ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ RIEMANN ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΕΠΙΚΑΛΥΨΕΙΣ ΤΗΣ ΠΡΟΒΟΛΙΚΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ ΚΟΥΤΣΟΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΥ

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία, που έκπονήθηκε στα πλαίσια τού μεταπτυχιακού προγράμματος *Μαθηματικά και Εφαρμογές τους*, κατατέθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών τού Πανεπιστημίου Κρήτης από τήν Παναγιώτα Κουτσογιαννακοπούλου τόν Ιούνιο τού 2014. Επιβλέπων καθηγητής ήταν ο Αλέξανδρος Κουβιδάκης.

Τήν επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι: Ιωάννης Αντωνιάδης, Αλέξανδρος Κουβιδάκης και Εμμανουήλ Λυδάκης.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία μελετούμε καλύψεις τής μιγαδικής προβολικής ευθείας $\mathbb{P}^1$ από συμπαγείς επιφάνειες Riemann. Κάθε τέτοια κάλυψη επάγει μια πεπερασμένη συνεκτική τοπολογική κάλυψη τής προβολικής ευθείας όταν τής αφαιρέσουμε τό σύνολο P τών θέσεων διακλάδωσης. Και αντίστροφα, αν P ένα πεπερασμένο υποσύνολο τού $\mathbb{P}^1$, κάθε πεπερασμένη συνεκτική τοπολογική κάλυψη τού $\mathbb{P}^1 \setminus P$ συμπαγοποιείται και επάγει μια κάλυψη τού $\mathbb{P}^1$ από συμπαγή επιφάνεια Riemann. Όταν η ομάδα τών Deck-μετασχηματισμών δρά μεταβατικά στις ίνες τής παραπάνω κάλυψης, τότε τήν ονομάζουμε κάλυψη Galois.

Στο πρώτο μέρος αυτής τής εργασίας θα δείξουμε ότι υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ τών παρακάτω:

- Τίς κλάσεις ισομορφίας τών τοπολογικών καλύψεων Galois $f : R \to \mathbb{P}^1 \setminus P$, με $\mathrm{Deck}(f) \cong G$.
- Τίς κλάσεις ισομορφίας τών επέκτασεων Galois $L/\mathbb{C}(x)$ που έχουν ομάδα Galois ισόμορφη με τήν G και οι θέσεις διακλάδωσης βρίσκονται στο σύνολο P.

Η παραπάνω αντιστοιχία, αντιστοιχίζει τόν τοπολογικό τύπο διακλάδωσης τής πεπερασμένης κάλυψης Galois $f : R \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ με τόν αλγεβρικό τύπο διακλάδωσης τής αντίστοιχης επέκτασης Galois $L/\mathbb{C}(x)$.

Στο δεύτερο μέρος τής εργασίας θα μελετήσουμε τόν χώρο τών παραμέτρων τών παραπάνω αντικειμένων. Συγκεκριμμένα, έστω G πεπερασμένη ομάδα και $r \in \mathbb{N}$. Θα προσδώσουμε μια τοπολογική δομή στο σύνολο που παραμετρίζει τίς καλύψεις Galois $f : R \to \mathbb{P}^1 \setminus P$, με $\mathrm{Deck}(f) \cong G$ και $\#P = r$, δηλ. τίς G-Galois επικαλύψεις $f : \bar{R} \to \mathbb{P}^1$ επιφανειών Riemann με r τό πλήθος θέσεις διακλάδωσης. Κατόπιν θα δούμε πώς μπορούν να ανιχνευτούν οι συνεκτικές συνιστώσες τού παραπάνω χώρου. Και τέλος, θα παρουσιάσουμε τήν απόδειξη τής συνεκτικότητας αυτού τού χώρου, όταν $G = \mathbb{S}_n$ και ο τύπος διακλάδωσης αντιστοιχεί σε αντιμεταθέσεις. Ο τελευταίος είναι γνωστός ως ο χώρος Hurwitz τών απλών καλύψεων τής προβολικής ευθείας.

Η εργασία βασίστηκε στο βιβλίο τού H. Volklein: Groups as Galois groups, βλ. [V]. Η σειρά τής παρουσίασης όμως είναι διαφορετική. Παραθέτουμε πρώτα τήν τοπολογική προσέγγιση και μετά τήν αλγεβρική.

Κεφάλαιο 1

Η τοπολογική προσέγγιση

1.1 Τοπολογικές καλύψεις

Σε αυτό τό κεφάλαιο τά R και S συμβολίζουν τοπολογικούς χώρους με τόν S συνεκτικό.

Ορισμός 1.1.1. *Μια απεικόνιση $f : R \to S$ που είναι επί λέγεται κάλυψη αν κάθε $p \in S$ έχει συνεκτική ανοιχτή περιοχή U με τήν εξής ιδιότητα: κάθε συνεκτική συνιστώσα V τού $f^{-1}(U)$ να είναι ανοιχτή στο R και τό V να είναι ομοιομορφικό με τό U. Κάθε τέτοιο U ονομάζεται αποδεκτή γειτονιά.*

Ορισμός 1.1.2. *Ένα μονοπάτι στο S είναι μια συνεχής απεικόνιση $\gamma : [0,1] \to S$. Τό $\gamma(0)$ λέγεται τό αρχικό του σημείο και τό $\gamma(1)$ τό τελικό του σημείο. Τό μονοπάτι θα λέγεται κλειστό στο σημείο $p \in S$ αν $\gamma(0) = p = \gamma(1)$.*

Ορισμός 1.1.3. *Έστω ότι $f : R \to S$ είναι μια κάλυψη και γ ένα μονοπάτι στο S. Ένα μονοπάτι $\tilde{\gamma}$ στο R λέγεται ανύψωση τού γ αν $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.*

Διατυπώνουμε τώρα τό βασικό τοπολογικό θεώρημα (τήν απόδειξη τού οποίου θεωρούμε γνωστή) που αφορά ανυψώσεις μονοπατιών.

Θεώρημα 1.1.1. *Έστω $f : R \to S$ μια κάλυψη και γ ένα μονοπάτι στο S με αρχικό σημείο $\gamma(0) = p$. Τότε:*

(α) Για κάθε $a \in f^{-1}(p)$ υπάρχει μοναδική ανύψωση τού γ στο R με αρχικό σημείο τό a.

(β) Οι ανυψώσεις ομοτοπικών μονοπατιών τού S με τό ίδιο αρχικό σημειο είναι ομοτοπικά μονοπάτια τού R.

(γ) Η ομάδα $\pi_1(S,p)$ δρα στο $f^{-1}(p)$ ως εξής: αν $[\gamma] \in \pi_1(S,p)$ και $a \in f^{-1}(p)$ τότε τό $[\gamma]a$ είναι τό τελικό σημείο τής μοναδικής ανύψωσης τού γ με αρχικό σημείο τό a. Η παραπάνω δράση είναι μεταβατική αν και μόνον αν τό R είναι συνεκτικό.

Η παρακάτω πρόταση δίδει ένα πρακτικό κριτήριο για τό πότε δύο καλύψεις είναι ομοιομορφικές.

Πρόταση 1.1.1. *Έστω $f_i : R_i \to S$, $i = 1, 2$, καλύψεις με τά R_i συνεκτικά. Έστω $b_i \in R_i$ τέτοια ώστε $f_1(b_1) = f_2(b_2) = p$ και έστω ότι για κάθε $[\gamma] \in \pi_1(S, p)$ έχουμε ότι $[\gamma]b_1 = b_1$ αν και μόνον αν $[\gamma]b_2 = b_2$. Τότε υπάρχει ομοιομορφισμός $\alpha : R_1 \to R_2$ τέτοιος ώστε $f_2 \circ \alpha = f_1$ και $\alpha(b_1) = b_2$.*

Απόδειξη Επιλέγουμε ένα $b \in R_1$ και έστω δ_1 μονοπάτι στο R_1 που συνδέει τό σημείο b_1 με τό σημείο b. Θεωρούμε τήν εικόνα $\delta := f_1 \circ \delta_1$ τού μονοπατιού δ_1 στο S και έστω δ_2 η ανύψωση τού δ μέσω τής f_2 με αρχικό σημείο τό b_2. Ορίζουμε τήν απεικόνιση $\alpha : R_1 \to R_2$ με $\alpha(b) = \delta_2(1)$.
Η α είναι καλώς ορισμένη: Έστω δ'_1 ένα διαφορετικό μονοπάτι στο R_1 που συνδέει τό σημείο b_1 με τό σημείο b και έστω δ' και δ'_2 όπως παραπάνω. Τότε τά μονοπάτια $\gamma_1 = \delta_1^{-1}\delta'_1$ και $\gamma = \delta^{-1}\delta'$ είναι κλειστά στα σημεία b_1 και p αντιστοίχως, με $\gamma = f_1 \circ \gamma_1$. Συνεπώς τό γ_1 είναι η ανύψωση τού γ με αρχικό σημείο τό b_1. Επομένως $[\gamma]b_1 = b_1$ οπότε, από τήν υπόθεση, θα έχουμε ότι $[\gamma]b_2 = b_2$, δηλαδή η ανύψωση τού γ με αρχικό σημείο τό b_2 είναι ένα κλειστό μονοπάτι γ_2 στο b_2. Άρα τό $\delta_2\gamma_2$ είναι ανύψωση τού $\delta\gamma = \delta'$ με αρχικό σημείο τό b_2 και συνεπώς τό $\delta_2\gamma_2$ είναι ομοτοπικό με τό δ'_2. Έχουμε $\delta'_2(1) = \delta_2\gamma_2(1) = \delta_2(1)$. Άρα η α είναι καλά ορισμένη.
Εναλλάσσοντας τά R_1, R_2 παίρνουμε τό α^{-1} και συνεπώς η α είναι 1-1.
Έχουμε $f_2(\alpha(b)) = f_2(\delta_2(1)) = \delta(1) = f_1(\delta_1(1)) = f_1(b)$, $b \in R_1$, άρα $f_2 \circ \alpha = f_1$.
Έστω $q \in S$ και διαλέγουμε γειτονιά U τού q που είναι αποδεκτή για τίς καλύψεις f_1 και f_2. Τό α απεικονίζει τό $f_1^{-1}(U)$ επί τού $f_2^{-1}(U)$. Αν $b \in f_1^{-1}(q)$, έστω V η συνεκτική συνιστώσα τού $f_1^{-1}(U)$ που περιέχει τό b. Έστω δ_1 ένα μονοπάτι με αρχή το b_1 και τέλος τό b. Κάθε σημείο τού V μπορεί να συνδεθεί με τό b_1 με τό μονοπάτι που ξεκινάει με τό δ_1 και συνεχίζει με ένα μονοπάτι στο V με αρχή τό b. Οπότε τό $\alpha(V) \subset V'$, όπου V' είναι συνιστώσα τού $f_2^{-1}(U)$. Επίσης, $\alpha^{-1}(V') \subset V$ και άρα $V' \subset \alpha(V)$. Συνεπώς $\alpha(V) = V'$. Επομένως ο $\alpha|_V : V \to V'$ είναι ομοιομορφισμός ,οπότε $\alpha|_V = (f_2|_{V'})^{-1} \circ f_1|_V$, δηλαδή ο α είναι τοπικά ομοιομορφισμός και 1-1, άρα ομοιομορφισμός. □

1.2 Καλύψεις Galois

Ορισμός 1.2.1. *Έστω $f : R \to S$ μια κάλυψη. Ένας ομοιομορφισμός $\alpha : R \to R$ για τόν οποίο ισχύει ότι $f\alpha = f$ λέγεται Deck-μετασχηματισμός τής f. Το σύνολο τών Deck-μετασχηματισμών με πράξη τήν σύνθεση δημιουργούν ομάδα που συμβολίζεται ως* $\mathrm{Deck}(f)$.

Συμβολισμός: Έστω γ ένα μονοπάτι στο S με αρχικό σημείο $\gamma(0) = p$ και τελικό τό $\gamma(1) = q$. Αν $b \in f^{-1}(p)$, τότε θα συμβολίζομε ως $\gamma^b \in f^{-1}(q)$ τό τελικό σημείο τής μοναδικής ανύψωσης τού γ με αρχικό σημείο τό b. Σημειώνουμε ότι όταν τό μονοπάτι γ είναι κλειστό στο p, τότε ${}^{\gamma}b = [\gamma]b$.

Λήμμα 1.2.1. *Έστω $f : R \to S$ μια κάλυψη.*

(α) Έστω γ μονοπάτι τού S με $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$. Η απεικόνιση $\phi_\gamma : f^{-1}(p) \to f^{-1}(q)$ που ορίζεται ως $b \mapsto^{\gamma} b$ είναι ένα προς ένα και επί. Επίσης, $\alpha({}^{\gamma}b) = {}^{\gamma}(\alpha(b))$, $\forall \alpha \in \mathrm{Deck}(f)$.

(β) Για κάθε $\alpha \in \mathrm{Deck}(f)$, $b \in f^{-1}(p)$ και $\gamma \in \pi_1(S, p)$ ισχύει ότι $\alpha([\gamma]b) = [\gamma](\alpha(b))$.

(γ) Αν τό R είναι συνεκτικό και $\alpha \in \mathrm{Deck}(f)$ τέτοιο ώστε $\alpha(b) = b$, για κάποιο $b \in R$, τότε $\alpha = id$. Συνεπώς, αν $\alpha, \beta \in \mathrm{Deck}(f)$ με $\alpha(b) = \beta(b)$, για κάποιο $b \in R$, τότε $\alpha = \beta$.

(δ) Αν τό R είναι συνεκτικό και η $\mathrm{Deck}(f)$ έχει υποομάδα G που δρά μεταβατικά σε μια ίνα $f^{-1}(p)$ τής απεικόνισης f τότε $\mathrm{Deck}(f) = G$

Απόδειξη

(α) Έστω $b \in f^{-1}(p)$ τότε ${}^{\gamma^{-1}}({}^{\gamma}b) = b$, άρα η αντίστροφή της είναι η απεικόνιση $c \mapsto^{\gamma^{-1}} c$, $c \in f^{-1}(q)$. Έστω $\tilde{\gamma}$ η ανύψωση τού γ, με αρχικό σημείο τό b. Οπότε για τό μονοπάτι $\alpha \circ \tilde{\gamma}$ τού R, που έχει ως αρχικό σημείο τό $\alpha(b)$, έχουμε ότι $f \circ (\alpha \circ \tilde{\gamma}) = (f \circ \alpha) \circ \tilde{\gamma} = f(\tilde{\gamma}) = \gamma$, δηλαδη είναι ανύψωση τού γ με αρχικό σημείο τό $\alpha(b)$.

(β) Από τό (α) για $p = q$ έχουμε $\alpha({}^{\gamma}b) =^{\gamma} (\alpha(b))$.

(γ) Έστω $\alpha(b) = b$ και $b' \in R$. Αν $\tilde{\gamma}$ ένα μονοπάτι στο R με αρχή τό b και τέλος τό b' τότε τό $\gamma = f \circ \tilde{\gamma}$ θα είναι ένα μονοπατι στο S με αρχή τό $f(b)$ και τέλος τό $f(b')$. Άρα τό $\tilde{\gamma}$ είναι ανύψωση τού γ με αρχή τό b. Τότε τό $\alpha(b') = \alpha({}^{\gamma}b) =^{\gamma} (\alpha(b)) =^{\gamma} b = b'$.

(δ) Άν $\phi \in \mathrm{Deck}(f)$, έστω $b \in f^{-1}(p)$ με $\phi(b) = b'$. Πάρε $g \in G$ με $g(b) = b'$. Τότε $g^{-1}\phi(b) = b$ και άρα $\phi = g$ από τό γ).

□

Αν τό S είναι συνεκτικό τότε από τό α) τού παραπάνω λήμματος συνάγουμε ότι: Οι ίνες τής απεικόνισης f έχουν τό ίδιο πλήθος στοιχείων και, επίσης, η φύση τής δράσης τής ομάδας $\mathrm{Deck}f$ σε όλες τίς ίνες είναι η ίδια. Για παράδειγμα, αν η δράση είναι μεταβατική σε μια ίνα τότε τό ίδιο θα είναι για όλες. Ορίζουμε ως βαθμό τής κάλυψης, τό πλήθος τών στοιχείων μιας οποιασδήποτε ίνας. Ορίζουμε τώρα μια ειδική κλάση καλύψεων, οι οποίες θα αποτελέσουν τό κεντρικό θέμα μελέτης αυτού τού κεφαλαίου .

Ορισμός 1.2.2. *Μια κάλυψη $f : R \to S$ λέγεται πεπερασμένη κάλυψη Galois αν τό R είναι συνεκτικό, ο βαθμός τής κάλυψης είναι πεπερασμένος και η ομάδα* $\mathrm{Deck}(f)$ *δρά μεταβατικά στις ίνες $f^{-1}(p)$, $p \in S$.*

Στα παρακάτω όταν γράφουμε κάλυψη Galois θα εννοούμε ότι είναι πεπερασμένη.

Πρόταση 1.2.1. *Έστω $f : R \to S$ μια κάλυψη Galois και $H := \mathrm{Deck}(f)$. Τότε*

(α) Η τάξη τής H ισούται με τόν βάθμο τής f, έστω n. Γιά κάθε αποδεκτή γειτονιά U στο S, τό $f^{-1}(U)$ έχει n συνεκτικές συνιστώσες. Η H δρά μεταβατικά στις συνεκτικές συνιστώσες τού $f^{-1}(U)$.

(β) Έστω $b \in R$, $p = f(b)$. Τότε υπάρχει μοναδικός επιμορφισμός ομάδων

$$\begin{aligned} \Phi_b : \ \pi_1(S,p) &\longrightarrow H \\ [\gamma] &\mapsto \Phi_b([\gamma]) \end{aligned}$$

με τήν χαρακτηριστική ιδιότητα $\Phi_b([\gamma]) : [\gamma]b \mapsto b$.

Απόδειξη

(α) Έστω $p \in S$ και $b \in f^{-1}(p)$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} \theta_b : \ H &\to f^{-1}(p) \\ \alpha &\mapsto \alpha(b) \end{aligned}$$

Η απεικόνιση θ_b είναι 1-1 : Έστω $\theta_b(\alpha) = \theta_b(\alpha')$ άρα $\alpha^{-1}\alpha'(b) = b$. Αφού τό R είναι συνεκτικό τότε $\alpha^{-1}\alpha' = id$ από τό Λήμμα 1.2.1 γ). Η απεικόνιση είναι επί: Αφού η f είναι Galois η H δρα μεταβατικά στις ίνες, άρα για κάθε $b' \in f^{-1}(p)$ υπάρχει $\alpha \in H$ ώστε $\alpha(b) = b'$. Συνεπώς, $|H| = |f^{-1}(p)| = n$. Αφου κάθε συνεκτική συνιστώσα τού $f^{-1}(U)$ περιέχει ένα στοιχείο τού $f^{-1}(p)$, $p \in U$, τό πλήθος τους είναι n και η δράση τού H είναι μεταβατική.

(β) Ορίζουμε τήν απεικόνιση

$$\begin{aligned} \Psi_b : \ \pi_1(S,p) &\to f^{-1}(p) \\ [\gamma] &\mapsto [\gamma]b \end{aligned}$$

Η Ψ_b είναι επί αφού η θεμελίωδης ομάδα δρά μεταβατικά στις ίνες. Άρα η $\theta_b^{-1} \circ \Psi_b$ είναι επί τού H άλλα δεν είναι ομομορφισμός. Όμως η $\Phi_b : [\gamma] \mapsto (\theta_b^{-1} \circ \Psi_b([\gamma]))^{-1}$ είναι ομομορφισμός και $\Phi_b([\gamma])([\gamma]b) =$

$(\theta_b^{-1}(\Psi_b([\gamma])))^{-1}([\gamma](b)) = (\theta_b^{-1}([\gamma]b))^{-1}([\gamma]b) = b$. Σημειώνουμε ότι ο $\theta_b^{-1}([\gamma]b) = \alpha \in H$ είναι, εξ ορισμού, ο μοναδικός Deck-μετασχηματισμός με $\alpha(b) = [\gamma]b$ και επομένως $\alpha^{-1}([\gamma]b) = b$.

Μοναδικότητα: Αν $\Phi_b' : \pi_1(S,p) \to H$ άλλος ομομορφισμός με τήν ίδια ιδιότητα τότε όπως στο (α) τότε $\Phi_b^{-1}([\gamma]) \circ \Phi_b'([\gamma]) = id$.

□

1.3 Η τοπική μελέτη μιάς Galois κάλυψης

1.3.1 Πεπερασμένες καλύψεις τού τρυπημένου δίσκου

Ορισμός 1.3.1. *Ορίζουμε τόν τρυπημένο δίσκο $\mathbb{K}(r)$, $r > 0$, ως τό σύνολο τών $z \in \mathbb{C}$ με $0 < |z| < r$. Κάθε $\mathbb{K}(r)$ είναι ομοιομορφικό με τό $\mathbb{K} := \mathbb{K}(1)$.*

Αν $z_0 = \rho e^{2\pi i\theta} \in \mathbb{K}(r)$, τότε έχουμε ότι η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(\mathbb{K}(r), z_0) \cong \mathbb{Z}$ με γεννήτορα τήν κλειστή καμπύλη $\gamma_r(t) = \rho e^{2\pi i(t+\theta)}$, $t \in [0,1]$ με βαση τό z_0 που διαγράφει περιφέρεια κύκλου με κέντρο 0 και με φορά αντίθετη τών δεικτών τού ρολογιού.

Λήμμα 1.3.1. *Η απεικόνιση $f_e : \mathbb{K}(r^{1/e}) \to \mathbb{K}(r)$, $z \to z^e$ ορίζει τοπολογική κάλυψη με $\mathrm{Deck}(f_e) \cong \mathbb{U}_e$, όπου $\mathbb{U}_e$ είναι η κυκλική ομάδα τών e-μιγαδικών ριζών τής μονάδος. Επίσης, αν $\tilde{z}_0 \in f_e^{-1}(z_0)$, τότε ο επιμορφισμός $\Phi_{\tilde{z}_0} : \pi_1(\mathbb{K}(r), z_0) \cong \mathbb{Z} \to \mathrm{Deck}(f_e) \cong \mathbb{U}_e$ έχει τήν ιδιότητα ότι $\Phi_b(\gamma_r) = e^{-2\pi i/r}$ (γεννήτορας τής $\mathbb{U}_e$).*

Απόδειξη Είναι εύκολο να δούμε ότι είναι κάλυψη διότι η προεικόνα ενός μικρού δίσκου στο $\mathbb{K}(r)$ είναι e τό πλήθος δισκάκια που προκύπτουν τό ένα από τό άλλο με στροφή γωνίας $2\pi/e$. Έστω $\zeta_e = e^{2\pi i/e}$. Τότε η απεικόνιση $z \to \zeta_e z$ είναι στοιχείο τής $\mathrm{Deck}(f_e)$ και η ομάδα που παράγεται από αυτήν δρά μεταβατικά στις ίνες τής απεικόνισης f_e (από τόν ορισμό τής f_e). Τότε $\mathrm{Deck}(f_e) \cong \mathbb{U}_e$ από τό Λήμμα 1.2.1. Για τόν δεύτερο ισχυρισμό: Έστω $\tilde{z}_0 = \rho^{1/e} e^{2\pi i\theta/e}$ προεικόνα τού z_0. Τότε η καμπύλη $\tilde{\gamma}_r(t) = \rho^{1/e} e^{2\pi i(t+\theta)/e}$ είναι η ανύψωση τής $\gamma_r(t)$ με αρχικό σημείο τό $\tilde{z}_0$. Όμως $\tilde{\gamma}_r(0) = \tilde{z}_0$ και $\tilde{\gamma}_r(0) = \zeta_e \tilde{z}_0$. Συνεπώς, η $\Phi_b(\gamma_r)$ είναι τό στοιχείο $z \to \zeta_e^{-1} z$ τής $\mathrm{Deck}(f_e)$, δηλ. τό στοιχείο $e^{-2\pi i/r}$ τής $\mathbb{U}_e$ □

Πρόταση 1.3.1. *Έστω $f : E \to \mathbb{K}(r)$ μια κάλυψη πεπερασμένου βαθμού e, με τό E συνεκτικό. Τότε η f είναι ισοδύναμη με τήν κάλυψη $f_e : \mathbb{K}(r^{1/e}) \to \mathbb{K}(r)$, $z \to z^e$. Άρα υπάρχει ομοιομορφισμός $\varphi : E \to \mathbb{K}(r^{1/e})$ με $\varphi(u)^e = f(u)$ για κάθε $u \in E$. Για κάθε φ' με τήν ίδια ιδιότητα $(\varphi')^e = f$ ισχύει ότι $\varphi' = \zeta\varphi$, όπου ζ είναι e-οστη ρίζα τής μονάδας.*

Απόδειξη Έστω $p \in \mathbb{K}(r)$. Η δράση τής $\pi_1(\mathbb{K}(r), p)$ στο σύνολο $f^{-1}(p)$ είναι μεταβατική και επομένως οι σταθεροποιούσες υποομάδες $\mathrm{Stab}_b(\pi_1(\mathbb{K}(r), p))$ στα σημεία $b \in f^{-1}(p)$ είναι συζυγείς και επομένως έχουν όλες δείκτη $e = |f^{-1}(p)|$ στην $\pi_1(\mathbb{K}(r), p) \cong \mathbb{Z}$. Συνεπως ισούνται ολες με τήν υποομάδα $\mathbb{Z}$. Από τήν πρόταση 1.1.1 συνάγουμε τώρα ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $\phi : E \to \mathbb{K}(r^{1/e})$ με $f_e \circ \phi = f$, δηλαδή $\phi^e = f$ (f ισοδύναμη με τήν ϕ). □

Απο τήν παραπάνω πρόταση συνάγουμε τό εξής πόρισμα

Πόρισμα 1.3.1. *Με τού συμβολισμούς τής Πρότασης 1.3.1, έχουμε ότι η ομάδα* $\mathrm{Deck}(f)$ *είναι κυκλική με έναν διακεκριμμένο γεννήτορα* σ_e *που αντιστοιχεί στον γεννήτορα* ζ_e *τής* $\mathrm{Deck}(f_e) \cong \mathbb{U}_e$*, βλ. Λήμμα 1.3.1.*

1.3.2 Η τοπική μελέτη και η συμπαγοποίηση τών τοπολογικών καλύψεων

Άμεσο πόρισμα τής Πρότασης 1.3.1 είναι τό ακόλουθο.

Πόρισμα 1.3.2. *Έστω P ένα πεπερασμένο υποσύνολο τού $\mathbb{P}^1$, $f : R \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ μια κάλυψη Galois και $p \in P$. Έστω $D = D(p, r)$ ο δίσκος με κέντρο p που δεν περιέχει άλλα στοιχεία από τό σύνολο P εκτός τού p. Οπότε τό $D^* := D \setminus \{p\}$ είναι υποσύνολο τού $\mathbb{P}^1 \setminus P$. Θεωρούμε τόν ομοιομορφισμό $\kappa_p : D^* \to \mathbb{K}(r)$ με $z \to z - p$, $p \neq \infty$ και $1/z$, $p = \infty$. Τότε για κάθε συνεκτική συνιστώσα E τού $f^{-1}(D^*)$, η απεικόνιση $f_E : E \to D^*$ με $f_E = \kappa_p \circ f \mid_E$ είναι μια πεπερασμένη τοπολογική κάλυψη. Συνεπώς είναι ισοδύναμη με τήν κάλυψη $f_e : \mathbb{K}(r^{1/e}) \to \mathbb{K}(r)$, $z \to z^e$, όπου $e = \deg f_E$.*

Ας μελετήσουμε τώρα περαιτέρω τήν κάλυψη Galois $f : R \to \mathbb{P}^1 \setminus P$. Έστω D^* όπως παραπάνω (μικρός τρυπημένος δίσκος με κέντρο τό $p \in P$) και έστω $f^{-1}(D^*) = \cup_{i=1}^k E_i$, η διάσπαση σε συνεκτικές συνιστώσες. Αν $h \in \mathrm{Deck}(f)$, τότε τό h δρά στο σύνολο $f^{-1}(D^*)$, διότι διατηρεί τίς ίνες, και επειδή είναι αυτομορφισμός θα στέλνει συνεκτικές συνιστώσες σε συνεκτικές συνιστώσες. Έστω H_i η υποομάδα τής $\mathrm{Deck}(f)$ που στέλνει τήν E_i στον εαυτό της. Τότε, εξ ορισμού θα είναι $H_i \subseteq \mathrm{Deck}(f_i)$, όπου $f_i : E_i \to D^*$, ο περιορισμός τής f στο E_i. Παρατηρούμε τώρα τό εξής: αν $q \in D^*$ και $b, b' \in f^{-1}(q) \cap E_i = f_i^{-1}(q)$, τότε επειδή η f είναι κάλυψη Galois, θα υπάρχει $h \in \mathrm{Deck}(f)$ με $h(b) = b'$. Τότε όμως, $h(E_i) = E_i$ άρα $h \in H_i$. Συνεπώς η H_i δρά μεταβατικά στην $f_i^{-1}(q)$ και άρα από τό Λήμμα 1.2.1 έχουμε ότι $H_i = \mathrm{Deck}(f_i)$. Από τό Πόρισμα 1.3.1 συνάγουμε ότι η H_i είναι κυκλική ομάδα τάξης e_i ίσης με τόν βαθμό τής κάλυψης f_i. Από τήν άλλη, οι H_i, H_j είναι συζυγείς υποομάδες τής ομάδας $\mathrm{Deck}(f)$: πράγματι, αν $b_i \in F^{-1}(q) \cap E_i$, $i = 1, 2$, πάρε $h_{ij} \in \mathrm{Deck}(f)$ με $h_{ij}(b_i) = b_j$ (τέτοιο h_{ij} υπάρχει διότι η f είναι κάλυψη Galois). Τότε το h_{ij} στέλνει τήν συνιστώσα E_i ισόμορφα στην συνιστώσα E_j. Ορίζουμε τώρα τήν απεικόνιση $E_i \to E_j$ με $h_i \mapsto h_j = h_{ij} h_i h_{ij}^{-1}$. Εύκολα τώρα φαίνεται ότι $h_{ih} H_i h_{ij}^{-1} = H_j$, για κάθε i, j. Συνεπως, οι H_i, H_j είναι συζυγείς και ειδικότερα $e_i = e_j = \deg(f)/k$, όπου k τό πήθος τών συνεκτικών συνιστωσών όπως παραπάνω. Αυτός ο αριθμός εξαρτάται μόνο από τό σημείο $p \in P$ και τόν συμβολίζουμε ως e_p. Τέλος, από τό Πόρισμα 1.3.1 έχουμε τό εξής: αν γ ο γεννήτορας τής $\pi_1(D^*, z_0)$ (για κάποιο $z_0 \in D^*$) και $\tilde{z}_0 \in f_i^{-1}(z_0) \subset E_i$, τότε $\Phi_{\tilde{z}_0}(\gamma) = h_i$ γεννήτορας τής H_i. Αν τώρα πάρουμε ως βάση μονοπατιών ένα $q_0 \in \mathbb{P}^1 \setminus P$, διαλέξουμε ένα $b \in f^{-1}(q_0)$ και θεωρήσουμε τό μονοπάτι γ_p με αρχή τό q_0 που πηγαίνει στο z_0, ακολουθεί τό γ και επιστρέφει στο q_0 τότε $\Phi_b(\gamma_p)$ είναι συζυγές με τό h_i. Συνοψίζουμε:

Πρόταση 1.3.2. *Έστω P ένα πεπερασμένο υποσύνολο τού $\mathbb{P}^1$, $f : R \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ μια κάλυψη Galois και $p \in P$. Έστω $D = D(p, r)$ ο δίσκος με κέντρο p που δεν περιέχει άλλα στοιχεία από τό σύνολο P εκτός τού p. Οπότε τό $D^* := D \setminus \{p\}$ είναι υποσύνολο τού $\mathbb{P}^1 \setminus P$. Έστω $f^{-1}(D^*) = \cup_{i=1}^k E_i$ η διάσπαση σε συνεκτικές συνιστώσες. Τότε κάθε κάλυψη $f_i : E_i \to D^*$ (περιορισμός τής f στο E_i) είναι ισοδύναμη με τήν κάλυψη $f_{e_p} : \mathbb{K}(r^{1/e_p}) \to \mathbb{K}(r)$, $z \to z^{e_p}$, όπου $e_p = \deg(f)/k$ (συνεπώς και $k \mid \deg(f)$). Η ομάδες $\mathrm{Deck}(f_i) \cong \mathrm{Stab}_{E_i}(\mathrm{Deck}(f))$ είναι όλες κυκλικές τάξης e_p και είναι ισόμορφες με τίς συζυγείς υποομάδες $H_i = \{h \in \mathrm{Deck}(f),\ h(E_i) = E_i\}$ τής $\mathrm{Deck}(f)$. Συμβολίζουμε ως C_p^{top} τήν κλάση συζυγίας τών H_i στην $\mathrm{Deck}(f)$. Αν $q_0 \in \mathbb{P}^1 \setminus P$ και $b \in f^{-1}(q_0)$ τότε τό $< \Phi_b(\gamma_p) > \in C_p^{\mathrm{top}}$.*

Από τήν παραπάνω Πρόταση 1.3.2 συνάγουμε ότι οι συνιστώσες E_i είναι ομοιομορφικές με τόν τρυπημένο δίσκο $\mathbb{K}(r^{1/e_p})$ και ο περιορισμός τής f στο E_i είναι η απεικόνιση $z \mapsto z^{e_p}$. Αν θεωρήσουμε τώρα τόν κλειστό δίσκο $\overline{\mathbb{K}(r^{1/e_p})} = \{z \in \mathbb{C},\ 0 \leq |z| < r^{1/e_p}\}$, η παραπάνω απεικόνιση επεκτείνεται συνεχώς και μπορούμε να συμπαγοποιήσουμε τό R, αντικαθιστώντας τό E με τόν δίσκο $\overline{\mathbb{K}(r^{1/e_p})}$, όπου η συγκόληση γίνεται δια μέσου τού παραπάνω ομοιομορφισμού $E_i \cong \mathbb{K}(r^{1/e_p})$. Κάνοντας αυτή τήν διαδικασία για ολα τά σημεία τού P καί όλες τίς συνεκτικές συνιστώσες E_i, παράγουμε μια συμπαγή τοπολογική επιφάνεια $\bar{R}$ και μια επέκταση τής κάλυψης f σε μια συνεχή απεικόνιση επί τού $\mathbb{P}^1, \bar{f} : \bar{R} \to \mathbb{P}^1$. Επιπροσθέτως, η μιγαδική δομή στο $\mathbb{P}^1$ επάγει μια μιγαδική δομή στην $\bar{R}$ καθιστώντας τήν έτσι επιφάνεια Riemann. Η απεικόνιση f είναι πλέον μια ολόμορφη απεικόνιση μεταξύ επιφανειών Riemann. Κάθε $\alpha \in \mathrm{Deck}(f)$ επεκτείνεται φυσιολογικά σε έναν ολόμορφο αυτομορφισμό $\bar{\alpha} : \bar{R} \to \bar{R}$ με $\bar{f} \circ \bar{\alpha} = \bar{f}$. Σημειώνουμε ότι, αν $f^{-1}(p) = \{q_1, \ldots, q_k\} \subset \bar{R}$ τότε η δράση τού $\bar{\alpha}$ στα σημεία q_i καθορίζεται από τήν δράση του στις αντίστοιχες συνιστώσες E_i που περιέχουν τά q_i.

Ορισμός 1.3.2. *Ορίζουμε ως δείκτη διακλάδωσης στα παραπάνω σημεία $q_i \in f^{-1}(p)$ τόν φυσικό αριθμό e_p τής Πρότασης 1.3.2.*

1.4 Τό τοπολογικό θεώρημα ύπαρξης τού Riemann (R.E.T.)

1.4.1 Η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(\mathbb{P}^1\backslash P, p_0)$

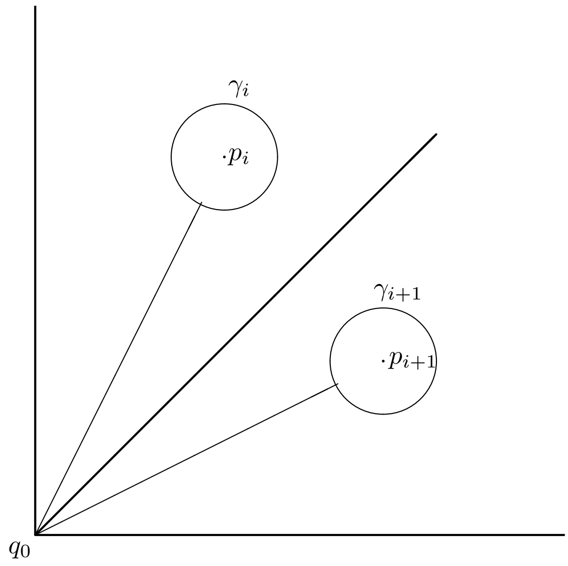
Έστω $P = \{p_1, \cdots, p_r\} \subset \mathbb{C}$ και $q_0 \in \mathbb{P}^1\backslash P$ με τήν ιδιότητα ότι τό q_0 δεν ανήκει στις ευθείες p_ip_j. Γράφοντας τά $p_i = q_0 + \rho_i \exp(2\pi i\vartheta_i)$ μπορούμε να διατάξουμε τα σημεία τού P έτσι ώστε τά θ_i να είναι σε φθίνουσα τάξη. Τότε έχουμε

Πρόταση 1.4.1. *(α) Η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(\mathbb{C}\backslash P, q_0)$ έχει ως ανεξάρτητους (ελεύθερους) γεννήτορες τά $[\gamma_1], \cdots, [\gamma_r]$ που περιγράφονται ως εξής: έστω $D_i := D(p_i, r_i)$, $i = 1, \ldots n$, ο δίσκος με κέντρο τό p_i και με ακτίνα r_i τέτοια ώστε $\forall j \neq i, p_j \notin D_i$. Τότε τό γ_i, $i = 1, \ldots, r$ είναι τό κλειστό μονοπάτι που αρχίζει από τό q_0, ακολουθεί τήν διεύθυνση q_0p_i μέχρι τό σύνορο τού δίσκου $D_i := D(p_i, r_i)$, συνεχίζει στο σύνορο με φορά αντίθετη από αυτή τών δεικτών τού ρολογιού (μία φορά) και καταλήγει στο q_0 μέσω τής διεύθυνσης p_iq_0, βλ. εικόνα 1.1.*

(β) Η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(\mathbb{P}^1\backslash P, q_0)$ έχει ως γεννήτορες τά παραπάνω $[\gamma_1], \cdots, [\gamma_r]$ τά οποία υπόκεινται στην μοναδική σχέση $[\gamma_1 \cdots \gamma_r] = 1$.

Απόδειξη Μπορούμε να υποθέσουμε, εφαρμόζοντας πχ μια μεταφορά, ότι $p_i \neq \infty$, για κάθε i, δηλ. τά $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$, $r \geq 1$. Έστω $S = \mathbb{C} \setminus \{p_1, \ldots, p_r\}$. Διαλέγουμε ένα $q_0 \in S$ τέτοιο ώστε $\forall i \neq j$ η ευθεία που περνάει από τά q_0, p_i να μην περνάει από κάποιο p_j. Για κάθε $i = 1, \ldots, r$ γράφουμε τά p_i ατήν μιγαδική τους μορφή $p_i = q_0 + \rho_i exp(\sqrt{-1}\vartheta_i)$, με $\rho_i \in \mathbb{R}_+$ και $0 \leq \vartheta_i < 2\pi$. Κατατάσουμε τά p_i έτσι ώστε $\vartheta_1 > \vartheta_2 > \ldots$. Στο $\mathbb{C}$ παίρνουμε ακτίνες $M_1, M_2, \ldots, M_r$ με αρχή τό q_0 και τέτοιες ώστε κάθε συνεκτική συνιστώσα S_i τού $\mathbb{C} \setminus (M_1 \cup \ldots \cup M_r)$ να περιέχει ακριβώς ένα p_i. Έστω τό D_i είναι ο δίσκος με κέντρο τό p_i, όπως στο σχήμα, δηλαδή η κλειστότητά του να περιέχεται στο S_i.

Διευρύνοντας λίγο τήν γωνία που αντιστοιχεί στον τομέα S_i, επεκτείνουμε τό S_i σε έναν ανοικτό τομέα S'_i τέτοιο ώστε $S'_i \cap D_j = \emptyset$ για $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, r$. Έστω γ ένα κλειστό μονοπάτι στο $S = \mathbb{C}\backslash\{p_1, \ldots, p_r\}$ με αρχή (και τέλος) τό q_0. Αφού τό S'_i είναι ανοιχτό και $\cup_i^n S'_i = \mathbb{C}$ τότε τό $T_i = S'_i\backslash\{p_i\}$ είναι ανοιχτό και $\cup_i^n T_i = S$. Επιλέγοντας κατάλληλα σημεία στα τμήματα τού γ που βρίσκονται στις τομές $T_{\nu-1} \cap T_\nu$ $(\mathrm{mod} r)$, μπορούμε να διασπάσουμε τό γ σε απλά συνεκτικά τμήματα δ_i κάθε ένα εκ τών οποίων ανήκει σε κάποιο T_{ν_i}. Τα ν_i ικανοποιούν τήν σχέση $\nu_{i+1} = (\nu_i + 1)\mathrm{mod} r$. Άρα τό γ γράφεται ως γινόμενο μονοπατιών, πεπερασμένα σε πλήθος, $\gamma = \delta_1 \cdots \delta_s$. Θεωρούμε τό μονοπάτι κ_ν, $\nu = 1, \ldots, s$, τό οποιό ξεκινάει από τό q_0 και συνεχίζει (σε ευθεία) μέχρι τό αρχικό σημείο τού δ_i. Αυτό τό σημείο ανήκει στη τομή τών $T_{\nu_i - 1}$, T_{ν_i} άρα και τά κ_i βρίσκονται στην



Σχήμα 1.1: Οι γεννήτορες τής θεμελιώδους ομάδας

τομή. Θέτουμε κ_{s+1} =τό σταθερό μονοπάτι q_0. Ορίζουμε ως $\omega_i = (\kappa_{i+1})^{-1}\delta_i\kappa_i$. Τα ω_i είναι κλειστά μονοπάτια στο T_{ν_i} με αρχή τό q_0 και τό γ είναι ομοτοπικό με τό γινόμενο τών ω_i. Τό T_{ν_i} είναι ομοιομορφικό με τόν τρυπημένο δίσκο διότι αν υλοποιήσουμε τό $\mathbb{P}^1$ ως τήν διδιάστατη πραγματική σφαιρα και τό σημείο ∞ ως τό αντιδιαμετρικό τού q_0, οι παραπάνω τομείς μπορούν να θεωρηθούν ως τμήματα μεταξύ μέγιστων κύκλων που συνδέουν τό q_0 με τό ∞. Επομένως κάθε T_{ν_i} είναι ομοιομορφικο με δίσκο μείον τό κέντρο του που αντιστοιχεί στο σημείο p_{ν_i}. Το παραπάνω μονοπάτι γ_{ν_i} είναι τότε τό κλειστό μονοπάτι που διατρέχει κυκλικά τό κέντρο τού δίσκου και άρα είναι ο γεννήτορας τής ομάδας ομοτόποίας. Θα έχουμε λοιπόν, $\pi_1(T_{\nu_i}, q_0) =< [\gamma_{\nu_i}] >$ και $\omega_i \cong (\gamma_{\nu_i})^{m_i}$, $m_i \in \mathbb{Z}$, δηλαδή τό γ είναι ομοτοπικό με ένα γινόμενο δυνάμεων τών γ_{ν_i}. Οπότε $\pi_1(S, q_0) =< [\gamma_1], \ldots, [\gamma_r] >$.

Το $\mathbb{P}^1$ είναι ομοιομορφικό με τήν διδιάστατη πραγματική σφαίρα και επομένως, η παραπάνω σύνθεση τών μονοπατιών είναι ομοτοπική με ένα κλειστό μονοπάτι που στο εσωτερικό του περιέχει όλα τά σημεία p_i. Αυτό τώρα τό μονοπάτι μπορούμε να τό μαζέψουμε από τήν εξωτερική του μεριά στο σημείο q_0 και άρα είναι ομοτοπικά τετριμμένο. Τό ότι τά $[\gamma_1], \ldots, [\gamma_r]$ είναι ανεξάρτητα στοιχεία τής $\pi_1(S, q_0)$, ή ισοδύναμα, ότι η παραπάνω σχέση είναι η μοναδική σχέση που ικανοποιούν τα $[\gamma_i]$ στην $\pi_1(\mathbb{P}^1, q_0)$ θα τό αποδείξουμε μετά τήν απόδειξη τού παρακάτω Θεωρήματος 1.4.1. $\square$

1.4.2 Τό τοπολογικό R.E.T. - 1η μορφή

Θα διαυπώσουμε τώρα τό Θεώρημα ύπαρξης τοπολογικών καλύψεων στην πρώτη του μορφή και τό οποίο θα επαναδιατυπώσουμε στη επόμενη παράγραφο στην τελική του μορφή.

Θεώρημα 1.4.1. *Έστω $P = \{p_1, \ldots, p_r\} \subset \mathbb{C}$ (αριθμημένα όπως στην Πρόταση 1.4.1). Έστω G μιά πεπερασμένη ομάδα με γεννήτορες τά $g_1, \ldots, g_r$. Τότε υπάρχει μια κάλυψη Galois $f : R \to \mathbb{P}^1 \setminus (P \cup \{\infty\}) = \mathbb{C} \setminus P$, ένας ισομορφισμός $\theta : \mathrm{Deck}(f) \to G$ και ένα σημείο $b \in f^{-1}(q_0)$ τέτοιο ώστε $\theta \circ \Phi_b : [\gamma_i] \mapsto g_i$, όπου $\Phi_b : \pi_1(S, q_0) \to \mathrm{Deck}(f)$ είναι ο επιμορφισμός ομάδων τής Πρότασης 1.2.1. Η $f : R \to \mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, \ldots, p_r, \infty\}$ ικανοποιεί τά εξής: για τίς κλάσεις συζυγίας $C_i^{\mathrm{top}} := C_{p_i}^{\mathrm{top}}$ και C_∞ τού G, βλ. Πρόταση 1.3.2, έχουμε ότι $< g_i >\in C_i^{\mathrm{top}}$, $i = 1, \ldots, r$, και $< (g_1 \cdots g_r)^{-1} >\in C_\infty^{\mathrm{top}}$.*

Απόδειξη Η κατασκευή στηρίζεται στην λεγόμενη μέθοδο cut and paste, βλ. για παράδειγμα [M]. Έστω L_i η ημιευθεία στην διεύθυνση τής ευθείας q_0p_i, με αρχή τό p_i που εκτείνεται προς τήν αντίθετη πλευρά τού q_0 (δηλ. δεν περιέχει τό σημείο q_0) και έστω $Q = S \setminus (L_1 \cup \ldots \cup L_r)$. Ορίζουμε ως $R := S \times G$, δηλ. $|G|$ τό πλήθος κόπιες τού S. Αυτό που θα κάνουμε παρακάτω είναι να συγκολίσουμε κατάλληλα τίς παραπάνω κοποιες ώστε να παράξουμε τήν επιθυμητή κάλυψη R. Η συγκόλιση γίνεται με τόν ορισμό κατάλληλης τοπολογίας στο R. Σταθεροποιούμε ένα σημείο $(q, g) \in R$. Αν $q \in Q$ τότε όλα τά $B \times \{g\}$, όπου $B \subset Q$ είναι ένας ανοιχτός δίσκος γύρω από τό q που περιέχεται στο Q, αποτελούν βάση περιοχών τού $(q, g) \in Q \times G$. Αν $q \in L_i$ τότε παίρνουμε η βάση να αποτελείται από όλα τά $\hat{D}_g = (D^- \times \{g\}) \cup (D^+ \times \{gg_i^{-1}\})$, όπου D είναι ανοιχτός δίσκος γύρω από τό q που δέν τέμνει καμία ευθεία L_j, $j \neq i$ και δεν περιέχει τό p_i. Ως D^- συμβολίζουμε τό κλειστό δεξιό ημικύκλιο και ως D^+ τό αριστερό ανοικτό ημικύκλιο τού D. Επομένως με αυτό τόν τρόπο συνδέουμε τό επίπεδο S στην στάθμη g με τό επίπεδο S στην στάθμη gg_i^{-1} κατα μήκος τής ημιευθείας L_i, παιρνόντας από τό δεξιά πλευρά τής L_i στο $S \times \{g\}$ στην αριστερή πλευρά τής L_i στο $S \times \{gg_i^{-1}\}$. Με αυτές τίς βάσεις έχουμε μια τοπολογία στο R ορίζοντας ένα υποσύνολο τού R να είναι ανοιχτό αν περιέχει μια τέτοια περιοχή για κάθε σημείο του (αφού για κάθε δύο περιοχές ενός σημείου ισχύει ότι η μια περιέχεται στην άλλη).

Η $f : R \to S, (q, g) \mapsto q$ είναι κάλυψη: Έχουμε ότι $f^{-1}(B) = \bigcup_{g \in G} B \times \{g\}$ και $f^{-1}(D) = \bigcup_{g \in G} \hat{D}_g$. Άρα κάθε $B \times \{g\}$ είναι ομοιομορφικό με τό B και κάθε $\hat{D}_g$ με τό D. Επίσης τά $B \times \{g\}$ είναι συνεκτικές συνιστώσες τού $f^{-1}(B)$ και τά $\hat{D}_g$ τού $f^{-1}(D)$.

Για κάθε $h \in G$, η $\alpha_h : R \to R,\ (q, g) \mapsto (q, hg)$ είναι Deck-μετασχηματισμός και $\alpha_{hh'} = \alpha_h \circ \alpha_{h'}$: Πράγματι, $\alpha_h \circ \alpha_{h'}(q,g) = \alpha_h(q,h'g) = (q,hh'g) = \alpha_{hh'}(q,g)$. Από αυτό συμπεραίνουμε επίσης ότι η α_h είναι 1-1 με αντίστροφη τήν $\alpha_{h^{-1}}$. Είναι και επί διότι $(q,g) = \alpha_h(q,h^{-1}g)$. Επίσης, $\alpha_h(B \times \{g\}) = B \times \{hg\}$ και $\alpha_h(\hat{D}_g) = \hat{D}_{hg}$, συνεπώς είναι και ομοιομορφισμός. Τέλος $f \circ \alpha_h(q,g) = f(q,hg) = q = f(q,g)$.

Η f είναι Galois κάλυψη και $G \cong \mathrm{Deck}(f)$ μέσω τής $g \mapsto \alpha_g$: Δείχνουμε πρώτα ότι τό R είναι συνεκτικό. Πράγματι, κάθε $Q \times \{g\}$ είναι συνεκτικό αφού είναι ομοιομορφικό με τό Q. Επίσης, στο $\hat{D}_e$, e=τό ουδέτερο τής G, υπάρχει μονοπάτι που ενώνει τό $Q \times e$ με τό $Q \times g_i^{-1}$ (αυτό προκύπτει από τόν ορισμό τής γεοτονιάς $\hat{D}_e$). Συνεπώς η συνεκτική συνιστώσα U τού R που περιέχει τό $Q \times \{e\}$ θα πρέπει να περιέχει και τό $Q \times \{g_i^{-1}\}$, για κάθε i. Επειδή τά g_i είναι γεννήτορες τής G συνάγουμε ότι η θα περιέχει όλα τά $Q \times \{g\}$, για κάθε $g \in G$ Συνεπώς η U θα περιέχει όλο τό R και άρα τό R είναι συνεκτικό. Τό ότι τώρα $G \cong \mathrm{Deck}(f)$ προκύπτει από τό γεγονός ότι η ομάδα G δρά μεταβατικά στις ίνες τής κάλυψης.

Η ανύψωσή του γ_i με αρχή τό $b = (q_0, e)$ έχει τελικό σημείο τό (q_0, g_i^{-1}): Πράγματι, τό γ_i έχει ένα ακριβώς κοινό σημείο με τό L_i, έστω για $t = t_i$. Ορίζουμε $\tilde{\gamma}_i(t) = (\gamma_i, e)$, $t \leq t_i$ και $\tilde{\gamma}_i(t) = (\gamma_i, g_i^{-1})$, $t > t_i$. Αυτό είναι ένα συνεκτικό μονοπάτι λόγω τής τοπολογίας που ορίσθηκε. Άρα τό $\tilde{\gamma}_i$ είναι η ανύψωση τού γ_i με $\tilde{\gamma}_i(0) = b$ και $\tilde{\gamma}_i(1) = (q_0, g_i^{-1})$.

$\Phi_b([\gamma_i]) = g_i$ και συνεπώς $< g_i > \in C_{p_i} = C_i$, βλ. Πρόταση 1.3.2: Εξ ορισμού, έχουμε ότι η $\Phi_b([\gamma_i])$ απεικονίζει τό (q_0, g_i^{-1}) στο b, διότι όπως είδαμε παραπάνω η ανύψωση $\tilde{\gamma}_i$ τού γ_i με αρχικό σημείο τό $b = (q_0, e)$ έχει ως τελικό σημείο τό (q_0, g_i^{-1}). Όμως τό ιδιο κάνει και ο μετασχηματισμός α_{g_i} που αντιστοιχεί στο $g_i \in G$. Άρα $\Phi_b([\gamma_i]) = g_i$.

Έστω $K_0 = K_0(0, \rho)$ δίσκος με $\rho > 0$ τέτοιο ώστε τό q_0 και τά p_i, $\forall i$ να βρίσκονται μέσα στο K_0. Τότε τό μονοπάτι $\gamma_\infty = \gamma_1 \dots \gamma_r$ είναι ομοτοπικό με τό γ', τό οποίο ξεκινάει από τό q_0, συνεχίζει σε ευθεία μέχρι τό σύνορο τού K_0, ακολουθεί τόν κύκλο με φορά αντίθετη τών δεικτών τού ρολογιού και επιστρέφει στο q_0 μέσω τής αρχικής ευθείας: Έστω D ο ανοιχτός δίσκος με κέντρο τό q_0 που περιέχει όλα τά p_i και έστω $S_i^* = S_i \cap D$. Τό γ_i είναι ομοτοπικό με τό γ_i^*, τό οποιό ακολουθεί μια φορά τό σύνορο τού S_i^*, με φορά αντίθετη τών δεικτών τού ρολογιού και βάση τό q_0. Άρα τό γ_∞ είναι ομοτοπικό με τό $\gamma_1^* \dots \gamma_r^*$, τό οποιό είναι ομοτοπικό με ένα γ^*, που ξεκινάει από τό q_0 σε μια ευθεία μέχρι τό σύνορο τού D, συνέχίζει μια φορά στο σύνορο με φορά αντίθετη τών δεικτών τού ρολογιού και επιστρέφει στο q_0 μέσω τής ευθείας. Άρα τό γ^* είναι ομοτοπικό με τό γ'.

Έχουμε ότι $(g_1 \dots g_r)^{-1} \in C^{\infty}$: Για $p = \infty$, τότε από τήν Πρόταση 1.3.2, η Φ_b στέλνει τό μονοπάτι $(\gamma')^{-1}$ σε ένα στοιχείο τής κλάσης C_∞. Επίσης $\Phi_b([\gamma']) = \Phi_b([\gamma_\infty]) = g_1 \dots g_r$ και άρα $\Phi_b([\gamma']^{-1}) = (g_1 \dots g_r)^{-1} \in C_\infty$. □

Από τήν απόδειξη τού παραπάνω θεωρήματος προκύπτει ότι η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(S, q_0)$, $S = \mathbb{C}\backslash\{p_1, \dots, p_r\}$, είναι ελεύθερη ομάδα με γεννήτορες τά $[\gamma_1], \dots, [\gamma_r]$. Κατ' επέκταση τά $[\gamma_1], \dots, [\gamma_r]$ είναι γεννήτορες τής θεμελιώδους ομάδας $\pi_1(\mathbb{P}^1, q_0)$ με μόνη συνθήκη τήν $[\gamma_1] \cdots [\gamma_r] = 1$. Αυτό ολκληρώνει τήν απόδειξη τής Πρότασης 1.4.1.

1.4.3 Τό τοπολογικό R.E.T. - επαναδιατύπωση

Αρχίζουμε με έναν ορισμό.

Ορισμός 1.4.1. *Θεωρούμε τίς τριάδες $(G, P, (C_p)_{p\in P})$, όπου G είναι μια πεπερασμένη ομάδα, P πεπερασμένο υποσύνολο τού $\mathbb{P}^1$ και $(C_p)_{p\in P}$ μια συλλογή από μή τετριμμένες κλάσεις συζυγίας C_p τής ομάδας G. Στο παραπάνω σύνολο τριάδων, μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας ως εξής: λέμε ότι δύο τριάδες $(G, P, (C_p)_{p\in P})$ και $(G', P', (C'_{p'})_{p'\in P'})$ είναι ισοδύναμες αν $P = P'$ και υπάρχει ισομορφισμός ομάδων $\phi : G \to G'$ που στέλνει ισομορφικά τήν κλάση C_p στην κλαση C'_p, γιά κάθε $p \in P = P'$. Η παραπάνω κλάση ισοδυναμίας συμβολίζεται ως $[G, P, (C_p)_{p\in P}]$ και τήν ονομάζουμε τύπο διακλάδωσης.*

Αν τώρα $f : R \to \mathbb{P}^1\backslash P$ μια πεπερασμένη Galois κάλυψη τότε αυτή επάγει ένα τύπο διακλάδωσης σύμφωνα με τόν παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.4.2. *Έστω $f : R \to \mathbb{P}^1\backslash P$ μια πεπερασμένη Galois κάλυψη , $H = \mathrm{Deck}(f)$ και C_p^{top} η κλάση συζυγίας τής H που αντιστοιχεί στο $p \in P$, βλ. Πρόταση 1.3.2. Ορίζουμε τόν τοπολογικό τύπο διακλάδωσης τής f ως τόν τύπο διακλάδωσης που επάγεται από τήν τριάδα $[H, P', (C_p^{\mathrm{top}})_{p\in P'}]$, όπου $P' = \{p \in P : C_p^{\mathrm{top}} \neq \{1\}\}$.*

Σημειώνουμε ότι αν $f : R \to \mathbb{P}^1\backslash P$ μια πεπερασμένη Galois κάλυψη όπως παραπάνω τότε αυτή επάγει με φυσιολογικο τρόπο μια πεπερασμένη Galois κάλυψη $f : R \to \mathbb{P}^1\backslash P'$ με τόν ίδιο τοπολογικό τύπο διακλάδωσης.

Τό παρακάτω θεώρημα είναι η τοπολογική εκδοχή τού θεωρήματος ύπαρξης τού Riemann, βλ. Θεώρημα 3.3.1 για τήν αλγεβρική εκδοχή του.

Θεώρημα 1.4.2 (Topological R.E.T.). *Έστω $P = \{p_1, \cdots, p_r\}$ και έστω $\mathcal{T} = [G, P, (C_p)_{p\in P}]$ ένας τύπος διακλάδωσης, βλ. Ορισμό 1.4.1. Τότε υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Galois τού $\mathbb{P}^1\backslash P$ με τοπολογικό τύπο διακλάδωσης $\mathcal{T}$ αν και μόνο αν υπάρχουν γεννήτορες $g_1, \dots, g_r$ τού G με $g_1 \cdots g_r = 1$ και $< g_i > \in C_{p_i}$, $i = 1, \dots, r$.*

Απόδειξη Εφαρμόζοντας έναν αυτομορφισμό τού $\mathbb{P}^1$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p_r = \infty$. Έστω λοιπόν ότι δίδεται ο τύπος διακλάδωσης για τόν οποίο η ομάδα G ικανοποιεί τίς προϋποθέσεις τού θεωρήματος. Εφαρμόζουμε τότε τό Θεώρημα 1.4.1 με $r' = r-1$ για τά σημεία $p_1, \ldots, p_{r-1}$ και τά στοιχεία $g_1, \ldots, g_{r-1}$ τά οποία είναι γεννήτορες τίς G, διότι τά $g_1, \ldots, g_r$ είναι γεννήτορες και τό τελευταίο είναι έκφραση τών προηγουμένων. Υπάρχει επομένως κάλυψη Galois $f : R \to S$, ένας ισομορφισμός $\theta : \mathrm{Deck}(f) \to G$ με τήν ιδιότητα ότι $< g_i > \in C_i^{\mathrm{top}}$, $i = 1, \ldots, r'$, και $< g_r = (g_1 \cdots g_{r'})^{-1} > \in C_\infty^{\mathrm{top}}$. Άρα, C_i^{top} είναι η κλαση που καθορίζεται από τό g_i και συνεπώς είναι ισόμορφη με τήν C_{p_i}, $i = 1, \ldots, r$. Για τό αντίστροφο: Έστω ότι δίδεται μια πεπερασμένη κάλυψη Galois $f : R \to S$, $S = \mathbb{P}^1 \backslash \{p_1, \ldots, p_r\}$, με τοπολογικό τύπο διακλάδωσης $\mathcal{T}$. Έστω $r' = r - 1$ και $q_0 \in S$. Παίρνουμε $b \in f^{-1}(q_0)$ και έστω $\Phi_b : \pi_1(S, q_0) \to \mathrm{Deck}(f) = G$ ο επιμορφισμός τής Πρότασης 1.2.1. Έστω $\gamma_1, \ldots, \gamma_{r'}$ η βάση τού $\pi_1(S, q_0)$ που κατασκευάζεται από τά σημεία $p_1, \ldots, p_{r'}$ και έστω $\gamma_r = (\gamma_1 \cdots \gamma_{r'})^{-1}$. Από τήν απόδειξη τού Θεωρήματος 1.4.1 έχουμε ότι $< g_i = \Phi_b(\gamma_i) > \in C_{p_i}$, $i = 1, \ldots, r$ είναι γεννήτορες τής G και έχουμε ότι $g_1 \cdots g_r = 1$ λόγω τής σχέσης $\gamma_1 \cdots \gamma_r = 1$. □

1.5 Από τήν τοπολογική κάλυψη στην επέκταση σωμάτων

Έστω $f : R \to \mathbb{P}^1 \backslash P$ μια τοπολογική κάλυψη βαθμού n όπως παραπάνω. Ο σκοπός μας είναι να αντιστοιχίσουμε μια επέκταση σωμάτων. Πρός τούτο, θα συμπαγοποιήσουμε τήν κάλυψη και θα ορίσουμε τό σώμα τών μερόμορφων συναρτήσεων σε αυτήν. Αρχίζουμε με κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 1.5.1. *Μία συνεχής απεικόνιση $f : Y \to Z$, όπου Y, Z είναι επιφάνειες Riemann, λέγεται αναλυτική αν για κάθε χάρτη (V, ϕ) στο Y και (V', ϕ') στο Z με $f(V) \subset V'$, η απεικόνιση $\phi' \, f \, \phi^{-1} : \phi(V) \to \phi'(V')$ είναι ολόμορφη.*
Μία αναλυτική απεικόνιση από μια επιφάνεια Riemann Y στο $\mathbb{P}^1$, που δεν είναι η σταθερή ∞, λέγεται μερόμορφη συνάρτηση στην Y. Συμβολίζουμε ως $\mathcal{M}(Y)$ τό σύνολο τών μερόμορφων συναρτήσεων στο Y.

Σημειώνουμε ότι τό πλήθος τών πόλων μιας μερόμορφης συνάρτησης, δηλαδή τών προεικόνων τού $\infty \in \mathbb{P}^1$, είναι πεπερασμένο αφού είναι μεμονωμένα σημεία σε συμπαγή χώρο.

1.5.1 Τό σώμα τών μερόμορφων συναρτήσεων μιας επιφάνειας Riemann

Από τό θεώρημα τού μεγίστου, και λόγω συμπάγειας, σε μια επιφάνεια *Riemann* δεν υπάρχουν ολόμορφες συναρτήσεις πέρα από τίς σταθερές. Τό παρακάτω θεμελιώδες θέωρημα, γνωστό ως τό αναλυτικό RET, μάς εξασφαλίζει τήν ύπαρξη μερόμορφων συναρτήσεων σε μια επιφάνεια Riemann, με συγκεκριμένες μάλιστα ιδιότητες.

Θεώρημα 1.5.1. *Έστω Y μια συμπαγής επιφάνεια Riemann. Για οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία $a_1, \cdots, a_n \in Y$ και $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$ υπάρχει μερόμορφη συνάρτηση f στο Y με $f(a_i) = c_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

Η απόδειξη τού παραπάνω θεωρήματος, τήν οποία δεν θα παραθέσουμε, είναι ιδιαίτερα δύσκολη και μακροσκελής και στηρίζεται σε μεθόδους τής αρμονικής ανάλυσης και τών χώρων Hilbert.

Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$ ορίζουν με φυσιολογικό τρόπο πρόσθεση και πολλαπλασιασμό στα στοιχεία τού $\mathcal{M}(Y)$ που τό καθιστούν σώμα.

1.5.2 Η επέκταση σωμάτων που αντιστοιχεί στην τοπολογική κάλυψη

Θα παραθέσουμε τώρα παρακάτω τό βασικό θεώρημα που επάγει από μια τοπολογική κάλυψη μια επέκταση σωμάτων. Αρχίζουμε με ένα λήμμα.

Λήμμα 1.5.1. *Έστω $g \in \mathcal{M}(\bar{R})$ τέτοιο ώστε $g \circ \alpha = g \ \ \forall \alpha \in H$. Τότε $g = h \circ f$ για κάποια $h \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$.*

Απόδειξη Έστω $U \subset R \backslash (P \cup \{\infty\})$ ανοιχτό συνεκτικό, ομοιομορφικό με κάθε συνεκτική συνιστώσα V τού $f^{-1}(U)$. Τότε η $h = g \circ (f|_V)^{-1}$ είναι μερόμορφη στο U, αφού η $f|_V$ είναι χάρτης στο R. Σημειώνουμε ότι η παραπάνω κατασκευή εξαρτάται μόνο από τό U και όχι από τήν επιλογή τής συνιστώσας V, δότι η H δρά μεταβατικά και επομένως λόγω τής υπόθεσης η g πάιρνει τήν ίδια τιμή σε όλα τά σημεία μιάς ίνας. Η h τώρα είναι μερόμορφη σε όλο τό $R \backslash (P \cup \{\infty\})$. Η h είναι συνεχής στα σημεία τού $P \cup \{\infty\}$ και επομένως από τό θεώρημα επέκτασης τού Riemann επεκτείνεται σε μια $h \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$. □

Θεώρημα 1.5.2. *Έστω P ένα πεπερασμένο υποσύνολο τού $\mathbb{P}^1$, $f : R \to \mathbb{P}^1 \backslash P$ μια κάλυψη Galois και $f : \bar{R} \to \mathbb{P}^1$ η αναλυτική επέκτασή τής στη συμπαγή επιφάνεια Riemann $\bar{R}$. Θεωρούμε τήν $H = \mathrm{Deck}(f)$ ως ομάδα αναλυτικών ισομορφισμών τού $\bar{R}$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\bar{R})$ τό σώμα τών μερόμορφων συναρτήσεων τού $\bar{R}$ και $\mathbb{C}(f) \leq \mathcal{M}$ τό υπόσωμα που παράγεται από τήν f και τίς σταθερές μιγαδικές συναρτήσεις. Τότε για κάθε $\alpha \in H$, η απεικόνιση*

$$\begin{aligned} \iota_\alpha : \mathcal{M} &\to \mathcal{M} \\ g &\mapsto g \circ \alpha^{-1} \end{aligned}$$

είναι αυτομορφισμός τού $\mathcal{M}$. Η επέκταση $\mathcal{M}/\mathbb{C}(f)$ είναι Galois και, επίσης, η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \iota : H &\to \mathrm{Gal}(\mathcal{M}/\mathbb{C}(f)) \\ \alpha &\mapsto \iota_\alpha \end{aligned}$$

είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη Η $\iota_\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ είναι καλά ορισμένη διότι αν $g \in \mathcal{M}$ τότε η $g \circ \alpha^{-1} : \bar{R} \to \mathbb{P}^1$ αναλυτική αφού η $\alpha : \bar{R} \to \bar{R}$ είναι αναλυτικός αυτομορφισμός τής $\bar{R}$. Επομένως, $g \circ \alpha^{-1} \in \mathcal{M}$. Είναι ομομορφισμός σωμάτων: έστω $g_1, g_2 \in \mathcal{M}$ τότε $\iota_\alpha(g_1 + g_2) = (g_1 + g_2) \circ \alpha^{-1} = g_1 \circ \alpha^{-1} + g_2 \circ \alpha^{-1} = \iota_\alpha(g_1) + \iota_\alpha(g_2)$ και, επίσης, $\iota_\alpha(g_1 g_2) = (g_1 g_2) \circ \alpha^{-1} = (g_1 \circ \alpha^{-1})(g_2 \circ \alpha^{-1}) = \iota_\alpha(g_1)\iota_\alpha(g_2)$. Η ι_α είναι 1-1 διότι $ker(\iota_\alpha) = \{0\}$, αφού ο α είναι αυτομορφισμός. Είναι επί: πράγματι, αν $g \in \mathcal{M}$ τότε $g \circ \alpha \in \mathcal{M}$ και επομένως $g = g \circ \alpha \circ \alpha^{-1} = \iota_\alpha(g \circ \alpha)$. Συνεπώς η ι_α αυτομορφισμός τού $\mathcal{M}$.

Η απεικόνιση ι είναι καλά ορισμένη διότι $\iota_\alpha(f) = f \circ \alpha^{-1} = f$ και άρα η ι_α είναι η ταυτότητα στο $\mathbb{C}(f)$. Είναι, επίσης, προφανώς ομομορφισμός ομάδων. Έστω τώρα, $G = \mathrm{Im}\iota = \{i_\alpha,\ \alpha \in H\}$. Η G είναι υποομάδα τής $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}/\mathbb{C}(f))$, άρα $\mathcal{M}^{\mathrm{Gal}(\mathcal{M}/\mathbb{C}(f))}$ είναι υποομάδα τής $\mathcal{M}^G$. Αν $g \in \mathcal{M}^G$ τότε $g \circ \alpha = g, \forall \alpha \in H$, άρα $g = g'(f)$ για κάποιο $g' \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$, βλ Λήμμα 1.5.1, και συνεπώς $g \in \mathbb{C}(f)$. Επομένως έχουμε $\mathbb{C}(f) \leq \mathcal{M}^{\mathrm{Gal}(\mathcal{M}/\mathbb{C}(f))} \leq \mathcal{M}^G \leq \mathbb{C}(f)$. Από αυτό συνάγουμε ότι $\mathbb{C}(f) = \mathcal{M}^{\mathrm{Gal}(\mathcal{M}/\mathbb{C}(f))}$ και$G = \mathrm{Gal}(\mathcal{M}/\mathbb{C}(f))$. Άρα $\mathcal{M}/\mathbb{C}(f)$ είναι επέκταση Galois και η ι είναι επί.

Δείχνουμε τέλος ότι η ι είναι 1-1: Άς υποθέσουμε ότι $\iota_\alpha = \mathrm{id}$. Έστω $b \in \bar{R}$ με $f(b) = p$. Από τό Θεώρημα 1.5.1 υπάρχει $g \in \mathcal{M}$ που απεικονίζει διαφορετικά σημεία τού $f^{-1}(p)$ σε διαφορετικά σημεία τού $\bar{R}$. Έχουμε τωρα ότι $g(\alpha(b)) = \iota_\alpha(g)(\alpha(b)) = g(b)$ και επομένως, επειδή $b, \alpha(b) \in f^{-1}(p)$, θα πρέπει από τήν παραπάνω ιδιότητα τής g να έχουμε ότι $\alpha(b) = b$. Τότε όμως, $\alpha = \mathrm{id}$, βλ. Λήμμα 1.2.1. Συνεπώς, ο ι είναι ισομορφισμός. $\square$

Κεφάλαιο 2

Η αλγεβρική προσέγγιση

Παραπάνω, υπεισήλθε στην μελέτη τής τοπολογικής κάλυψης f η πεπερασμένη επέκταση Galois $\mathcal{M}(\bar{R})/\mathbb{C}(f)$. Τό σώμα $\mathbb{C}(f)$ είναι ισομορφο με τό σώμα $\mathbb{C}(x)$. Ας θεωρήσουμε γενικότερα μια πεπερασμένη επέκταση Galois $L/\mathbb{C}(x)$. Ο σκοπός είναι να αντιστοιχίσουμε (αντιστρόφως) σε αυτή μια τοπολογική κάλυψη f με $\mathrm{Deck}(f) \cong \mathrm{Gal}(L/\mathbb{C}(x))$.

Θα μελετήσουμε τοπικά τήν επέκταση Galois με σκοπό να προσδιορίσουμε τό αντίστοιχο τού συνόλου P τών θέσεων διακλάδωσης τών τοπολογικών καλύψεων. Αρχίζουμε με τήν παρατήρηση ότι οι μερόμορφες συναρτησεις προσδιορίζονται τοπικά από τήν αντίστοιχη σειρά Laurent.

2.1 Τό σώμα $\mathbb{C}((t))$ τών σειρών Laurent

2.1.1 Ο δακτύλιος τών δυναμοσειρών $\mathbb{C}[[t]]$

Έστω $\mathbb{C}[[t]]$ ο δακτύλιος τών δυναμοσειρών με συντελεστές στο $\mathbb{C}$. Τόν δακτύλιο αυτόν τόν χρησιμοποιούμε στήν άλγεβρα όταν θέλουμε να κάνουμε τοπική ανάλυση. Η συμπεριφορά τών στοιχείων του είναι παρόμοια με τήν τοπική συμπεριφορά τών αναλυτικών συναρτήσεων. Για παράδειγμα, ένα $f \in \mathbb{C}[[x]]$ είναι αντιστρέψιμο αν και μόνο αν $f(0) \neq 0$. Επίσης, αν θεωρήσουμε τήν αλγεβρική καμπύλη που δίδεται από τά σημεία μηδενισμού τού πολυωνύμου $f(x,y) = y^3 + y^2 - x^2$ στο $\mathbb{C}^2$ τότε αυτή έχει ένα απλό ιδίωμα (node) στο σημείο $(0,0)$. Τό πολυώνυμο $f(x,y)$ είναι ανάγωγο ως στοιχείο τού δακτυλίου $\mathbb{C}[x,y]$, όμως στον δακτύλιο $\mathbb{C}[[y]][x]$ αναλύεται ως

$$f(x,y) = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{(1-2n)n!4^n} y^{n+1} - x)(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{(1-2n)n!4^n} y^{n+1} + x)\,.$$

Αυτό προκύπτει από τήν παραγοντοποίηση $f(x,y) = (y\sqrt{y+1} - x)(y\sqrt{y+1} + x)$ και τήν έκφραση τής τοπικά αναλυτικής συνάρτησης $\sqrt{y+1}$ ως δυναμοσειράς σε περιοχή τού $(0,0)$. Οι παραπάνω δυναμοσειρές αντιστοιχούν στους δύο κλαδους τής καμπύλης στο $(0,0)$ και οι γραμμικοί τους όροι $y-x$ και $y+x$ στις εφαπτόμενες τής καμπύλης σε αυτό τό σημείο.

Ένα, επίσης, σημαντικό αποτελεσμα που αφορά πολυώνυμα με συντελεστές στον δακτύλιο $\mathbb{C}[[t]]$ είναι τό παρακάτω *λήμμα τού Hensel.*

Λήμμα 2.1.1. *Έστω $F(y) \in \mathbb{C}[[t]][y]$ ένα μονικό πολυώνυμο και $F_0(y) \in \mathbb{C}[y]$ τό πολώνυμο που προκύπτει από τό $F(y)$ για $t = 0$. Αν $F_0 = gh$ για κάποια $g, h \in \mathbb{C}[y]$ με $(g,h) = 1$ τότε τό F γράφεται ως γινόμενο $F = GH$, όπου τά G, H είναι μονικά πολυώνυμα στο $\mathbb{C}[[t]][y]$ και $G_0 = g$, $H_0 = h$.*

2.1.2 Τό σώμα $\mathbb{C}((t))$ και οι πεπερασμενες επεκτάσεις του

Θα μελετήσουμε τώρα τό σώμα κλασμάτων $\Lambda = \mathbb{C}((t))$ τού δακτυλίου $\mathbb{C}[[t]]$. Τα στοιχεία του αντιστοιχούν στις σειρές Laurent με συντελεστές στο $\mathbb{C}$. Τό βασικό θεώρημα που αφορά τίς πεπερασμένες επεκτάσεις τού Λ είναι τό ακόλουθο:

Θεώρημα 2.1.1. *Έστω Δ ένα σώμα επέκτασης τού $\Lambda = \mathbb{C}((t))$, βαθμού e. Τότε $\Delta = \Lambda(\delta)$, όπου $\delta^e = t$.*

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω επέκταση δεν εξαρτάται από τήν επιλογή τής ρίζας δ τής εξίσωσης $x^e = t$. Έστω λοιπόν $\Lambda_e = \Lambda(t^{1/e})$. Συμπεραίνουμε ότι κάθε πεπερασμενη επέκταση βαθμού e τού Λ είναι ισόμορφη με τό σώμα Λ_e. Τό σώμα Λ_e είναι τό σώμα ανάλυσης τού ανάγωγου (διαχωρισήμου) πολυωνύμου $x^e - t$ τού $\Lambda[x]$ και επομένως συμπεραίνουμε ότι κάθε πεπερασμένη επέκταση τού Λ είναι επέκταση Galois (ειδικότερα: κυκλική). Επίσης, επειδή τό σώμα ριζών ενός πολυωνύμου στο $\Lambda = \mathbb{C}((x))$ είναι πεπερασμένη επέκταση τού Λ, τό πολυώνυμο έχει τίς ρίζες του σε κάποιο Λ_e. Η ομάδα Galois τής παραπάνω επέκτασης είναι κυκλική τάξης e με γεννήτορα τόν Λ-αυτομορφισμό $\omega : \Lambda_e \to \Lambda_e$ με $\omega(\delta) = e^{2\pi i/n}\delta$.

Τό σώμα $\Lambda = \mathbb{C}((t))$ αντιστοιχεί στις τοπικές μερόμορφες συναρτήσεις τού δίσκου με (ενδεχόμενο) πόλο στο κέντρο του και παίζει τόν ρόλο τού D^* τής τοπολογικής προσέγγισης. Τό παραπάνω θεώρημα είναι η αλγεβρική εκδοχή τού ότι μια πεπερασμένη κάλυψη τού D^* βαθμού e είναι ισόμορφη με κάλυψη τής μορφής $f_e : D^* \to D^*, \quad z \mapsto z^e$. Επίσης, τό ότι η $\mathrm{Gal}(\Lambda_e/\Lambda) \cong \mathbb{U}_e$ είναι τό ανάλογο τού ότι $\mathrm{Deck}(f_e) \cong \mathbb{U}_e$, βλ. Πρόταση 1.3.1 και Πόρισμα 1.3.1.

2.2 Οι πεπερασμένες Galois επεκτάσεις τού $K(x)$ και ο αλγεβρικός δείκτης διακλάδωσης

Σε αυτή τήν παράγραφο θα μελετήσουμε πεπερασμένες Galois επεκτάσεις $L/\mathbb{C}(x)$ τού σώματος $\mathbb{C}(x)$ τών ρητών συναρτήσεων. Οι ρητές συναρτήσεις έχουν πόλους σε σημεια τού $\mathbb{C}$ ή στο ∞, δηλ. στο $\mathbb{P}^1$. Ο σκοπός μας είναι να μελετήσουμε τοπικά (ως προς τά σημεία p τού $\mathbb{P}^1$) τήν επέκταση $L/\mathbb{C}(x)$. Στην τοπική μελέτη μας θα υπεισέλθει τό σώμα $\Lambda = \mathbb{C}((t))$ και οι επεκτάσεις του. Θα μελετήσουμε πρώτα τήν περίπτωση $p = 0 \in \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$. Συνοπτικά η μελέτη έχει ως εξής: Από τό θεώρημα τού πρωταρχικού στοιχείου έχουμε ότι $L = \mathbb{C}(x)(\gamma)$. Η τοπικοποίηση τής $L/\mathbb{C}(x)$ στο $p = 0$ είναι η $\Lambda(\gamma)/\Lambda$. Έστω $F \in \mathbb{C}(x)[y] \subset \Lambda[y]$ τό ελάχιστο πολυώνυμο τού γ πάνω από τό $\mathbb{C}(x)$ και $H \in \Lambda[y]$ τό ελάχιστο πολυώνυμο τού γ πάνω από τό Λ. Τότε $H \mid F$. Αν $e_\gamma = \deg H$ τότε τοπικά η $L/\mathbb{C}(x)$ είναι ισόμορφη με τήν $\Lambda_{e_\gamma}/\Lambda$. Αυτό είναι τό ανάλογο τού ότι τοπικά γύρω από ένα σημείο p η $f : R \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ είναι ισόμορφη με τήν f_e, βλ. Πρόταση 1.3.2. Υπάρχει μια εμβύθιση ομάδων $\alpha_\gamma : \mathrm{Gal}(\Lambda_{e_\gamma}/\Lambda) \cong \mathrm{Gal}(\Lambda(\gamma)/\Lambda) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(L/\mathbb{C}(x))$. Αυτό είναι τό ανάλογο τού ότι $\mathrm{Deck}(f_{e_i}) \cong \mathrm{Deck}(f|_{E_i}) \hookrightarrow \mathrm{Deck}(f)$, βλ. όπως παραπάνω τήν Πρόταση 1.3.2. Η κατασκευή τής εμβύθισης στηρίζεται στο ότι οι ρίζες τού H είναι και ρίζες τού F. Η $\mathrm{Gal}(\Lambda(\gamma)/\Lambda)$ ως υποομάδα τής $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{C}(x))$ θα αντιστοιχεί στα στοιχεία τής τελευταίας που στέλνουν τό γ σε ρίζα τού H. Το F ως πολυώνυμο τού $\Lambda[y]$ αναλύεται ως γινόμενο $F = H_1 \cdots H_s$ αναγώγων πολυωνύμων ιδίου βαθμού $e = [\Lambda(\gamma) : \Lambda]$ (τό ανάλογο τού ότι $f^{-1}(D^*) = \cup_{i=1}^s E_i$ με $f|_{E_i} \to D^*$ καλύψεις τού ιδίου βαθμού e_p). Αν γ_i ρίζα τού H_i τότε $[\Lambda(\gamma_i) : \Lambda] = e$ και άρα $\Lambda(\gamma_i) \cong \Lambda_e$. Η αντίστοιχη εμβύθιση $\alpha_{\gamma_i} : \mathrm{Gal}(\Lambda(\gamma_i)/\Lambda) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(L/\mathbb{C}(x))$ έχει εικόνα συζυγή προς αυτήν τής α_γ (τό αντίστοιχο τού ότι οι υποομάδες $\mathrm{Stab}_{E_i}\mathrm{Deck}(f)$ τής $\mathrm{Deck}(f)$ είναι συζυγείς).

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω ότι $L/\mathbb{C}(x)$ είναι μια πεπερασμένη Galois επέκταση και έστω $G = Gal(L/\mathbb{C}(x))$.*

(α) Τό σώμα L είναι ισόμορφο με ένα σώμα L_0 τό οποίο είναι υπόσωμα μιας πεπερασμένης (Galois) επέκτασης Δ τού $\Lambda = (\mathbb{C}(x))$ και που έχει τήν ιδιότητα ότι παραμένει αναλλοίωτο από τήν ομάδα $\mathrm{Gal}(\Delta/\Lambda)$. Επομένως ορίζεται ένας φυσιολογικός ομομορφισμός $\alpha : \mathrm{Gal}(\Delta/\Lambda) \to G$. Έστω L_0' ένα σώμα ισόμορφο με τό L που είναι υπόσωμα μιας πεπερασμένης επέκτασης Δ' τού $\Lambda = \mathbb{C}((x))$ με τήν παραπάνω ιδιότητα. Έστω $\alpha' : \mathrm{Gal}(\Delta'/\Lambda) \to G$ η αντίστοιχη απεικόνιση. Αν ω και ω' οι φυσιολογικοί γεννήτορες τών $\mathrm{Gal}(\Delta/\Lambda)$ και $\mathrm{Gal}(\Delta'/\Lambda)$ αντιστοίχως, τότε τά στοιχεία $\alpha(\omega)$ και $\alpha'(\omega')$ είναι συζυγή στοιχεία τής G. Η κλάση συζυγίας που ορίζουν συμβολίζεται ως C_0^{alg}.

(β) Τα στοιχεία τής κλάσης C_0^{alg} έχουν κοινή τάξη, έστω $e = e_{L,0}$. Τό e λέγεται δείκτης διακλάδωσης (ramification index) τού L στο 0, και ισχύουν τά εξής: Μπορούμε να επιλέξουμε ως Δ τό Λ_e. Επίσης, έστω γ πρωταρχικό στοιχείο τής επέκτασης $L/\mathbb{C}(x)$ με ανάγωγο πολυώνυμο $F(y) \in \mathbb{C}(x)[y]$. Τότε θεωρούμενο τό F ως πολυώνυμο τού $\Lambda[y]$, οι ανάγωγοι παράγοντές του έχουν βαθμό e.

(γ) Μπορούμε να επιλέξουμε τό γ έτσι ώστε τό $F(y) = F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ να

είναι μονικό ως προς y. Τότε η διακρίνουσα $D(x) \in \mathbb{C}[x]$ τού $F(y)$ πάνω από τό $\mathbb{C}(x)$ είναι μη μηδενικό πολυώνυμο τού $\mathbb{C}[x]$. Αν $D(0) \neq 0$ τότε $e = 1$.

Απόδειξη

(α), (β) Από τό θεώρημα τού πρωταρχικού στοιχείου έχουμε ότι $L = \mathbb{C}(x)(\gamma)$. Ορίζουμε ως $\Delta = \Lambda(\gamma)$, όπου $\Lambda = \mathbb{C}((x))$. Τό $\mathbb{C}(x)$ είναι ισόμορφο με υπόσωμα τού Λ και επομένως τό $\mathbb{C}(x)(\gamma)$ είναι ισόμορφο με υπόσωμα L_0 τού Δ. Έστω $F = \mathrm{Irr}(\gamma, \mathbb{C}(x)) \in \mathbb{C}(x)[y]$ με $\deg F = [L : \mathbb{C}(x)]$ και έστω $H = \mathrm{Irr}(\gamma, \Lambda) \in \Lambda[y]$ με $e = \deg H = [\Delta : \Lambda]$. Τό πολυώνυμο H διαιρεί τό F. Εκ κατασκευής, $[\Delta : \Lambda] = e$ και επομένως $\Delta \cong \Lambda_e$. Έχουμε $Gal(\Delta/\Lambda) \cong U_e$ με γεννήτορα τήν $\omega : \Delta \to \Delta, \gamma \longmapsto \zeta_e \gamma$ με $\omega|_\Lambda = id$. Αφού η $\omega(\gamma)$ είναι ρίζα τού H θα είναι και ρίζα τού F. Οπότε $\omega(\gamma) \in L$, διότι η $L/\mathbb{C}(x)$ είναι κανονική επέκταση. Αρα $\omega|_{\mathbb{C}(x)} = id$ και $\omega(L) \subseteq L$. Οπότε έχουμε $\omega \in Gal(L/\mathbb{C}(x))$ και αυτό ορίζει τόν ομομορφισμό (εμβύθιση) α. Έστω τώρα $H' \in \Lambda[y]$ ένας άλλος ανάγωγος παράγοντας τού F. Έστω γ' μιά ρίζα τού H' και άρα και ρίζα τού F. Τό L είναι τό σώμα ριζών τού $F \in \mathbb{C}(x)[y]$ (διότι η $L/\mathbb{C}$ είναι Galois) και θα έχουμε $\mathbb{C}(x)(\gamma) = \mathbb{C}(x)(\gamma')$. Τότε όμως και $\Lambda(\gamma) = \Lambda(\gamma')$ και άρα $\deg H = [\Lambda(\gamma) : \Lambda] = [\Lambda(\gamma') : \Lambda] = \deg H'$. Ο ισχυρισμός για τήν κλαση συζυγίας στηρίζεται στο ότι τά L_0 και L_0' συμπίπτουν θεωρούμενα ως υποσώματα μιας κοινής πεπερασμένης επέκτασης τών Δ και Δ' (διότι και τά δύο παράγονται από τό $\mathbb{C}(x)$ και τίς ρίζες τού F). Επομένως αν $\theta : L \to L_0$ και $\theta' : L \to L_0'$ οι αντίστοιχοι ισομορφισμοί, τότε ο $\theta \circ \theta'^{-1} \in \mathrm{Gal}(L, K)$ είναι τό στοιχείο που καθιστά συζυγή τά $\alpha(\omega)$ και $\alpha'(\omega')$.

(γ) Απαλείφοντας παρονομαστές μπορούμε να υποθέσουμε ότι τό $F \in \mathbb{C}[x, y]$ και είναι μονικό ως προς y. Τότε η διακρίνουσα $D(x) \in \mathbb{C}[x]$ είναι μη μηδενική αφού τό F είναι ανάγωγο και άρα διαχωρίσιμο ($\mathrm{char}\mathbb{C} = 0$). Επίσης αν $D(0) \neq 0$ τό $F(0, y)$ είναι διαχωρίσιμο. Τότε όμως, από τό λήμμα Hensel 2.1.1, συνάγουμε ότι και τό $F \in \Lambda[y]$ αναλύεται ως γινόμενο πρωτοβάθμιων πολυωνύμων. Άρα $e = 1$.

□

Τό παραπάνω θεώρημα που αφορούσε τήν τοπική συμπεριφορά τής επέκτασης $L/\mathbb{C}(x)$ στο σημείο 0 μπορεί να μεταφερθεί σε οποιοδήποτε σημείο $p \in \mathbb{P}^1$ ως εξής: θεωρούμε τήν απεικόνιση $\vartheta_p : \mathbb{C}(x) \to \mathbb{C}(t)$ που είναι ταυτοτική στο $\mathbb{C}$ και αν $p \neq \infty$ τότε $\vartheta_p(x) = t + p$ ενώ αν $p = \infty$ τότε $\vartheta_\infty(x) = \frac{1}{t}$. Τότε η παραπάνω ανάλυση γενικεύεται ως εξής (η απόδειξη είναι απλή τροποποίηση τής παραπάνω ειδικής περίπτωσης).

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω ότι $L/\mathbb{C}(x)$ είναι μια πεπερασμένη Galois και $G = \mathrm{Gal}(L/(x))$. Έστω $p \in \mathbb{P}^1$.*

(a) Η $\vartheta_p : K(x) \to \mathbb{C}(t)$ επεκτείνεται σε έναν ισομορφισμό $\tilde{\vartheta}_p : L \to L_p$, όπου L_p είναι ένα υπόσωμα μιας πεπερασμένης (Galois) επέκτασης Δ τού Λ τό οποίο έχει τήν ιδιότητα ότι παραμένει αναλλοίωτο από τήν ομάδα $\mathrm{Gal}(\Delta/\Lambda)$. Επομένως, ορίζεται ένας φυσιολογικός ομομορφισμός $\alpha_p : \mathrm{Gal}(\Delta/\Lambda) \to G$ με $\alpha_p(\phi) = \tilde{\vartheta}_p^{-1}\phi\tilde{\vartheta}_p$. Έστω $\tilde{\vartheta}'_p : L \to L'_p$ μια διαφορετική επέκταση τής ϑ_p σε ισομορφισμό, όπου L'_p είναι ένα υπόσωμα μιας πεπερασμένης (Galois) επέκτασης Δ' τού Λ τό οποίο έχει τήν παραπάνω ιδιότητα. Έστω $\alpha'_p : \mathrm{Gal}(\Delta'/\Lambda) \to G$ η αντίστοιχη απεικόνιση. Αν ω και ω' οι φυσιολογικοί γεννήτορες τών $\mathrm{Gal}(\Delta/\Lambda)$ και $\mathrm{Gal}(\Delta'/\Lambda)$ αντιστοίχως, τότε τά στοιχεία $\alpha_p(\omega)$ και $\alpha'_p(\omega)$ είναι συζυγή στοιχεία τής G. Η κλάση συζυγίας που ορίζουν συμβολίζεται ως C_p^{alg}.

(β) Τα στοιχεία τής κλάσης C_p^{alg} έχουν κοινή τάξη, έστω $e_{L,p}$. Τό $e_{L,p}$ λέγεται δείκτης διακλάδωσης (ramification index) τού L στο p, και ισχύουν τά εξής: Μπορούμε να επιλέξουμε ως Δ τό $\Lambda_{e_{L,p}}$. Επίσης, έστω γ πρωταρχικό στοιχείο τής επέκτασης $L/\mathbb{C}(x)$ με ανάγωγο πολυώνυμο $F(y) \in \mathbb{C}(x)[y]$. Έστω $F^{\vartheta_p}(y) \in \mathbb{C}(t)[y]$ τό πολυώνμο που προκύπτει από τό $F(y)$ όταν εφαρμόσουμε στους συντελεστές του τήν απεικόνιση ϑ_p. Τότε τό $F^{\vartheta_p}(y)$ ως πολυώνυμο τού $\Lambda[y]$, με $\Lambda = \mathbb{C}((t))$, οι ανάγωγοι παράγοντές του έχουν βαθμό $e_{L,p}$.

(γ) Μπορούμε να επιλέξουμε τό γ έτσι ώστε τό $F(y) = F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ να είναι μονικό ως προς y. Τότε η διακρίνουσα $D(x) \in \mathbb{C}[x]$ τού $F(y)$ πάνω από τό $\mathbb{C}(x)$ είναι μη μηδενικό πολυώνυμο τού $\mathbb{C}[x]$. Αν $D(p) \neq 0$ τότε $e_{L,p} = 1$.

Σημείωση: Για τήν απόδειξη τής γενικής περίπτωσης και τόν ορισμό τού δείκτη $e_{L,P}$ μελετούμε τό πολυώνυμο $F^{\vartheta_p}(y) \in \mathbb{C}(t)[y]$, όπου $F(y) \in \mathbb{C}(x)[y]$ είναι τό ελάχιστο πολυώνυμο τής $L = \mathbb{C}(x)(\gamma)/\mathbb{C}(x)$. Ο δείκτης $e_{L,P}$ ορίζεται ως ο βαθμός τής επέκταση $\Lambda(\gamma')/\Lambda$, όπου γ' μια ρίζα τού $F^{\vartheta_p}(y)$ και $\Lambda = \mathbb{C}((t))$.

Ορισμός 2.2.1. *Έστω $L/\mathbb{C}(x)$ μια πεπερασμένη Galois επέκταση και $p \in \mathbb{P}^1$. Αν $e_{L,p} > 1$ τότε τό p λέγεται θέση διακλάδωσης τής $L/\mathbb{C}(x)$. Από τήν περίπτωση γ) τού παραπάνω Θεωρήματος 2.2.2, συνάγουμε ότι τό πλήθος τών θέσεων διακλάδωσης τής $L/\mathbb{C}(x)$ είναι πεπερασμένο.*

2.2.1 Παράδειγμα

Έστω πολυώνυμο $f \in \mathbb{C}[x]$, και $n \geq 2$, με $f(x) = \prod_j (x-p_j)^{m_j}$, όπου $p_j \in \mathbb{C}$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία τού $\mathbb{C}$ με $1 \leq m_j \leq n-1$. , Έστω $L = \mathbb{C}(x)(f^{1/n})$.

Θα μελετήσουμε τώρα τήν τοπική συμπεριφορά τής επέκτασης $L/\mathbb{C}(x)$ στο σημείο p_i. Τό ελάχιστο πλυώνυμο $F(x)$ τού $\gamma = f^{1/n}$ διαιρεί τό $y^n - f(x)$ και άρα τό $F^{\vartheta_p}(x)$ διαιρεί τό πολυώνυμο $y^n - f(t+p_i)$. Μπορούμε επομένως να διαλέξουμε ως $\gamma' = f(t+p_i)^{1/n}$. Θεωρούμε τήν επέκταση $\Lambda(f(t+p_i)^{1/n})/\Lambda$, όπου $\Lambda = \mathbb{C}((t))$, και ζητάμε τόν βαθμό της.

Τό $\prod\limits_{j\neq i}(t+p_i-p_j)^{m_j}$ έχει μη μηδενικό σταθερό όρο άρα είναι n-οστή δύναμη στο Λ, οπότε $f(t+p_i) = t^{m_i}\prod\limits_{j\neq i}(t+p_i-p_j)^{m_j}$ είναι γινόμενο τού t^{m_i} επί μια n-οστή δύναμη στο Λ. Συνεπώς $\Lambda(f(t+p_i)^{1/n}) = \Lambda(t^{m_i/n})$. Έχουμε ότι τό ελάχιστο πολυώνυμο τού $t^{m_i/n}$ πάνω από τό Λ είναι τό $y^{n/(n,m_i)} - t^{m_i/(n,m_i)}$ και συνεπώς $\Lambda(f(t+p_i)^{1/n}) = \Lambda_{n/\gcd(m_i,n)}$. Με βάση τήν παραπάνω Σημείωση έχουμε ότι ο δείκτης διακλάδωσης e_i τής επέκτασης $L/\mathbb{C}(x)$ στο p_i ισούται με $e_i = n/\gcd(m_i,n)$.

Αν τώρα $p \in \mathbb{C}$ διαφορετικό από τά p_i τότε $e_{L,p} = 1$, αφού τό $f(t+p)$ έχει μη μηδενικό σταθερό όρο άρα είναι n-οστη δύναμη, δηλαδή $f(t+p)^{1/n} \in \Lambda$. Οπότε τά p_i είναι όλες οι θέσεις διακλάδωσης τού L στο $\mathbb{C}$.

Για $p = \infty$, έστω $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_0, a_m \neq 0$ και $e_\infty = e_{L,\infty}$. Τότε έχουμε $f(1/t)^{1/n} = (a_m t^{-m} + \cdots + a_0)^{1/n} = t^{-m/n}(a_m + \cdots + a_0 t^{-m})^{1/n}$, με τό $a_m + \cdots + a_0 t^{-m}$ να είναι n-οστη δύναμη ($a_m \neq 0$). Άρα $\Lambda_{e_\infty} = \Lambda(f(1/t)^{1/n}) = \Lambda(t^{m/n})$ δηλαδή $e_\infty = \frac{n}{(n,m)}$. Επομένως τό ∞ είναι θέση διακλάδωσης αν και μονο αν τό n δεν διαιρεί τό $deg(f) = m$.

Κεφάλαιο 3

Η σύνδεση

3.1 Συσχέτιση αλγεβρικού και τοπολογικού δείκτη διακλάδωσης

Διατηρούμε τούς συμβολισμούς και τίς υποθέσεις τού Θεωρήματος 1.5.2. Έχοντας τήν τοπολογική κάλυψη $f : R \to \mathbb{P}^1 \backslash P$, τότε γιά ένα $p \in P$ ορίσαμε στην Πρόταση 1.3.2 τήν κλάση συζυγίας C_p^{top} στην ομάδα $H = \mathrm{Deck}(f)$ που αντιστοιχεί στο p. Από τήν άλλη πλευρά, είδαμε στο προαναφερθέν θεώρημα ότι η επέκταση $\mathcal{M}/\mathbb{C}(f)$ είναι Galois. Παρατηρώντας τώρα ότι $\mathbb{C}(f) \cong \mathbb{C}(x)$ έχουμε από τό Θεώρημα 2.2.2 ότι σε κάθε $p \in \mathbb{P}^1$ αντιστοιχεί η κλάση συζυγίας C_p^{alg} στην ομάδα $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}/\mathbb{C}(f)) = H = \mathrm{Deck}(f)$. Τα παραπάνω συσχετίζονται ως εξής:

Πρόταση 3.1.1. *Με τίς υποθέσεις και τούς συμβολισμούς τού Θεωρήματος 1.5.2 έχουμε ότι*

1. *Αν $p \notin P$ τότε $C_p^{\mathrm{alg}} = 1$.*
2. *Αν $p \in P$ τότε $C_p^{\mathrm{alg}} \cong C_p^{\mathrm{top}}$, όπου η ισομορφία δίδεται δια μέσου τού ισομορφισμού ι τού Θεωρήματος 1.5.2.*

Συνεπώς έχουμε μια ταύτηση τού τοπολογικού τύπου διακλάδωσης τής κάλυψης $f : R \to \mathbb{P}^1 \backslash P$ με τόν αντίστοιχο αλγεβρικό τύπο διακλάδωσης τής επέκτασης $\mathcal{M}/\mathbb{C}(f)$.

Απόδειξη Για τό πρώτο: Αν τό $p \notin P$. Τοπικά γύρω από ένα $q \in f^{-1}(p)$ η f είναι ομοιομορφισμός και άρα η f είναι τοπικά αντιστρέψιμη. Με βάση αυτό θα ορίσουμε τώρα μια φυσιολογική εμβύθιση τού σώματος $\mathcal{M}$ στο σώμα $\mathbb{C}((t))$. Πράγματι, ορίζουμε τόν μη μηδενικό ομομορφισμό σωμάτων (και άρα εμβύθιση) $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}((t))$ ως εξής: αν $g \in \mathcal{M}$ τότε ορίζουμε τό $\mu(g)$ ως στο στοιχείο τού $\mathbb{C}((t))$ που αντιστοιχεί στο ανάπτυγμα *Laurent* τής $g \circ f^{-1}$ με κέντρο τό p. Σημειώνουμε ότι με βάση αυτή τήν απεικόνιση η f πάει στην $t + p$ και συνεπώς ο α επεκτείνει τόν ομομορφισμό $\vartheta_p : \mathbb{C}(f) \to \mathbb{C}(t)$, βλ. Θεώρημα 2.2.2. τό υπόσωμα $\mathbb{C}(f)$ στο υπόσωμα $\mathbb{C}(t)$ τού $\mathbb{C}((t))$. Επομένως σε αυτή τήν περίπτωση, με τόν συμβολισμό τού προαναφερθέντος θεωρήματος, έχουμε ότι $\Lambda = \mathbb{C}((t))$ και επομένως $\mathrm{Gal}(\Lambda/\mathbb{C}((t))) = 1$. Από αυτό συνάγουμε ότι $C_p^{\mathrm{alg}} = 1$.

Για τό δεύτερο: Έστω $q \in f^{-1}(p)$ και έστω $e = e_p$. Τοπικά γύρω από τό q η απεικόνιση f είναι ισοδύναμη με τήν $f_e : D(r^{1/e}) \to D(r)$ με $z \mapsto t = z^e$, όπου z και t οι τοπικές συντεταγμένες στα q και p αντίστοιχα. Όπως παραπάνω έχουμε μια φυσιολογική εμβύθιση σωμάτων $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}((z))$. Το $\alpha(f) = z^e$ και επομένως τό $\mathbb{C}((f))$ μπορεί να θεωρηθεί ως υπόσωμα τού $\mathbb{C}((z))$ με τήν επέκταση $\mathbb{C}((z))/\mathbb{C}((f))$ να έχει βαθμό e. Η ομάδα Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}((z))/\mathbb{C}((f)))$ έχει ως γεννήτορα τήν $\omega : \mathbb{C}((z)) \to \mathbb{C}((z))$ με $\omega(z) = \zeta_e z$, όπου $\zeta_e = e^{2\pi i/e}$. Η απεικόνιση $\alpha : \mathrm{Gal}(\mathbb{C}((z))/\mathbb{C}((f))) \to \mathrm{Gal}(\mathcal{M}/\mathbb{C}(f))$ που ορίστηκε στο Θεώρημα 2.2.2, στέλνει τόν γεννήτορα ω στο $\alpha(\omega)$ που δρά στα στοιχεία τού $\mu(\mathcal{M})$ ως $\sum_i a_i z^i \mapsto \sum_i (a_i \zeta_e^i) z^i$. Από τήν άλλη πλευρά, η κυκλική υποομάδα τής H που αντιστοιχεί στο σημείο p δρά τοπικά γύρω από τό q με τόν ίδιο τρόπο που δρά ο ω, βλ. Πρόταση 1.3.2 και συνεπώς ο ισομρφισμός ι στέλνει τόν γεννήτορα τής κλασης C_p^{top} στον αντίστοιχο γεννήτορα τής κλασης C_p^{alg}. □

Η αντίστροφη κατασκευή, δηλ. τό πώς μια πεπερασμένη επέκταση Galois τού $\mathbb{C}(x)$ επάγει μια τοπολογική κάλυψη δίδεται από τό παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.1. *Έστω $L/\mathbb{C}(x)$ μια πεπερασμένη επέκταση Galois. Τότε υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο P τού $\mathbb{P}^1$ και τοπολογική κάλυψη $f : R \to \mathbb{P}^1 \backslash P$ με τήν ιδιότητα ότι υπάρχει ένας $\mathbb{C}$-γραμμικός ισομορφισμός $\mathcal{M} \cong L$ που αντιστοιχεί στο f τό x. Επίσης,* $\mathrm{Deck}(f) \cong \mathrm{Gal}(L/\mathbb{C}(x))$.

Η απόδειξη τού παραπάνω, τήν οποία θα σκιαγραφήσουμε μόνο, στηρίζεται στο εξής: η επέκταση $L/\mathbb{C}(x)$ ως μια πεπερασμένη επέκταση Galois είναι τό σώμα ανάλυσης ενός αναγώγου πολυωνύμου τού $\mathbb{C}(x)[y]$. Απαλείφοντας παρονομαστές, καταλήγουμ σε ένα πολυωνυμο $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$. Παίρνουμε τώρα τό σύνολο μηδενισμού $\mathbb{V}(F)$ τού F στο $\mathbb{C}^2$. Αυτό είναι μια επιπεδη καμπύλη, που άμα εφαρμόσουμε ανάλυση τών ιδιωμάτων της καταλήγουμε σε μια επιφάνεια *Riemann* έστω R . Η προβολή τού $\mathbb{V}(F)$ στον x-άξονα, επάγει μια απεικόνιση $f : R \to \mathbb{P}^1$ που είναι τοπολογική καλυψή εξω από τά σημεία τού $\mathbb{V}(F)$ όπου η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τόν y-άξονα. Αυτή είναι και η ζητούμενη τοπολογική κάλυψη. Ο τελευταίος ισομορφισμός, στηρίζεται στο ότι οι Deck-μετασχηματισμοί τής κάλυψης f, επάγονται από μεταθέσεις τού συνόλου τών ριζών τού $F(x_0, y)$, x_0=σταθερό. Όμως τό ίδιο ισχύει και για τά στοιχεία τής $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{C}(x))$ διότι η L είναι τό σώμα ριζών τού $F \in \mathbb{C}(x)[y]$.

3.2 Η αντιστοιχία μεταξύ τοπολογικών καλύψεων και επεκτάσεων σωμάτων

Τό παρακάτω θεώρημα δίνει τήν βασική αντιστοιχία μεταξύ τοπολογικών καλύψεων και αλγεβρικών επεκτάσεων.

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα, $P \subset \mathbb{P}^1$ ένα πεπερασμένο σύνολο και $q \in \mathbb{P}^1 \setminus P$. Τότε υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ τών (1),(2),(3) παρακάτω:*

(1) *Οι $\mathbb{C}(x)$ ισόμορφες κλάσεις τής επέκτασης Galois $L/\mathbb{C}(x)$ που έχουν ομάδα Galois ισόμορφη με τήν G και οι θέσεις διακλάδωσης βρίσκονται στο σύνολο P.*

(2) *Οι κλάσεις ισοδυναμίας τής κάλυψης Galois $f : R \to \mathbb{P}^1 \setminus P$, με $\mathrm{Deck}(f) \cong G$.*

(3) *Οι κανονικές υποομάδες τής $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, q)$, με ομάδα πηλίκων ισόμορφη με τήν G.*

Έστω $p \in P$και C_p^{top} η αντίστοιχη κλάση συζυγίας τού $H = \mathrm{Deck}(f)$. Έστω $p \in \mathbb{P}^1$ και C_p^{alg} η αντίστοιχη κλάση συζυγίας τού $G = Gal(\mathcal{M}/\mathbb{C}(f))$. Αν $p \notin P$ τότε $C_p^{\mathrm{alg}} = \{1\}$. Επίσης, $\forall p \in P$ ο ισομορφισμός $\iota : H \to G$ στέλνει τήν C_p^{top} στην C_p^{alg}. Άρα μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τόν τοπολογικό τύπο διακλάδωσης τής πεπερασμένης κάλυψης Galois $f : R \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ με τόν αλγεβρικό τύπο διακλάδωσης τής πεπερασμένης επέκτασης Galois $\mathcal{M}/\mathbb{C}(f)$.

Η ισοδυναμία τών (1) και (2) αποδείχτηκε στα προηγούμενα κεφάλαια, βλ. Θεωρήματα 1.5.2 και 3.1.1. Η ισοδυναμία τών (2) και (3) είναι γνωστή από τήν τοπολογία.

3.3 Τό αλγεβρικό θεώρημα ύπαρξης τού Riemann (R.E.T.)

Όπως είδαμε στο παραπάνω κεφάλαιο, δοθείσης μιας πεπερασμένης Galois επέκτασης $L/\mathbb{C}(x)$, υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο P τού $\mathbb{P}^1$ με τήν ιδιότητα ότι σε κάθε $p \in P$ αντιστοιχεί μιά μή τετριμμένη κλάση συζυγίας C_p^{alg} τής ομάδας Galois G τής παραπάνω επέκτασης. Σε αυτή τήν παράγραφο θα εξετάσουμε τό αντίστροφο ερώτημα.

Τό παρακάτω θεώρημα είναι η άλγεβρική εκδοχή τού θεωρήματος ύπαρξης τού Riemann.

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω $P = \{p_1, \cdots, p_r\}$ και έστω $\mathcal{T} = [G, P, (C_p)_{p \in P}]$ ένας τύπος διακλάδωσης. Τότε υπάρχει πεπερασμένη επέκταση Galois $L/\mathbb{C}(x)$ με τύπο* *διακλάδωσης $\mathcal{T}$ αν και μόνο αν υπάρχουν γεννήτορες $g_1, \ldots, g_r$ τής ομάδας G με $g_1 \cdots g_r = 1$. και $g_i \in C_{p_i}$, $i = 1, \ldots, r$.*

Για τό παραπάνω θεώρημα δεν υπάρχει αλγεβρική απόδειξη για καμία από τίς συνεπαγωγές του. Η απόδειξή του στηρίζεται στήν απόδειξη τής τοπολογικής εκδοχής αυτού τού θεωρήματος που είδαμε στην παράγραφο 1.4 και στην ισοδυναμία μεταξύ πεπερασμένων επέκτασεων Galois τού σώματος $\mathbb{C}(x)$ και τοπολογικών καλύψεων τού $\mathbb{P}^1 \backslash P$ που είδαμε στην παράγαφο 3.2.

Έστω $P = \{p_1, \cdots, p_r\}$. Δοθέντος ενός τύπου διακλάδωσης $\mathcal{T} = [G, P, (C_p)_{p \in P}]$, όπου η ομάδα G έχει γεννήτορες $g_1, \ldots, g_r$ με $g_1 \ldots g_r = 1$ και $g_i \in C_{p_i}$, $i = 1, \ldots, r$, τότε από τήν τοπολογική εκδοχή τού RET, βλ. Θεώρημα 1.4.2 υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Galois τού $\mathbb{P}^1 \backslash P$ με τύπο διακλάδωσης $\mathcal{T}$. Συνδυάζοντας αυτό με τήν Πρόταση 3.1.1 βλεπουμε ότι η αντίστοιχη επέκταση Galois $\mathcal{M}/\mathbb{C}(f)$ είναι η ζητούμενη επέκταση που αφορά τήν μια κατεύθυνση συνεπαγωγής τού αλγεβρικού RET, βλ. Θεώρημα 3.3.1.

Η άλλη κατεύθυνση τού αλγεβρικού RET (που θεωρείται η πιό ευκολη) αποδεικνύεται πάλι δια μέσου τού τοπολογικού RET και τού Θεωρήματος 3.1.1.

Κεφάλαιο 4

Ο χώρος παραμέτρων

4.1 Η κατασκευή τού χώρου παραμέτρων ως τοπολογική κάλυψη τού χώρου $\mathcal{O}_r$

Έστω ότι δίδεται πεπερασμένη ομάδα G και $r \in \mathbb{N}$. Για κάθε επιλογή ένός υποσυνόλου P τού $\mathbb{P}^1$ με r τό πλήθος σημεία, οι καλύψεις Galois τού $\mathbb{P}^1 \setminus P$ με ομάδα Galois G αντιστοιχούν σε επιμορφισμούς $\phi_b : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, q_0) \to G$, όπου b ένα επιλεγμένο σημείο στην προεικόνα τού q_0. Σημειώνουμε ότι αν αλλάξουμε τήν επιλογή τού b σε b' τότε οι αντίστοιχοι επιμορφισμοί διαφέρουν κατά έναν εσωτερικό αυτομορφισμό $\mathrm{Inn}(g)$ τής G, όπου g τό μοναδικό στοιχείο τής G με $gb = b'$.

Εδώ μας ενδιαφέρει να παραμετρίσουμε καλύψεις μέχρι ισομορφίας. Η έννοια τής ισομορφίας που θα χρησιμοποιήσουμε ορίζεται ως εξής: Η G-κάλυψη Galois $f : R \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ με ισομορφισμό $\mu : G \to \mathrm{Deck}(f)$ είναι ισόμορφη με τήν $f : R' \to \mathbb{P}^1 \setminus P'$ με ισομορφισμό $\mu' : G \to \mathrm{Deck}(f')$, αν $P = P'$ και υπάρχει ομοιομορφισμός $\delta : R \to R'$ με τίς ιδιότητες: $f = f'\delta$ και $\mu'(g) = \delta\mu(g)\delta^{-1}$. Για απλούστευση τής παρουσίασης θα κάνουμε τήν τεχνική υπόθεση ότι $\infty \notin P$, δηλ. $P \subset \mathbb{C}$, και επομένως μπορούμε να διαλέξουμε $q_0 = \infty$ (σημειώνουμε ότι με εφαρμογή ενός αυτομορφισμού τού $\mathbb{P}^1$ μπορούμε πάντα να στείλουμε τό q_0 στο ∞). Επίσης, θα υποθέσουμε ότι κάθε σημείο τού P είναι θέση διακλάδωσης (διαφορετικά μπορούμε να συρικνώσουμε τό P και να κρατήσουμε μόνο αυτά τά σημεία) που μεταφράζεται στο ότι $\phi(\gamma_i) = g_i \neq 0$, για κάθε i (γ_i οι γεννήτορες τής $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty)$).

Τα σημεία τού χώρου παραμέτρων θα είναι κλάσεις ισοδυναμίας τής μορφής $[P, \phi]$ με $P \subset \mathbb{C}$, $\#P = r$ και $\phi : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty) \to G$ επιμορφισμός ομάδων με $\phi(\gamma_i) = g_i \neq 1$, όπου γ_i οι standard γεννήτορες τής $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty) \to G$. Θα λέμε ότι $[P, \phi]$ είναι ισοδύναμο με τό $[P', \phi']$ αν $P = P'$ και $\phi' = \mathrm{Inn}(g)\phi$, για κάποιο $g \in G$. Συμβολίζουμε τό παραπάνω σύνολο ως $\mathcal{H}_r(G)$.

4.2 Η βάση τού χώρου παραμέτρων

Θα προσδώσουμε τώρα στο σύνολο $\mathcal{H}_r(G)$ μια τοπολογική δομή. Πρός τούτο θα δείξουμε ότι είναι τοπολογική κάλυψη ενός γνωστού τοπολογικού χώρου, αυτού που παραμετρίζει τά $P \subset \mathbb{C}$ με $\#P = r$. Τό σύνολο P απαρτίζεται από r τό πλήθος μή διατεταγμένα διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία τού $\mathbb{C}$. Επομένως ο χώρος που τά παραμετρίζει είναι ο εξής: $\mathcal{O}_r = (\mathbb{C}^r \setminus \text{διαγώνιοι})/\mathbb{S}_r$, όπου $\mathbb{S}_r$ η ομάδα τών μεταθέσεων τών n στοιχείων. Το $\mathcal{O}_r$ είναι τοπολογικός χώρος με τοπολογική δομή που επάγεται από τό $\mathbb{C}^r$ (στήν πραγματικότητα είναι ένα ομαλό αναλυτικό πολύπτυγμα) και υπάρχει μια φυσιολογική πεπερασμένη απεικόνιση $\psi : \mathcal{H}_r(G) \to \mathcal{O}_r$ με $\psi([P, \phi]) = P$. Με τήν βοήθεια τής παραπάνω απεικόνισης η τοπολογία τού $\mathcal{O}_r$ επάγει τοπολογία στο $\mathcal{H}_r(G)$, που καθιστά τήν ψ τοπολογική κάλυψη, ως εξής: Αν $[P, \phi] \in \mathcal{H}_r(G)$ με $P = \{p_1, \ldots, p_r\}$, ορίζουμε βάση γειτονιών ως ακολούθως. Έστω $D_1, \ldots, D_r$ ανοικτοί δίσκοι τού $\mathbb{C}$ γύρω από τά σημεία p_i, $i = 1, \ldots, r$ και έστω $\mathcal{N}(D_1, \ldots, D_r)$ τό σύνολο τών $[P', \phi']$ με $P' = \{p'_1, \ldots, p'_r\}$, $p'_i \in D_i$ και ϕ' η σύνθεση τού ϕ με τόν ισομορφισμό $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P', \infty) \to \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus (D_1 \cup \cdots \cup D_r, \infty) \to \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty)$. Τα παραπάνω αποτελούν βάση γειτονιών τού $\mathcal{H}_r(G)$. Αν $\mathcal{N}_0(D_1, \ldots, D_r)$ είναι η φυσιολογική βάση γειτονιών τού $\mathcal{O}_r$, δηλ. τό σύνολο τών σημείων $P' = \{p'_1, \ldots, p'_r\}$ με $p'_i \in D_i$, τότε τό $\psi^{-1}(\mathcal{N}_0(D_1, \ldots, D_r))$ είναι πεπερασμένη ξένη ένωση από $\mathcal{N}(D_1, \ldots, D_r)$ που αντισοιχούν σε επιμορφισμούς $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus (D_1 \cup \cdots \cup D_r, \infty) \to G$, modulo τήν δράση τής $\mathrm{Inn}(G)$. Αυτό δείχνει ότι η απεικόνιση ψ είναι τοπολογική κάλυψη.

4.3 Η ομάδα Braid

Συμβολίζουμε τώρα ως $\mathcal{O}^{(r)}$ τό σύνολο όλων τών διατεταγμένων $(p_1, \ldots, p_r) \in \mathbb{C}^r, p_i \neq p_j, \forall i \neq j$. Η απεικόνιση $\pi_r : \mathcal{O}^{(r)} \to \mathcal{O}^{(r-1)}$ με $(p_1, \ldots, p_r) \mapsto (p_1, \ldots, p_{r-1})$ είναι συνεχής, ανοιχτή και επί. Η ίνα $\pi^{-1}(p_1, \ldots, p_{r-1}) = \mathbb{C} \setminus \{p_1, \ldots, p_{r-1}\}$ και επομένως όλες οι ίνες είναι συνεκτικές. Από επαγωγή στο r συνάγουμε ότι ο χώρος $\mathcal{O}^{(r)}$ είναι συνεκτικός.

Λήμμα 4.3.1. *Η απεικόνιση $\vartheta : \mathcal{O}^{(r)} \to \mathcal{O}_{(r)}$, με $(p_1, \ldots, p_r) \mapsto \{p_1, \ldots, p_r\}$ είναι κάλυψη Galois. Η ομάδα $\mathrm{Deck}(\vartheta)$ είναι ισόμορφη με τη συμμετρική ομάδα $\mathbb{S}_r$, μέσω τής απεικόνισης που αντιστοιχεί στο $\sigma \in \mathbb{S}_r$ τόν Deck-μετασχηματισμό $(p_1, \ldots, p_r) \mapsto (p_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, p_{\sigma^{-1}(r)})$.*

Απόδειξη Έστω $D_1, \ldots, D_r$ ξένοι δίσκοι στο $\mathbb{C}$. Η $\vartheta^{-1}(\mathcal{N}_0(D_1, \ldots, D_r))$ είναι ξένη ένωση τών $D_{\sigma(1)} \times \cdots \times D_{\sigma(r)}$, $\sigma \in \mathbb{S}_r$. Η ϑ απεικονίζει ομοιομορφικά τά $D_{\sigma(1)} \times \cdots \times D_{\sigma(r)}$ στο $\mathcal{N}_0(D_1, \ldots, D_r)$, άρα η ϑ είναι κάλυψη. Έχουμε ότι η $\mathbb{S}_r$ είναι υποομάδα τής $\mathrm{Deck}(\vartheta)$ η οποία δρά μεταβατικά στις ίνες, άρα η ϑ είναι Galois, με $\mathrm{Deck}(\vartheta) = \mathbb{S}_r$, βλ. Λήμμα 1.2.1 (δ). $\square$

Έστω $P_0 = \{1, 2, \ldots, r\} \in \mathcal{O}_r$. Για κάθε $1 \leq i \leq r-1$, ορίζουμε τό κλειστό μονοπάτι Q_i στο $\mathcal{O}_r$ με βάση τό σημείο P_0 ως εξής: $Q_i(t) = \{p_1(t), \ldots, p_r(t)\}$, όπου $p_j(t) =$ τό σταθέρο μονοπάτι j, για $j \neq i, i+1$, και $p_i(t) = \frac{(2i+1)-\exp(\pi i t)}{2}$, $p_{i+1}(t) = \frac{(2i+1)+\exp(\pi i t)}{2}$, $t \in [0,1]$. Ορίζουμε $\mathbb{B}_r = \pi_1(\mathcal{O}_r, P_0)$.

Έστω $B_0 = (1, 2, \ldots, r) \in \vartheta^{-1}(P_0)$. Συνθέτοντας τόν επιμορφισμό $\Phi_{B_0} : \mathbb{B}_r \to \mathrm{Deck}(\vartheta)$ με τόν ισομορφισμό $\mathrm{Deck}(\vartheta) \to \mathbb{S}_r$, παίρνουμε έναν επιμορφισμό $\kappa : \mathbb{B}_r \to \mathbb{S}_r$ που περιγράφεται ως εξής: Έστω Q ένα κλειστό μονοπάτι τού $\mathcal{O}_r$ με βάση τό P_0 και $\tilde{Q}$ η ανύψωσή του στο $\mathcal{O}^r$ με αρχή τό σημείο B_0. Γράφουμε τό $\tilde{Q}(t) = (q_1(t), \ldots, q_r(t))$, με q_j να είναι μονοπάτι στο $\mathbb{C}$ με αρχή τό j. Τότε τό τελικό σημείο $\tilde{Q}(1)$ θα αντιστοιχεί σε μια μετάθεση, έστω $\sigma \in \mathbb{S}_r$ τού $(1, 2, \ldots, r)$. Από ορισμού, τό $\Phi_{B_0}(Q)$ είναι τό στοιχείο τού $\mathrm{Deck}(\vartheta)$ που στέλνει τό $\tilde{Q}(1)$ στο $\tilde{Q}(0) = B_0$. Τό ίδιο όμως κάνει και ο αυτομορφισμός που αντιστοιχεί στην μετάθεση σ, συνεπώς $\kappa(Q) = \sigma$, βλ. Λήμμα 1.2.1 (γ). Επίσης, $\kappa(Q_i) = (i, i+1)$, $i = 1, \ldots, r-1$.

Θεώρημα 4.3.1. *Τα $Q_1, \ldots, Q_{r-1}$ παράγουν τήν $\mathbb{B}_r$.*

Απόδειξη Θα κάνουμε τήν απόδειξη για $r = 2$. Η γενική περίπτωση αποτελεί γενίκευση αυτής και είναι αρκετά περίπλοκη από τεχνική σκοπιά. Έστω Q ένα κλειστό μονοπάτι στο $\mathcal{O}_2$ με βάση τό $P_0 = \{1, 2\}$. Αφού η $\mathbb{S}_2$ παράγεται από τό $\kappa(Q_1) = (1, 2)$, μπορούμε να υποθέτουμε, ενδεχομένως συνθέτοντας με τό Q_1, ότι $\kappa(Q) = \mathrm{id}$. Έχουμε ότι $Q(t) = \{q_1(t), q_2(t)\}$, όπου τά q_j είναι κλειστά μονοπάτια στο $\mathbb{C}$ με βάση τό j. Ορίζουμε $q_j^s(t) = q_j(t) + s(r - q_r(t))$, $j = 1, 2$, $s, t \in [0, 1]$. Τότε έχουμε μια οικογένεια κλειστών μονοπατιών τού $\mathcal{O}_2$ με βάση τό σημείο P_0, που παραμετρίζονται από τά $s \in [0, 1]$, και ορίζονται ως $Q^{(s)}(t) = \{q_1^s(t), q_2^s(t)\}$. Άρα τά $Q^{(0)} = Q$ και $Q^{(1)} = \{q_1(t), 2\}$ είναι ομοτοπικά μονοπάτια. Τό μονοπάτι $Q_1^2 = Q_1 \circ Q_1$ έχει τήν ιδιότητα $\kappa(Q_1^2) = \mathrm{id}$, διότι $\kappa(Q_1) = (1, 2)$. Επομένως έχουμε τήν ομοτοπία $Q_1^2 = \{p_1'(t), 2\}$, με $p_1'(t) = 2 - e^{2\pi i t}$. Η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{2\}, 1)$ παράγεται από τήν κλάση $[p_1'(t)]$. Συνεπώς τό $q_1(t)$ είναι ομοτοπικό με μια δύναμη τού $p_1'(t)$ και αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει μια ομοτοπία στο $\mathcal{O}_2$ ανάμεσα στο Q και μια δύναμη τού Q_1^2. □

Θα μελετήσουμε τώρα τήν δράση τής ομάδας $\pi_1(\mathbb{B}_r, P_0)$ στην κάλυψη $\psi : \mathcal{H}_r(G) \to \mathcal{O}_r$. Όπως έχουμε δεί τά σημεία τής $\mathcal{H}_r(G)$ είναι κλασεις ισοδυναμίας $[P, \phi]$, $P \in \mathcal{O}_r$, $\phi : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty) \to G$ επιμορφισμός ομάδων. Θα προσδιορίζουμε τήν δράση τών γεννητόρων Q_i κατασκευάζοντας τήν ανύψωση τού Q_i στην $\mathcal{H}_r(G)$ με τήν βοήθεια τού παρακάτω λήμματος.

Λήμμα 4.3.2. *Έστω $\theta : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ ομοιομορφισμός με $\theta(\infty) = \infty$. Τοτε η θ επάγει ομοιομορφισμό $\hat{\theta} : \mathcal{H}_r(G) \to \mathcal{H}_r(G)$ με $\hat{\theta}([P, \phi]) = [\theta(P), \phi\theta^{-1}]$, όπου* *με* $\phi\theta^{-1}$ *είναι η σύνθεση τού* ϕ *με τόν επαγώμενο από τήν* θ^{-1} *ισομορφισμό* $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \theta(P), \infty) \to \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty)$.

Απόδειξη Αφού θ ομοιομορφισμός και ϕ επιμορφισμός, έχουμε ότι ο $\phi\theta^{-1}$ είναι επιμορφισμός. Επίσης, η θ^{-1} στέλνει τήν υποομάδα που γεννιέται από τόν standard γεννήτορα $\gamma_{\theta(p)}$ στήν υποομάδα που γεννιέται από τόν standard γεννήτορα γ_p. Συνεπώς, $\phi\theta^{-1}(\gamma_{\theta(p)}) \neq 0$. Άρα τό $[\theta(P), \phi\theta^{-1}] \in \mathcal{H}_r(G)$. Η $\hat{\theta}$ είναι ομοιομορφισμός με αντίστροφο τόν $\hat{\theta^{-1}}$. $\square$

Θα θεωρήσουμε τώρα μια οικογένεια ομοιομορφισμών θ_t, με $t \in [0,1]$, όπου θ_t ομοιομορφισμός όπως στο λήμμα, για κάθε t. Αυτοί ορίζονται ως εξής:

$$\theta_t(z) = \frac{2i+1}{2} + (z - \frac{2i+1}{2}) \exp[(h(|z - \frac{2i+1}{2}|)\pi i t],$$

όπου $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ μια συνεχής απεικόνιση με $h(u) = 1$ για $u \leq 3/4$ και $h(u) = 0$ για $u \geq 1$. Γεωμετρικά, ο θ_t στον δίσκο κέντρου $\frac{2i+1}{2}$ και ακτίνας $3/4$ είναι στροφή κατά γωνία $t\pi$. Έξω από τόν δίσκο κέντρου $\frac{2i+1}{2}$ και ακτίνας 1 είναι ταυτοτική. Με βάση αυτή τήν περιγραφή βλέπουμε ότι τό μονοπάτι $t \mapsto \theta_t(P_0)$ είναι τό Q_i. Αν $B_0 \in \mathcal{H}_r(G)$ στήν προεικόνα τού P_0 τότε τό μονοπάτι $t \to \hat{\theta}_t(B_0)$ είναι η ανύψωση τού Q_i με αρχικό σημείο τό B_0: πράγματι, $\psi(\hat{\theta}_t(B_0)) = \theta_t(P_0)$, διότι $B_0 = [P_0, \phi_0]$ και επομένως, εξ ορισμού, $\hat{\theta}_t(B_0) = [\theta_t(P_0), \phi\theta_t^{-1}]$. Επομένως η δράση τού Q_i στέλνει τό B_0 στο $\hat{\theta}_1(B_0)$. Αν $g_j = \phi_0(\gamma_i)$, τά g_j καθορίζουν τόν ϕ_0 και άρα και τό B_0. Εξ ορισμού, τό $\hat{\theta}_1$ δρά στο ϕ_0 ως $\phi_0\theta_1^{-1}$ και αυτή η δράση μεταφράζεται ως δράση στα g_j ως εξής: τά $g_j \mapsto g'_j = g_j$ για $j \neq i, i+1$ (διότι θ_1 είναι η ταυτοτική σε γειτονιά τών j, $j \neq i, i+1$). Επίσης, τό $g_{i+1} \mapsto g'_{i+1} = g_i$ διότι τό θ^{-1} στην περιοχή τών $i, i+1$ είναι στροφή (με φορά, τήν φορά τών δεικτών τού ρολογιού) κατά γωνία π και άρα $\theta_1(\gamma_{i+1}) = \gamma_i$. Τέλος $g_i \mapsto g'_i = g_i g_{i+1} g_i^{-1}$ διότι τό γινομενο όλων πρέπει να κάνει 1. Συνεπώς

Πρόταση 4.3.1. *Έστω* $[P_0, \phi_0] \in \mathcal{H}_r(G)$, $P_0 = \{1, \ldots, r\}$. *Επιλέγουμε* $\gamma_i \in \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P_0, \infty)$, $i = 1, \ldots, r$, *να είναι οι standard γεννήτορες που αντιστοιχούν στα σημεία* i, $i = 1, \ldots, r$ *και ικανοποιούν τήν σχέση* $\gamma_1 \cdots \gamma_r = 1$. *Με τήν παραπάνω επιλογή, τό* ϕ_0 *αντιστοιχεί στα* $(g_1, \ldots, g_r)$ *με* $g_i = \phi_b(\gamma_i)$ *(τά* $g_1, \ldots, g_r$ *είναι γεννήτορες τής* G *που ικανοποιούν τήν σχέση* $g_1 \cdots g_r = 1$*). Τότε η δράση τού* $Q_i \in \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty)$ *στέλνει τό* $[P_0, \phi_0]$ *στο* $[P_0, \phi_1]$ *με τό* ϕ_1 *να αντιστοιχεί στα* $(g_1, \ldots, g_{i-1}, g_i g_{i+1} g_i^{-1}, g_i, \ldots, g_r)$.

Κλείνουμε αυτή τήν παράγραφο με μια παρατήρηση: Έστω $C = (C_1, \ldots, C_r)$ μια διατεταγμένη r-αδα από κλάσεις συζυγίας τής G. Ορίζουμε ως

$$\mathrm{Nil}(C) = \{(g_1, \ldots, g_r) \text{ γεννήτορες τής } G,\ g_1 \cdots g_r = 1,\ \text{υπάρχει } \sigma \in \mathbb{S}_r \text{ με } < g_i > \in C_{\sigma(i)}\}.$$

Θα λέμε ότι η κλάση $[P, \phi]$ έχει τύπο C, αν $(\phi(\gamma_1), \ldots, \phi(\gamma_r)) \in \mathrm{Nil}(C)$. Παρατηρούμε τώρα ότι, από τήν Πρόταση 4.3.1, η ομάδα $\mathbb{B}_r$ διατηρεί τόν τύπο τής κλάσης

$[P, \phi]$. Με άλλα λόγια, η δράση τής $\mathbb{B}_r$ στις r-άδες $(g_1, \ldots, g_r)$ που δίδεται από τήν πρόταση 4.3.1, επάγει δράση στο $\mathrm{Nil}(C)$.

4.4 Η συνεκτικότητα τού χώρου παραμέτρων τών απλών καλύψεων τής προβολικής ευθείας

Όπως είδαμε παραπάνω η δράση τής ομάδας $\mathbb{B}_r$ στο $\mathcal{H}_r(G)$ διατηρεί τούς τύπους. Θά πάρουμε τώρα ως $G = \mathbb{S}_n$ και ως τύπο τόν $C = (C_1, \ldots, C_r)$, όπου C_i είναι η κλάση συζυγίας που ορίζεται από τίς αντιμεταθέσεις, γιά κάθε i. Τα στοιχεία τού $\mathcal{H}_r(G)$ είναι καλύψεις $R \to \mathbb{P}^1 \setminus P$, όπου σε κάθε $p \in P$ ο δείκτης διακλάδωσης ισούται με 2. Έστω $\bar{R} \to \mathbb{P}^1$ η συμπαγοποοίηση αυτής τής κάλυψης όπως στην παράγραφο 1.3.2. Τότε στην επιφάνεια Riemann $\bar{R}$ δρά η $\mathbb{S}_n$ και τό αντίστοιχο πηλίκον $\bar{R}/\mathbb{S}_n \cong \mathbb{P}^1$. Όταν όμως πάρουμε τό πηλίκον με τήν υποομάδα $\mathbb{S}_{n-1}$, με τήν φυσιολογική της εμβύθιση στην $\mathbb{S}_n$, τότε $\bar{R}/\mathbb{S}_n \cong C$ όπου C μια επιφάνεια Riemann που επιδέχεται μια $n : 1$ απεικόνιση $\pi : C \to \mathbb{P}^1$ (κάλυψη τής προβολικής ευθείας βαθμού n). Η απεικόνιση αυτή έχει τήν ιδιότητα ότι οι θέσεις διακλάδωσής της, που είναι τά σημεία τού P, είναι απλές δηλαδή, στο αντίστοιχο σημείο η προεικόνα αποτελείται από ακριβώς $n-1$ τό πλήθος σημεία. Με άλλα λόγια, η προεικόνα περιέχει ακριβώς ένα σημείο με δείκτη διακλάδωσης 2 και στα υπόλοιπα σημεία ο δείκτης διακλάδωσης είναι 1. Τέτοιες καλύψεις τής προβολικής ευθείας λέγονται απλές καλύψεις. Και αντίστροφα, αν $\pi : C \to \mathbb{P}^1$ μια απλή κάλυψη βαθμού n, τότε μπορούμε να πάρουμε τήν λεγόμενη Galois θήκη της που θα είναι μια κάλυψη $\bar{R} \to \mathbb{P}^1$ όπως παραπάνω, δηλαδή η αντίστοιχη τοπολογική κάλυψη θα είναι $\mathbb{S}_n$-Galois με τύπο διακλάδωσης σε κάθε $p \in P$ τήν κλάση συζυγίας τών αντιμεταθέσεων. Η τελευταία αντιστοιχεί στην πεπερασμένη επέκταση Galois που είναι η Galois θήκη τής επέκταση $\mathcal{M}(C)/\mathbb{C}(\pi)$.

Συμβολίζουμε ως $\mathcal{H}_r^s$ τόν αντίστοιχο υπόχωρο τού $\mathcal{H}_r(\mathbb{S}_n)$ ο οποίος ονομάζεται χώρος Hurwitz τών απλών καλύψεων τής προβολικής ευθείας με r θέσεις διακλάδωσης. Η $\mathbb{B}_r$ δρά στον $\mathcal{H}_r^s$. Ο σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι η δράση είναι μεταβατική, επομένως ο χώρος είναι συνεκτικός. Η απόδειξη, που ωφείλεται στον Glebsch τό 1872, βλ. [G], είναι καθαρά ομαδοθεωρητική λόγω τού καθορισμού τής δράσης ομαδοθεωρητικά από τήν Πρόταση 4.3.1.

Η ιδέα είναι η εξής: Τα σημεία τού $\mathcal{H}_r^s$ αντιστοιχούν σε $[P, (\tau_1, \ldots, \tau_r)]$ με $\{\tau_1, \ldots, \tau_r\}$ σύνολο αντιμεταθέσεων που γεννούν τήν $\mathbb{S}_n$ και έχουν γινόμενο 1. Τότε υπάρχει στοιχείο τής $\mathbb{B}_r$ που στέλνει τό $[P, (\tau_1, \ldots, \tau_r)]$ στο $[P, (\tau_1^o, \ldots, \tau_r^o)]$ όπου τό τελευταίο είναι τό

$$(12), (12), (23), (23), \ldots, (n-2\, n-1)(n-2\, n-1), (n-1\, n), \ldots, (n-1\, n), \quad (4.1)$$

όπου τό $(n-1\, n)$ εμφανίζεται $r - 2(n-2) \geq 2$ φορές. Σημειώνουμε ότι για να είναι ο χώρος $\mathcal{H}_r^s \neq \emptyset$ θα πρέπει $r \geq 2n-2$ άρτιο. Η συνθήκη αυτή προκύπτει τόσο από τό γεωμετρικό θεώρημα τού Hurwitz για τό γένος τής απλής κάλυψης $\pi : C \to \mathbb{P}^1 : r = 2g - 2 + 2n$, όπου $g \geq 0$ τό γένος, βλ. πχ [M], όσο καί από καθαρά ομαδοθεωρητικές συνθήκες: αν $r < 2n - 2$ ή r=περιττός τότε δέν υπάρχει $\{g_1, \ldots, g_r\}$ σύνολο μεταθέσεων που γεννούν τήν $\mathbb{S}_n$ και έχουν γινόμενο 1.

Η απόδειξη τού παραπάνω στηρίζεται στο εξής λήμμα:

Λήμμα 4.4.1. *1. Η τροχιά τού $(g_1, \ldots, g_r)$ κάτω από τήν δράση τής $\mathbb{B}_r$ περιέχει και όλες τίς κυκλικές μεταθέσεις του.*

2. Η δράση τής $\mathrm{Inn}(G)$ αφήνει τίς $\mathbb{B}_r$-τροχιές αναλλοίωτες.

Απόδειξη Θα συμβολίσουμε ως $h^g = g^{-1}hg$. Τότε τό Q_i^{-1} δρα ως εξής: $(g_1, \ldots, g_r) \mapsto (g_1, g_{i-1}, g_{i+1}, g_i^{g_{i+1}}, \ldots, g_r)$. Επομένως έχουμε τήν εξής αλληλουχία δράσεων:

$$(g_1, \ldots, g_r) \overset{Q_1^{-1}}{\mapsto} (g_2, g_1^{g_2}, g_3, \ldots, g_r) \overset{Q_2^{-1}}{\mapsto} (g_2, g_3, g_1^{g_2 g_3}, g_4, \ldots, g_r) \mapsto \cdots \\ \overset{Q_{r-1}^{-1}}{\mapsto} (g_2, \ldots, g_r, g_1^{g_2 \cdots g_r}).$$

Τώρα, $g_2 \cdots g_r = g_1^{-1}$ και επομένως $g_1^{g_2 \cdots g_r} = g_1 g_1 g_1^{-1} = g_1$. Συνεπώς η παραπάνω αλληλουχία δράσεων στέλνει $(g_1, \ldots, g_{r-1}, g_r) \mapsto (g_2, \ldots, g_r, g_1)$. Συνεχίζοντας με τόν ίδιο τρόπο παίρνουμε κάθε κυκλική μετάθεση τού $(g_1, \ldots, g_r)$.

Έχουμε, επίσης, τήν εξής δράση τής $\mathbb{B}_r$ στο $(g_1, \ldots, g_r)$:

$$(g_1, \ldots, g_r) \overset{Q_{r-1}^{-1}}{\mapsto} (g_1, \ldots, g_r, g_{r-1}^{g_r}) \overset{Q_{r-2}^{-1}}{\mapsto} (g_1, \ldots, g_r, g_{r-2}^{g_r}, g_{r-1}^{g_r}) \mapsto \cdots \\ \overset{Q_2^{-1}}{\mapsto} (g_r, g_1^{g_r}, \ldots g_{r-1}^{g_r}).$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $g_r = g_r^{g_r}$ έχουμε ότι η παραπάνω αλληλουχία δράσεων στέλνει $(g_1, \ldots, g_{r-1}, g_r) \mapsto (g_r^{g_r}, g_1^{g_r}, \ldots g_{r-1}^{g_r})$. Εφαρμόζοντας κυκλική μετάθεση, σύμφωνα με τό 1) τού λήμματος, έχουμε ότι τό $(g_1^{g_r}, \ldots g_{r-1}^{g_r}, g_r^{g_r})$ ανήκει στην τροχιά τού $(g_1, \ldots, g_r)$. Αντίστοιχο συμπέρασμα έχουμε για τό $(g_1^{g_i}, \ldots g_{r-1}^{g_i}, g_r^{g_i})$, γιά κάθε i, και επειδή τά $g_1, \ldots, g_r$ είναι γεννήτορες, αυτό ολοκληρώνει τήν απόδειξη. $\square$

Για τήν απόδειξη τής συνεκτικότητας θα δείξουμε πρώτα δύο ισχυρισμούς: *Ισχυρισμός 1*: Αν T είναι ένα σύνολο αντιμεταθέσεων που γεννά τό $\mathbb{S}_n$, τότε $\#T \geq n - 1$. Υπάρχουν $n - 1$ στοιχεία τού T που είναι γεννήτορες τής $\mathbb{S}_n$ και, επίσης, υπάρχουν $n - 2$ στοιχεία τού T που είναι γεννήτορες τής $\mathbb{S}_{n-1}$ με τήν φυσιολογική της εμβύθιση στην $\mathbb{S}_n$.

Ότι $\#T \geq n - 1$ είναι φανερό από τό γεγονός ότι στο T δεν μπορεί να υπάρχει αντιμετάθεση ξένη ως προς όλες τίς άλλες. Αν πχ η (12) ήταν ξένη ως προς όλες τίς άλλες τότε τό στοιχείο (23) δεν ανήκει στην υποομάδα που γεννάται από τό T. Για τό κομμάτι τής ύπαρξης στον ισχυρισμό, θα εφαρμόσουμε επαγωγή ως εξής: Θα αποδείξουμε για κάθε $j = 1, \ldots, n-1$ ότι υπάρχουν $\tau_1, \ldots, \tau_j \in T$ και υποσύνολο B_j τού $\{1, \ldots, n\}$ με $j+1$ στοιχεία με τήν ιδιότητα ότι οι $\tau_1, \ldots, \tau_j$ γεννούν τήν συμμετρική ομάδα που αντιστοιχεί στο B_j και αφήνουν αναλλοίωτα τά υπόλοιπα στοιχεία. Για $j = 1$ είναι φανερό. Έστω ότι ισχύει για $j < n-1$, τότε υπάρχει $\tau_{j+1} \in T$ με $\tau_{j+1}(B_j) \neq B_j$. Πάρε τότε $B_{j+1} = B_j \cup \tau_{j+1}(B_j)$. Αυτό παραμένει αναλλοίωτο από τήν τ_{j+1} διότι η τελευταία είναι αντιμετάθεση και επαγωγική απόδειξη ολοκληρώθηκε. Εφαρμόζοντας τό παραπάνω για $j = n-2$ και $j = n-1$ αποδεικνύουμε τόν ισχυρισμό.

Ισχυρισμός 2: Έστω A τό σύνολο τών r-άδων $(\tau_1, \ldots, \tau_r)$ από αντιμεταθέσεις τής $\mathbb{S}_n$ με $\tau_1 \cdots \tau_r = 1$ (λόγω προσήμου, για να ισχύει αυτό θα πρέπει r=άρτιος). Τότε η ομάδα Braid δρά στο A και κάθε τροχιά περιέχει μια r-άδα με $\tau_{2i} = \tau_{2i-1}$, γιά κάθε $i = 1, \ldots, r/2$.

Γράφοντας μια αντιμετάθεση ως (a, b), $a < b$ τότε μπορούμε να ορίσουμε στο σύνολο τών αντιμεταθέσεων τήν λεξικογραφική διάταξη. Αυτή επάγει λεξικογραφική διάταξη στο σύνολο τών r-άδων $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_r)$ από αντιμεταθέσεις. Η δράση τού Q_i^{-1} στην τ τήν στέλνει στην $\tau' = (\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \tau_{i+1}^{-1}\tau_i\tau_{i+1}, \ldots, \tau_r)$. Αν στην τ έχουμε $\tau_i < \tau_{i+1}$ τότε η δράση τού Q_i^{-1} τήν στέλνει στην τ' με $\tau < \tau'$. Επομένως αν διαλέξουμε τήν τ να είναι μεγιστικό στοιχείο στην τροχιά κάτω από τήν δράση τής $\mathbb{B}_r$ θα έχουμε $\tau_1 \geq \cdots \geq \tau_r$. Αν τώρα $\tau_r = (a, b) \neq \tau_{r-1}$ τότε η $\tau_1 \cdots \tau_r$ στέλνει τό a σε στοιχείο μεγαλύτερό του. Λόγω τού ότι όμως $\tau_1 \cdots \tau_r = 1$ συνάγουμε ότι $\tau_r = \tau_{r-1}$. Εφαρμόζοντας επαγωγή στο $(\tau_1, \ldots, \tau_{r-2})$ αποδεικνύουμε τόν ισχυρισμό.

Ας προχωρήσουμε τώρα στην απόδειξη τής συνεκτικότητας τού $\mathcal{H}_r^s$. Με βάση τόν ισχυρισμό 2 για την $(\tau_1, \ldots, \tau_r)$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι r άρτιος και $\tau_{2i} = \tau_{2i-1}$, γιά κάθε $i = 1, \ldots, r/2$. Αν τώρα $r > 2(n-1)$ τότε από τόν ισχυρισμό 1, μετά ενδεχομένως από κυκλική μετάθεση, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τά $\tau_1, \ldots, \tau_{r-2}$ γεννούν τό $\mathbb{S}_n$. Αν $r = 2(n-1)$ τό αντίστοιχο συμπέρασμα είναι ότι γεννούν τό $\mathbb{S}_{n-1}$ εμβυθισμένο στο $\mathbb{S}_n$. Επίσης από τό 2 τού Λήμματος 4.4.1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\tau_r = (n-1, n)$. Πράγματι, αν τό $(n-1, n)$ είναι κάποιο τών τ_i τότε με κυκλική εναλλαγή μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι τό τ_r. Αν όχι, τότε επειδή τά $\tau_1, \ldots, \tau_r$ έίναι γεννήτορες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\tau_r = (n-1, a)$. Τότε όμως εφαρμόζοντας τήν $\mathrm{Inn}(n, a)$ έχουμε τό ζητούμενο.

Αν τώρα, $r > 2(n-1)$ τότε από επαγωγή στο r μπορούμε να υποθέσουμε ότι η τροχιά τής $(\tau_1, \ldots, \tau_{r-2})$ περιέχει τό στοιχείο (4.1) μήκους $r-2$ και συνεπώς η τροχιά τής $(\tau_1, \ldots, \tau_r)$ περιέχει τό στοιχείο (4.1) μήκους r. Αν $r = 2(n-1)$, τότε τά $\tau_1, \ldots, \tau_{r-2}$ γεννούν τό $\mathbb{S}_{n-1}$ και από επαγωγή η τροχιά τής $(\tau_1, \ldots, \tau_{r-2})$

περιέχει τό στοιχείο

$$(12),(12),(23),(23),\ldots,(n-3\,n-2)(n-3\,n-2),(n-2\,n-1),\ldots,(n-2\,n-1)\,.$$

Οπότε πάλι η τροχία τής $(\tau_1,\ldots,\tau_r)$ περιέχει τό στοιχείο (4.1) μήκους r. Αυτό ολοκληρώνει τήν απόδειξη τής συνεκτικότητας.

Βιβλιογραφία

[G] A. Glebsch: *Zur Theorie der Riemann'schen Flaeche*, Math. Ann 6 (1872), 216-230.

[M] R. Miranda: *Algebraic curves and Riemann surfaces*, Graduate studies in Mathematics, vol. 5, AMS, 1995.

[V] H. Volklein: *Groups as Galois groups*, Cambridge University Press, 2004.