ΣΥΝΟΡΙΑΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Εμμανουήλ Ε. Μηλάκης
Τμήμα Μαθηματικών,Πανεπιστήμιο Κρήτης,
Ηράκλειο

<u>ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ</u>

Η μεταπτυχιακή εργασία έχει κατατεθεί στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης.

Έχει εκπονηθεί υπό την επίβλεψη του κυρίου Α. Τερσένοβ.
Την επιτροπή αποτέλεσαν οι κύριοι:
Α. Τερσένοβ
Α. Τερτίκας
Σ. Φίλιππας

<u>Νοέμβριος 2001</u>

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή.

Στην εργασία αυτή μελετάμε την επιλυσιμότητα συνοριακών προβλημάτων για μη γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης. Θεωρούμε την εξίσωση

$$|y(x)|^{\varepsilon} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \tag{1.1}$$

για $x \in (-l, l)$, $\varepsilon \in [0, 1)$ και τις συνοριακές συνθήκες

$$y(-l) = y(l) = 0, \tag{1.2}$$

$$y'(-l) = y'(l) = 0, \tag{1.3}$$

$$y'(-l) - \sigma(y(-l)) = y'(l) + \sigma(y(l)) = 0. \tag{1.4}$$

Όταν λέμε ότι η y είναι λύση του προβλήματος (1.1), (1.2) θα εννοούμε ότι η y είναι κλασική λύση δηλαδή $y \in C^2(-l, l) \cap C^0[-l, l]$. Όμοια όταν λέμε ότι η y είναι κλασική λύση του προβλήματος (1.1), (1.3) ή (1.1), (1.4) θα υποθέτουμε ότι $y \in C^2(-l, l) \cap C^1[-l, l]$.

Ήδη από το 1912 ο *S.Bernstein* στο άρθρο του [1] διατύπωσε ένα θεώρημα που αφορούσε την επιλυσιμότητα της εξίσωσης

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \tag{1.5}$$

για $x \in (-l, l)$ με συνοριακές συνθήκες (1.2). Συγκεκριμένα, υποθέτοντας ότι η $f = f(x, y, p)$ είναι συνεχής, με συνεχείς μερικές παραγώγους f_y, f_p και ικανοποιεί τις συνθήκες

$$f_y \geq k > 0 \tag{1.6}$$

$$|f(x, y, p)| \leq A(x, y)p^2 + B(x, y) \tag{1.7}$$

όπου A, B φραγμένες συναρτήσεις για κάθε συμπαγές υποσύνολο του $[-l, l] \times R$, k σταθερά, τότε η λύση του (1.5), (1.2) υπάρχει και είναι μοναδική. Στην απόδειξη του ισχυρισμού αυτού παρουσιάζονται οι έννοιες των *apriori* εκτιμήσεων και η στενή σχέση που έχουν με την επιλυσιμότητα του προβλήματος (1.5), (1.2). Έκτοτε πολλές προσπάθειες έγιναν ώστε να γενικευτεί το παραπάνω αποτέλεσμα του *S.Bernstein*.

Στο [2] αποδεικνύεται η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης της (1.5) για *Dirichlet*, *Neumann* και περιοδικές συνοριακές συνθήκες. Όμως και εδώ η αύξηση της συνάρτησης $f(x, y, p)$ ως προς τη μεταβλητή p δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερη από p^2, για $|p| \to +\infty$. Η απόδειξη της μοναδικότητας προυποθέτει παραγωγισιμότητα της f ως προς y, ως προς p και επιπλέον $f_y \geq 0$.

Μια συνθήκη 'περιορισμένης' αύξησης απαιτείται και στο [3]. Αναλυτικότερα υποθέτοντας ότι η $f(x, y, p)$ μπορεί να γραφεί ως $f(x, y, p) = g(x, y, p) + h(x, y, p)$ και να ικανοποιούνται οι συνθήκες

$$yg(x, y, p) \geq 0, \ |g(x, y, p)| \leq A(x, y)w(p^2), \ |h(x, y, p)| \leq M_0(|y|^{\alpha} + |p|^{\beta})$$

για κάθε $(x,y,p) \in [-l,l] \times R^2$, $A(x,y)$ φραγμένη συνάρτηση, w είναι μη φθίνουσα με

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{w(s)} = +\infty$$

και $0 \leq \alpha,\ \beta < 1,\ M_0 > 0$ σταθερές, τότε υπάρχει λύση $y \in C^2[-l,l]$ του (1.5), (1.2).

Είναι λοιπόν γενικά γνωστό ότι αν για την f υποθέσουμε μια συνθήκη 'περιορισμένης' αύξησης είναι δυνατόν να καταλήξουμε στην ύπαρξη της λύσης του προβλήματος (1.5), (1.2). Έχει καθιερωθεί η συνθήκη (1.7) να ονομάζεται συνθήκη :$Bernstein - Nagumo - Tonelli$ (B.N.T) (βλέπε [2], [4]-[7] κ.α.). Οι τρόποι γραφής της (B.N.T) που εμφανίζονται στην βιβλιογραφία είναι αρκετοί όπως

$\alpha)$ $|f(x,y,p)| \leq A(x,y)p^2 + B(x,y)$ (βλέπε [2], [8], [9])

$\beta)$ $|f(x,y,p)| \leq \psi(|p|)$, $\int_1^{+\infty} \frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)} = +\infty$ (βλέπε [4], [5]),

$\gamma)$ $|f(x,y,p)| \leq \psi(|p|)$, $lim_{s\to\infty} \frac{s^2}{\psi(s)} = +\infty$, (βλέπε [10]).

Η ύπαρξη της λύσης μπορεί να αποδειχθεί και με λίγο διαφορετικές συνθήκες για το δεύτερο μέλος. Πιο συγκεκριμένα στο [11] οι *A.Granas*, *R.Guenther* και *J.W.Lee* εξετάζουν την επιλυσιμότητα της διαφορικής εξίσωσης (1.5) με *Dirichlet*, *Neumann*, περιοδικές, ή μεικτές συνοριακές συνθήκες. Ειδικότερα στο θεώρημα (3.1)[11] οι συγγραφείς αποδεικνύουν *apriori* εκτιμήσεις για την λύση και τις παραγώγους της χρησιμοποιώντας τις συνθήκες :

$$yf(x,y,0) \geq 0 \tag{1.8}$$

για $|y| > M$,

$$|f(x,y,p)| \leq \psi(|p|) \tag{1.9}$$

για $(x,y) \in [-l,l] \times [-M,M]$, $\psi > 0$, $\frac{1}{\psi}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο διάστημα στο $[0,\infty)$ και

$$\int_0^{+\infty} \frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)} > 2M. \tag{1.10}$$

Οι συνθήκες (1.9)-(1.10) για το δεύτερο μέλος της εξίσωσης χρησιμοποιούνται και από άλλους συγγραφείς (βλέπε [12]-[22]).

Στο [23] αποδεικνύεται η ύπαρξη της λύσης της εξίσωσης (1.5) για *Neumann* συνοριακή συνθήκη, χρησιμοποιώντας τις (B.N.T) και (1.8), για την συνάρτηση f. Τέλος στο [24] μελετάται το τρίτο συνοριακό πρόβλημα, υποθέτοντας μια συνθήκη της μορφής (B.N.T) για την $f(x,y,p)$.

Μελετώντας τις παραπάνω αναφορές εύκολα διαπιστώνεται ότι η επιλυσιμότητα ενός συνοριακού προβλήματος ανάγεται στην εύρεση *apriori* εκτιμήσεων για τις $|y|, |y'|$. Η απόδειξη ολοκληρώνεται εφαρμόζοντας τοπολογικές μεθόδους (θεωρία $Leray - Schauder$) (βλέπε [2]-[5], [7], [8], [14], [24]-[29]).

Στη παρούσα εργασία αποδεικνύουμε *apriori* εκτιμήσεις για την εξίσωση (1.1) με συνοριακές συνθήκες *Dirichlet* (1.2), *Neumann* (1.3) και *Robin* (1.4). Υποθέτουμε ότι για την f ισχύει η σχέση

$$f(x, y, p) = f_1(x, y, p) + f_2(x, y, p)$$

όπου η f_1 ικανοποιεί συνθήκες της μορφής (1.9)-(1.10) και η f_2, για το πρόβλημα *Dirichlet*, ικανοποιεί τις συνθήκες

$$y f_2(x, y, p) \geq 0 \tag{1.11}$$

για $x \in (-l, l), |p| < +\infty$ και

$$f_2(x_1, y_1, p) - f_2(x_2, y_2, p) \geq 0 \tag{1.12}$$

$$f_2(x_2, y_1, -p) - f_2(x_1, y_2, -p) \geq 0 \tag{1.13}$$

για $x_1 > x_2, y_1 > y_2, p > 0$, ενώ για τα προβλήματα *Neumann* και *Robin* χρειαζόμαστε μόνο τις (1.12)-(1.13) (βλέπε [30]).

Αναλυτικότερα στη δεύτερη παράγραφο μελετάμε το πρόβλημα *Dirichlet* για την εξίσωση (1.1). Αφού αποδείξουμε *apriori* εκτιμήσεις για την λύση, εκτιμάμε την $|y'|$, κοντά στο σύνορο με την κατασκευή δυο βοηθητικών συναρτήσεων (φραγμάτων). Στη συνέχεια η ολική εκτίμηση της $|y'|$ γίνεται χρησιμοποιώντας την μέθοδο του *Kruzhkov* (βλέπε [31]), εισάγοντας μια επιπλέον μεταβλητή (βλέπε επίσης [4], [5], [30], [32], [33]).

Στην τρίτη και τέταρτη παράγραφο αποδεικνύουμε *apriori* εκτιμήσεις για την λύση της εξίσωσης (1.1) με *Neumann* και *Robin* συνοριακές συνθήκες αντίστοιχα, ενώ η μέθοδος του *Kruzhkov* θα μας δώσει ξανά την εκτίμηση της παραγώγου.

Στην τελευταία παράγραφο μελετάμε την μη εκφυλιζόμενη περίπτωση, $\varepsilon = 0$. Αποδεικνύουμε την ύπαρξη της λύσης, χρησιμοποιώντας τις ήδη υπάρχουσες εκτιμήσεις, εφαρμόζοντας το θεώρημα $Leray - Schauder$. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε τα θεωρήματα μοναδικότητας και για τα τρία συνοριακά προβλήματα τόσο την εκφυλιζόμενη όσο και για τη μη εκφυλιζόμενη περίπτωση.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι με τις μεθόδους που εφαρμόζουμε είναι δυνατόν να διευρύνουμε ορισμένα παλαιότερα αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, για το πρόβλημα (1.5), (1.2) θεωρώντας τις παραπάνω υποθέσεις για τις συναρτήσεις f_1, f_2 γενικεύουμε το θεώρημα 3.1 του [11], το θεώρημα 1 του [3] και το θεώρημα 2.1 του [7]. Για το πρόβλημα (1.6), (1.3) μπορούμε να γενικεύσουμε το θεώρημα 5.1 του [11] όπου για την απόδειξη της ύπαρξης της λύσης πρέπει να υπάρχει σταθερά $M \geq 0$ τέτοιο ώστε $yf(x, y, 0) \geq 0$ για $|y| > M$ και η εξίσωση $f(x, y, p) - y = 0$ να έχει και θετικές και αρνητικές ρίζες για σταθεροποιημένο $(x, y) \in [-l, l] \times [-M, M]$. Επίσης γενικεύεται το θεώρημα 3.1 του [23] όπου απαιτείται μια συνθήκη της μορφής (B.N.T). Για το τρίτο συνοριακό πρόβλημα γενικεύουμε τα αποτελέσματα των θεωρημάτων 4.1-4.4 του [24] όπου και εκεί χρησιμοποιείται μια συνθήκη της μορφής (B.N.T). Στην απόδειξη της μοναδικότητας για το πρόβλημα *Dirichlet* υποθέτουμε ότι το δεύτερο μέλος είναι μια γνήσια αύξουσα συνάρτηση ως προς y. Τέλος η απόδειξη της μοναδικότητας για το πρόβλημα *Neumann* γίνεται υποθέτοντας ότι η f είναι *Lipschitz* ως προς p και γνήσια αύξουσα ως προς y, επεκτείνοντας έτσι τα θεωρήματα 5.2, 5.3 του [2].

2. Το πρόβλημα *Dirichlet*.

2.1 Εκτίμηση της λύσης.

Λήμμα 2.1 *Θεωρούμε το πρόβλημα*

$$|y|^{\varepsilon} y'' = f(x, y, y') \tag{2.1}$$

$$y(-l) = y(l) = 0, \tag{2.2}$$

όπου $\varepsilon \in [0, 1)$ *και η συνάρτηση* $f(x, y, p)$ *ορίζεται για* $|y| < +\infty$, $|p| < +\infty$, $x \in (-l, l)$. *Έστω ότι υπάρχει* $M > 0$ *τέτοιο ώστε* $yf(x, y, 0) > 0$ *για* $|y| > M$, *τότε για κάθε κλασική λύση του προβλήματος (2.1), (2.2) ισχύει* $|y(x)| \leq M$, $x \in [-l, l]$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $|y(x)|$ πρέπει να λαμβάνει θετικό μέγιστο σε κάποιο $x_0 \in (-l, l)$ (λόγω της συνέχειας της λύσης και $y(-l) = y(l) = 0$). Έστω $|y(x_0)| > M$. Άν $y(x_0) > M$ τότε, αφού $y(x_0)$ θετικό μέγιστο, $y''(x_0) \leq 0$, άρα $|y(x_0)|^{\varepsilon} y''(x_0) \leq 0$ δηλαδή $f(x_0, y(x_0), 0) \leq 0$ και επειδή $y(x_0) > 0$ προκύπτει $y(x_0) f(x_0, y(x_0), 0) \leq 0$ άτοπο. Άν $y(x_0) < -M$ τότε, αφού $y(x_0)$ αρνητικό ελάχιστο, $y''(x_0) \geq 0$, άρα $|y(x_0)|^{\varepsilon} y''(x_0) \geq 0$ δηλαδή $f(x_0, y(x_0), 0) \geq 0$ και επειδή $y(x_0) < 0$ προκύπτει $y(x_0) f(x_0, y(x_0), 0) \leq 0$ άτοπο. Άρα $|y(x)| \leq M$.

2.2 Εκτίμηση της $|y'|$ στο σύνορο.

Θεωρούμε το πρόβλημα (2.1), (2.2) και $\psi(\rho) \in C^1([0, +\infty))$, $\psi(\rho) > 0$ για $\rho > 0$, $\psi(0) \geq 0$ με

$$\int_0^{+\infty} \frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)} > \frac{(\max\{M, osc(y)\})^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}. \tag{2.3}$$

Έστω $h_1(x)$, $h_2(x)$ οι λύσεις των παρακάτω προβλημάτων,

$$h_1^{\varepsilon} h_1'' + \psi(|h_1'|) = 0 \tag{2.4}$$

$$h_1(-l) = 0, \ h_1(-l + \tau_0) = \mu \tag{2.5}$$

και

$$h_2^{\varepsilon} h_2'' + \psi(|h_2'|) = 0 \tag{2.6}$$

$$h_2(l - \tau_0) = \mu, \ h_2(l) = 0 \tag{2.7}$$

όπου $\mu = \max\{M, osc(y)\}$, $0 \leq \varepsilon < 1$ και το τ_0 θα επιλεχθεί παρακάτω. Θα βρούμε μια αναπαράσταση για την λύση του προβλήματος (2.4), (2.5). Έστω $p(h_1) = h_1'(x)$, τότε

$$h_1'' = p \frac{dp}{dh_1}.$$

Από την εξίσωση (2.4) θα έχουμε

$$h_1^{\varepsilon} p \frac{dp}{dh_1} = -\psi(|p|)$$

δηλαδή

$$-\frac{p}{\psi(|p|)} dp = h_1^{-\varepsilon} dh_1$$

και ολοκληρώνοντας θα πάρουμε

$$\int_{h_1(q_1)}^{h_1(q)} \frac{1}{1-\varepsilon} d(h_1^{1-\varepsilon}) = \int_q^{q_1} \frac{\rho d\rho}{\psi(|\rho|)}.$$

Δηλαδή

$$h_1(q) - h_1(q_1) = (1-\varepsilon)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \left(\int_q^{q_1} \frac{\rho d\rho}{\psi(|\rho|)}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}.$$

Έχουμε $\frac{dh_1}{dx} = p$ οπότε $dx = -\frac{h_1^{\varepsilon}}{\psi(|p|)} dp$. Δηλαδή

$$x(q) - x(q_1) = \int_q^{q_1} \frac{h_1^{\varepsilon} d\rho}{\psi(|\rho|)}.$$

Επειδή θέλουμε $h_1(-l) = 0$ θα πρέπει $x(q_1) = -l$ και $h_1(q_1) = 0$ άρα

$$h_1(q) = (1-\varepsilon)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \left(\int_q^{q_1} \frac{\rho d\rho}{\psi(|\rho|)}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \ \ x(q) = \int_q^{q_1} \frac{h_1^{\varepsilon} d\rho}{\psi(|\rho|)} - l.$$

Επιλέγουμε q_0 έτσι ώστε $q \in [q_0, q_1]$, $q_1 > q_0 > 0$ και

$$h_1(q_0) = (1-\varepsilon)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \left(\int_{q_0}^{q_1} \frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = \mu.$$

Η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει διότι έχουμε υποθέσει την (2.3). Θέτουμε

$$\tau_0 = \int_{q_0}^{q_1} \frac{{h_1}^{\varepsilon} d\rho}{\psi(\rho)}.$$

Τώρα ορίζουμε τα D_1, D_2 ως εξής, αν $\tau_0 < 2l$ τότε $D_1 = (-l, -l+\tau_0)$ και $D_2 = (l-\tau_0, l)$ ενώ αν $\tau_0 \geq 2l$ τότε $D_1 = D_2 = (-l, l)$.

Λήμμα 2.2 *Έστω $y \in C^2((-l,l)) \cap C^0([-l,l])$ λύση του προβλήματος (2.1), (2.2) με $0 \leq \varepsilon < 1$. Έστω ότι η συνάρτηση $f(x,y,p)$ ορίζεται για $|y| \leq M$, $|p| < +\infty$, $x \in (-l,l)$ και $f(x,y,p) = f_1(x,y,p) + f_2(x,y,p)$ με :*

$$|f_1(x,y,p)| < \psi(|p|), \tag{2.8}$$

για $|p| < +\infty$, *η* ψ *επαληθεύει την (2.3) και η* $f_2(x,y,p)$ *ικανοποιεί την*

$$yf_2(x,y,p) \geq 0 \tag{2.9}$$

Τότε για κάθε $x \in \overline{D_i}$ *ισχύει*

$$|y(x)| \leq h_i(x)$$

με i=1,2 .

Απόδειξη. α) Έστω $\tau_0 < 2l$. Στο σύνορο εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει :

$$y(-l) = y(l) = h_1(-l) = h_2(l) = 0$$

και

$$|y(-l+\tau_0)| \leq M \leq h_1(-l+\tau_0)$$
$$|y(l-\tau_0)| \leq M \leq h_2(l-\tau_0)$$

διότι έχουμε $|y| \leq M$ και $h_1(-l+\tau_0) = h_2(l-\tau_0) = \mu$ όπου $\mu = max\{M, osc(y)\}$. Ορίζουμε τώρα $L_0 y \equiv |y|^{\varepsilon} y'' + \psi(|y'|)$ άρα

$$L_0 y = |y|^{\varepsilon} y'' + \psi(|y'|) = f_1(x,y,y') + f_2(x,y,y') + \psi(|y'|).$$

Προφανώς ισχύει :

$$L_0 h_i = h_i^{\varepsilon} h_i'' + \psi(|h_i'|) = 0,\ i = 1,2.$$

Έστω $v_i(x) = y(x) - h_i(x)$ τότε από τον ορισμό του τελεστή L_0 έχουμε

$$\begin{aligned} L_0 y - L_0 h_i &= |y(x)|^{\varepsilon} y''(x) + \psi(|y'(x)|) - h_i^{\varepsilon}(x) h_i''(x) - \psi(|h_i'(x)|) \\ &= |y(x)|^{\varepsilon} y''(x) - h_i^{\varepsilon}(x) h_i''(x) + \beta_i v_i'(x) \\ &= |y(x)|^{\varepsilon} v_i''(x) + \beta_i v_i'(x) + (|y(x)|^{\varepsilon} - h_i^{\varepsilon}(x)) h_i''(x), \end{aligned}$$

όπου τα $|\beta_i| < +\infty$ στο $(-l,l)$ λόγω της ομαλότητας της ψ και διότι η y' δεν απειρίζεται στο $(-l,l)$. Ορίζουμε τον τελεστή

$$L^* v_i \equiv A v_i'' + \beta_i v_i' \tag{2.10}$$

όπου $A(x) = |y(x)|^{\varepsilon}$. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$L^* v_i = f_1(x,y,y') + f_2(x,y,y') + \psi(|y'|) + (h_i^{\varepsilon} - |y|^{\varepsilon}) h_i''. \tag{2.11}$$

Έστω ότι για $i = 1,2$ η $v_i = y - h_i$ λαμβάνει στο $N_i \in D_i$ θετικό μέγιστο. Τότε προφανώς θα ισχύει $v_i''(N_i) \leq 0$ και $v_i'(N_i) = 0$ δηλαδή η σχέση (2.10) μας δίνει $L^* v_i(N_i) \leq 0$. Από την άλλη όμως $y'(N_i) = h_i'(N_i)$ και λόγω των σχέσεων (2.8), (2.9) έχουμε

$$f_1(N_i, y(N_i), y'(N_i)) + \psi(|y'(N_i)|) > 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; f_2(N_i, y(N_i), y'(N_i)) \geq 0.$$

Λόγω της επιλογής των συναρτήσεων h_i ισχύει $h_i(N_i) > 0$. Επειδή το N_i είναι σημείο θετικού μεγίστου της v_i ισχύει $v_i(N_i) > 0$ και άρα $y(N_i) > h_i(N_i) > 0$ δηλαδή $y^\varepsilon(N_i) > h_i^\varepsilon(N_i)$. Επίσης $h_i''(N_i) < 0$ διότι

$$h_i^\varepsilon(N_i) h_i''(N_i) = -\psi(|h_i'(N_i)|)$$

με $h_i^\varepsilon(N_i) > 0$ και $\psi(|h_i'(N_i)|) > 0$. Τελικά η σχέση (2.11) μας δίνει $L^* v_i(N_i) > 0$, άτοπο. Στο σύνορο γνωρίζουμε ότι $y(x) \leq h_i(x)$. Εφαρμόζοντας την αρχή μεγίστου παίρνουμε :

$$y(x) \leq h_i(x) \text{ για } x \in \overline{D_i}.$$

Ορίζουμε τώρα $L_1 y \equiv |y|^\varepsilon y''$. Οπότε θα ισχύει :

$$L_1 y = f_1(x, y, y') + f_2(x, y, y')$$

και

$$L_1 h_i = h_i^\varepsilon h_i'' = -\psi(|h_i'|) \text{ για } i = 1, 2$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $w_i = y + h_i$ και τον τελεστή $Lw \equiv |y|^\varepsilon w''$. Τότε

$$\begin{aligned} Lw &= |y|^\varepsilon (y'' + h_i'') \\ &= f_1(x, y, y') + f_2(x, y, y') + |y|^\varepsilon h_i'' + |h_i|^\varepsilon h_i'' - |h_i|^\varepsilon h_i'' \\ &= f_1(x, y, y') + f_2(x, y, y') - \psi(|h_i'|) + (|y|^\varepsilon - |h_i|^\varepsilon) h_i'' \end{aligned}$$

δηλαδή

$$Lw = f_1(x, y, y') + f_2(x, y, y') - \psi(|h_i'|) + (|y|^\varepsilon - |h_i|^\varepsilon) h_i''. \tag{2.12}$$

Έστω $\tilde{N}_i \in D_i$ τέτοιο ώστε η $w_i = y + h_i$ να λαμβάνει εκεί αρνητικό ελάχιστο. Τότε $w''(\tilde{N}_i) \geq 0$ οπότε από τον ορισμό του τελεστή L προκύπτει $Lw(\tilde{N}_i) \geq 0$. Τώρα προφανώς $w(\tilde{N}_i) < 0$, άρα $y(\tilde{N}_i) + h_i(\tilde{N}_i) < 0$. Επίσης ισχύει $h_i''(\tilde{N}_i) < 0$ για $i = 1, 2$ και θα δείξουμε ότι

$$h_i^\varepsilon(\tilde{N}_i) - |y(\tilde{N}_i)|^\varepsilon < 0.$$

Πράγματι, $0 < h_i(\tilde{N}_i) < -y(\tilde{N}_i) = |y(\tilde{N}_i)|$ άρα $h_i^\varepsilon(\tilde{N}_i) < |y(\tilde{N}_i)|^\varepsilon$. Από τις σχέσεις (2.8), (2.9) καθώς επίσης και ότι στο $\tilde{N}_i$ η w_i λαμβάνει αρνητικό ελάχιστο (άρα $y'(\tilde{N}_i) = -h_i'(\tilde{N}_i)$) έχουμε

$$f_1(\tilde{N}_i, y(\tilde{N}_i), y'(\tilde{N}_i)) - \psi(|y_i'(\tilde{N}_i|) < 0$$

και $f_2(\tilde{N}_i, y(\tilde{N}_i), y'(\tilde{N}_i)) \leq 0$. Άρα από τη σχέση (2.12) παίρνουμε $Lw(\tilde{N}_i) < 0$, άτοπο. Στο σύνορο, για $x \in \partial D_i$ με $i = 1, 2$, γνωρίζουμε $-h_i(x) \leq y(x)$. Εφαρμόζοντας την αρχή μεγίστου παίρνουμε

$$-h_i(x) \leq y(x) \text{ στο } \overline{D_i}.$$

β) Έστω $\tau_0 \geq 2l$. Η διαδικασία της απόδειξης είναι παρόμοια, απλά τώρα στο σύνορο θα έχουμε $y(-l) = h_1(-l) = 0$ και $y(l) = h_2(l) = 0$ με $h_1' > 0$, $h_2' < 0$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι

$$|y(x)| \leq h_i(x) \; i = 1,2 \; \forall x \in \overline{D_i} \; .$$

Παράδειγμα 1. Άς πάρουμε για $f_1(x,y,p) = p^m g(x,y)$ και $f_2(x,y,p) = y^{2n+1}p^{2n}h(x,y,p)$ όπου οι m,n είναι φυσικοί αριθμοί, $m > 2$ και η h είναι μια μη αρνητική συνάρτηση. Εύκολα βλέπουμε ότι οι συνθήκες (2.8), (2.9) ικανοποιούνται.

Από το προηγούμενο παράδειγμα είναι φανερό ότι η γνήσια ανισότητα στην σχέση (2.8) δεν είναι ουσιαστική και θα μπορούσε λόγω της θετικότητας της συνάρτησης ψ να αντικατασταθεί από την

$$|f_1(x,y,p)| \leq \psi(|p|).$$

2.3 Ολική εκτίμηση του $|y'|$.

Λήμμα 2.3 *Έστω $y \in C^2((-l,l)) \cap C^0([-l,l])$ λύση του προβλήματος (2.1), (2.2) και για την συνάρτηση $f(x,y,p)$ ισχύουν οι προυποθέσεις του λήμματος 2.2. Επιπλέον η $f_2(x,y,p)$ ικανοποιεί τις συνθήκες*

$$f_2(x_1,y_1,p) - f_2(x_2,y_2,p) \geq 0 \tag{2.13}$$

$$f_2(x_2,y_1,-p) - f_2(x_1,y_2,-p) \geq 0 \tag{2.14}$$

για $x_1 > x_2, y_1 > y_2, p > 0$. Τότε

$$|y'(x)| \leq c_0$$

όπου το c_0, εξαρτάται μόνο από τα ψ, l^{-1}, M.

Απόδειξη. Έστω δύο σημεία $x_1, x_2 \in (-l,l)$ με $x_1 > x_2$ και

$$|y(x_1)|^\varepsilon y''(x_1) = f_1(x_1,y(x_1),y'(x_1)) + f_2(x_1,y(x_1),y'(x_1)) \tag{2.15}$$

$$|y(x_2)|^\varepsilon y''(x_2) = f_1(x_2,y(x_2),y'(x_2)) + f_2(x_2,y(x_2),y'(x_2)) \tag{2.16}$$

Ορίζουμε $P = \{(x_1,x_2) : |x_1| < l, |x_2| < l, x_1 > x_2, x_1 - x_2 < \tau_0\}$, όπου το τ_0 θα επιλεχθεί παρακάτω, και $v(x_1,x_2) = y(x_1) - y(x_2)$. Προφανώς η v ικανοποιεί την εξίσωση

$$|y(x_1)|^\varepsilon v_{x_1x_1} - |y(x_2)|^\varepsilon v_{x_2x_2} = f_1(x_1,y(x_1),v_{x_1}) + f_2(x_1,y(x_1),v_{x_1}) -$$

$-f_1(x_2, y(x_2), -v_{x_2}) - f_2(x_2, y(x_2), -v_{x_2}).$

Θεωρούμε τον τελεστή

$$L(v) \equiv -\alpha v_{x_1x_1} - \beta v_{x_2x_2} - \psi(|v_{x_1}|) - \psi(|v_{x_2}|) \tag{2.17}$$

όπου $\alpha = \alpha(x_1) = |y(x_1)|^\varepsilon$, $\beta = \beta(x_2) = |y(x_2)|^\varepsilon$. Έστω h η λύση του προβλήματος

$$h^\varepsilon(\tau)h''(\tau) + \psi(|h'(\tau)|) = 0, \tag{2.18}$$

$$h(0) = 0, h(\tau_0) = \mu = max\{M, osc(y)\}. \tag{2.19}$$

Όπως και προηγουμένως βρίσκουμε μία αναπαράσταση της λύσης μέσω της αλλαγής $p(h) = h'$,

$$h(q) = (1-\varepsilon)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\left(\int_q^{q_1} \frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}},\ x(q) = \int_q^{q_1} \frac{h^\varepsilon d\rho}{\psi(\rho)} \tag{2.20}$$

για $q \in [q_0, q_1]$, $q_1 > q_0 > 0$ και

$$h_1(q_0) = (1-\varepsilon)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\left(\int_{q_0}^{q_1} \frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = \mu \tag{2.21}$$

που ισχύει λόγω της (2.3). Επίσης θέτουμε

$$\tau_0 = \int_{q_0}^{q_1} \frac{h^\varepsilon d\rho}{\psi(\rho)}.$$

Η σύγκριση των $h(x_1 - x_2)$ και $v(x_1, x_2)$ στο ∂P μας οδηγεί στη ανισότητα

$$v(x_1, x_2) \le h(x_1 - x_2)\ \ \forall (x_1, x_2) \in \partial P.$$

Πράγματι, για $x_1 = x_2$ οι $v(x_1, x_2)$, $h(x_1 - x_2)$ συμπίπτουν και ισούνται με 0, για $x_1 - x_2 = \tau_0$ παίρνουμε $y(x_1) - y(x_2) - h(\tau_0) = y(x_1) - y(x_2) - \mu \le osc(y) - \mu \le 0$. Για $x_1 = l, x_2 \in (l - \tau_0, l)$ έχουμε $y(l) - y(x_2) - h(l - x_2) = -y(x_2) - h(l - x_2)$. Θα δείξουμε $y(x_2) \ge -h(l - x_2)$. Όμως ισχύει $h(l - x_2) = h_2(x_2)$ διότι οι συναρτήσεις $h_2(x_2)$, $h_0(x_2) = h(l - x_2)$ είναι οι μοναδικές λύσεις των $(I), (II)$

$$(I)\ \begin{cases} h_2^\varepsilon(x)h_2''(x) + \psi(|h_2'(x)|) = 0 \\ h_2(l - \tau_0) = \mu \\ h_2(l) = 0 \end{cases} \qquad (II)\ \begin{cases} h_0^\varepsilon(x)h_0''(x) + \psi(|h_0'(x)|) = 0 \\ h_0(l - \tau_0) = \mu \\ h_0(l) = 0 \end{cases}$$

άρα το ζητούμενο προκύπτει από το Λήμμα 2.2. Για $x_2 = -l, x_1 \in (-l, -l + \tau_0)$ τότε $y(x_1) - y(x_2) - h(x_1 - x_2) = y(x_1) - h(x_1 + l)$. Θα δείξουμε ότι

$y(x_1) \leq h(x_1 + l)$. Αρκεί να δείξουμε $h_1(x_1) \leq h(x_1 + l)$ και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.2 θα έχουμε

$$y(x_1) \leq h_1(x_1) \leq h(x_1 + l).$$

Όμως ισχύει $h_1(x_1) = h(x_1 + l)$ διότι οι συναρτήσεις $h_1(x_1)$ και $\tilde{h}(x_1) = h(x_1 + l)$ είναι μοναδικές λύσεις των (III),(IV).

$$(III) \begin{cases} h_1^\varepsilon(x) h_1''(x) + \psi(|h_1'(x)|) = 0 \\ h_1(-l) = 0 \\ h_1(-l + \tau_0) = \mu \end{cases} \qquad (IV) \begin{cases} \tilde{h}^\varepsilon(x) \tilde{h}''(x) + \psi(|\tilde{h}'(x)|) = 0 \\ \tilde{h}(-l) = 0 \\ \tilde{h}(-l + \tau_0) = \mu \end{cases}$$

Στο P ορίζουμε

$$L_1(h) \equiv h^\varepsilon(\tau) h''(\tau) + \psi(|h'(\tau)|)$$

και $L_2(h) = -L_1(h)$. Τώρα

$$L_2(h) - L(v) = L_3(h - v) + g_4(x_1, x_2) \tag{2.22}$$

όπου

$$L_3(q) \equiv -\alpha q_{x_1 x_1} - \beta q_{x_2 x_2} - g_1 q_{x_1} - g_2 q_{x_2} + g_3 q$$

με

$$g_1 = \frac{-\psi(|v_{x_1}|)}{h_{x_1} - v_{x_1}}, \quad g_2 = \frac{\psi(|h_{x_2}|) - \psi(|v_{x_2}|)}{h_{x_2} - v_{x_2}},$$

$$g_3 = -h'' \frac{h^\varepsilon - |v|^\varepsilon}{h - v}, \quad g_4 = \alpha h'' + \beta h'' - |v|^\varepsilon h''$$

και $h'' = h_{x_1 x_1} = h_{x_2 x_2}$. Η απόδειξη της (2.22) είναι απλή,

$L_3(h - v) + g_4(x_1, x_2) = -\alpha(h - v)_{x_1 x_1} - \beta(h - v)_{x_2 x_2} + \psi(|v_{x_1}|) - \psi(|h_{x_2}|) + \psi(|v_{x_2}|) - h''(h^\varepsilon - |v|^\varepsilon) + \alpha h'' + \beta h'' - |v|^\varepsilon h'' = \alpha v_{x_1 x_1} + \beta v_{x_2 x_2} - h'' h^\varepsilon + \psi(|v_{x_1}|) - \psi(|h'|) + \psi(|v_{x_2}|) = \alpha v_{x_1 x_1} + \beta v_{x_2 x_2} + \psi(|v_{x_1}|) + \psi(|v_{x_2}|) - (h'' h^\varepsilon + \psi(|h'|)) = -L(v) - L_1(h) = L_2(h) - L(v)$.

Όμως $g_4 = \alpha h'' + \beta h'' - |v|^\varepsilon h'' = h''(\alpha + \beta - |v|^\varepsilon) = (|y(x_1)|^\varepsilon + |y(x_2)|^\varepsilon - |v|^\varepsilon) h''$ και ισχύουν οι ανισότητες

$$|y(x_1)|^\varepsilon + |y(x_2)|^\varepsilon \geq (|y(x_1)| + |y(x_2)|)^\varepsilon \geq |v|^\varepsilon$$

για κάθε $\varepsilon \in [0, 1)$ (βλέπε [35]), οπότε $g_4 \leq 0$. Έστω ότι η $h - v$ λαμβάνει στο $N = (x_1^0, x_2^0) \in P$ αρνητικό ελάχιστο τότε θα έχουμε $(h - v)(N) < 0$, άρα $h^\varepsilon(N) < |v|^\varepsilon(N)$ δηλαδή $g_3(N) > 0$ διότι $h'' < 0$. Οπότε $L_3(h - v)(N) =$

$-\alpha(N)(h-v)_{x_1x_1}(N)-\beta(N)(h-v)_{x_2x_2}(N)+g_3(N)(h-v)(N)<0$. Από την άλλη μεριά

$$L_2(h)-L(v)=\alpha v_{x_1x_1}+\beta v_{x_2x_2}+\psi(|v_{x_1}|)+\psi(|v_{x_2}|)=f_1(x_1,y(x_1),v_{x_1})+$$

$$+f_2(x_1,y(x_1),v_{x_1})-f_1(x_2,y(x_2),-v_{x_2})-f_2(x_2,y(x_2),-v_{x_2})+\psi(|v_{x_1}|)+\psi(|v_{x_2}|)$$

άρα οι σχέσεις (2.8), (2.13), (2.22) καθώς επίσης και ότι $v_{x_1}(N)=-v_{x_2}(N)=h'(N)$ μας δίνουν ότι

$$L_3(h-v)(N)\geq 0$$

άτοπο. Με την εκτίμηση στο σύνορο καταλήγουμε στην

$$y(x_1)-y(x_2)=v(x_1,x_2)\leq h(x_1-x_2) \tag{2.23}$$

για κάθε $(x_1,x_2)\in\bar{P}$.

Τώρα στο $P=\{(x_1,x_2):x_1>x_2,x_1-x_2<\tau_0\}$, όπου το τ_0 επιλέγεται όπως προηγουμένως ορίζουμε $\tilde{v}(x_1,x_2)=y(x_2)-y(x_1)$. Προφανώς η $\tilde{v}$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$|y(x_2)|^{\varepsilon}\tilde{v}_{x_2x_2}-|y(x_1)|^{\varepsilon}\tilde{v}_{x_1x_1}=f_1(x_2,y(x_2),\tilde{v}_{x_2})+f_2(x_2,y(x_2),\tilde{v}_{x_2})-$$

$$f_1(x_1,y(x_1),-\tilde{v}_{x_1})-f_2(x_1,y(x_1),-\tilde{v}_{x_1}).$$

Ορίζουμε

$$L(\tilde{v})\equiv-\alpha\tilde{v}_{x_1x_1}-\beta\tilde{v}_{x_2x_2}-\psi(|\tilde{v}_{x_1}|)-\psi(|\tilde{v}_{x_2}|)$$

όπου $\alpha=\alpha(x_1)=|y(x_1)|^{\varepsilon}$, $\beta=\beta(x_2)=|y(x_2)|^{\varepsilon}$. Έστω h η λύση του προβλήματος (2.18), (2.19) και (2.20) η αναπαράστασή της. Η σύγκριση των $h(x_1-x_2)$ και $\tilde{v}(x_1,x_2)$ στο ∂P μας οδηγεί στη ανισότητα

$$\tilde{v}(x_1,x_2)\leq h(x_1-x_2)\ \ \forall(x_1,x_2)\in\partial P.$$

Πράγματι, για $x_1=x_2$ οι $\tilde{v}(x_1,x_2)$, $h(x_1-x_2)$ συμπίπτουν και ισούνται με 0, για $x_1-x_2=\tau_0$ παίρνουμε $y(x_2)-y(x_1)-h(\tau_0)=y(x_2)-y(x_1)-\mu\leq osc(y)-\mu\leq 0$. Για $x_1=l,x_2\in(l-\tau_0,l)$ έχουμε $y(x_2)-y(l)-h(l-x_2)=y(x_2)-h(l-x_2)$. Θα δείξουμε ότι $y(x_2)\leq h(l-x_2)$. Όμως ισχύει $h(l-x_2)=h_2(x_2)$ διότι οι συναρτήσεις $h_2(x_2)$, $h_0(x_2)=h(l-x_2)$ είναι οι μοναδικές λύσεις των $(I),(II)$

$$(I)\ \begin{cases} h_2^{\varepsilon}(x)h_2''(x)+\psi(|h_2'(x)|)=0\\ h_2(l-\tau_0)=\mu\\ h_2(l)=0\end{cases}\qquad (II)\ \begin{cases} h_0^{\varepsilon}(x)h_0''(x)+\psi(|h_0'(x)|)=0\\ h_0(l-\tau_0)=\mu\\ h_0(l)=0\end{cases}$$

άρα το ζητούμενο προκύπτει από το Λήμμα 2.2. Για $x_2=-l,x_1\in(-l,-l+\tau_0)$ τότε $y(x_2)-y(x_1)-h(x_1-x_2)=-y(x_1)-h(x_1+l)$. Θα δείξουμε ότι

$-h(x_1+l) \leq y(x_1)$. Αρκεί να δείξουμε $h_1(x_1) \leq h(x_1+l)$ και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.2 θα έχουμε

$$y(x_1) \geq -h_1(x_1) \geq -h(x_1+l).$$

Όμως ισχύει $h_1(x_1) = h(x_1+l)$ διότι οι συναρτήσεις $h_1(x_1)$ και $\tilde{h}(x_1) = h(x_1+l)$ είναι μοναδικές λύσεις των (III),(IV).

$$(III) \begin{cases} h_1^\varepsilon(x)h_1''(x) + \psi(|h_1'(x)|) = 0 \\ h_1(-l) = 0 \\ h_1(-l+\tau_0) = \mu \end{cases} \qquad (IV) \begin{cases} \tilde{h}^\varepsilon(x)\tilde{h}''(x) + \psi(|\tilde{h}'(x)|) = 0 \\ \tilde{h}(-l) = 0 \\ \tilde{h}(-l+\tau_0) = \mu \end{cases}$$

Για τα εσωτερικά σημεία του P ορίζουμε

$$L_1(h) \equiv h^\varepsilon(\tau)h''(\tau) + \psi(|h'(\tau)|)$$

και $L_2(h) = -L_1(h)$. Τώρα

$$L_2(h) - L(\tilde{v}) = L_3(h-\tilde{v}) + g_4(x_1,x_2)$$

όπου

$$L_3(q) \equiv -\alpha q_{x_1x_1} - \beta q_{x_2x_2} - g_1 q_{x_1} - g_2 q_{x_2} + g_3 q$$

με

$$g_1 = \frac{-\psi(|\tilde{v}_{x_1}|)}{h_{x_1} - \tilde{v}_{x_1}}, \quad g_2 = \frac{\psi(|h_{x_2}|) - \psi(|\tilde{v}_{x_2}|)}{h_{x_2} - \tilde{v}_{x_2}},$$

$$g_3 = -h''\frac{h^\varepsilon - |\tilde{v}|^\varepsilon}{h-\tilde{v}}, \quad g_4 = \alpha h'' + \beta h'' - |\tilde{v}|^\varepsilon h''$$

και $h'' = h_{x_1x_1} = h_{x_2x_2}$. Η απόδειξη της παραπάνω σχέσης έχει γίνει προηγουμένως. Όμοια λοιπόν $g_4 = \alpha h'' + \beta h'' - |\tilde{v}|^\varepsilon h'' = h''(\alpha+\beta-|\tilde{v}|^\varepsilon) = (|y(x_1)|^\varepsilon + |y(x_2)|^\varepsilon - |\tilde{v}|^\varepsilon)h''$, και ισχύουν οι ανισότητες

$$|y(x_1)|^\varepsilon + |y(x_2)|^\varepsilon \geq (|y(x_1)| + |y(x_2)|)^\varepsilon \geq |\tilde{v}|^\varepsilon$$

για κάθε $\varepsilon \in [0,1)$ (βλέπε [35]), οπότε $g_4 \leq 0$. Έστω ότι η $h-\tilde{v}$ λαμβάνει στο $\tilde{N} = (x_1^0, x_2^0) \in P$ αρνητικό ελάχιστο τότε θα έχουμε $(h-\tilde{v})(\tilde{N}) < 0$, άρα $h^\varepsilon(\tilde{N}) < |\tilde{v}|^\varepsilon(\tilde{N})$ δηλαδή $g_3(\tilde{N}) > 0$ διότι $h'' < 0$. Οπότε $L_3(h-\tilde{v})(\tilde{N}) = -\alpha(\tilde{N})(h-\tilde{v})_{x_1x_1}(\tilde{N}) - \beta(\tilde{N})(h-\tilde{v})_{x_2x_2}(\tilde{N}) + g_3(\tilde{N})(h-\tilde{v})(\tilde{N}) < 0$. Από την άλλη μεριά

$$L_2(h) - L(\tilde{v}) = \alpha\tilde{v}_{x_1x_1} + \beta\tilde{v}_{x_2x_2} + \psi(|\tilde{v}_{x_1}|) + \psi(|\tilde{v}_{x_2}|) = -f_1(x_1, y(x_1), -\tilde{v}_{x_1}) -$$

$$-f_2(x_1, y(x_1), -\tilde{v}_{x_1}) + f_1(x_2, y(x_2), \tilde{v}_{x_2}) + f_2(x_2, y(x_2), \tilde{v}_{x_2}) + \psi(|\tilde{v}_{x_1}|) + \psi(|\tilde{v}_{x_2}|)$$

άρα οι σχέσεις (2.8), (2.14), (2.22) καθώς επίσης και ότι $\tilde{v}_{x_1}(\tilde{N}) = \tilde{v}_{x_2}(\tilde{N}) = -h'(\tilde{N})$ μας δίνουν ότι

$$L_3(h-\tilde{v})(\tilde{N}) \geq 0$$

άτοπο, οπότε η ανισότητα στο σύνορο συνεπάγεται

$$y(x_2) - y(x_1) = \tilde{v}(x_1, x_2) \leq h(x_1 - x_2) \tag{2.24}$$

για κάθε $(x_1, x_2) \in \bar{P}$.

Στην μέχρι τώρα απόδειξη είχαμε υποθέσει ότι $\tau_0 \leq 2l$. Αν $\tau_0 > 2l$ ορίζουμε ξανά το P και η απόδειξη είναι η ίδια θεωρώντας τους ίδιους τελεστές. Η μόνη διαφορά είναι το σύνορο όπου τώρα θα έχουμε

$$\partial P = \{x_1 - x_2 = 0\} \cup \{x_2 = -l, x_1 \in (-l, l)\} \cup \{x_1 = l, x_2 \in (-l, l)\}$$

και η απόδειξη είναι απλούστερη.

Λόγω της συμμετρίας των μεταβλητών x_1, x_2 μπορούμε να ισχυριστούμε ότι για $|x_1| < l$, $|x_2| < l$, $0 < |x_1 - x_2| < \tau_0$ (ή $0 < |x_1 - x_2|$ για $\tau_0 > 2l$)

$$\frac{|y(x_1) - y(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq \frac{h(|x_1 - x_2|) - h(0)}{|x_1 - x_2|}$$

δηλαδή

$$|y'(x)| \leq h'(0) = q_1. \tag{2.25}$$

Το λήμμα αποδείχθηκε.

Παράδειγμα 2. Άν θεωρήσουμε $f_1(x, y, p) = p^{n+2} g(x, y)$ και $f_2(x, y, p) = y^{2n+1} e^p h(x, y, p)$ για $n \neq 0$ φυσικό και h μη αρνητική συνάρτηση, βλέπουμε ότι οι συνθήκες (2.8), (2.13), (2.14) ικανοποιούνται.

3. Το πρόβλημα *Neumann*.

3.1 Εκτίμηση της λύσης.

Λήμμα 3.1 *Θεωρούμε το πρόβλημα*

$$|y|^{\varepsilon} y'' = f(x, y, y') \tag{3.1}$$

$$y'(-l) = y'(l) = 0 \tag{3.2}$$

όπου $\varepsilon \in [0, 1)$ *και η συνάρτηση* $f(x, y, p)$ *ορίζεται για* $|y| < +\infty$, $|p| < +\infty$, $x \in [-l, l]$. *Έστω ότι υπάρχει* $M > 0$ *τέτοιο ώστε* $yf(x, y, 0) > 0$ *για* $|y| > M$, $x \in [-l, l]$ *και επιπλέον*

$$|y(-l)|^{\varepsilon} y''(-l) = f(-l, y(-l), 0) \tag{3.3}$$

$$|y(l)|^{\varepsilon} y''(l) = f(l, y(l), 0) \tag{3.4}$$

τότε για κάθε $y \in C^2[-l, l]$ *λύση του προβλήματος (3.1), (3.2) ισχύει*

$$|y(x)| \leq M, \ x \in [-l, l]$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $|y|$ είναι θετική και λόγω συνέχειας θα λαμβάνει θετικό μέγιστο σε κάποιο $x_0 \in [-l, l]$. Έστω $|y| > M$.
(α) Άν $x_0 \in (-l, l)$, $y(x_0) > M$ τότε $y''(x_0) \leq 0$, άρα $|y(x_0)|^{\varepsilon} y''(x_0) \leq 0$ δηλαδή $f(x_0, y(x_0), 0) \leq 0$ και επειδή $y(x_0) > 0$ προκύπτει $y(x_0) f(x_0, y(x_0), 0) \leq 0$ άτοπο.
(β) Άν $x_0 \in (-l, l)$, $y(x_0) < -M$ τότε $y''(x_0) \geq 0$, άρα $|y(x_0)|^{\varepsilon} y''(x_0) \geq 0$ δηλαδή $f(x_0, y(x_0), 0) \geq 0$ και επειδή $y(x_0) < 0$ προκύπτει $y(x_0) f(x_0, y(x_0), 0) \leq 0$ άτοπο.

Αν η $|y|$ λαμβάνει το μέγιστο της για $x_0 = -l$ ή $x_0 = l$ τότε $|y(x_0)| \leq M$. Πράγματι έστω $x_0 = -l$ και $y(-l)$ το μέγιστο της συνάρτησης y. Θα δείξουμε ότι δεν μπορεί να ισχύει $|y(-l)| > M$. Άν $|y(-l)| > M$ τότε πολλαπλασιάζοντας την (3.3) με $y(-l)$ προκύπτει

$$y(-l)|y(-l)|^{\varepsilon} y''(-l) = y(-l) f(-l, y(-l), 0) > 0.$$

Αν $y(-l) > 0$ τότε $y''(-l) > 0$ και άρα η y' είναι γνήσια αύξουσα για x κοντά στο $-l$. Τότε $y'(x) > y'(-l) = 0$ για x κοντά στο $-l$, οπότε η y είναι γνήσια αύξουσα σε αυτή την περιοχή του $-l$ και το $y(-l) = |y(-l)|$ δεν είναι μέγιστο της $|y|$.

Αν τώρα $y(-l) < 0$ τότε $y''(-l) < 0$ και άρα η y' είναι γνήσια φθίνουσα σε μία περιοχή του $-l$, δηλαδή $y'(x) < y'(-l) = 0$ για x κοντά στο $-l$, οπότε η y είναι γνήσια φθίνουσα σ' αυτή τη περιοχή του $-l$ και η $|y|$ δεν μπορεί να λαμβάνει μέγιστο στο $-l$ (θα λαμβάνει ελάχιστο). Η απόδειξη για $x_0 = l$ γίνεται με τον ίδιο τρόπο.

3.2 Εκτίμηση της $|y'|$.

Θεωρούμε το πρόβλημα (3.1), (3.2) όπου η συνάρτηση f είναι δυνατόν να εμφανίζεται στη μορφή

$$f(x,y,p) = f_1(x,y,p) + f_2(x,y,p) \tag{3.5}$$

όπου η f_1 ικανοποιεί τη συνθήκη (2.8) και για την f_2 ισχύουν οι (2.13), (2.14). Έστω h η λύση του προβλήματος (2.18), (2.19) και (2.20) η αναπαράστασή της.

Λήμμα 3.2 *Έστω $y \in C^2((-l,l)) \cap C^1([-l,l])$ λύση του προβλήματος (3.1), (3.2). Αν υποθέσουμε ότι για οι f, f_1, f_2 ικανοποιούν τις (3.5), (2.8), (2.13)-(2.14) αντίστοιχα, τότε*

$$|y'(x)| \leq C_0 \tag{3.6}$$

για κάθε $x \in [-l,l]$ όπου το C_0 εξαρτάται μόνο από τα ψ, l^{-1}, M.

Απόδειξη. Άν $x = -l$ ή $x = l$ τότε η (3.6) προφανώς ισχύει. Έστω δύο σημεία $x_1, x_2 \in (-l,l)$ με $x_1 > x_2$ και

$$|y(x_1)|^\varepsilon y''(x_1) = f_1(x_1, y(x_1), y'(x_1)) + f_2(x_1, y(x_1), y'(x_1)) \tag{3.7}$$

$$|y(x_2)|^\varepsilon y''(x_2) = f_1(x_2, y(x_2), y'(x_2)) + f_2(x_2, y(x_2), y'(x_2)) \tag{3.8}$$

Ορίζουμε $P = \{(x_1,x_2) : |x_1| < l, |x_2| < l, x_1 > x_2, x_1 - x_2 < \tau_0\}$ και $v(x_1,x_2) = y(x_1) - y(x_2)$. Προφανώς η v ικανοποιεί την εξίσωση

$$|y(x_1)|^\varepsilon v_{x_1x_1} + |y(x_2)|^\varepsilon v_{x_2x_2} = f_1(x_1, y(x_1), v_{x_1}) + f_2(x_1, y(x_1), v_{x_1}) -$$

$$f_1(x_2, y(x_2), -v_{x_2}) - f_2(x_2, y(x_2), -v_{x_2}).$$

Ορίζουμε τους τελεστές

$$L(v) \equiv -\alpha v_{x_1x_1} - \beta v_{x_2x_2} - \psi(|v_{x_1}|) - \psi(|v_{x_2}|) \tag{3.9}$$

όπου $\alpha = \alpha(x_1) = |y(x_1)|^\varepsilon$, $\beta = \beta(x_2) = |y(x_2)|^\varepsilon$,

$$L_1(h) \equiv h^\varepsilon(\tau)h''(\tau) + \psi(|h'(\tau)|). \tag{3.10}$$

Για ευκολία ας θέσουμε $L_2(h) = -L_1(h)$. Τώρα ισχύει η σχέση (2.22). Θεωρούμε την συνάρτηση $h-v$ η οποία αν λαμβάνει στο $N \in P$ αρνητικό ελάχιστο τότε όπως είδαμε και στη μελέτη του προβλήματος *Dirichlet* εύκολα προκύπτει ότι

$$L_3(h-v)(N) < 0. \tag{3.11}$$

Επίσης χρησιμοποιώντας τις (2.8), (2.13), (2.22) μπορουμε να δείξουμε ότι

$$L_3(h-v)(N) \geq 0. \tag{3.12}$$

Απομένει τώρα ο έλεγχος στο σύνορο του P δηλάδη στο

$$\partial P = \{x_1 - x_2 = 0\} \cup \{x_1 - x_2 = \tau_0\} \cup Q_1 \cup Q_2 \tag{3.13}$$

όπου $Q_1 = \{x_2 = -l, x_1 \in (-l, -l+\tau_0)\}$, $Q_2 = \{x_1 = l, x_2 \in (l-\tau_0, l)\}$. Για $x_1 = x_2$ οι $v(x_1, x_2)$, $h(x_1 - x_2)$ συμπίπτουν και ισούνται με 0, για $x_1 - x_2 = \tau_0$ παίρνουμε $y(x_1) - y(x_2) - h(\tau_0) = y(x_1) - y(x_2) - \mu \leq osc(y) - \mu \leq 0$.

Άν τώρα $x_2 = -l, x_1 \in (-l, -l+\tau_0)$ έχουμε $w(x_1, x_2) = y(x_1) - y(x_2) - h(x_1 - x_2)$ άρα $w_{x_2}(x_1, -l) = -y'(-l) + h'(x_1 + l) = h'(x_1 + l) \geq q_0 > 0$. Τέλος άν $x_1 = l, x_2 \in (l-\tau_0, l)$ ισχύει $w_{x_1}(l, x_2) = y'(l) - h'(l - x_2) = -h'(l - x_2) < 0$. Οπότε από την εκτίμηση στο σύνορο και τα αποτελέσματα στο εσωτερικό του P έχουμε

$$v(x_1, x_2) = y(x_1) - y(x_2) \leq h(x_1 - x_2) \tag{3.14}$$

για κάθε $(x_1, x_2) \in \bar{P}$. Με τον ίδιο τρόπο αλλά χρησιμοποιώντας τώρα την (2.14) μπορούμε να αποδείξουμε (βλέπε παράγραφο 2) ότι

$$\tilde{v}(x_1, x_2) = y(x_2) - y(x_1) \leq h(x_1 - x_2) \tag{3.15}$$

για κάθε $(x_1, x_2) \in \bar{P}$ και λόγω της συμμετρίας των μεταβλητών x_1, x_2 έχουμε για $|x_1| < l$, $|x_2| < l$, $0 < |x_1 - x_2| < \tau_0$ (ή $0 < |x_1 - x_2|$ για $\tau_0 > 2l$)

$$\frac{|y(x_1) - y(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq \frac{h(|x_1 - x_2|) - h(0)}{|x_1 - x_2|}$$

δηλαδή

$$|y'(x)| \leq h'(0) = q_1.$$

Παράδειγμα 3. Προφανώς οι f_1, f_2 που είδαμε στο παράδειγμα 2 μπορούν να επιλεγούν σαν δεύτερο μέλος στο πρόβλημα *Neumann*.

4. Το πρόβλημα *Robin*.

4.1 Εκτίμηση της λύσης.

Λήμμα 4.1 *Θεωρούμε το πρόβλημα*

$$|y|^{\varepsilon} y'' = f(x, y, y') \tag{4.1}$$

$$y'(-l) - \sigma(y(-l)) = 0 \tag{4.2}$$

$$y'(l) + \sigma(y(l)) = 0 \tag{4.3}$$

όπου $\varepsilon \in [0, 1)$, *η συνάρτηση* $f(x, y, p)$ *ορίζεται για* $|y| < +\infty$, $|p| < +\infty$, $x \in (-l, l)$ *και η* $\sigma(y)$ *ορίζεται για κάθε* y. *Έστω ότι υπάρχει* $M > 0$ *τέτοιο ώστε για* $|y| > M$ *ισχύει* $yf(x, y, 0) > 0$ *με* $x \in (-l, l)$ *και* $y(-l)\sigma(y(-l)) > 0$, $y(l)\sigma(y(l)) < 0$. *Τότε για κάθε* $y \in C^2(-l, l) \cap C^1[-l, l]$ *λύση του προβλήματος (4.1)-(4.3) ισχύει*

$$|y(x)| \leq M, \ x \in [-l, l].$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $|y|$ λόγω συνέχειας θα λαμβάνει μέγιστο σε κάποιο $x_0 \in [-l, l]$. Έστω $|y| > M$.

(α) Άν $x_0 \in (-l, l)$, $y(x_0) > M$ τότε $y''(x_0) \leq 0$, άρα $|y(x_0)|^{\varepsilon} y''(x_0) \leq 0$ δηλαδή $f(x_0, y(x_0), 0) \leq 0$ και επειδή $y(x_0) > 0$ προκύπτει $y(x_0)f(x_0, y(x_0), 0) \leq 0$ άτοπο.

(β) Άν $x_0 \in (-l, l)$, $y(x_0) < -M$ τότε $y''(x_0) \geq 0$, άρα $|y(x_0)|^{\varepsilon} y''(x_0) \geq 0$ δηλαδή $f(x_0, y(x_0), 0) \geq 0$ και επειδή $y(x_0) < 0$ προκύπτει $y(x_0)f(x_0, y(x_0), 0) \leq 0$ άτοπο.

Αν η $|y|$ λαμβάνει το μέγιστο της για $x_0 = -l$ ή $x_0 = l$ τότε $|y(x_0)| \leq M$. Πράγματι έστω $x_0 = -l$ και $y(-l)$ το μέγιστο της συνάρτησης y. Θα δείξουμε ότι δεν μπορεί να ισχύει $|y(-l)| > M$. Άν $|y(-l)| > M$ τότε πολλαπλασιάζοντας την (4.2) με $y(-l)$ προκύπτει

$$y(-l)y'(-l) = y(-l)\sigma(y(-l)) > 0.$$

Αν $y(-l) > 0$ τότε $y'(-l) > 0$ άρα η y είναι γνήσια αύξουσα για $x \in \pi(-l, \delta), \delta > 0$ και το $y(-l) = |y(-l)|$ δεν είναι μέγιστο της $|y|$. Αν τώρα $y(-l) < 0$ τότε $y'(-l) < 0$ άρα η y είναι γνήσια φθίνουσα σε μία περιοχή του $-l$ και η $|y|$ δεν μπορεί να λαμβάνει μέγιστο στο $-l$. Για $x_0 = l$ η απόδειξη είναι παρόμοια. Πολλαπλασιάζουμε την (4.3) με $y(l)$ και έχουμε

$$y(l)y'(l) = -y(l)\sigma(y(l)) > 0.$$

Αν $y(l) > 0$ τότε $y'(l) > 0$ άρα η y είναι γνήσια αύξουσα για $x \in \pi(l, \delta'), \delta' > 0$ και το $y(l) = |y(l)|$ δεν είναι μέγιστο της $|y|$. Αν τώρα $y(l) < 0$ τότε $y'(l) < 0$ άρα η y είναι γνήσια φθίνουσα σε μία περιοχή του l και η $|y|$ δεν μπορεί να λαμβάνει μέγιστο στο l.

4.2 Εκτίμηση της $|y'|$.

Θεωρούμε το πρόβλημα (4.1)-(4.3) όπου η συνάρτηση f είναι της μορφής (3.5). Ας υποθέσουμε επίσης ότι οι f_1, f_2 επιλέγονται όπως στην προηγούμενη παράγραφο. Στις συνοριακές συνθήκες (4.2), (4.3) η συνάρτηση σ είναι φραγμένη για $|y| \leq M$ και $N = sup_{[-M,M]}|\sigma|$. Έστω h η λύση του προβλήματος (2.18), (2.19) και (2.20) μια αναπαράστασή της. Η μόνη διαφορά με τα δύο προηγούμενα προβλήματα είναι ότι εδώ πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλα το q_0. Έτσι διαλέγουμε

$$q_0 > N. \tag{4.4}$$

Λήμμα 4.2 *Έστω $y \in C^2((-l,l)) \cap C^1([-l,l])$ λύση του προβλήματος (4.1)-(4.3) και οι f, f_1, f_2 επιλέγονται όπως παραπάνω. Άν επιπλέον ικανοποιείται η (4.4) τότε υπάρχει σταθερά C_1 που εξαρτάται μόνο από τα ψ, l^{-1}, M, N τέτοια ώστε*

$$|y'(x)| \leq C_1 \tag{4.5}$$

για κάθε $x \in [-l,l]$.

Απόδειξη. Άν $x = -l$ ή $x = l$ επειδή $N = sup_{[-M,M]}|\sigma|$ η (4.5) ισχύει. Έστω δύο σημεία $x_1, x_2 \in (-l,l)$ με $x_1 > x_2$. Θεωρούμε τις $y(x_1), y(x_2)$ οι οποίες ικανοποιούν τις εξισώσεις (3.7), (3.8). Ορίζουμε το σύνολο $P = \{(x_1,x_2) : x_1 > x_2, x_1 - x_2 < \tau_0\}$ και τη συνάρτηση $v(x_1,x_2) = y(x_1) - y(x_2)$. Θεωρούμε τους τελεστές L, L_1 που δίνονται από τις σχέσεις (3.9), (3.10) αντίστοιχα. Μπορούμε να αποδείξουμε, χρησιμοποιώντας την (2.22), ότι η συνάρτηση $h-v$ δεν μπορεί να λαμβάνει αρνητικό ελάχιστο στο P. Στο σύνορο

$$\partial P = \{x_1 - x_2 = 0\} \cup \{x_1 - x_2 = \tau_0\} \cup Q_1 \cup Q_2$$

όπου $Q_1 = \{x_2 = -l, x_1 \in (-l, -l+\tau_0)\}$, $Q_2 = \{x_1 = l, x_2 \in (l-\tau_0, l)\}$ έχουμε, για $x_1 = x_2$ οι $v(x_1,x_2)$, $h(x_1 - x_2)$ συμπίπτουν και ισούνται με 0, για $x_1 - x_2 = \tau_0$ παίρνουμε $y(x_1) - y(x_2) - h(\tau_0) = y(x_1) - y(x_2) - \mu \leq osc(y) - \mu \leq 0$. Άν τώρα $(x_1,x_2) \in Q_1$ θα έχουμε $w(x_1,x_2) = y(x_1) - y(x_2) - h(x_1 - x_2)$ άρα

$$w_{x_2}(x_1,-l) = -y'(-l) + h'(x_1+l) = -\sigma(y(-l)) + h'(x_1+l) \geq -N + q_0 > 0$$

λόγω της (4.4). Τέλος άν $(x_1,x_2) \in Q_2$ ισχύει

$$w_{x_1}(l,x_2) = y'(l) - h'(l-x_2) = -\sigma(y(l)) - h'(l-x_2) \leq N - q_0 < 0$$

λόγω ξανά της (4.4). Οπότε

$$v(x_1,x_2) = y(x_1) - y(x_2) \leq h(x_1 - x_2) \tag{4.6}$$

για κάθε $(x_1, x_2) \in \bar{P}$. Με τον ίδιο τρόπο αλλά χρησιμοποιώντας τώρα την (2.14) μπορούμε να αποδείξουμε (δείτε παράγραφο 2) ότι

$$\tilde{v}(x_1, x_2) = y(x_2) - y(x_1) \leq h(x_1 - x_2) \tag{4.7}$$

για κάθε $(x_1, x_2) \in \bar{P}$ και λόγω της συμμετρίας των μεταβλητών x_1, x_2 έχουμε για $|x_1| < l$, $|x_2| < l$, $0 < |x_1 - x_2| < \tau_0$ (ή $0 < |x_1 - x_2|$ για $\tau_0 > 2l$)

$$\frac{|y(x_1) - y(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq \frac{h(|x_1 - x_2|) - h(0)}{|x_1 - x_2|}$$

δηλαδή

$$|y'(x)| \leq h'(0) = q_1.$$

Το λήμμα αποδείχτηκε.

Παράδειγμα 4. Προφανώς οι f_1, f_2 που είδαμε στο παράδειγμα 2 μπορούν να επιλεγούν σαν δεύτερο μέλος στο πρόβλημα *Robin*.

5. Θεωρήματα Ύπαρξης και Μοναδικότητας.

5.1 Η μη εκφυλιζόμενη περίπτωση $\varepsilon = 0$.

Άν στις σχέσεις (2.1), (3.1), (4.1) θέσουμε $\varepsilon = 0$ τότε προφανώς θα προκύψει η εξίσωση

$$y'' = f(x, y, y') \tag{5.1}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$y(-l) = y(l) = 0, \tag{5.2}$$

$$y'(-l) = y'(l) = 0, \tag{5.3}$$

$$y'(-l) - \sigma(y(-l)) = y'(l) + \sigma(y(l)) = 0. \tag{5.4}$$

Αποδείξαμε *apriori* εκτιμήσεις για την λύση καθώς και για την παράγωγό της,

$$|y(x)| \leq M, \ |y'(x)| \leq c_0 \ \forall x \in [-l, l]. \tag{5.5}$$

5.1.1 Ύπαρξη της λύσης των προβλημάτων *Dirichlet*, *Neumann*, *Robin*.

Θεώρημα 1 *Θεωρούμε το πρόβλημα (5.1), (5.2) και έστω η f ικανοποιεί τις υποθέσεις των λημμάτων (2.2), (2.3), τότε υπάρχει μια τουλάχιστον λύση $y \in C^2((-l, l)) \cap C^0([-l, l])$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον τελεστή

$$T : C^1([-l, l]) \longrightarrow C^2([-l, l])$$

$$v \longrightarrow y$$

όπου y είναι λύση του προβλήματος

$$y''(x) = f(x, v(x), v'(x)) \tag{5.6}$$

$$y(-l) = y(l) = 0 \tag{5.7}$$

Ο τελεστής είναι καλώς ορισμένος. Πράγματι η συνάρτηση $f(x, y, p)$ είναι φραγμένη για $x \in [-l, l]$, $|y| \leq M$, $|p| \leq c_0$ άρα λόγω της (5.1) η $y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) = \tilde{f}(x)$ είναι φραγμένη. Οπότε η y' είναι συνεχής. Τώρα επειδή η f θεωρήθηκε συνεχής προκύπτει ότι $y'' \in C^0([-l, l])$, δηλαδή $y \in C^2([-l, l])$. Επίσης το πρόβλημα (5.6), (5.7) έχει μοναδική λύση.

Παρατήρηση. Μια πιό φυσιολογική σκέψη θα ήταν να λέγαμε ότι $y \in C^2((-l, l)) \cap C^0([-l, l])$ όμως λόγω των υποθέσεων για την f η ομαλότητα της y φτάνει μέχρι το σύνορο (βλέπε [2]).

Θεωρούμε στον $C^1([-l,l])$ την νόρμα $||g||_{C^1} = \sup|g| + \sup|g'|$ και στον $C^2([-l,l])$ την νόρμα $||g||_{C^2} = \sup|g| + \sup|g'| + \sup|g''|$. O $(C^1, ||\cdot||_{C^1})$ είναι χώρος *Banach*. Θα δείξουμε ότι ο $T : C^1 \longrightarrow C^1$ είναι συμπαγής τελεστής. Αρκεί να δείξουμε ότι φραγμένο σύνολο στο C^2 θα είναι σχετικά συμπαγές στο C^1. Έστω $y_n \in C^2$ τότε $||y_n||_{C^2} \leq c_1$. Δηλαδή $\sup|y_n| + \sup|y_n'| + \sup|y_n''| \leq c_1$ για κάθε $n \in N$. Δηλαδή $\forall n \in N$, $\forall x \in [-l,l]$ έχουμε $|y_n(x)| \leq c_1$. Άρα y_n ομοιόμορφα φραγμένη. Τώρα προφανώς $\forall n$, $\forall x_1, x_2 \in [-l,l]$ ισχύει $y_n(x_1) - y_n(x_2) = y_n'(\xi)(x_1 - x_2)$ (από το Θ.Μ.Τ). Δηλαδή

$$|y_n(x_1) - y_n(x_2)| = |y_n'(\xi)||x_1 - x_2| \leq \sup(|y_n'|)|x_1 - x_2| \leq c_0|x_1 - x_2|.$$

Άρα $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)(= \frac{\varepsilon}{c_0})$ τέτοιο ώστε $\forall x_1, x_2 \in [-l,l]$, $\forall n$ με $|x_1 - x_2| < \delta$ έχουμε $|y_n(x_1) - y_n(x_2)| \leq c_0|x_1 - x_2| \leq c_0\delta = \varepsilon$. Άρα y_n ισοσυνεχείς. Από το θεώρημα $Arzela - Ascoli$ έχουμε ότι υπάρχει υπακολουθία y_{n_k} τέτοια ώστε $y_{n_k} \to y$ ομοιόμορφα. Έστω τώρα $y_{n_k}' \in C^1$ τότε προφανώς $\forall k \in N$, $\forall x \in [-l,l]$ έχουμε $|y_{n_k}'(x)| \leq c_0$. Άρα η y_{n_k} ομοιόμορφα φραγμένη. Επίσης χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής παίρνουμε $\forall k$, $\forall x_1, x_2 \in [-l,l]$ $|y_{n_k}'(x_1) - y_{n_k}'(x_2)| = |y_{n_k}''(\zeta)||x_1 - x_2| \leq \sup|y_{n_k}''||x_1 - x_2| \leq c_1|x_1 - x_2|$. Από αυτό όμοια με το προηγούμενο προκύπτει ότι y_{n_k}' είναι ισοσυνεχείς. Από το θεώρημα $Arzela - Ascoli$ προκύπτει ότι υπάρχει υπακολουθία $y_{n_{k_m}}'$ που συγλίνει ομοιόμορφα, έστω στο w. Τώρα επειδή η y_{n_k} συγκλίνει ομοιόμορφα στο y υπάρχει $x_0 \in [-l,l]$ ώστε η ακολουθία $y_{n_{k_m}}(x_0)$ συγκλίνει. Τότε από γνωστό θεώρημα του απειροστικού λογισμού (βλέπε [36]) έχουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $t : [-l,l] \longrightarrow R$, παραγωγίσιμη με $t' = w$ και η $y_{n_{k_m}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο t. Τώρα από την μοναδικότητα του ορίου θα έχουμε ότι $t = y$, άρα $w = y'$. Δηλαδή τελικά θα πάρουμε

$$||y_{n_{k_m}} - y||_{C^1} \to 0.$$

Άρα φραγμένο σύνολο στο C^2 απεικονίζεται σε σχετικά συμπαγές στο C^1.

Η ύπαρξη της λύσης του προβλήματος (5.1), (5.2) έχει αναχθεί στην εύρεση σταθερού σημείου του τελεστή Τ. Πράγματι αν ο Τ έχει σταθερό σημείο y τότε πρέπει $y = Ty$ και από τον ορισμό του τελεστή Τ (σχέσεις (5.6), (5.7)), το y θα είναι λύση του προβλήματος (5.1),(5.2). Τώρα για κάθε y τ.ω $y = Ty$ γνωρίζουμε τις *apriori* εκτιμήσεις (5.5). Άρα $||y||_{C^1} = \sup|y| + \sup|y'| \leq M + c_0 = c_1$, δηλαδή $||y||_{C^1} \leq c_1$. Αν πάρουμε τώρα το

$$y'' = \kappa f(x, y, y') = f_1(x, y, y') \tag{5.8}$$

$$y(-l) = y(l) = 0 \tag{5.9}$$

για $\kappa \in [0,1]$,θα έχουμε $y = \kappa Ty$ και οι *apriori* εκτιμήσεις για την λύση προκύπτουν ακριβώς όπως και για την λύση του (5.1),(5.2). Οπότε ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος $Leray - Schauder$ άρα ο Τ έχει σταθερό σημείο, δηλαδή το πρόβλημα (5.1), (5.2) έχει λύση. Το θεώρημα αποδείχτηκε.

Θεώρημα 2 *Θεωρούμε το πρόβλημα (5.1), (5.3) και έστω η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του λήμματος (3.2), τότε υπάρχει μια τουλάχιστον λύση $y \in C^2((-l,l)) \cap C^1([-l,l])$.*

Θεώρημα 3 *Θεωρούμε το πρόβλημα (5.1), (5.4) και έστω η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του λήμματος (4.2), τότε υπάρχει μια τουλάχιστον λύση $y \in C^2((-l,l)) \cap C^1([-l,l])$.*

Οι αποδείξεις των θεωρημάτων 2, 3 δεν διαφέρουν από αυτή του θεωρήματος 1.

5.1.2 Μοναδικότητα της λύσης των προβλημάτων *Dirichlet*, *Neumann*, *Robin*.

Θεώρημα 4 *Έστω y είναι κλασική λύση του (5.1),(5.2), όπου $f(x,y,p)$ ορίζεται για $|y| \leq M$, $|p| < +\infty$, $x \in [-l,l]$ και γνήσια αύξουσα ως προς y. Τότε η κλασική λύση είναι μοναδική.*

Απόδειξη. Έστω y_1, y_2 δύο κλασικές λύσεις του (5.1),(5.2) τότε

$$y_1''(x) = f(x, y_1(x), y_1'(x)) \tag{5.10}$$

$$y_1(-l) = y_1(l) = 0 \tag{5.11}$$

$$y_2''(x) = f(x, y_2(x), y_2'(x)) \tag{5.12}$$

$$y_2(-l) = y_2(l) = 0 \tag{5.13}$$

Ορίζουμε $w(x) = y_1(x) - y_2(x)$. Τότε αφαιρώντας τις (5.10),(5.12) παίρνουμε

$$w''(x) = f(x, y_1(x), y_1'(x)) - f(x, y_2(x), y_2'(x)) = f(x, y_1(x), y_1'(x)) -$$

$$f(x, y_2(x), y_1'(x)) + f(x, y_2(x), y_1'(x)) - f(x, y_2(x), y_2'(x)).$$

Δηλαδή

$$w''(x) = G(x) + F(x) \tag{5.14}$$

όπου $G(x) = f(x, y_1(x), y_1'(x)) - f(x, y_2(x), y_1'(x))$ και $F(x) = f(x, y_2(x), y_1'(x))$ $-f(x, y_2(x), y_2'(x))$. Έστω ότι η w λαμβάνει θετικό μέγιστο στο $N \in (-l,l)$ τότε προφανώς $w'(N) = 0$ άρα $y_1'(N) = y_2'(N)$ δηλαδή $F(N) = 0$. Επίσης $w''(N) \leq 0$, $w(N) > 0$ και $G(N) > 0$ διότι f γνήσια αύξουσα. Οπότε

$$w''(N) = G(N) > 0$$

άτοπο. Έστω τώρα ότι η w λαμβάνει αρνητικό ελάχιστο στο $\tilde{N} \in (-l,l)$. Τότε έχουμε $w'(\tilde{N}) = 0$ άρα $y_1'(\tilde{N}) = y_2'(\tilde{N})$ δηλαδή $F(\tilde{N}) = 0$. Επίσης $w''(\tilde{N}) \geq 0$,

$w(\tilde{N}) < 0$ και $G(\tilde{N}) < 0$ διότι f γνήσια αύξουσα, άτοπο λόγω της (5.14). Για $x = \pm l$ ισχύουν οι (5.11), (5.13) δηλαδή $w(x) = 0$ για $x \in [-l, l]$ άρα $w(x) = y_1(x) - y_2(x) = 0$. Επομένως

$$y_1(x) = y_2(x) \ \forall x \in [-l, l]. \tag{5.15}$$

Θα εξετάσουμε τώρα αν και υπό ποιές προυποθέσεις έχουμε μοναδικότητα στο πρόβλημα *Neumann*. Πριν διατυπώσουμε το θεώρημα θα αποδείξουμε ένα λήμμα τροποποιώντας λίγο την απόδειξη που εμφανίζεται στο [2].

Λήμμα 5.1 *Έστω y_1, y_2 λύσεις της (5.1) όπου η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4 και επιπλέον είναι Lipschitz ως προς p. Αν η συνάρτηση $w = y_1 - y_2$ ικανοποιεί τις συνθήκες $w(-l) = 0$, $w'(l) = 0$ ή $w'(-l) = 0$, $w(l) = 0$, τότε $w \equiv 0$*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε το λήμμα για τις συνθήκες $w(-l) = 0$, $w'(l) = 0$. Η άλλη περίπτωση αντιμετωπίζεται παρόμοια. Άν $w(l) = 0$ τότε από το θεώρημα 4 έχουμε $w \equiv 0$. Έστω $w(l) \neq 0$, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε $w(l) > 0$ (αν όχι αντικαθιστούμε την w με την $-w$). Η $w = y_1 - y_2$ δεν μπορεί να λαμβάνει θετικό τοπικό μέγιστο στο $(-l, l)$ εκτός και αν είναι σταθερή. Πράγματι αν λάμβανε σε εσωτερικό σημείο τοπικό θετικό μέγιστο τότε επειδή η f είναι γνήσια αύξουσα και η σχέση (5.14) μας δίνει το άτοπο. Άρα το $w(l)$ είναι θετικό μέγιστο της w ή η w είναι σταθερή. Άν η w είναι σταθερή τότε $w \equiv w(-l) = 0$ και έχουμε το ζητούμενο. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η w είναι σταθερή.

Λόγω ξανά της σχέσης (5.14) και επειδή $w(-l) = 0 < w(l)$ η w δεν μπορεί να λαμβάνει αρνητικές τιμές. Δηλαδή ισχύει $w \geq 0$ στο $[-l, l]$. Επειδή $w(-l) < w(l)$ θα υπάρχει $x_0 \in (-l, l)$ τέτοιο ώστε $w'(x_0) > 0$. Τώρα επειδή $w'(x_0) > 0$ και $w'(l) = 0$ θα πρέπει $\forall x \in [x_0, l]$ να ισχύει $w' \geq 0$ (διαφορετικά θα υπήρχε σημείο $\tilde{x}_0 \in (x_0, l)$ στο οποίο η w θα λάμβανε τοπικό μέγιστο). Άς θεωρήσουμε την σχέση (5.14). Επειδή $w \geq 0$, $w' \geq 0$ στο $[x_0, l]$ και η f είναι *Lipschitz* ως προς p, γνήσια αύξουσα ως προς y, θα υπάρχει σταθερά A τέτοιο ώστε για $x \in [x_0, l]$

$$w''(x) = G(x) + F(x) \geq -Aw'$$

και επειδή $w'(l) = 0$, $x \in [x_0, l]$

$$w'(x) \leq A \int_x^l w'(t)dt,$$

$$-(e^{Ax} \int_x^l w'(t)dt)' \leq 0.$$

Ολοκληρώνουμε ξανά από $x \in [x_0, l]$ έως l,

$$e^{Ax} \int_x^l w'(t)dt \leq 0.$$

Επειδή $w' \geq 0$ στο $[x_0, l]$ έχουμε $w' \equiv 0$ στο $[x_0, l]$, δηλαδή $w(x_0) = w(l)$ το θετικό μέγιστο της w στο $[-l, l]$, άρα $w =$ σταθερά, οπότε $w \equiv w(-l) = 0$. Το λήμμα αποδείχτηκε.

Θεώρημα 5 *Έστω η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 5.1, τότε το πρόβλημα (5.1), (5.3) έχει μοναδική λύση.*

Απόδειξη. Έστω $w = y_1 - y_2$ όπου y_1, y_2 είναι λύσεις του προβλήματος (5.1), (5.3). Άν $w(-l) = 0$ ή $w(l) = 0$ τότε από το Λήμμα 5.1 θα έχουμε $w \equiv 0$. Άς υποθέσουμε λοιπόν ότι $w(-l), w(l) \neq 0$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $w(-l) > 0$. Άν $w(x_0) = 0$ για κάποιο $x_0 \in (-l, l)$ τότε $w \equiv 0$ εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.1 στο $[0, x_0]$. Όμως έχουμε υποθέσει ότι $w(-l) \neq 0$ άρα δεν υπάρχει τέτοιο x_0 οπότε $w > 0$ στο $[-l, l]$.

Έστω $w(-l) > w(l)$. Τότε υπάρχει $x_1 \in (-l, l)$ τέτοιο ώστε $w'(x_1) < 0$. Επίσης θα πρέπει να έχουμε $w' \leq 0$ στο $[-l, x_1]$ διότι διαφορετικά η w θα λάμβανε τοπικό μέγιστο (η w δεν λαμβάνει τοπικό μέγιστο στο $(-l, l)$ λόγω της σχέσης (5.14) και των υποθέσεων για την f). Από την (5.14) επειδή η f είναι *Lipschitz* ως προς p, γνήσια αύξουσα ως προς y και $w' \leq 0$

$$w''(x) = F(x) + G(x) \geq F(x) \geq Aw'$$

οπότε ολοκληρώνοντας θα έχουμε

$$w'(x) \geq A \int_{-l}^{x} w'(t)dt,$$

$$(e^{-Ax} \int_{-l}^{x} w'(t)dt)' \geq 0.$$

Ολοκληρώνοντας ξανά

$$e^{-Ax} \int_{-l}^{x} w'(t)dt \geq 0$$

για $x \in [-l, x_1]$. Επειδή $w' \leq 0$ στο $[-l, x_1]$ έχουμε $w' \equiv 0$ στο $[-l, x_1]$ δηλαδή $w(x_1) = w(-l)$ και $w(-l)$ είναι το θετικό μέγιστο της w διότι $w(-l) > w(l)$, άτοπο αφού η w δεν λαμβάνει σε εσωτερικό σημείο θετικό μέγιστο. Άρα δεν μπορεί να ισχύει $w(-l) > w(l)$. Με τον ίδιο συλλογισμό δεν μπορεί να ισχύει $w(-l) < w(l)$, άρα $w(-l) = w(l)$. Τώρα είτε $w \equiv w(-l)$ είτε η w λαμβάνει θετικό μέγιστο αυστηρά μικρότερο από το $w(-l)$ σε κάποιο $x_2 \in (-l, l)$. Άν όμως ισχύει το δεύτερο τότε $w(x_2) < w(-l)$ και $w'(x_2) = 0 = w'(-l)$ άτοπο σύμφωνα με τα προηγούμενα επιχειρήματα στο διάστημα $[-l, x_2]$. Άρα $w \equiv w(-l)$ σταθερά.

Άν τώρα θεωρήσουμε την (5.14) για $w \equiv const$ (άρα $y_1'(x) = y_2'(x)$) θα προκύψει

$$0 = G(x) > 0$$

άτοπο, άρα $y_1 \equiv y_2$.

Θεώρημα 6 *Έστω y είναι κλασική λύση του (5.1),(5.4), όπου $f(x,y,p)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 4 και η $\sigma(y)$ είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση. Τότε η κλασική λύση είναι μοναδική.*

Απόδειξη. Έστω y_1, y_2 δύο κλασικές λύσεις του (5.1),(5.4) τότε

$$y_1''(x) = f(x, y_1(x), y_1'(x)) \tag{5.16}$$

$$y_1'(-l) - \sigma(y_1(-l)) = 0, y_1'(l) + \sigma(y_1(l)) = 0 \tag{5.17}$$

$$y_2''(x) = f(x, y_2(x), y_2'(x)) \tag{5.18}$$

$$y_2'(-l) - \sigma(y_2(-l)) = 0, y_2'(l) + \sigma(y_2(l)) = 0 \tag{5.19}$$

Ορίζουμε $w(x) = y_1(x) - y_2(x)$. Τότε αφαιρώντας τις (5.16),(5.18) παίρνουμε

$$w''(x) = G(x) + F(x) \tag{5.20}$$

όπου $G(x) = f(x, y_1(x), y_1'(x)) - f(x, y_2(x), y_1'(x))$ και $F(x) = f(x, y_2(x), y_1'(x))$ $-f(x, y_2(x), y_2'(x))$. Έστω ότι η w λαμβάνει θετικό μέγιστο στο $N \in (-l, l)$ τότε προφανώς $w'(N) = 0$ άρα $y_1'(N) = y_2'(N)$ δηλαδή $F(N) = 0$. Επίσης $w''(N) \leq 0$, $w(N) > 0$ και $G(N) > 0$ διότι f γνήσια αύξουσα. Οπότε

$$w''(N) = G(N) > 0$$

άτοπο. Έστω τώρα ότι η w λαμβάνει αρνητικό ελάχιστο στο $\tilde{N} \in (-l, l)$. Τότε έχουμε $w'(\tilde{N}) = 0$ άρα $y_1'(\tilde{N}) = y_2'(\tilde{N})$ δηλαδή $F(\tilde{N}) = 0$. Επίσης $w''(\tilde{N}) \geq 0$, $w(\tilde{N}) < 0$ και $G(\tilde{N}) < 0$ διότι f γνήσια αύξουσα, άτοπο λόγω της (5.20). Για $x = \pm l$ ισχύουν οι (5.17), (5.19).

Έστω ότι η w λαμβάνει θετικό μέγιστο στο $-l$. Τότε $w(-l) > 0$ άρα $y_1(-l) > y_2(-l)$ και $\sigma(y_1(-l)) > \sigma(y_2(-l))$ διότι η σ είναι γνήσια αύξουσα. Από τις (5.17), (5.19) προκύπτει $y_1'(-l) > y_2'(-l)$ δηλαδή $w'(-l) > 0$ άρα θα πρέπει η w να είναι γνήσια αύξουσα κοντά στο $-l$ άτοπο. Οπότε δεν μπορεί να λαμβάνει θετικό μέγιστο στο $-l$. Έστω ότι η w λαμβάνει αρνητικό ελάχιστο στο $-l$. Τότε $w(-l) < 0$ άρα $y_1(-l) < y_2(-l)$ και $\sigma(y_1(-l)) < \sigma(y_2(-l))$ διότι η σ είναι γνήσια αύξουσα. Από τις (5.17), (5.19) προκύπτει $y_1'(-l) < y_2'(-l)$ δηλαδή $w'(-l) < 0$ άρα θα πρέπει η w να είναι γνήσια φθίνουσα κοντά στο

$-l$ άτοπο. Οπότε δεν μπορεί να λαμβάνει αρνητικό ελάχιστο στο $-l$. Όμοια αποδεικνύουμε ότι η w δεν μπορεί να λαμβάνει θετικό μέγιστο ή αρνητικό ελάχιστο στο l. Άρα θα πρέπει λόγω των εκτιμήσεων στα εσωτερικά σημεία η w να σταθερή στο $[-l.l]$. Αν τώρα $w = Const$ η σχέση (5.20) θα δώσει

$$0 = G(x) > 0$$

άτοπο, άρα $w(x) = y_1(x) - y_2(x) = 0$. Επομένως

$$y_1(x) = y_2(x) \ \forall x \in [-l, l]. \tag{5.21}$$

5.2 Η εκφυλιζόμενη περίπτωση

Στην τελευταία παράγραφο θα μελετήσουμε την μοναδικότητα της εκφυλιζόμενης περίπτωσης και για τα τρία συνοριακά προβλήματα.

5.2.1 Μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος *Dirichlet*.

Λήμμα 5.2 *Έστω $y(x)$ κλασική λύση του προβλήματος (1.1), (1.2) και* $0 < \varepsilon < 1$.
(i) Αν $f(x, y, 0) < 0$ για $x \in (-l, l)$, $|y| \le M$ τότε $y(x) \ge 0$, $\forall x \in [-l, l]$.
(ii) Αν $f(x, y, 0) > 0$ για $x \in (-l, l)$, $|y| \le M$ τότε $y(x) \le 0$ $\forall x \in [-l, l]$.
(iii) Αν $f(x, 0, 0) < 0$ για $x \in (-l, l)$ και f αύξουσα ως προς y τότε $y(x) \ge 0$, $\forall x \in [-l, l]$.
(iv) Αν $f(x, 0, 0) > 0$ για $x \in (-l, l)$ και f αύξουσα ως προς y τότε $y(x) \le 0$, $\forall x \in [-l, l]$.

Απόδειξη. *(i)* Έστω ότι υπάρχει $N \in (-l, l)$ όπου η y λαμβάνει αρνητικό ελάχιστο. Ορίζουμε τον τελεστή Q

$$Q(y) \equiv |y(x)|^{\varepsilon} y''(x) - f(x, y(x), y'(x))$$

Προφανώς $Q(y) = 0$. Από την άλλη έχουμε :

$$|y(N)|^{\varepsilon} > 0, \ y'(N) = 0, \ y''(N) \ge 0, \ f(N, y(N), 0) < 0$$

δηλαδή $Q(y(N)) = |y(N)|^{\varepsilon} y''(N) - f(N, y(N), 0) > 0$. Στο σύνορο έχουμε $y(-l) = y(l) = 0$. Άρα τελικά παίρνουμε

$$y(x) \ge 0 \ \forall x \in [-l, l].$$

(ii) Όμοια έστω ότι υπάρχει $\tilde{N} \in (-l, l)$ όπου η y λαμβάνει θετικό μέγιστο. Τότε έχουμε

$$|y(\tilde{N})|^{\varepsilon} > 0, \ y''(\tilde{N}) \le 0, \ f(\tilde{N}, y(\tilde{N}), 0) > 0 \ .$$

Δηλαδή $Q(y(\tilde{N})) < 0$, άτοπο. Στο σύνορο έχουμε $y(-l) = y(l) = 0$. Άρα τελικά :

$$y(x) \leq 0 \; \forall x \in [-l, l] \; .$$

$(iii) - (iv)$ Η απόδειξη δεν διαφέρει, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την μονοτονία της f ως προς y.

Παρατήρηση. Από την προηγούμενη απόδειξη και λόγω των γνήσιων ανισοτήτων για το δεύτερο μέλος της εξίσωσης είναι φανερό ότι η λύση δεν μπορεί να μηδενίζεται σε εσωτερικά σημεία.

Πόρισμα 5.1 *Έστω y λύση του προβλήματος (1.1),(1.2) με* $y \in C^2((-l,l)) \cap C^0([-l,l])$ *και* $0 \leq \varepsilon < 1$.
Αν f ικανοποιεί το (i) ή το (iii) του Λήμματος 5.2 τότε η (1.1) παίρνει την μορφή $y^{\varepsilon} y'' = f(x, y, y')$.
Αν f ικανοποιεί το (ii) ή το (iv) του Λήμματος 5.2 τότε η (1.1) παίρνει την μορφή $(-y)^{\varepsilon} y'' = f(x, y, y')$.

Πόρισμα 5.2 *Έστω y κλασική λύση του προβλήματος (1.1), (1.2) και για την f ισχύει $f(x, 0, 0) < 0$ ή $f(x, 0, 0) > 0$ $\forall x \in (-l, l)$ και είναι γνήσια αύξουσα ως προς y. Τότε η (1.1) παίρνει τη μορφή*

$$y''(x) = \frac{f(x, y(x), y'(x))}{|y(x)|^{\varepsilon}} = \tilde{f}(x, y(x), y'(x)) \tag{5.22}$$

για $x \in (-l, l)$.

Θεώρημα 7 *Έστω y κλασική λύση του προβλήματος (1.1), (1.2), όπου η $f(x, y, p)$ δεν απειρίζεται για $|y| < M$, $|p| < +\infty$, $x \in (-l, l)$, $f(x, 0, 0) < 0$ ή $f(x, 0, 0) > 0$ και οι συναρτήσεις f, $\tilde{f}$ της (5.22) είναι γνήσια αύξουσες ως προς y. Τότε η παραπάνω λύση είναι μοναδική.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4 για το πρόβλημα (5.22), (1.2).

5.2.2 Μοναδικότητα της λύσης των προβλημάτων *Neumann* και *Robin*.

Λήμμα 5.3 *Έστω y κλασική λύση του προβλήματος (1.1), (1.3) ή (1.1), (1.4). Άν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(x, 0, p) < 0$ ή $f(x, 0, p) > 0$ για $x \in (-l, l)$, $|p| < +\infty$ τότε η λύση δεν μπορεί να μηδενίζεται σε εσωτερικά σημεία.*

Απόδειξη. Αν μηδενιζόταν θα είχαμε άτοπο από την εξίσωση (1.1).

Θεώρημα 8 *Έστω η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 5.3, και η $\tilde{f}$ της (5.22) ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 5. Τότε το πρόβλημα (1.1), (1.3) έχει μοναδική λύση.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 5 για το πρόβλημα (5.22), (1.3).

Θεώρημα 9 *Έστω y είναι κλασική λύση του (1.1),(1.4), όπου $f(x, y, p)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 5.3, η $\tilde{f}$ της (5.22) ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 6 και η $\sigma(y)$ είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση. Τότε η κλασική λύση είναι μοναδική.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 6 για το πρόβλημα (5.22), (1.4).

Αναφορές

[1] S.N.Bernstein, *Sur les équations du calcul des variations*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 29, 1912, 431-485

[2] A.Granas, R.B.Guenther, J.W.Lee, *On a theorem of S. Bernstein*, Pacific J. Math., 74, 1, 1978, 67-82

[3] A.Constantin, *On a Two-Point Boundary value Problem*, J. Math. Anal. Appl., 193, 1995, 318-328.

[4] A.S.Tersenov, *On quasilinear non-uniformly elliptic equation in some non-convex domains*, Communications in PDE, 23, 12, 1998, 2165-2186.

[5] A.S.Tersenov, *On the first boundary value problem for quasilinear parabolic equations with two independent variables* Arch. Ration. Mech. Anal., 152, 1, 2000, 81-92.

[6] S.R.Bernfeld, V.Lakshmikantham, *An Introduction to Nonlinear Boundary value Problems*, Academic Press, 1974.

[7] P.Korman, *Remarks on Nagumo's conditions*, Port. Math., 55, 1, 1998, 1-9.

[8] M.Frigon, D.O'Regan, *On a generalization of a theorem of S. Bernstein*, Annls Pol. Math, 48, 1988, 297-306.

[9] A.Tineo, *A comparison theorem for second order ODEs and applications to singular problems*, J. Diff. Eq., 116, 1995, 16-30.

[10] H.B.Thompson, C. Tisdell, *Systems of difference equations associated with boundary value problems for second order systems of ordinary differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 248, 2000, 333-347.

[11] A.Granas, R.B.Guenther, J.W.Lee, *Nonlinear Boundary value problems for some classes of ODEs*, Rocky Mount. J. Math., 10, 1, 1980, 35-58.

[12] J.Henderson, H.B.Thompson, *Existence of multiple solutions for second order boundary value problems*, J. Diff. Eq., 166, 2000, 443-454.

[13] H.B.Thompson, *Second order ordinary differential equations with fully nonlinear two point boundary conditions*, Pacific J. Math., 172, 1, 1996, 255-277.

[14] S. R. Bernfeld, G. S. Ladde, *Existence of solutions of two point boundary value problems for nonlinear systems*, J. Diff. Eq., 18, 1975, 103-110.

[15] A. Lasota, J. A. Yorke, *Existence of solutions of two-point boundary value problems for nonlinear systems*, J. Diff. Eq., 11, 1972, 509-518.

[16] A.Lepin, V.Ponomarev, *On a singular boundary value problem for a second order ordinary differential equation*, Nonlinear Analysis, 42, 2000, 949-960.

[17] Q.Huang, Y.Li, *Nagumo theorems of nonlinear singular boundary value problems*, Nonlinear Analysis, 29, 12, 1997, 1365-1372.

[18] P.W.Eloe, Y.Zhahg, *A quadratic monotone iteration scheme for two-point boundary value problems for ordinary differential equations*, Nonlinear Analysis, 33, 1998, 443-453.

[19] S. Sedziwy, *Nonlinear periodic boundary value problem for a second order ordinary differential equation*, Nonlinear Analysis, 32, 7, 1998, 881-890.

[20] Wolfgang Walter, *Ordinary Differential Equations*, Springer-verlag New York, 1998.

[21] S.Sedziwy, *On the existence of a solution of a certain nonlinear boundary value problem*, Zeszyty Naukowe UJ, Prace Matem., 1974, 16, 31-33.

[22] L.H.Erbe, *Existence of solution to boundary value problem for second order differential equations*, Nonlinear Analysis, 6, 11, 1982, 1155-1162.

[23] A.Granas, R.B.Guenther, J.W.Lee, *Topological transversality II. Applications to the Neumann problem for $y'' = f(t, y, y')$*, Pacific J. Math., 104, 1, 1983, 95-109.

[24] R.Gaines, *Apriori bounds and upper and lower solutions for nonlinear second-order boundary-value problems*, J. Diff. Eq., 12, 1972, 291-312.

[25] P.W.Eloe, J.Henderson, *Nonlinear boundary value problems and a priori bounds on solutions*, SIAM J. Math. Anal., 15, 4, 1984, 642-647.

[26] S.Umamaheswaram, M.v.S.Suhasini, *A global existence theorem for the Boundary value problems of $y'' = f(x, y, y')$*, Nonlinear Analysis, 10, 7, 1986, 679-681.

[27] A.Tineo, *An existence theorem for a class of BvPs without restrictions of the Bernstein-Nagumo type*, J Math. Anal. Appl.,175, 1993, 25-32.

[28] J. V. Baxley, *Existence theorems for nonlinear second order boundary value problems*, J. Diff. Eq., 85, 1990, 125-150.

[29] R.Kelevedjiev, *Existence of solutions for two-point Boundary value Problems*, Nonlinear Anal. Th. Meth. Appl., 22, 2, 1994, 217-224.

[30] Al. S. Tersenov, Ar. S. Tersenov, *Global solvability for a class of quasilinear parabolic problems*, Indian. Univ. Math. J., 2001 (to appear).

[31] S.N.Kruzhkov, *Quasilinear parabolic equations and systems with two independent variables*, Trudy Sem. Petrovsk., 5, 1979, 217-272.

[32] A.S. Tersenov, *On quasilinear non-uniformly parabolic equations in general form*, J. Diff. Eq., 142, 1998, 263-276.

[33] N. V. Khusnutdinova, *On conditions for the boundedness of the gradient of solutions of degenerated parabolic equations*, Dinamika Sploshnoi Sredy 72, 1985, 120-128. [Russian]

[34] O. A. Ladyzhenskaja, V. A. Solonnokov, N. N. Uralceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Amer. Math. Soc. Transl., 2, 23, 1968.

[35] G. H. Hardy, I. E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*, Cambridge Univercity Press, 1978.

[36] Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε Γιαννακούλιας, *Απειροστικός Λογισμός Τόμος ΙΙβ*, Αίθρα Αθήνα 1995, 536-537