει σε $\sigma^2 = \epsilon^{(n+1)/(n-1)}$ από ϵ^2. Άρα πλέον η εξίσωση γίνεται

$$\theta_t u = Lu + \epsilon^2 Au + F^{(n)}(u) + \epsilon^{(n+1)/(n-1)}\xi. \tag{4.9}$$

Τώρα με την υπόθεση

$$u(t) = \epsilon^{3/(n-1)}\alpha(\epsilon^2 t) + \epsilon^{(n+1)/(n-1)}\psi(t) + O(\epsilon^{2n/(n-1)}) \tag{4.10}$$

και τον παρόμοιο επίσημο υπολογισμό όπως στην προηγούμενη ενότητα, αντλούμε τον ίδιο τύπο εξίσωσης πλάτους. Πρώτα συλλέγουμε όλους τους όρους τάξης $\epsilon^{2n/(n-1)}$ σε N αποδόσεις

$$\theta_T \alpha = P_c A\alpha + P_c F^{(n)}(\alpha) + \theta_T \beta \tag{4.11}$$

η οποία περιέχει μία μη γραμμικότητα η οποία είναι ομογενής βαθμού n. Η διόρθωση δευτέρας τάξης είναι ακριβώς η ίδια (4.8) όπως στην κυβική περίπτωση, αλλά πλέον περιέχει όλους τους όρους στο S τάξης $\epsilon^{(n+1)/(n-1)}$.

Δεν θα επικεντρωθούμε σε αυστηρά αποτελέσματα τέτοιου τύπου εξισώσεων, αφού είναι παρόμοιοι με την κυβική περίπτωση. Μετά από μικρές τροποποιήσεις μπορούμε εύκολα να μεταφέρουμε όλα τα αποτελέσματα στην γενική περίπτωση.

Ας σχολιάσουμε τελικά την απόσταση από την διακλάδωση, το ότι δηλαδή είναι απαραίτητο προκειμένου να δούμε τα στοχαστικά αποτελέσματα σε μία εξίσωση πλάτους. Η τάξη του μεγέθους της απόστασης, από την άποψη της αντοχής του θορύβου σ^2, είναι:

$$\epsilon^2 = \sigma^{4(n-1)/(n+1)} \to \sigma^4 \text{ για } n \to \infty \text{ και } 1 \text{ για } n \to 1.$$

Έτσι, όσο μεγαλύτερη είναι η τάξη της μη γραμικότητας τόσο πιο κοντά πρέπει να πάμε στην διακλάδωση, προκειμένου να δούμε την επίδραση του θορύβου για τους κυρίαρχους τρόπους, τουλάχιστον υπό εξέταση της χρονικής κλίμακας. Ας αλλάξουμε τελικά την οπτική γωνία, εκφράζοντας τον θόρυβο από την άποψη ότι $\epsilon > 0$. Τώρα

$$\sigma^2 = \epsilon^{(n+1)/(n-1)} \to \epsilon \text{ για } n \to \infty \; 0 \text{ για } n \to 1.$$

4.2.4 Τετραγωνικές μη γραμμικότητες

Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό των τετραγωνικών μη γραμμικοτήτων $B(u) = B(u,u)$ είναι ότι σε πολλά παραδείγματα $P_cB(\alpha) \equiv 0$ για κάθε $\alpha \in N$. Σε αυτή την περίπτωση η υπόθεση (4.10) αποδίδει μόνο την γραμμικοποίηση. Αυτό σημαίνει ότι εξακολουθούμε να βλέπουμε ότι οι λύσεις είναι πολύ μικρές για να συλλάβουν κάτι από τα μη γραμμικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην εξίσωση. Προκειμένου να ληφθεί μία μη γραμμική εξίσωση πλάτους, είτε θεωρούμε μεγάλο θόρυβο, ή κοιτάμε το σύστημα παραμέτρων όπου είμαστε πολύ κοντά σε αλλαγή της σταθερότητας.

Για να τονίσουμε αυτό το πρόβλημα, θα συζητήσουμε εν συντομία μία μονοδιάστατη εξίσωση $Burgers'$ η οποία δίνεται από :

$$\theta_t u = \theta_x^2 u + \mu_\epsilon u - u\theta_x u + \sigma_\epsilon \xi.$$

Έστω ξ ότι είναι ένας χωροχρονικός λευκός θόρυβος για απλότητα, κι έστω για παράδειγμα, οι περιοδικές οριακές συνθήκες στο [0,π] και $\mu_\epsilon = O(\epsilon^2)$. Παρατηρούμε εύκολα για τον χώρο των κυρίαρχων τρόπων ότι $N = span\{1\}$. Αλλά τώρα για $B(u) = u\theta_x u$ έχουμε ότι $B(1) = 0$, προφανώς.

Αν θέσουμε (αντί της περιοδικότητας) τώρα τις $Dirichlet$ οριακές συνθήκες στο [0,π], τότε η γραμμική σταθερότητα προκύπτει για $\mu_\epsilon = 1 + O(\epsilon^2)$. Επιπρόσθετα, $N = span\{sin\}$ και $B_c(sin) = 0$, όπου χρησιμοποιούμε πάλι την συντομογραφία $B_c = P_cB$ και $B_s = P_sB$. Ως εκ τούτου, και στις δύο περιπτώσεις με την υπόθεση του (4.6), αντλούμε μόνο την γραμμικοποίηση, όπως και στη εξίσωση πλάτους.

Υπάρχουν πολλά παραδείγματα σε προβλήματα της Φυσικής επιστήμης για εξισώσεις με τετραγωνικές μη γραμμικότητες και τις ίδιες σταθερές (προαπαιτούμενα), όπως τις περιγράψαμε παραπάνω. Ένα παράδειγμα είναι η ανάπτυξη των ακατέργαστων άμορφων επιφανειών, ενώ ένα άλλο είναι το παράδειγμα του σχηματισμού μοτίβου σε προβλήματα μεταφοράς. Όλες οι εξισώσεις περιγράφονται παρακάτω.

Αν θέλουμε να ληφθούν υπόψην τα μη γραμμικά φαινόμενα, τότε θα πρέπει να εξετάσουμε την σύζευξη των αργών κυρίαρχων τρόπων με τους γρήγορους. Στη συχέχεια θα σχολιάσουμε εν συντομία την επίσημη παραγωγή της εξίσωσης πλάτους σε αυτήν την περίπτωση.

Θεώρησε μια εξίσωση του τύπου

$$\theta_t u = Lu + \epsilon^2 Au + B(u,u) + \epsilon^2 \xi$$

με $B_c(\alpha,\alpha) = 0$ για κάθε $\alpha \in N$, όπου B είναι συμμετρική και διγραμμική. Έστω L, A και ξ όπως και πριν. Φτιάχνουμε την ακόλουθη ασυνήθιστη υπόθεση

$$u(t) = \epsilon\alpha(\epsilon^2 t) + \epsilon^2\psi + O(\epsilon^3),$$

με $\alpha \in N$ και $\psi \in S$, προκειμένου να ληφθούν υπόψην τόσο οι μη γραμμικοί όροι, όσο και οι όροι του θορύβου της εξίσωσης πλάτους. Η ασυνήθιστη υπόθεση μας αποδίδει μικρότερη τάξη στο ϵ στο ακόλουθο σύστημα από τυπικές προσεγγίσεις:
Πρώτης τάξης $O(\epsilon^2)$ σε χρονική κλίμακα t στο S

$$\theta_t\psi(t) = L_s\psi(t) + B_s(\alpha(\epsilon^2 t), \alpha(\epsilon^2 t)) + P_s\xi(t) \tag{4.12}$$

Δεύτερης τάξης ϵ^3 στο N σε χαμηλή χρονική κλίμακα $T = \epsilon^2 t$

$$\theta_T\alpha(T) = A_c\alpha(T) + 2B_c(\alpha(T), \psi(\epsilon^2 T)) + \theta_T\beta(T) \tag{4.13}$$

όπου το β ορίστηκε μετά.

Αυτές οι εξισώσεις είναι αφενός μια κυρίαρχη εξίσωση η οποία είναι παρόμοια με την εξίσωση πλάτους σε χαμηλή κλίμακα σε συνδιασμό με την (4.12) της υψηλής χρονικής κλίμακας. Εξισώσεις με παρόμοια δομή, θεωρούνται ιχνηθέτες σε ένα ταχύτατα εξελισόμενο πεδίο τυχαίας ταχύτητας. Τώρα ο στόχος είναι να πάρουμε μια αποτελεσματική εξίσωση, για την αργή συνιστώσα, εντελώς ανεξάρτητη από τους γρήγορους τρόπους.

Πρώτα επανακλιμακώνουμε την (4.12) σε χαμηλή κλίμακα $T = \epsilon^2 t$ με $\psi(t) = \Phi(\epsilon^2 t)$. Έτσι

$$\epsilon^2\theta_T\Phi = L_s\Phi + B_s(\alpha,\alpha) + \epsilon P_s\widehat{\xi},$$

όπου $\widehat{\xi}(T) = \epsilon^{-1}\xi(\epsilon^{-2}T)$ είναι μία επανακλιμακώμενη εκδοχή του θορύβου ξ. Όσο ο L_s είναι αντιστρέψιμος στο S, πηγαίνουμε σε χαμηλότερης τάξης του ϵ όπου:

$$\Phi = Ł_s^{-1}B_s(\alpha,\alpha).$$

Αυτό μαζί με την (4.13) καθιερώνει μία εννιαία προσεγγιστική εξίσωση

$$\theta_T\alpha = A_c\alpha - 2B_c(\alpha, L_s^{-1}B_s(\alpha,\alpha)) + \theta_T\beta. \tag{4.14}$$

Παραδόξως, αυτή η εξίσωση περιλαμβάνει κυβική μη γραμμικότητα, παρ΄ όλο που η μη γραμμικότητα στην αρχική εξίσωση ήταν τετραγωνική.

4.2.5 Μεγάλες ή μη Φραγμένες Περιοχές

Για μη φραγμένες περιοχές τα αποτελέσματα είναι πολύ διαφορετικά. Καταρχήν δεν χρειαζόμαστε ένα φασματικό χάσμα και κοντά στην αλλαγή της σταθερότητας μια ολόκληρη ομάδα ιδιοτιμών γίνεται ασταθής. Το ίδιο φαινόμενο εμφανίζεται, αν θεωρήσουμε μεγάλα πεδία, τα οποία είναι τουλάχιστον μεγέθους $O(\epsilon^{-1})$. Η ντετερμινιστική ΣΔΕ όπως και η στοχαστική περίπτωση έχουν πολυσχολιαστεί. Εδώ θα παρουσιάσουμε μία διαφορετική παραγωγή.

Θεωρούμε σαν παράδειγμα μία μονοδιάστατη εκδοχή της εξίσωσης $Swift-Hohenberg$, όπου πρωτοχρησιμοποιήθηκε σαν μοντέλο παιχνιδιού για την θερμοδυναμική αστάθεια στο πρόβλημα $Rayleigh - Benard$. Εδώ η $u(t,x) \in R, t > 0, x \in D_\epsilon = L\epsilon^{-1} \cdot [-1,1]$ πληρεί την

$$\theta_t u = -P(i\theta_x)u + \epsilon^2 vu - u^3 + \epsilon^{3/2}\xi, \tag{4.15}$$

όπου υπόκειται σε περιοδικές οριακές συνθήκες. Σημειώνουμε ότι, έχουμε ορίσει μία κλιμάκωση μεταξύ αντοχής του θορύβου και απόστασης από την διακλάδωση, που διαφέρει από εκείνη που χρησιμοποιούμε στην περίπτωση με φραγμένων χωρίων.

Ο γραμμικός τελεστής δίνεται από $P(\zeta) = (1-\zeta^2)^2$. Οι πολύπλοκες ιδιοσυναρτήσεις του γραμμικού τελεστή $P(i\theta_x)$ είναι $x \to e^{\frac{ik\epsilon\pi x}{L}}$ με αντίστοιχες ιδιοτιμές $P(\frac{k\epsilon\pi}{l})$ για $k \in Z$. Για απλότητα, θέτω ξ να είναι ο χωροχρονικός λευκός θόρυβος στον ακόλουθο επίσημο υπολογισμό. Θα βασιστούμε σε ιδιότητες κλιμάκωσης για τον θόρυβο, οι οποίες δεν είναι τόσο εύκολο να διατυπωθούν σε ένχρωμο θόρυβο. Για να είμαστε πιο ακριβείς, χρησιμοποιούμε ότι ξ και $\widehat{\xi}$ είναι εκδοχές του ίδιου θορύβου, όπου καθορίζουμε:

$$\widehat{\xi}(T,X) = \epsilon^{\frac{3}{2}}\xi(T\epsilon^{-2}, X\epsilon^{-1}). \tag{4.16}$$

Αναμένουμε μία γραμμική αστάθεια στο $e^{\pm ix}$, αφού $P(\pm 1) = 0$ και $P(x) > 0$ για $x \neq \pm 1$, αλλά λόγω του φραγμένου πεδίου, η $e^{\pm ix}$ δεν είναι γενικά μία ιδιοσυνάρτηση. Η κοντινότερη ιδιοσυνάρτηση είναι η $e^{iP_c(\frac{\epsilon}{L})x}$, όπου $P_c(\frac{\epsilon}{L}) := \frac{\epsilon\pi}{L}[\frac{L}{\epsilon\pi}]$ και $[\frac{L}{\epsilon\pi}]$ είναι η καμπύλη του $-P(i\theta_x)$. Να σημειώσουμε ότι προφανώς $\mid 1 - P_c(\frac{\epsilon}{L}) \mid \leqslant \frac{\epsilon\pi}{2L}$.

Φτιάχνουμε την ακόλουθη υπόθεση:

$$u(t,x) = \epsilon A(\epsilon^2 t, \epsilon x) e^{iP_c(\frac{\epsilon}{L})x} + \epsilon^3 B(\epsilon^2 t, \epsilon x) e^{3iP_c(\frac{\epsilon}{L})x} + c.c. \tag{4.17}$$

όπου $c.c.$ δηλώνει μια πολύπλοκη σύζευξη. Εδώ $R(z) = \frac{1}{2}(z + c.c.)$ δηλώνει το πραγματικό μέρος του $z \in C$. Ο όρος που περιλαμβάνει Β απλοποιεί μόνο τον επίσημο υπολογισμό. Δεν έχει καμμία επίδραση στο τελικό αποτέλεσμα.

Για την ντετερμινιστική εξίσωση το αποτέλεσμα για τα φραγμένα αλλά μεγάλα χωρία έχει ως εξής:

Χρησιμοποιούμε την υπόθεση με $P_c = 1$ και για την εξίσωση $Swift - Hohenberg$ λάβαμε την ακόλουθη εξίσωση πλάτους για A:

$$\theta_T A = 4\theta_x^2 A + vA - 3 \mid A \mid^2 A, \tag{4.18}$$

αλλά υπόκειται σε ϵ-εξαρτημένες γραγμένες συνθήκες στο [-1,1], όπου λαμβάνεται υπόψην ότι η υπόθεση σαν μία λύση πρέπει να είναι 4ε-περιοδική, όπου η $e^{\pm ix}$ γενικά δεν είναι. Χρησιμοποιούμε την άλλη υπόθεση (4.17) για να δούμε ότι όλοι οι ϵ-εξαρτημένοι όροι στην εξίσωση πλάτους είναι στην πραγματικότητα ομοιόμορφα μικροί στο L και εξαφανίζονται για $L \in \epsilon\pi N$. Επιπλέον, εξαιτίας του (4.17) ο επίσημος υπολογισμός αποδίδεται για τις πρότυπες περιοδικές φραγμένες συνθήκες της εξίσωσης πλάτους, οι οποίες είναι περισσότερο οικείες.

Συνδέοντας την υπόθεση (4.17) στην (4.15) και χρησιμοποιώντας

$$-P(i\theta_x)[fe^{ikx}] = [-P(i\theta_x - k)f]e^{ikx},$$

όπου είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι παίρνουμε μικρότερη τάξη (η οποία είναι ϵ^3)

$$\theta_T A e^{iP_c x} + c.c. = [4\theta_x^2 A - 4i(1-P_c)^2/\epsilon\theta_x A - (1-P_c^2)^2/\epsilon^2 A + vA]e^{iP_c x}$$

$$-(1-9P_c^2)Be^{3iP_c x} - A^3 e^{3iP_c x} - 3A \mid A \sim^2 e^{iP_c x} + c.c. + \widehat{\xi}.$$

Εδώ $\widehat{\xi}$, όπως και στην (4.16), είναι μία ανακλιμακώμενη εκδοχή της ξ. Προκειμένου να ξεφορτωθούμε τους όρους που είναι εξαρτημένοι στο e^{3ix}, διαλέγουμε $B = -(1-9P_c^2)^{-2}A^3$. Επιπρόσθετα, χρησιμοποιούμε την εξίσωση $1 - P_c^2 = 2(1-P_c) + O(\frac{\epsilon^2}{L^2})$. Τελικά, πρέπει να ξαναγράψουμε τον θόρυβο. Θα ξαναδούμε παρακάτω, ότι μπορεί κανείς να ορίσει ένα μιγαδικό χωροχρονικό λευκό θόρυβο η με κατανομή ανεξάρτητη του ϵ, τέτοια ώστε να αποκτήσουμε την παρακάτω εξίσωση πλάτους:

$$\theta_T A = 4(\theta_x A - 2i(1 - \frac{P_c}{\epsilon})^2 A + vA - 3A \mid A \mid^2 + \eta, \tag{4.19}$$

που υπόκειται σε περιοδικές φραγμένες συνθήκες στο $[-L, L]$. Αξίζει να σημειωθεί ότι $\frac{(1-P_c)}{\epsilon}$ είναι ομοιόμορφα σε ϵ μικρό για το μεγάλο L. Επιπρόσθετα, εξασφαλίζεται για $L \in \epsilon\pi N$.

Δεν υπάρχει ασήμαντο επιχείρημα, γιατί μπορούμε να ξαναγράψουμε τον θόρυβο ξ προκειμένου να αποκτήσουμε τον η. Επιπρόσθετα, θα πρέπει κανείς να είναι υπερβολικά προσεκτικός με την επίσημη ανάλυση σε αυτό το σημείο. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ότι υπάρχει μιγαδικός χωροχρονικός λευκός θόρυβος $\widehat{\eta}$ τέτοιος ώστε $\widehat{\xi}(T,Q) = \frac{[\widehat{\eta}(T,X)e^{ix} + c.c.]}{\sqrt{2}}$. Αυτό είναι προφανώς αληθές, αλλά αυστηρές αποδείξεις έχουν δείξει ότι αυτό το απλό επιχείρημα είναι ψευδές. Χρησιμοποιώντας την $\widehat{\eta}$ αποκτάμε τον συντελεστή $\frac{1}{\sqrt{2}}$ μπροστά από τον θόρυβο στην εξίσωση πλάτους, αλλά αυτό δεν υπάρχει στο αυστηρό αποτέλεσμα.

Το βασικό λάθος είναι ότι ο χωροχρονικός λευκός θόρυβος είναι τάξης $O(\epsilon)$, όπου εμείς τον περιορίζουμε σε τρόπους σε χώρο *Fourier* τάξης μεγαλύτερης του ϵ^{-1}. Ειδικά, αν κοιτάξουμε στην γραμμική εξίσωση, τότε είναι πιθανόν να υποστηρίξουμε ότι οι τρόποι είναι στην πραγματικότητα μικροί μόλις ο κυματάριθμος τους είναι μακριά από την αστάθεια $\pm P_c$ που αντιστοιχεί σε τρόπους e^{ikx} με κυματαριθμούς k τάξης $\pm\frac{P_c\pi}{\epsilon L}$.

Έστι παραμελώντας τους τρόπους μακριά από την αστάθεια, η σωστή αποσύνθεση του ξ είναι τώρα να διαχωριστεί σε δύο κομμάτια. Το πρώτο περιέχει όλους τους υπόλοιπους τρόπους *Fourier* με θετικό κυματαριθμό και το δεύτερο όλους τους τρόπους *Fourier* με αρνητικό κυματαριθμό. Μετά μπορούμε να αλλάξουμε αυτούς τους τρόπους σε χώρο *Fourier* με $\pm\frac{P_c\pi}{\epsilon L}$ τραβώντας έναν παράγωντα $e^{\pm iP_cx}$ έξω από τις σειρές *Fourier* του θορύβου. Τώρα θα βάλουμε αυτές τις μετασχηματισμένες διαδικασίες θορύβου στη εξίσωση πλάτους, ή της συζυγούς εκδοχής της.

Τελικά, θα γεμίσουμε αυτές τις διαδικασίες θορύβου με θόρυβο υψηλού κυματικού βαθμού, προκειμένου να πάρουμε έναν χωροχρονικό λευκό θόρυβο πάλι. Το γεγονός ότι μπορούμε να γεμίσουμε με υψηλούς τρόπους τον θόρυβο δεν είναι καθόλου προφανές από την ΜΔΕ. Ο βασικός λόγος είναι ότι έχουμε μία ισχυρή γραμμική απόσβεση σε υψηλούς τρόπους που παρουσιάζονται στην εξίσωση $Gizburg - Landau$ (4.19), όπου προκύπτει από το γραμμικό κομμάτι.

4.2.6 Γενική Δομή της Προσέγγισης

Δεν είναι σκοπός αυτού του μέρους να παρουσιάσουμε επίσημα αποτελέσματα. Αντ΄ αυτού θα τονίσουμε το σημαντικό βημα (βήμα κλειδί) για τον μη τεχνικό τρόπο. Για απλότητα παρουσίασης θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση φραγμένων χωρίων. Η περίπτωση μεγάλων ή μη φραγμένων χωρίων είναι παρόμμοια, αλλά παρουσιάζει πολλές τεχνικές δυσκολίες. Επιπρόσθετα, θα κολλήσουμε (μείνουμε αρκετά) σε κυβικές μη γραμμικότητες με επιπρόσθετο θόρυβο. Η μέθοδος απόδειξης για άλλου τύπου εξισώσεις είναι πολύ παρόμμοια, το μόνο που διαφέρει είναι η διατύπωση και οι τεχνικές λεπτομέριες.

Λόγω της έλλειψης κανονικότητας, δεν μπορούμε να προβούμε σε ντετερμινιστική σύνθεση. Αυτό είναι ένα από τα βασικά θέματα των $SPDE's$, αφού η προσέγγιση της ντετερμινιστικής ΜΔΕ στηρίζεται σε όρους για λύσεις των εξισώσεων πλάτους σε χώρους με αρκετά υψηλή κανονικότητα. Αλλά ειδικά για τις $SPDE's$ σε μεγάλα χωρία δεν είναι αυτή η περίπτωση.

Προκειμένου να πάρουμε $SPDE's$ παρόμοιες με την (4.4) κατά μία έννοια, θα χρησιμοποιήσουμε την ιδέα των ήπιων λύσεων. Αυτές είναι στοχαστικές διεργασίες με συνεχόμενα μονοπάτια τα οποία πληρούν την ακόλουθη διακύμανση αντιθέσεων τύπων:

$$u(t) = e^{tL}u(0) + \int_o^t e^{(t-\tau)L}[\epsilon^2 Au + F(u)](\tau)d\tau + \epsilon^2 W_L(t) \tag{4.20}$$

για $t \leqslant t^*$, όπου $t^* > 0$ είναι ένας σταματημένος (παγωμένος) χρόνος. Εδώ $\{e^{tL}\}_{t\geqslant 0}$ υποδηλώνει την υποομάδα των τελεστών που παράγονται από τον διαφορικό τελεστή L. Ορίζουμε την στοχαστική ανέλιξη

$$W_L(t) = \int_0^t e^{t-\tau} dW(\tau).$$

Εδώ $\theta_t W = \xi$ με γενικευμένη μορφή και W είναι κάποια κατάλληλη διαδικασία $Q-Wiener$ σε κάποιο χώρο $Hilbert$.

Χρησιμοποιούμε την προβολή P_c πάνω στον πυρήνα N του L και $P_s = I - P_c$, όπου έχουν ορισθεί όπως και πριν.

Ορισμός Ονομάζουμε $u_s(t) = P_s u(t) \in S$ γρήγορους τρόπους, αφού είναι αντικείμενα μιας ντετερμινιστικής εκθετικής αποσύνθεσης σε κλίμακα τάξης O(1). Επιπρόσθετα $u_c(t) = P_c u(t) \in N$ είναι οι αργοί τρόποι, αφού αλλάζουν μόνο σε χαμηλή χρονοκλίμακα $T = \epsilon^2 t$.

Σημειώστε για απλότητα ότι υποθέτουμε ότι P_c και ως εκ τούτου P_s μετατίθενται με L και ως εκ τούτου με e^{tL}. Οδηγούμαστε, αφού $e^{tL} P_c = P_c$, τότε:

$$u_c(t) = u(0) + \int_0^t [\epsilon^2 A_c(u_c + u_s) + F_c(u_c + u_s)]9\tau) d\tau + \epsilon^2 P_c W(t) \tag{4.21}$$

και

$$u_s(t) = e^{tL} u_s(0) + \int_o^t e^{(t-\tau)L} [\epsilon^2 A_s(u_c + u_s) + F_s(u_c + u_s)](\tau) d\tau + \epsilon^2 P_s W_L(t). \tag{4.22}$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε την κλιμάκωση που ενδείκνυται στην υπόθεση (4.16) για $u_c = O(\epsilon)$ και $u_s = O(\epsilon^2)$ κατευθείαν, βλέπουμε ότι η (4.21) αποσυνδέεται από την (4.22) και πάλι οδειγούμαστε στην εξίσωση πλάτους (4.7) στην ολοκληρωτική της μορφή.

Επιπρόσθετα, βλέπουμε κατευθείαν ότι η επιρροή του θορύβου σε αργή και γρήγορη συνιστώσα είναι πολύ διαφορετική. Σε χρονοκλίμακα τάξης 1 και οι δύο είναι ϵ^2, αλλά αυτό αλλάζει σημαντικά, όταν χρησιμοποιούμε μεγαλύτερη χρονοκλίμακα. Στην (4.21) για την αργή μεταβλητή u_c, βλέπουμε ότι ο θόρυβος φέρεται σαν κάποια κίνηση $Brown$ σε $N \approx R^{dim(N)}$. Λόγω των ιδιοτήτων κλιμάκωσης είναι δυνατό να επαληθευτεί ότι

$$\sup_{t\in[0,T_0\epsilon^{-2}]} \parallel P_c W(t) \parallel = \epsilon^{-1} \sup_{T\in[0,T_0]} \parallel P_c W(T) \parallel$$

στον νόμο. Ως εκ τούτου, $\sup_{t\in[0,T_0\epsilon^{-2}]} \parallel P_c W(t) \parallel = O(\epsilon^{-1})$.

Από την άλλη μεριά, στην (4.22) για την γρήγορη συνιστώσα u_s, ο θόρυβος εισέρχεται σαν απειροδιάστατη διαδικασία $Ornstein - Uhlenbeck$. Εδώ είναι δυνατόν να επαληθευτεί χρησιμοποιώντας την διάσημη μέθοδο παραγοντοποίησης ότι:

$$\sup_{t\in[0,T_0\epsilon^{-2}]} \| P_s W_L(t) \| = O(\epsilon^{-k})$$

για αυθαίρετο $k > 0$. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτό δεν είναι το βέλτιστο όριο. Η σωστή κλιμάκωση θα έπρεπε να ήταν λογαριθμικό του ϵ.

Από την προηγούμενη συζήτηση βλέπουμε ότι ο θόρυβος που ενεργεί πάνω στην (4.22) είναι περίπου μιας τάξης μεγέθους μικρότερος από τον θόρυβο που δρα στην (4.21). Χρησιμοποιώντας την σταθερότητα των εξισώσεων, αυτό οδηγεί σε διαφορετικές κλιμακώσεις για την u_c και την u_s, αφού ήδη αναφέρονται στην υπόθεση (4.6). Αυτό είναι το περίφημο αποτέλεσμα της προσελκυσιμότητας, το οποίο δικαιολογεί την υπόθεση για το επίσημο αποτέλεσμα. Επιπρόσθετα, μας παρέχει την τυπική δομή της αρχικής κατάστασης η οποία είναι αναγκαία για να ξεκινήσει το αποτέλεσμα προσέγγισης. Αυτό σημαίνει ένα αυστηρό όριο σφάλματος μεταξύ της πραγματικής λύσης και της προσεγγιστικής μέσω εξισώσεων πλάτους.

4.3 Θεωρήματα

Το πρώτο αποτέλεσμα που παρουσιάζεται εδώ είναι η προσελκυσιμότητα. Αυτό δικαιολογεί την κλιμάκωση της υπόθεσης (4.6) που χρησιμοποιήθηκε για την επίσημη παραγωγή. Στηρίζεται σε ένα μεγάλο βαθμό στην δομή της εξίσωσης. Μερικές φορές στηριζόμαστε σε μία παγκόσμια μη γραμμική σταθερότητα και μερικές φορές χρησιμοποιούμε μόνο γραμμική σταθερότητα σε μη φραγμένους τρόπους. Μια τυπική δήλωση θα μπορούσε να είναι η εξής:

Θεώρημα (Προσελκυσιμότητας)

Υπάρχει ένας χρόνος $t_\epsilon = O(ln(\epsilon^{-1}))$ τέτοιος ώστε για όλες τις λύσεις u της (4.20) με αρχικές συνθήκες $u(0)$ τάξης $O(\epsilon)$ να έχουμε $u_s(t_\epsilon) = O(\epsilon^2)$ και $u_c(t_\epsilon) = O(\epsilon)$. Αυτό σημαίνει ότι η λύση μοιάζει στον χρόνο t_ϵ με την υπόθεση (4.6). Για να είμαστε πιο ακριβείς $u(t_\epsilon) = \epsilon\alpha_\epsilon + \epsilon^2\psi_\epsilon$ με $\alpha_\epsilon \in N$ και $\psi_\epsilon \in S$ και τα δύο τάξης $O(1)$. Αν υποθέσουμε επιπλέον μία παγκόσμια μη γραμμική σταθερότητα για την εξίσωση, τότε υπάρχει ένας χρόνος $T_\epsilon = O(\epsilon^{-2})$ τέτοιος ώστε $u(T_\epsilon) = O(\epsilon)$ ανεξάρτητος από τις αρχικές συνθήκες.

Παρατήρηση Ανάλογα με τις παραδοχές, η δήλωση $g_\epsilon = O(f_\epsilon)$ μπορεί να έχει δύο διαφορετικές σημασίες. Ανάλογα με την περίπτωση, το χρησιμοποιούμε είτε για κάθε $p > 0$ ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $E \parallel g_\epsilon \parallel^p \leqslant Cf_\epsilon^p \in (0,1]$. Αυτό είναι τυπικά έγκυρο μόνο σε μη γραμμικές σταθερές εξισώσεις, όπου μπορούμε στην ουσία να δεσμεύσουμε στιγμές. Στην περίπτωση, για παράδειγμα των τετραγωνικών μη γραμμικοτήτων, όπου γενικά δεν μπορούμε να ελέγξουμε τις στιγμές των λύσεων, χρησιμοποιούμε μία κάπως πιο ασθενή έννοια, το ότι για κάποια σταθερά $C > 0$, έχουμε ότι το $P(\parallel g_\epsilon \parallel \geqslant Cf_\epsilon)$ είναι ομοιόμορφα μικρό για κάθε $\epsilon \in (0,1]$. Μερικές φορές δίνουμε επίσης ρητά ποσοστά σύγκλισης αυτής της πιθανότητας για $\epsilon \to 0$.

Για μία λύση α της (4.7) και ψ της (4.8) ορίζουμε αρχικά τις προσεγγίσεις έως τάξης k ως εξής:

$$\epsilon w_1(t) := \epsilon\alpha(\epsilon^2 t) \tag{4.23}$$

και

$$\epsilon w_2(t) := \epsilon\alpha(\epsilon^2 t) + \epsilon^2\psi(t). \tag{4.24}$$

Στο περιβάλλον μας, το πραγματικό μέρος του ϵw καθωρίζεται σαν:

$$Res(\epsilon w)(t) = -\epsilon w(t) + e^{tL}\epsilon w(0) + \epsilon^2 W_L(t)$$

$$+ \int_0^t e^{(t-\tau)L}[\epsilon^3 Aw + F(\epsilon w)](\tau)d\tau.$$

Προκειμένου να δείξουμε ότι η ϵw, είναι μία πολύ καλή προσέγγιση της λύσης u της (4.20), το βήμα κλειδί είναι να ελέγξουμε το $Residual$, το οποίο μετράει την απόσταση της προσέγγισης από το να είναι η λύση. Προφανώς, $Res(\epsilon w_j) = 0$ αν και μόνον αν ϵw_j είναι λύση της (4.20).

Αξίζει να σημειωθεί ότι, σε γενικές γραμμές δεν χρειαζόμαστε πρόσθετες πληροφορίες σχετικά με την λύση της u. Στηριζόμαστε σε $\alpha-$περιοδικές εκτιμήσεις για τις λύσεις μιας εξίσωσης πλάτους, τις οποίες είναι πιο εύκολο να αποκτήσουμε. Μια τυπική δήλωση είναι:

Θεώρημα (Υπόλοιπο) *Residual*

Για κάθε $T_0 > 0$, και για όλες τις προσεγγίσεις που δίνονται από την (4.23) με αρχικές συνθήκες $\alpha(0)$ και $\psi(0)$ τάξης $O(1)$, έχουμε:

$$\sup_{t\in[0,T_0\epsilon^{-2}]} \| Res(\epsilon w_k)(t) \| = O(\epsilon^{1+k}).$$

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα για το $Residual$, είναι συνήθως άμμεσο να οδηγειθούμε στο αποτέλεσμα προσέγγισης. Εδώ μερικές φορές πρέπει να χρησιμοποιούμε πρόσθετες παραδοχές στην μη γραμμικότητα. Πάλι δεν είναι απαραίτητα τα όρια των λύσεων, αλλά για απλότητα, πολλές φορές βασιζόμαστε σε αυτά, όταν αυτά είναι εύκολο να αποδειχθούν.

Θεώρημα (Προσέγγιση)

Για κάθε $T_0 > 0$, όλες οι λύσεις u και όλες οι προσεγγίσεις που δίνονται από την (4.23) με $\| u(0) - \epsilon w_k(0) \| = O(\epsilon^{1+k})$, έχουμε:

$$\sup_{t\in[0,T_0\epsilon^{-2}]} \| u(t) - \epsilon w_k(t) \| = O(\epsilon^{1+k}).$$

4.4 Παραδείγματα Εξισώσεων

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν πολλά παραδείγματα εξισώσεων όπου τα αφηρημένα θεωρήματα απαντούν σε ερωτήματα. Για παράδειγμα, σε κυβικές μη γραμμηκότητες, η πολύ γνωστή $Ginzburg - Landau$ εξίσωση

$$\theta_t u = \Delta u + vu - u^3 + \sigma\xi$$

και η $Swift-Hohenberg$ εξίσωση

$$\theta_t u = -(\Delta+1)^2 u + vu - u^3 + \sigma\xi$$

εμπίπτουν στο πεδίο εφαρμογής των εργασιών μας, όταν οι παράμετροι v και σ είναι μικρές και συγκρίσιμης τάξης μεγέθους. Θεωρούμε ότι και οι δύο εξισώσεις είναι σε φραγμένα χωρία με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες (π.χ. περιοδικές,Dirichlet, Neumann κτλ). Η εξίσωση $Swift-Hohenberg$ είναι ένα μοντέλο παιχνιδιού για την θερμοδυναμική αστάθεια στην μεταγωγή $Rayleigh-Benard$.

4.5 Ασυμπτωτικοί Υπολογισμοί

4.5.1 Μη ομογενής εξίσωση Cahn-Hilliard

Θεωρούμε την μη ομογενή εξίσωση Cahn-Hilliard

$$\partial_t u(x,t;\epsilon) = \Delta(-\epsilon\Delta u + \epsilon^{-1} f'(u)) + G(x,t;\epsilon). \tag{4.25}$$

χωρίζοντας την G σε δύο μέρη, το (4.25) παίρνει την μορφή

$$u_t = \Delta(-\epsilon\Delta u + \epsilon^{-1} f'(u) - G_2) + G_1, \tag{4.26}$$

όπου $G_1 = G_1(x,t;\epsilon)$, $G_2 = G_2(x,t;\epsilon)$, και $G = G_1 - \Delta G_2$. Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε ασυμπτωτικές επεκτατικές τεχνικές υποθέτουμε ότι οι G_1, G_2 είναι ομοιόμορφα φραγμένες για κάθε $x \in \Omega$, $t > 0$, καθώς $\epsilon \to 0^+$.
Μετά ορίζουμε το $v(\epsilon) := \epsilon\Delta u - \epsilon^{-1} f'(u) + G_2$ (Χημικός Δυναμικός Όρος), και μετά η (4.26) μπορεί να γραφτεί σαν ένα σύστημα

$$\begin{cases} u_t &= -\Delta v + G_1 \\ \\ v &= -\dfrac{f'(u)}{\epsilon} + \epsilon\Delta u + G_2. \end{cases} \tag{4.27}$$

Θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε μία εσωτερική λύση κοντά στην διεπιφάνεια, μία εξωτερική λύση μακριά από την διεπιφάνεια και με το κατάλληλο ταίριασμα, θα περάσουμε στο όριο και θα αντλήσουμε το αντίστοιχο μη φραγμένο πρόβλημα.

Εξωτερική Επέκταση

Θεωρούμε την εξωτερική επέκταση

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \cdots,$$
$$v = v_0 + \epsilon v_1 + \cdots,$$

όπου`...′ αναγράφονται υψηλότερου βαθμού όροι. Συνδέουμε την εξωτερική επέκταση στην $(4.27)_2$, και αποκτούμε την

$$\begin{aligned} v_0 + \epsilon v_1 + O(\epsilon^2) = -\frac{1}{\epsilon}(f'(u_0) + \epsilon f''(u_0)u_1 + O(\epsilon^2)) + \\ \epsilon\Delta(u_0 + \epsilon u_1 + O(\epsilon^2)) + G_2 + O(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Μαζεύοντας τους όρους $O(\frac{1}{\epsilon})$ στην (4.28) φτάνουμε στην $f'(u_0) = 0$, ι.ε $u_0 = \pm 1 + O(\epsilon^3)$. Επιπρόσθετα, μαζεύουμε τους όρους $O(1)$ στην (4.28) και παίρνουμε $v_0 = -f''(u_0)u_1 + G_2 + O(\epsilon)$, όπου συνεπάγεται $u_1 = \dfrac{v_0 - G_2}{-f''(u_0)} = \dfrac{G_2 - v_0}{f''(u_0)} + O(\epsilon)$. Καθώς η u_0 είναι συνεχής, συνεπάγεται ότι $\partial_t u_0 = 0$. Συνδέουμε τώρα την εξωτερική επέκταση με την $(4.27)_1$ κι έχουμε

$$\partial_t(u_0 + \epsilon u_1 + O(\epsilon^2)) = -\Delta(v_0 + \epsilon v_1 + O(\epsilon^2)) + G_1,$$

όπου μαζεύοντας μετά τους όρους $O(1)$ μας δίνει

$$-\Delta v_0 + G_1 = 0 + O(\epsilon^2).$$

Μαζεύοντας τελικά, τους όρους $O(\epsilon)$ παίρνουμε

$$\partial_t u_1 = -\Delta v_1.$$

Εσωτερική Επέκταση

Έστω x να είναι ένα σημείο στο Ω το οποίο σε χρόνο t είναι κοντά στην διεπιφάνεια $\Gamma(t)$. Ορίζουμε ως $d(x,t)$, την απόσταση του x από την κινούμενη (t-εξαρτημένη) υπερεπιφάνεια $\Gamma(t)$, προφανώς $d(x,t) = \inf_{y\in\Gamma(t)} |x-y|$, και θεωρώντας την ακόλουθη εσωτερική επέκταση του x κοντά στην διεπιφάνεια

$$\begin{aligned} u &= q(\frac{d(x,t)}{\epsilon}) + \epsilon Q(\frac{d(x,t)}{\epsilon}) + \cdots, \\ v &= \tilde{q}(\frac{d(x,t)}{\epsilon}) + \epsilon \tilde{Q}(\frac{d(x,t)}{\epsilon}) + \cdots, \end{aligned}$$

όπου `$\cdots$′ υποδηλώνει υψηλότερης τάξης όρους. Ορίζουμε, $z := \frac{d}{\epsilon}$, συνδέουμε την εσωτερική επέκταση με την $(4.27)_2$, χρησιμοποιώντας ότι $|\nabla d|^2 = 1$ λαμβάνουμε την ακόλουθη εξίσωση

$$\tilde{q} + \epsilon\tilde{Q} + O(\epsilon^2) = -\frac{1}{\epsilon}(f'(q) + \epsilon f''(q)Q) + \epsilon(\frac{\partial_z q}{\epsilon}\Delta d + \frac{\partial^2_{zz} q}{\epsilon^2} + \partial_z Q \Delta d + \frac{\partial^2_{zz} Q}{\epsilon}) + G_2. \tag{4.29}$$

μαζεύουμε τους όρους τάξης $O(\frac{1}{\epsilon})$ και παίρνουμε

$$\partial^2_{zz} q - f'(q) = 0,$$

το οποίο δικαιολογεί την επιλογή του στατικού κύματος q σαν τους υψηλότερους τάξης όρους μέσα στην εσωτερική επέκταση. Τώρα με κατάλληλο ταίριασμα οι όροι τάξης $O(1)$ στην (4.29), λαμβάνουμε

$$\tilde{q} + O(\epsilon) = -f''(q)Q + \partial^2_{zz}Q + G_2 + \partial_z q \Delta d,$$

ή ισοδύναμα

$$\tilde{q} - \partial_z q \Delta d = \partial^2_{zz}Q - f''(q)Q + G_2 + O(\epsilon). \tag{4.30}$$

Ορίζουμε $Q(z)$ να είναι ο γραμμικός τελεστής Allen-Cahn. Μετά η

$$\mathcal{L}Q = \partial^2_{zz}Q - f''(q)Q$$

(4.30) μπορεί να γραφτεί σαν

$$\tilde{q} - \partial_z q \Delta d = \mathcal{L}Q + G_2 + O(\epsilon). \tag{4.31}$$

Αυτή η εξίσωση είναι επιλύσιμη, αν για κάθε $\chi \in Ker\mathcal{L}^*$ κατέχει ότι

$$\chi \perp (\tilde{q} - \partial_z q \Delta d - G_2),$$

ή ισοδύναμα αν

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{q} - \partial_z q \Delta d - G_2)\chi \, dz = 0. \tag{4.32}$$

Από αυτό οδηγούμαστε στο ότι για κάθε t, το σετ $\{x \in \Omega : d^{(0)}(x,t) = 0\}$ είναι μια υπερεπιφάνεια, όπου $d^{(0)}$ είναι η απόσταση από αυτήν. Προφανώς, πάνω στην υπερεπιφάνεια $d^{(0)}(x,t) = 0$, $d^{(0)}_t(x,t) = 0$, $\Delta d^{(0)}(x,t) = H$. Αντικαθιστώντας στην (4.32), λαμβάνουμε την ικανή συνθήκη

$$\tilde{q} = \lambda H + G_2 + O(\epsilon), \ \text{πάνω} \ \ \text{στη} \ \ \text{διεπιφάνεια}. \tag{4.33}$$

Συνδέοντας την με την εσωτερική επέκταση της $(4.27)_1$ λαμβάνουμε

$$\frac{\partial_z q}{\epsilon} d_t + \partial_z Q d_t + O(\epsilon) = -\left(\frac{\partial_z \tilde{q}}{\epsilon} \Delta d + \frac{\partial^2_{zz}\tilde{q}}{\epsilon^2} + \partial_z \tilde{Q} \Delta d + \frac{\partial^2_{zz}\tilde{Q}}{\epsilon} \right) + G_1. \tag{4.34}$$

Μαζεύουμε τους όρους $O(\frac{1}{\epsilon^2})$ και οδηγούμαστε στο

$$\partial^2_{zz}\tilde{q} = 0 + O(\epsilon^2),$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\tilde{q} = a(x,t)z + b(x,t) + O(\epsilon^2).$$

Για περαιτέρω πρόοδο, οι συνθήκες ταιριάσματος για τις εσωτερικές κι εξωτερικές επεκτάσεις πρέπει να ανακαλυφθούν. Γενικά, αυτές λαμβάνονται με την ακόλουθη διαδικασία ([;]). Καθορίζοντας το x στην Γ, ψάχνουμε να ταιριάξουμε τις επεκτάσεις απαιτώντας επίσημα

$$\tilde{q} + \epsilon\tilde{Q} + O(\epsilon^2) = v_0 + \epsilon v_1 + O(\epsilon^2),$$

$$v_0 = \lim_{z\to\infty} \tilde{q} = \lim_{z\to\infty} (a(x,t)z + b(x,t)).$$

Ταιριάζοντας ως $z \to \infty$, λαμβάνουμε ότι $a = 0$, και $b = v_0 + O(\epsilon^2)$. Οπότε, λαμβάνουμε ότι πάνω στην διεπιφάνεια

$$v_0 = \lambda H + G_2, \ \text{πάνω} \ \ \text{στη} \ \ \text{διεπιφάνεια.}$$

Αξιοποιώντας την (4.33) έχουμε ότι

$$\tilde{q} = \lambda H + G_2 + O(\epsilon), \ \text{πάνω} \ \ \text{στη} \ \ \text{διεπιφάνεια.}$$

Αυτό που λείπει είναι ο εξελικτικός νόμος, το οποίο θα πρέπει να έρθει από την εσωτερική επέκταση. Από την (4.34), μαζεύοντας τους όρους $O(\frac{1}{\epsilon})$ παίρνουμε

$$\partial_z q d_t = -\partial_z \tilde{q} \Delta d - \partial^2_{zz} \tilde{Q} + O(\epsilon^2).$$

Ανακαλώντας το ότι $d_t = V$, όπου $\Delta d = k$, έχουμε ότι

$$\partial_z q V = -\partial^2_{zz} \tilde{Q} + O(\epsilon^2).$$

Ολοκληρώνοντας πάνω στο z από $-\infty$ έως ∞

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_z q V \, dz = -\int_{-\infty}^{\infty} \partial_{zz} \tilde{Q} \, dz + O(\epsilon^2).$$

Χρησιμοποιώντας από τις συνθήκες ταιριάσματος ότι

$$q(+\infty) = 1 + O(\epsilon^3), q(-\infty) = -1 + O(\epsilon^3),$$

παίρνουμε από το παραπάνω ότι

$$V = -\frac{1}{2}[\partial_z \tilde{Q}(+\infty) - \partial_z \tilde{Q}(-\infty)] + O(\epsilon^2).$$

Έτσι, λαμβάνουμε το μη φραγμένο πρόβλημα

$$\begin{cases} \Delta v_0 &= G_1 + O(\epsilon^2) & \text{στο} \ \ \Omega \backslash \Gamma(t), \\ v_0 &= \lambda H + G_2 + O(\epsilon) & \text{στο} \ \ \Gamma(t), \\ V &= -\frac{1}{2}[\partial_z \tilde{Q}(+\infty) - \partial_z \tilde{Q}(-\infty)] + O(\epsilon^2) & \text{στο} \ \ \Gamma(t), \end{cases}$$

όπου $\tilde{Q}(z) := v_1$ και $G_1 - \Delta G_2 = G$. Συνεπώς, οι αναγκαζόμενες G_1 επηρρεάζουν ολοκληρωτικά την διαδικασία εξέλιξης, όσο η G_2 έχει τοπική συμβολή στην διεπιφάνεια.

Βιβλιογραφία

[1] L. C. Evans, An Introduction To Stochastic Differential Equations, UC Berkeley (2015).

[2] E. Pardoux, Stochastic Partial Differential Equations, Marseille, France, April (2007).

[3] D. Blömker, Amplitude equations for stochastic partial differential equations, Interdisciplinary Mathematical Sciences, Vol. 3, (2007).

[4] D. Blömker and M. Hairer, Amplitude equations for SPDEs: Approximate centre manifolds and invariant measures. In J. Duan and E. Waymire, editors, Probability and Partial Differential Equations in Modern Applied Mathematics, volume 140 of IMA Volumes in Mathematics and its Applications, pages 41–60. Springer Verlag, 2005.

[5] D. Blömker. Amplitude equations for locally cubic non-autonomous nonlinearities. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 2(2):464–486, 2003.

[6] Σ. Μ. Πανάς, Ανάλυση Στοχαστικών Σημάτων, Θεσσαλονίκη (1992).

[7] Θ. Ν. Κάκουλλος, Στοχαστικές Ανελίξεις, Αθήνα (1995).

[8] Σ. Καλπαζίδου, Στοιχεία Θεωρίας Στοχαστικών Ανελίξεων, Θεσσαλονίκη (1996).

[9] Δ. Γ. Κωνσταντινίδης, Θεωρία Στοχαστικών Διαδικασιών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου (2009).

[10] Τ. Ι. Δάρας και Π. Θ. Σύψας, Στοχαστικές Ανελίξεις, Θεσσαλονίκη (2003).

[11] Δ. Φακίνος, Εισαγωγή στις Πιθανότητες και στις Στοχαστικές Διαδικασίες, Αθήνα (2012).

[12] Δ. Χελιώτης, Εισαγωγή στο Στοχαστικό Λογισμό, Αθήνα (2015).