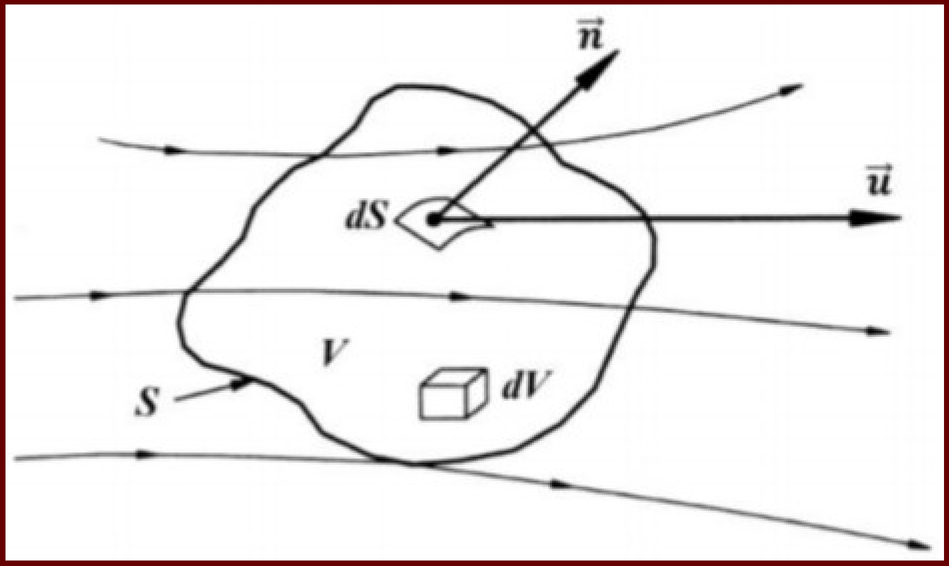
COMPUTATION OF THE DRAG FORCE ON A SPHERE CLOSE TO A WALL

Αγάπη Δασκαλάκη
Supervisor: Ευστάθιος Φίλιππας
Εξεταστική Επιτροπή: Αλκιβιάδης Τερσένοβ, Αχιλλέας Τερτίκας,



Τμημα Μαθηματικων & Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

19 Οκτωβρίου 2021

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
Ευστάθιος Φίλιππας

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ
Αχιλλέας Τερτίκας, Αλκιβιάδης Τερσένοβ

0.1 ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ένα μεγάλο ευχαριστώ στον Κύριο Στάθη Φίλιππα για τις συμβουλές , την καθοδήγηση και την βοήθεια που μου προσέφερε κατά την διάρκεια του έτους, από την έναρξη έως την περάτωση της εργασίας .

Αφιερωμένο στην οικογένεια μου,

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Η επιστήμη της Μηχανικής, η οποία είναι μέρος των φυσικών επιστημών, αναφέρεται σε δύο βασικά αντικείμενα, τη Μηχανική των Στερεών και τη Μηχανική των Ρευστών. Το αντικείμενο της Μηχανικής των Ρευστών, είναι η μελέτη των νόμων που διέπουν την ισορροπία και την κίνηση των ρευστών, ερευνώντας ταυτόχρονα και τα αίτια που προκαλούν την κίνηση αυτή, δηλαδή τις δυνάμεις.

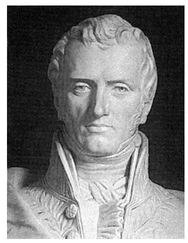
Με την έννοια ρευστά, υπονοούμε τα υγρά και τα αέρια, γενικά. Η διαφορά μεταξύ τους βασίζεται σε ορισμένες συμπληρωματικές φυσικές ιδιότητες που τα διέπουν. Έτσι, τα ρευστά χωρίζονται σε δυο κατηγορίες, τα νευτώνια και τα μη νευτώνια. Ως **Νευτώνια ή Νευτωνικά ρευστά** ορίζονται τα ρευστά στα οποία ο τανυστής τάσης, σε τυχόν σημείο του ρευστού εκφράζεται ως γραμμική συνάρτηση του τανυστή ρυθμού παραμόρφωσης. Γενικά, νευτώνια συμπεριφορά εμφανίζουν τα αέρια, τα περισσότερα από τα συνήθη υγρά και τα διαλύματα ουσιών μικρού μοριακού βάρους.Το νερό και ο αέρας είναι από τα πιο γνωστά νευτώνια ρευστά. Χαρακτηριστικό των νευτώνιων ρευστών είναι ότι το ιξώδες αποτελεί για αυτά πραγματική ιδιότητα η τιμή της οποίας εξαρτάται από τη μοριακή φύση, την πίεση και τη θερμοκρασία του ρευστού. Δεδομένου ότι τα νευτώνια ρευστά είναι υλικά σώματα, όπως και τα στερεά, η περιγραφή των νόμων της Μηχανικής των Ρευστών στηρίζεται στις βασικές αρχές της Μηχανικής, όπως είναι ο νόμος του *Newton*, ο οποίος παίρνει εδώ την μορφή της εξίσωσης συνέχειας και τη μορφή της εξίσωσης διατήρησης της ενέργειας (εξίσωση *Bernoulli*).

Για τα νευτώνια ρευστά, οι γενικοί αυτοί νόμοι λαμβάνουν μία πιο πολύπλοκη μορφή, εξαιτίας της μεγαλύτερης κινητικότητας των μορίων τους σε συνδυασμό με τις ιδιότητες της συμπιεστότητας και του ιξώδους που τα χαρακτηρίζουν. Η διατύπωση των βασικών αυτών νόμων, μας οδηγεί σε μια σειρά συστημάτων ολοκληρωτικών ή διαφορικών εξισώσεων, με μερικές παραγώγους των οποίων η επίλυση παρουσιάζει μεγάλες μαθηματικές δυσκολίες, που προέρχονται κυρίως από την μη γραμμικότητά τους. Έτσι, η ανάπτυξη των διαφόρων μαθηματικών επίλυσης, έπαιξε αποφασιστικό ρόλο στην εξέλιξη της Μηχανικής των Ρευστών, ενώ παράλληλα η ίδια η Μηχανική Ρευστών, αποτέλεσε κίντρο για ανάπτυξη νέων μαθηματικών εννοιών, όπως π.χ. η έννοια του πεδίου ροής, η έννοια της ροής διανύσματος μέσω επιφάνειας κ.λ.π. Οι εξισώσεις που έπαιξαν καταλυτικό ρόλο στην επίλυση των προβλημάτων αυτών ήταν οι εξισώσεις $Navier - Stokes$.

1.1 Ιστορική Αναδρομή

Στις αρχές του 19ου αιώνα η ρευστομηχανική είχε αναπτυχθεί αρκετά και είχε στη διάθεσή της αξιόπιστες πειραματικές τεχνικές και σημαντικά αποτελέσματα για την αντίσταση των σωμάτων στην ροή. Σε φυσική πραγματικότητα όμως, οι θεωρίες μειονεκτούσαν. Το 1822 σε μια ομιλία στη Γαλλική Ακαδημία, ο *Louis Marie Henri Navier* (1785-1836) εξάγει τις εξισώσεις κίνησης ενός συνεκτικού ρευστού, με βάση τη θεωρία της ελαστικότητας . Η διατύπωση των εξισώσεων θα ήταν αδύνατη αν το προηγούμενο χρόνο ο *Cauchy* δεν είχε διατυπώσει σε γενική μορφή την εντατική κατάσταση σε συνεχές μέσο με τον ορισμό των τάσεων. Όμως, ο τελευταίος προτείνει λύσεις για τις εξισώσεις σχετικά με τη μη μόνιμη ροή σε ορθογώνιο αγωγό και κυλινδρικό αγωγό και σε ανοικτό κανάλι. Δεν κατάφερε επίσης να δώσει λύσεις για την παραβολική κατανομή της ταχύτητας για διαμορφωμένη ροή σε σωλήνα κυκλικής διατομής. Η λύση του τελευταίου προήλθε από τον *Neumann* (1798-1895). Ωστόσο, είχε γίνει γνωστό εδώ και πολύ καιρό ότι η τριβή των ρευστών ήταν η κύρια αιτία για την απόκλιση των πειραμάτων από τη θεωρία. Παρ΄

όλα αυτά λίγες μόνο θεωρητικές εξελίξεις επιχείρησαν να συμπεριλάβουν τις επιπτώσεις του ιξώδους στις εξισώσεις της κίνησης των ρευστών. Μία από αυτές προτάθηκε από τον ίδιο τον *Leonhard Euler* (1707-1783), στην οποίο υπέθεσε εσφαλμένα ότι, όπως στην περίπτωση τριβής στα στερεά, η τριβή του ρευστού ήταν ανάλογη της πίεσης. Μετά τον *Euler*, φαίνεται ότι μόνο ο *Navier* είχε το κίνητρο να αντιμετωπίσει επίσημα αυτό το πρόβλημα και να επιτύχει στην επίλυσή του. Το ενδιαφέρον του για το θέμα δεν ήταν τυχαίο, αλλά είχε κίνητρο από την αναγνωρισμένη ικανότητά του στα υδραυλικά.



Σχήμα 1: *Claude Luis Navier*

Άλλοι ερευνητές, όπως οι $Cauchy, Poisson$ και $Saint - Venant$, πιθανότατα ενθαρρυμένοι από τις δημοσιεύσεις του *Navier*, εκμεταλλεύτηκαν την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν την εξίσωση για κίνηση σε ιξώδες ρευστό στις δικές τους εξισώσεις ελαστικότητας. Στην περίπτωση ενός «μη ελαστικού σώματος» και υποθέτοντας ότι ο τανυστής τάσης (*stress tensor*) είναι ανάλογος με τον τανυστή ρυθμού παραμόρφωσης, ο *Cauchy* έλαβε την εξίσωση κίνησης για ιξώδη ρευστά που έδωσε ο *Navier*. Υποθέτοντας ότι οι τάσεις σε ένα ρευστό σχετίζονται με τον ρυθμό παραμόρφωσης του ρευστού, με τον ίδιο τρόπο που οι τάσεις σε ένα στερεό σχετίζονται με την ελαστική παραμόρφωση , ο *Poisson* έλαβε την εξίσωση $N - S$, με μερικές προσθήκες στον όρο κλίση πίεσης (*pressure gradient*).

Ο $Saint - Venant$, με τη σειρά του, σκεπτόμενος ως προς την εγκάρσια πίεση που ενεργεί στις πλευρές των σωματιδίων ολίσθησης ρευστού, έλαβε έναν τανυστή τάσης που αποδίδει τις διαφορικές εξισώσεις των $Navier, Cauchy$ και *Poisson* με παράμετρο μίας σταθεράς. Όλοι αυτοί οι ερευνητές του 19ου αιώνα προσπάθησαν να καλύψουν το κενό μεταξύ της ορθολογικής μηχανικής ρευστών του τέλειου μη ιξώδους ρευστού που αναπτύχθηκε τον 18ο αιώνα από τους $Bernoullis(Daniel\ and\ Johann), d'Alembert, Euler$ και *Lagrange*, και την πραγματική συμπεριφορά των πραγματικά ιξώδη ρευστών σε υδραυλικά συστήματα. Όσον αφορά τη συμμετοχή του $Stokes$ με την εξίσωση της κίνησης για ιξώδεις ροές, του οποίου το όνομα σχετίζεται επίσης με την εξίσωση $N - S$, αυτή ξεκινά με το ενδιαφέρον του για πειράματα εκκρεμούς που φαίνεται να υποδεικνύουν ότι το ιξώδες θα μπορούσε να διαδραματίσει ρόλο στην αλλοιωμένη συμπεριφορά της κίνησης του ιδανικού εκκρεμούς. Η πρώτη στρατηγική του $Stokes$ ήταν ο υπολογισμός των περιπτώσεων κινήσεων που περιλαμβάνουν ταλαντευόμενες σφαίρες και κυλίνδρους που θα αντιπροσώπευαν το βαρίδιο και το νήμα ανάρτησης ενός εκκρεμούς, λαμβάνοντας υπόψη την τέλεια ρευστότητα, για να διερευνήσει την απόκλιση των πραγματικών ρευστών από τα τέλεια ρευστά. Τόνισε ότι η τριβή, φυσικά, θα ήταν αιτία απόκλισης, αλλά όχι η μόνη. Στη συνέχεια υποδεικνύει άλλες αιτίες όπως η ασυνέχεια της ροής και οι αστάθειες που οδηγούν σε ένα τυρβώδες απόρρευμα (*wake*). Ωστόσο, ο $Stokes$ αναγνώρισε ότι χωρίς ακριβή πειράματα δεν ήταν δυνατόν να προχωρήσει στην αρχική του πρόταση. Στη συνέχεια άλλαξε τη στρατηγική του και αποφάσισε να συμπεριλάβει την εσωτερική τριβή ρευστού στις θεμελιώδεις εξισώσεις της υδροδυναμικής. Εφαρμόζοντας μεθόδους παρόμοιες με αυτές του *Cauchy* και του *Poisson*, έφτασε στην εξίσωση $N - S$

λέγοντας ότι αυτή η εξίσωση και η εξίσωση της συνέχειας «ισχύουν για τον προσδιορισμό της κίνησης του νερού σε σωλήνες και κανάλια, για τον υπολογισμό της τριβής στις κινήσεις της παλίρροιας και των κυμάτων, και τέτοια ερωτήματα».

Σχήμα 2: *George Stokes*

Δεδομένου ότι πολλοί ερευνητές επιβεβαίωσαν την εξίσωση κίνησης για ιξώδεις ροές όπως αναπτύχθηκε από τον *Navier*, μπορεί να αναρωτηθεί κανείς γιατί ο *Stokes* συνδέθηκε επίσης με αυτήν την εξίσωση. Η απάντηση μπορεί να είναι ότι έκανε εκτεταμένες συγκρίσεις θεωρίας και πειραμάτων διαφορετικών ερευνητών με κυλινδρικές ράβδους, σφαίρες, σφαίρες στο άκρο μακρών και κοντών ράβδων, ταλαντευόμενους δίσκους, μακρά και κοντά εκκρεμή ταλαντευόμενα σε αέρα και νερό κ.λπ. (*Stokes*, 1880). Παρά το γεγονός ότι είχε λανθασμένα υποθέσει ότι το ιξώδες είναι ανάλογο με την πυκνότητα, και που παρέλειψε τον όρο επιτάχυνσης μεταφοράς (*convectiveterm*) στην εξίσωση $N-S$, ο *Stokes* πέτυχε καλή συμφωνία με την εξίσωση $N-S$ συγκρίνοντας τις προβλέψεις με πειραματικά δεδομένα για την ταλάντωση των εκκρεμών. Επομένως, διαφορετικά από τους άλλους συγγραφείς της εξίσωσης $N-S$, και παρόμοια με τον *Navier*, ο *Stokes* είχε μια πολύ σαφή πρόθεση στην πρακτικότητα των προσπαθειών του, αντιμετωπίζοντας τη θεωρία με πειράματα, και αυτό μπορεί να είναι ένας λόγος για τον οποίο αυτός και ο *Navier* συσχετίστηκαν με την εξίσωση κίνησης για ιξώδεις ροές.

Το έργο του *B. de Saint − Venant* (1797-1886) συνέβαλε σημαντικά στη θεωρία των συνεκτικών ρευστών. Διατύπωσε τους νόμους για το νευτώνειο ρευστό με το ιξώδες και ο ογκικό ιξώδες καθώς και όλη την έννοια της ισοτροπικότητας. Με το έργο των *Navier* και *Venant* η θεωρία συνεχούς μέσου για το νευτώνειο ρευστό ήταν πλήρως θεμελιωμένη, παρολα αυτα οι εξισώσεις καθιερώθηκαν ως εξισώσεις *Navier − Stokes*. Ο *G.G. Stokes* (1819-1903) δημοσίευσε την εργασία του για τις εξισώσεις 11 έτη μετά από τον *Venant*.

Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι λύση για τις εξισώσεις αυτές έχει βρεθεί μόνο για τις δύο διαστάσεις, ενώ για τις τρεις παραμένει μέχρι και σήμερα ανοιχτό πρόβλημα.

1.2 Εξισώσεις *Navier − Stokes*

Οι εξίσώσεις *Navier − Stokes* είναι **μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξίσώσεις**, οι οποίες διέπουν την κίνηση των πραγματικών ιξώδων ρευστών και μπορεί να θεωρηθούν ως ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για τα ρευστά. Στην περίπτωση ενός ασυμπίεστου Νευτωνιακού ρευστού, η εξίσωση *Navier − Stokes* γραμμένη σε διανυσματική μορφή είναι:

$$\boxed{\partial_t u + u \cdot \nabla u = g - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta u}, \tag{1.1}$$

όπου u είναι το διάνυσμα ταχύτητας, g είναι το διάνυσμα επιτάχυνσης , p είναι η πίεση, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ είναι το κινηματικό ιξώδες, μ είναι το δυναμικό ιξώδες και ϱ είναι η πυκνότητα. Σημειώνουμε ότι:

$$a = \partial_t u + u \cdot \nabla u,$$

είναι η επιτάχυνση του ρευστού σωματιδίου και η:

$$\Sigma F = g - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta u,$$

είναι το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν στο σωματίδιο ρευστού ανά μονάδα μάζας, τότε ισχύει ότι:

$$a = \Sigma F$$

που είναι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα ανά μονάδα μάζας. Η επιτάχυνση a αποτελείται από δύο μέρη, το πρώτο $\partial_t u$ είναι η τοπική (*local*) επιτάχυνση και αντανακλά την μεταβολή της ταχύτητας με το χρόνο που παρατηρείται σε ένα σταθερό σημείο στην ροή καθώς περνούν τα σωματίδια. Το δεύτερο μέρος $u \cdot \nabla u$ είναι η επιτάχυνση μεταφοράς (*convective*) και αντανακλά την μεταβολή της ταχύτητας στο χώρο καθώς ένα σωματίδιο μετακινείται από ένα σημείο σε ένα άλλο στο πεδίο ροής σε απειροελάχιστο χρόνο. Εδώ το g, αντιπροσωπεύει τη δύναμη ανά μονάδα μάζας, και υποδεικνύει τη δύναμη (όπως τη βαρυτική δύναμη ή την ηλεκτρομαγνητική δύναμη) που δρα στο ρευστό σωματίδιο. Το $\frac{1}{\rho}\nabla p$ είναι ο όρος πίεσης και δείχνει ότι το ρευστό ρέει προς την κατεύθυνση της μεγαλύτερης μεταβολής της πίεσης, νΔu είναι ο ιξώδης όρος και υποδεικνύει τη δύναμη τριβής λόγω του ιξώδους που επιδρά στο ρευστό σωματίδιο καθώς ρέει με ταχύτητα υ. Τόσο η δύναμη πίεσης όσο και η ιξώδης δύναμη είναι δυνάμεις που δρουν στην επιφάνεια ενός σωματιδίου του ρευστού, και ως εκ τούτου ταξινομούνται στις εξωτερικές δυνάμεις.

Οι εξισώσεις $Navier - Stokes$ έχουν χρησιμοποιηθεί από πολλούς μηχανικούς και φυσικούς για την επίλυση πολλών προβλημάτων και θεωρούνται από τις σημαντικότερες εξισώσεις της μαθηματικής φυσικής. Για τις εξισώσεις αυτές ο *Leray*, το 1924, κατασκεύασε ασθενείς λύσεις στον $\mathbb{R}^3$. Αργότερα, το 1951, ο $Hopf$ απέδειξε την ύπαρξη ασθενών λύσεων σε φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο *Galerkin* και ισχυρίστηκε ότι η ίδια απόδειξη ισχύει και για τα μη φραγμένα χωρία. Έτσι, η ασθενής λύση ορίζεται ως:

Ορισμός: Έστω οι χώροι $H(\Omega) := \{u \in L^2, \operatorname{div} u = 0\}$ και $V(\Omega) := \{u \in H^1, \operatorname{div} u = 0\}$, τότε η συνάρτηση u καλείται ασθενής λύση $Leray - Hopf$ του προβλήματος:

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u + \operatorname{div} u \otimes u + \nabla q = f, &\text{ όπου } f \in L^2(0,T;V'), \\ u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, &\text{ όπου } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = a. & \end{aligned} \tag{1.2}$$

αν έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$,

   Αν ϕ συνάρτηση ελέγχου ϕ, τέτοια ώστε $\phi \in C_c^\infty(\Omega \times [0,T])$ και $\operatorname{div} \phi = 0$ τότε:

2. η συνάρτηση $t \mapsto \int_\Omega u(x,t) \cdot \phi(x,t)\, dx$ είναι συνεχής στο $[0,T]$,

3. $\int_\Omega (-u \cdot \partial_t \phi - \nabla u : \nabla \phi + u \otimes u : \nabla \phi - f \cdot \phi)\, dx = 0,\ \ ,$

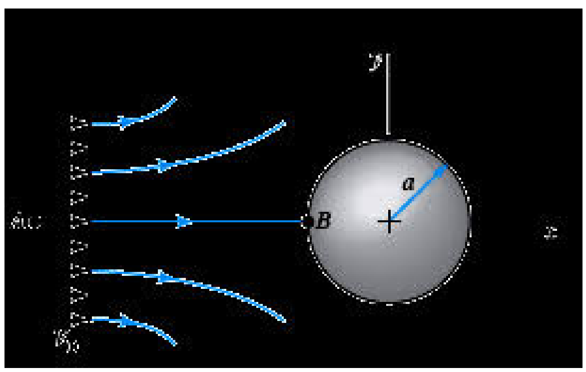
4. $\int_\Omega |u(x,t) - a(x)|^2\, dx \to 0$, καθώς $t \to 0^+$,

5. $\frac{1}{2} \int_\Omega |u(x,t)|^2\, dx + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2\, dxdt \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |a(x)|^2\, dx + \int_0^T \int_\Omega f \cdot u\, dxdt\ \forall t \in [0,T]$.

Έχει αποδειχθεί ότι στις δυο διαστάσεις η ασθενής λύση είναι μοναδική και ομαλή όταν τα δεδομένα μας είναι αρκετά ομαλά. Συνεπώς, για ομαλά δεδομένα έχουμε κλασσική λύση. Αντιθέτως, στις τρεις διαστάσεις αυτό είναι ανοιχτό πρόβλημα και τα αποτελέσματα που έχουμε είναι ότι μικρά δεδομένα μας δίνουν λύσεις που ορίζονται για όλους τους χρόνους, ενώ για κανονικά δεδομένα μας δίνουν ύπαρξη λύσης για μικρούς χρόνους.

1.3 Το πρόβλημα κίνησης στερεού σώματος σε ρευστό

Υπάρχουν πολλά ενδιαφέροντα προλήματα με τα οποία ασχολείται η υδροδυναμική ένα εκ των οποίων αφορά τη κίνηση στερεού σώματος σε ρευστό. Η κίνηση των στερεών σωμάτων σε ένα παχύρευστο υγρό είναι ζωτικής σημασίας για πολλά φαινόμενα, όπως η ροή του αίματος, η καθίζηση ή η διήθηση. Η δύναμη που ασκείται από το ρευστό σε στερεά σώματα είναι ένα πρόβλημα με πολλές εφαρμογές.



Σχήμα 3: Κίνηση στερεού σώματος σε ρευστό

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος έχει ως εξής:
Έστω ο χώρος $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, ο οποίος θα είναι ή ημίχωρος ή ημιεπίπεδο που περιέχει κάποιο Νευτώνιο ρευστό. Μέσα στο χώρο Ω κινείται ένα σώμα S, το οποίο κάθε χρονική στιγμή καταλαμβάνει ένα χώρο $S(t)$. Ως σώμα S έχουμε θεωρήσει στις δυο διαστάσεις ένα δίσκο και αντίστοιχα στις τρεις μια μπάλα.Μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τη δύναμη που ασκείται από το ρευστό στο στερεό σώμα S. Ορίζουμε ως x_S το κέντρο μάζας του στερεού σώματος, ως u_0 την ταχύτητα στο σημείο x_S και ως ω τη γωνιακή ταχύτητα.
Αν $\mathbb{T}$ ο τανυστής των τάσεων που δίδεται από:

$$\boxed{\mathbb{T} = 2D(u) - pI_n} \tag{1.3}$$

με

$$\boxed{D(u) = \frac{\nabla u + (\nabla u)^T}{2}}.$$

τότε το πρόβλημα περιγράφεται από:

$$\begin{cases} \partial_t u + Re(u \cdot \nabla u) = \operatorname{div}(\mathbb{T}(u,p)) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{στο } F(t), \end{cases}$$

με συνοριακές συνθήκες μη ολίσθησης:

$$\begin{cases} u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u|_{\partial S} = u_0 + \omega \times (x - x_S), \end{cases}$$

όπου Re η σταθερά του *Reynolds*. Επίσης, από το νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$-\int_{\partial S} \mathbb{T}(u,p)n \, d\sigma = m\dot{u}_0,$$

όπου m η μάζα του στερεού S. Επίσης, ο νόμος διατήρησης της ορμής δίδεται από :

$$-\int_{\partial S} (x - x_S) \times (\mathbb{T}(u,p)n) \, d\sigma = (J\omega)^{\cdot},$$

ενώ ο νόμος διατήρησης της στροφορμής δίδεται από:

$$-\int_{\partial S} (x - x_S)^{\perp} \cdot (\mathbb{T}(u,p)n) \, d\sigma = (J\omega)^{\cdot},$$

όπου J η ροπή αδράνειας. Επίσης. όταν $x \in S(t)$ τότε $D(u) = 0$, αφού δεν υπάρχει κίνηση μεταξύ των σημείων του στερεού.

Οι πρώτες έρευνες εστίασαν στο πρόβλημα δύο σφαιρών που κινούνται ομοιόμορφα με την ίδια ταχύτητα σε ένα ιξώδες ρευστό από τους *Stimson* και *Jeffery* το 1926. Το 1961, ο *Brenner* (βλέπε [10])ακολουθώντας το παράδειγμα των δύο προηγούμενων ασχολήθηκε με τη μελέτη της κίνησης μιας σφαίρας με συγκεκριμένο πεδίο ταχυτήτων κοντά σε στερεό σύνορο. Για τη μελέτη του, θεώρησε ότι η σταθερά *Reynolds* είναι αρκετά μικρή και βασίστηκε στη συμμετρία του στερεού. Έπειτα το 1964, ο *M. O'Neil* (βλέπε [13]) μελέτησε την κίνηση μιας σταθερής σφαίρας που περιστρέφεται με τέτοιο τρόπο ώστε η διάμετρός της να είναι παράλληλη στο κάτω στερεό σύνορο, χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες. Λίγα χρόνια αργότερα, το 1967, μαζί με τον *K. Stewartson* (βλέπε [14]) εξέλιξαν την προηγούμενη μελέτη του *M. O'Neil* και ασχολήθηκαν με τον υπολογισμό της δύναμης όταν η απόσταση της σφαίρας και του επιπέδου είναι αρκετά μικρή. Έτσι κατασκεύασαν λύσεις γύρω από την περιοχή όπου η σφαίρα και το επίπεδο βρίσκονται πολυ κοντά,όπου οι κλίσεις ταχύτητας και η πίεσης είναι πολύ μεγάλες και η λύση αυτή ικανοποιεί τις εξισώσεις της θεωρίας λίπανσης. Στη συνέχεια, ο *M. O'Neil* και ο *Cooley* (βλέπε [6]) (1969), ασχολήθηκαν με την κίνηση ενός ιξώδους ρευστού που παράγεται απο την κίνηση μιας σφαίρας πάνω από ένα τοίχο ή μια άλλη στάσιμη σφαίρα. Μετά τη σκιτάλη πήρε ο *L. Hocking* (βλέπε [12]) (1973), ο οποίος ερεύνησε την επίδραση της ολίσθησης στην κίνηση μιας σφαίρας και δυο γειτονικών σφαιρών. Έτσι, εξέλιξη αυτής της έρευνας αποτελεί η παρούσα εργασία στην οποία μελετάται η δυναμική μιας άκαμπτης σφαίρας κοντά σε ένα τοίχο, καθώς αυτή κινείται σε ένα νευτώνιο ρευστό, υπό συνθήκες μη ολίσθησης και ολίσθησης.

Τα τελευταία χρόνια, υπήρξε ενδιαφέρον για την επίλυση του προβλήματος αυτού από τους μαθηματικούς. Οι πρώτοι που ασχολήθηκαν με το πρόβλημα αυτό ήταν ο *San Martin* και οι συνεργάτες του, όσον αφορά τις δύο διαστάσεις και ο *Feireisel*, όσον αφορά τις τρεις. Το πρόβλημα αυτό αποτέλεσε αντικείμενο πολλών ερευνών και για τους σύγχρονους μαθηματικούς. Έτσι, τα ερώτηματα που μας ενδιαφέρουν σε σχέση με αυτό το πρόβλημα είναι:

1. ποια δύναμη ασκείται από το ρευστό στο στερεό,
2. τι μπορούμε να πούμε για το πεδίο πίεσης γύρω από το στερεό,
3. τι μπορούμε να πούμε για το πεδίο ροής γύρω από το στερεό.

Ένα ενδιαφέρον άρθρο που εστιάζει στο υπολογισμό της δύναμης που ασκείται από το ρευστό στο στερεό είναι η εργασία των $David\, G\grave{e}rard - Varet$ και $Matthieu\, Hillairet$ (βλέπε [2]), η οποία θα αποτελέσει και το βασικό αντικείμενο της παρούσας εργασίας. Το αποτέλεσμα τόσο των μαθηματικών όσο των μηχανικών δείχνει ότι με τη συνθήκη προσκόλλησης δεν υπάρχει επαφή του σώματος με το σύνορο. Συγκεκριμένα, αυτό που αποδεικνύεται είναι ότι καθώς το σώμα πλησιαζει πολύ κοντά στο σύνορο η δύναμη είναι απωθητική και μεγαλώνει σε τετοιο βαθμό που έχεις ως αποτέλεσμα το σώμα να μην ακουμπάει ποτέ το στερεό σύνορο. Αυτό συμβαίνει στη περίπτωση πολύ ομαλών συνόρων. Άρα, λοιπόν, για να ξεπεραστεί αυτό που φαίνεται να είναι παράδοξο, προτείνονται δυο πράγματα. Πρώτον, να πάψει το σύνορο του σώματος ή το τοίχωμα του δοχείου μέσα στο οποίο βρίσκεται το ρευστό να είναι ομαλό και να έχει κάποια τραχύτητα και δεύτερον, να αλλάξουμε τις συνοριακές συνθήκες έτσι ώστε να επιτρέπεται ολίσθηση του ρευστού στο σύνορο του F ή του στερεού συνόρου. Αυτό αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης για τους παραπάνω συγγραφείς και κατ΄ επέκταση και εμάς.

Στόχος της εργασίας είναι να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκείται σε ένα στερεό σώμα από ένα παχύρευστο ρευστό.

2 Προσέγγιση του προβλήματος από τους μηχανικούς

Για την επίλυση του προβλήματος θα πάρουμε μια ειδική περίπτωση όπου το σώμα S είναι μπάλα και το δοχείο Ω, μέσα στο οποίο βρίσκεται το ρευστό και το σώμα, που είναι ένας ημίχωρος, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4. Οι μηχανικοί χρησιμοποίησαν τη θεωρία λίπανσης, *lubrication theory* (βλέπε [7]), η οποία αναφέρεται στη κίνηση ενός στερεού σώματος S μέσα σε ένα ρευστό που καταλαμβάνει ένα χώρο Ω. Οι βασικές υποθέσεις της θεωρίας λίπανσης είναι:

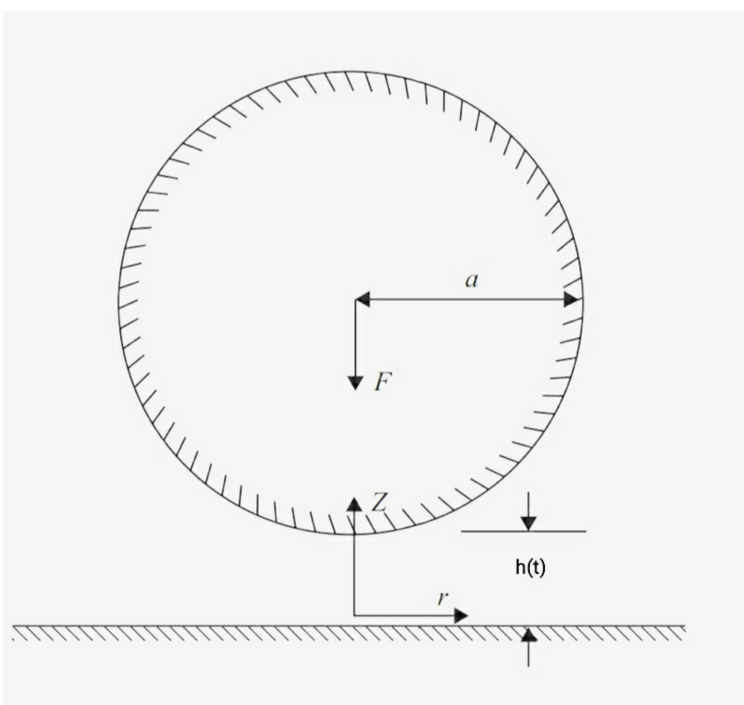
1. το στερεό σώμα S που κινείται βρίσκεται πολύ κοντά (σε σχέση με τις διαστάσεις του σώματος) στο στερεό εξωτερικό σύνορο του Ω,

2. το σώμα κινείται με πολύ χαμηλές ταχύτητες, έτσι ώστε η κίνηση να θεωρείται σχεδόν στατική,

3. οι σημαντικές μεταβολές της ταχύτητας είναι κατά την κατεύθυνση που είναι κάθετη στα δυο σύνορα και όχι κατά την κατεύθυνση της ροής.

Αυτές οι υπόθεσεις μας επιτρέπουν να κάνουμε κάποιες απλοποιήσεις στις εξισώσεις $N-S$, οι οποίες καταλήγουν στις εξισώσεις για τη θεωρία λίπανσης που μας καθιστούν εφικτό να βρίσκουμε λύσεις για τέτοιου τύπου προβλήματα.

Ένα παράδειγμα εφαρμογής της παραπάνω θεωρίας είναι το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει στην παρούσα εργασία, δηλαδή η κίνηση μιας σφαίρας προς ένα σταθερό επίπεδο, όταν η απόσταση μεταξύ της σφαίρας και του επιπέδου στο σημείο της πλησιέστερης προσέγγισης είναι μικρή σε σύγκριση με την ακτίνα της σφαίρας. Θεωρούμε μια σφαίρα ακτίνας a, της οποίας το κέντρο απέχει από τον τοίχο $a+h$.



Σχήμα 4: Μελέτη προβλήματος Μηχανικών

Η σφαίρα κινείται κατακόρυφα προς το κάτω σταθερό σύνορο υπό τη δράση μιας δύναμης F και ο στόχος είναι να υπολογιστεί η δύναμη. Με βάση όσα αναφέραμε παραπάνω για τη θεωρία λίπανσης:

1. έχουμε θεωρήσει τη κίνηση αρκετά αργή,
2. $\frac{h}{a} << 1$,
3. η ταχύτητα u μεταβάλλεται κυρίως κατά τον άξονα z.

Το πεδίο ροής χωρίζεται στη συνέχεια σε δύο μέρη, τη περιοχή μεταξύ της σφαίρας και του επιπέδου όπου εφαρμόζονται οι εξισώσεις λίπανσης και στον υπόλοιπο χώρο όπου οι εξισώσεις λίπανσης δεν βρίσκουν εφαρμογή. Έτσι, εστιάζουμε την προσοχή μας στην απόκτηση μιας προσεγγιστικής λύσης. Η εξίσωση που περιγράφει το πάχος του στρώματος ως συνάρτηση του χρόνου σε αδιάστατη μορφή είναι η *Reynolds* (βλέπε [7] σελ. 313) που δίδεται από:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= \nabla \cdot \left[\frac{\gamma^3}{12} \nabla p + \frac{\gamma}{2} U \right], \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

όπου $\gamma(x, y, t)$ η καμπύλη που περιγράφει το κάτω μέρος του στερεού σώματος και U η ταχύτητα της ελεύθερης ροής (οριζόντια ταχύτητα).

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα που μας απασχολεί, την κατακόρυφη κίνηση μια μπάλας, το U είναι μηδέν και ο τελευταίος όρος φεύγει, καθώς η σφαίρα πέφτει κατακόρυφα και δεν έχει οριζόντια κίνηση. Επιπλέον, η κίνηση της σφαίρας, η οποία δημιουργείται στο λεπτο στρώμα θα είναι αξισυμμετρική. Ως εκ τούτου, η πιο βολική επιλογή συντεταγμένων είναι οι κυλινδρικές, με τον άξονα z να είναι ο άξονας κίνησης. Έτσι, η κίνηση της σφαίρας θα είναι ανεξάρτητη από τη γωνία, και η (2.1) μπορεί να εκφραστεί σε διαστατική μορφή ως:

$$12\mu \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\gamma^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right). \tag{2.2}$$

όπου μ το διανυσματικό ιξώδες. Επίσης, η καμπύλη γ περιγράφεται από:

$$\gamma(r, t) = a + h(t) - \sqrt{a^2 - r^2}.$$

όπου α η ακτίνα της σφαίρας και h η απόσταση της σφαίρας από το κάτω σταθερό σύνορο.
Η (2.2) εφαρμόζεται :

1. για μια μικρή περιοχή γύρω από το κάτω άκρο της μπάλας, δηλαδή $0 < r < R$, όπου R τέτοιο ώστε:
2. $\frac{R}{\alpha} << 1 << \frac{R}{h}$.

Στη περίπτωση αυτή η καμπύλη περιγράφεται από:

$$\gamma(r, t) = h(t) + \frac{a}{2} \left(\frac{r^2}{a^2} \right) + O\left(\frac{r^4}{a^4} \right).$$

Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι το $\partial_t \gamma = \dot{h}$ δεν εξαρτάται από το r. Έτσι ολοκληρώνοντας την εξίσωση (2.2) ως προς r έχουμε ότι:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 12\mu \frac{\partial \gamma}{\partial t}\left(\frac{r}{2\gamma^3} + \frac{c}{r\gamma^3}\right),$$

όπου c μια σταθερά. Από τη συμμετρία του προβλήματος γνωρίζουμε ότι $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ στο $r = 0$. Συνεπώς, $c = 0$ και άρα:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 6\mu \frac{\partial \gamma}{\partial t}\frac{r}{\gamma^3},$$

Ολοκληρώνοντας λοιπόν ως προς r παίρνουμε ότι:

$$-p(r) + p(R) = 6\mu \frac{\partial \gamma}{\partial t}\int_r^R \frac{s\,ds}{\gamma^3(s,t)}. \tag{2.3}$$

όπου R μια τιμή του r, η οποία αναφέρεται στο ανώτερο σημείο που βρίσκεται μέσα στο ρευστό. Συνεπώς, μπορούμε να αντιληφθούμε ότι όταν $\frac{h}{a} \longrightarrow 0$ τότε η πίεση στο πάνω μισό της σφαίρας παύει να εξαρτάται από το R. Χρησιμοποιώντας την τελική μορφή της καμπύλης γ και τη (2.3) παίρνουμε ότι:

$$p(r) - p(R) = -6\mu \frac{dh}{dt}\left[\frac{2a^3}{(2ah + r^2)^2} - \frac{2a^3}{(2ah + R^2)^2}\right]. \tag{2.4}$$

Τώρα, δεδομένου αυτού του τύπου για την κατανομή πίεσης, μπορούμε να υπολογίσουμε την κατακόρυφη, υδροδυναμική δύναμη που ασκείται από το υγρό στη σφαίρα. Όπως συνήθως στη θεωρία λίπανσης, η υδροδυναμική δύναμη στη σφαίρα κυριαρχείται από τις δυνάμεις λίπανσης και σε αυτήν την περιοχή οι δυνάμεις πίεσης είναι $\mathrm{O}\left(\frac{R}{h}\right) >> 1$ είναι μεγαλύτερες από τις δυνάμεις που ασκούνται από το ρευστό. Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα προκύπτει ότι:

$$\Sigma F = 0 \Longrightarrow F = F_{\text{υδρ.}}$$

Επομένως προκύπτει ότι η υδροδυναμική δύναμη που ασκήθηκε από το υγρό στη σφαίρα μπορεί να εκφραστεί στη μορφή:

$$\boxed{e_z \cdot \mathcal{F} = -\int_A p(n \cdot e_z)\, dA.}$$

όπου με Α συμβολίζεται η περιοχή γύρω από τη σφαίρα.

Τώρα για να υπολογίσουμε τη δύναμη σε κυλινδρικές συντεταγμένες πρέπει να υπολογίσουμε αρχικά το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα της επιφάνειας, το οποίο δίδεται από:

$$n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|},$$

όπου:

$$f = z - \gamma(r,t),$$

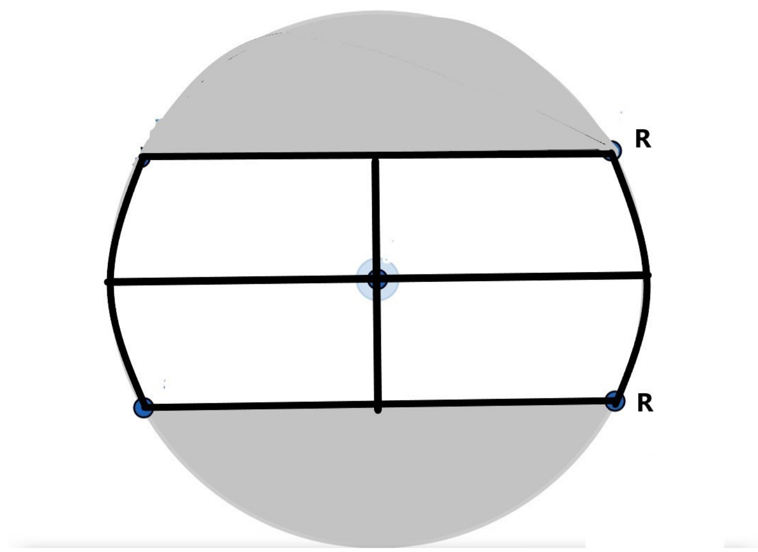
η οποία είναι μηδέν στην επιφάνεια της σφαίρας. Άρα,

$$n = -\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} e_z + \frac{r}{a} e_r.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν μας και την αλλαγή μεταβλητής προκύπτει ΄ότι:

$$dA = \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} r\ dr d\theta.$$

Για να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκείται ολοκληρώνουμε την πίεση σε όλη την επιφάνεια της σφαίρας. Χρειάζεται να λάβουμε υπόψιν μας ότι η πίεση που ασκείται στο κομμάτι της σφαίρας που δεν εφαρμόζεται η θεωρία λίπανσης, θεωρείται σταθερή $p = p(R)$. Έτσι το ολοκλήρωμα μας σπάει σε τρία κομμάτια, όπως φαίνεται παρακάτω.



Σχήμα 5: Υπολογισμός δύναμης

Συνεπώς, η δύναμη στο κάτω σκιασμένο κομμάτι της σφαίρας δίδεται από:

$$\int_0^R p(r)\, r\, dr,$$

ενώ στο πάνω το οποίο είναι και συμμετρικό του προηγούμενου δίδεται από:

$$\int_R^0 p(R)\, r\, dr.$$

Μας έχει μείνει να υπολογίσουμε το ενδιάμεσο κομμάτι όπου γνωρίζουμε ότι η πίεση είναι σταθερή και έτσι λόγω συμμετρίας το ολοκλήρωμα θα μας δώσει μηδέν. Επομένως, η συνολική δύναμη δίδεται από:

$$\begin{aligned} e_z \cdot \mathcal{F} &= 2\pi \left[\int_0^R p(r)\, r dr + \int_R^0 p(R)\, r dr \right] \\ &= 2\pi \left[\int_0^R p(r)\, r dr - \int_0^R p(R)\, r dr \right] \\ &= 2\pi \int_0^R [p(r) - p(R)]\, r dr. \end{aligned}$$

Επειδή η πίεση είναι σταθερή($p = p(R)$) παντού έξω από το στρώμα λίπανσης, τότε η διαφορά πίεσης $p(r) - p(R)$ θα μας δώσει μια πρώτη προσέγγιση για τη δύναμη που ασκείται από το ρευστό στη σφαίρα. Έτσι, με την αντικατάσταση του $p(r) - p(R)$ στην $\mathcal{F}$ έχουμε ότι:

$$e_z \cdot \mathcal{F} = \frac{6\pi^2}{h} \left[1 - \frac{2ah}{(2ah + R^2)} - \frac{2ahR^2}{(2ah + R^2)^2} \right].$$

Τέλος, αν $\frac{R^2}{2ah} >> 1$ τότε:

$$e_z \cdot \mathcal{F} \sim \frac{6\pi\mu\dot{h}a^2}{h}.$$

Παρατηρήσεις:

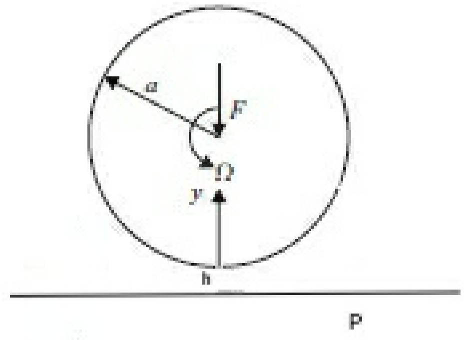
1. Για την επίλυση του προβλήματος οι μηχανικοί υπολόγισαν προσεγγιστικά την πίεση στο κάτω μέρος της σφαίρας και δέχτηκαν ότι η πίεση είναι σταθερή στο πάνω μισό της σφαίρας.

2. Η βασική υπόθεση του τρόπου προσέγγισης αυτής της λύσης είναι ότι οι αδρανειακές δυνάμεις ήταν αρκετά μικρές και συνεπώς τους όρους αυτούς τους ″πέταξαν″.

3. Δεν υπάρχει οριζόντια κίνηση και ως άξονας κίνησης έχει θεωρηθεί ο κατακόρυφος.

4. Σύμφωνα με τη θεωρία λίπανσης, η κλίση της ταχύτητας (∇u) κατά τον άξονα x είναι πολύ μικρή κατά την ακτινική κατεύθυνση.

3 Προσέγγιση του προβλήματος από τους μαθηματικούς



Σχήμα 6: Γενικό Πρόβλημα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα προσεγγίσουμε το πρόβλημα με πιο μαθηματικό τρόπο, όπως το έχουν μελετήσει οι *Matthieu Hillairet* και *David Gérard−Varet* το 2012 στο άρθρο πάνω στο οποίο είναι βασισμένη η παρούσα εργασία (*Computation of the drag force on a sphere close to a wall−The roughness issue.*). Οι μαθηματικοί αυτοί, όπως και οι μηχανικοί , έχουν ″πετάξει″ τις αδρανειακές δυνάμεις από τις εξισώσεις $N-S$, καταλήγοντας στην εξίσωση *Stokes*, την οποία μελετάνε με τη βοήθεια της θεωρίας του Λογισμού Μεταβολών. Θα υπολογίσουμε λοιπόν, τη δύναμη που ασκεί το ρευστό πάνω σε μια σφαίρα $S(t)$ με τις προηγούμενες γεωμετρικές υποθέσεις, η οποία κινείται κατακόρυφα κατά τον άξονα z. Πιο συγκεκριμένα, ο χώρος Ω θα είναι ή ημίχωρος ή ημιεπίπεδο και για S θα πάρουμε μια μπάλα ή ενα δίσκο αντίστοιχα, στην οποία θα κάνουμε μια μικρή παραμόρφωση στο κάτω άκρο. Η δύναμη αλλάζει ανάλογα με την απόσταση μεταξύ της σφαίρας και του στερεού συνόρου. Συνεπώς, η δύναμη εξαρτάται τελικά από την απόσταση του στερεού σώματος από το κάτω στερεό σύνορο, την οποία συμβολίζουμε με h. Θα μελετήσουμε λοιπόν, ένα συμμετρικό και σχεδόν στατικό πρόβλημα στο οποίο οι μεταβολές στο πεδίο ταχύτητας είναι μικρές με αποτέλεσμα το πρόβλημα που κοιτάμε να είναι το:

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbb{T} = 0, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad x \in F}. \tag{3.1}$$

όπου $u = u(t, x)$ η ταχύτητα του ρευστού και $p = p(t, x)$ η πίεση του ρευστού, τα οποία εξαρτώνται τόσο από το χρόνο t όσο και από την απόσταση h και Τ όπως έχει οριστεί. Υπενθυμίζουμε:

$$\boxed{\mathbb{T} = 2D(u) - pI_n}. \tag{3.2}$$

Έτσι, καταλήγουμε στο πρόβλημα:

$$\boxed{\Delta u + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad x \in F}. \tag{3.3}$$

Ο στόχος μας είναι να υπολογίσουμε τη δύναμη πάνω στη σφαίρα, η οποία δίδεται από:

$$\boxed{\mathcal{F}_d := \int_{\partial S} (2D(u) - pI)n \, d\sigma \cdot e_z}.$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι:
όσον αφορά στο στερεό σώμα $S(t)$,

$$\begin{aligned}(u-\dot h(t)e_z)\cdot n|_{\partial_S} &= 0, \quad \text{(συνθήκη για κάθετη συνιστώσα ταχύτητας)}\\ (u-\dot h(t)e_z)\times n|_{\partial_S} &= -2\beta_S[D(u)n]\times n|_{\partial_S}, \quad \text{(συνθήκη για εφαπτομενική συνιστώσα ταχύτητας)}\end{aligned} \tag{3.4}$$

και όσον αφορά το κάτω στερεο σύνορο P :

$$\begin{aligned}u\cdot n|_P &= 0, \quad \text{(συνθήκη για κάθετη συνιστώσα ταχύτητας),}\\ u\times n|_P &= -2\beta_P[D(u)n]\times n|_{\partial_P}, \quad \text{(συνθήκη για εφαπτομενική συνιστώσα ταχύτητας).}\end{aligned} \tag{3.5}$$

Θα αναζητήσουμε λύσεις της εξίσωσης $Stokes$ με

$$u(t,x)=\dot h(t)u_{h(t)}(x),$$

και

$$p(t,x)=\dot h(t)p_{h(t)}(x),$$

όπου u_h, p_h η ταχύτητα και η πίεση του στάσιμου προβλήματος Stokes, αφού βλέπουμε ότι με αντικατάσταση αυτών στο πρόβλημα το επαληθεύουν, . Συνεπώς η δύναμη τώρα δίδεται από:

$$\boxed{\mathcal{F}_d=\dot h\mathcal{F}, \quad \mathcal{F}:=\int_{\partial S}(2D(u_h)-p_hI_n)\,d\sigma\cdot e_z}. \tag{3.6}$$

Όσον αφορά τις συνοριακές συνθήκες (3.4),(3.5) θα έχουμε δυο ειδών. Την περίπτωση **μη ολίσθησης**, όπου $\beta_S=\beta_P=0$ πάνω στο στερεό σώμα $S(t)$:

$$\boxed{u|_{\partial_S}=e_z},$$

και συνοριακές συνθήκες στο κάτω σταθερό σύνορο P:

$$\boxed{u|_P=0},$$

και την περίπτωση **ολίσθησης**, όπου $\beta_S>0, \beta_P>0$ και με συνοριακές συνθήκες πάνω στο στερεό σώμα $S(t)$:

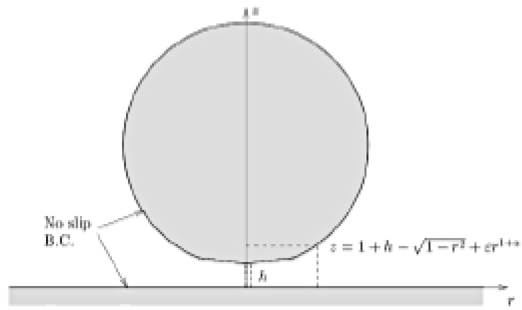
$$\boxed{\begin{aligned}(u-e_z)\cdot n|_{\partial_S} &= 0\\ (u-e_z)\times n|_{\partial_S} &= -2\beta_S[D(u)n]\times n|_{\partial_S}\end{aligned}},$$

και συνοριακές συνθήκες στο κάτω σταθερό σύνορο P:

$$\boxed{\begin{aligned}&u\cdot n|_P=0,\\ &u\times n|_P=-2\beta_P[D(u)n]\times n|_{\partial_P}\end{aligned}}.$$

Σκοπός της εργασίας λοιπόν είναι να υπολογίσουμε την $\mathcal{F}$ ως συνάρτηση του h καθώς $h\longrightarrow 0$. Θα λύσουμε το πρόβλημα σε δύο περιπτώσεις. Στη πρώτη περίπτωση θα το λύσουμε με συνοριακές συνθήκες που δεν επιτρέπουν την ολίσθηση ($\beta_S=\beta_P=0$) του στερεού σώματος στο ρευστό και χαλάμε λίγο την ομαλότητα για να δούμε πώς η μειωμένη ομαλότητα επηρεάζει τη δύναμη. Ενώ στη δεύτερη περίπτωση θα το επιτρέπουν ($\beta_S,\beta_P>0$). Επίσης θα μελετήσουμε το πρόβλημα τόσο στις τρεις όσο και στις δύο διαστάσεις. Στη συνέχεια για λόγους απλότητας έχουμε θεωρήσει $u_h=u$.

4 Συνοριακές συνθήκες Dirichlet ($No - slip$)



Σχήμα 7: Περίπτωση μη ολίσθησης-Συνθήκες *Dirichlet*

Στην ενότητα αυτη υποθέτουμε ότι είμαστε στον $\mathbb{R}^n$ με $n = 2$ ή $n = 3$ και μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τη δύναμη, παίρνοντας την περίπτωση μη ολίσθησης,όπου β_P=β_S=0 και έτσι οι συνοριακές συνθήκες γίνονται:

$$\begin{aligned} u|_{\partial S} &= e_z, \\ u|_P &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ο κατάλληλος χώρος συναρτήσεων για να μελετήσουμε αυτό το πρόβλημα είναι ο χώρος $H(\mathbb{R}^n_+, S)$, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

(α) $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n_+, S)$ είναι ο χώρος που περιέχει τις συναρτήσεις $u : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n, u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ που ικανοποιούν:

- $\operatorname{div} u = 0$
- $u|_S = u_S + \omega \times (x - x_s)$

(β) Ο χώρος $H(\mathbb{R}^n_+, S)$ είναι η πλήρωση του χώρου $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n_+, S)$ με τη νόρμα H^1 .
Αρχικά, βρίσκουμε μια σχέση που συνδέει το ∇u με το $D(u)$. Έχουμε ότι:

Λήμμα 4.1. *: Αν η $u \in H(\mathbb{R}^n_+, S)$ ικανοποιεί την* (3.1) *με τις συνοριακές συνθήκες* (4.1) *τότε:*

$$\boxed{\int_F |\nabla u|^2 = 2\int_F |D(u)|^2}. \tag{4.2}$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} 2\int_F |D(u)|^2 &= 2\int_F \left[\frac{\nabla u + (\nabla u)^T}{2}\right] : \left[\frac{\nabla u + (\nabla u)^T}{2}\right] = \frac{1}{2}\int_F [\nabla u + (\nabla u)^T]^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_F \sum_{i,j}[(u_{i,x_j} + u_{j,x_i})]^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_F (u^2_{i,x_j} + u^2_{j,x_i} + 2u_{i,x_j}u_{j,x_i}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_F (u^2_{i,x_j} + u^2_{j,x_i}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_F (2u_{i,x_j}u_{j,x_i}) \\ &= \frac{1}{2}\int_F (|\nabla u|^2 + |(\nabla u)|^2) + \sum_{i,j}\int_F u_{i,x_j}u_{j,x_i} \\ &= \int_F |\nabla u|^2 + \int_F \nabla u : (\nabla u)^T. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Θα υπολογίσω το ολοκλήρωμα $\int_F \nabla u : (\nabla u)^T$.Έχω ότι:

$$\begin{aligned}\nabla u : (\nabla u)^T &= \sum_{i,j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \sum_{i,j} u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \\ &= \operatorname{div}(u \cdot \nabla u) - (u \cdot \nabla u)\operatorname{div} u = \operatorname{div}(u \cdot \nabla u), \quad \text{αφού } \operatorname{div} u = 0.\end{aligned}$$

Άρα προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}\int_F \nabla u : (\nabla u)^T &= \int_F div(u \cdot \nabla u) = \int_{\partial F} u \cdot \nabla u \cdot n dS = \int_{\partial S \cup P} u \cdot \nabla u \cdot n dS \\ &= \int_{\partial S} u \cdot \nabla u \cdot n dS, \quad \text{αφού} \quad u|_P = 0.\end{aligned}$$

Αν δεχτούμε ότι $u \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n_+, S)$ τότε:

$$\int_{\partial S} u \cdot \nabla u \cdot n dS = \int_S \operatorname{div}(u \cdot \nabla u) = 0,$$

αφού $u = e_z$ στο S άρα $\nabla u = 0$. Επομένως, $\int_F \nabla u : (\nabla u)^T = 0$ και άρα το αποτέλεσμα προκύπτει από την (4.3).

□

Στη συνέχεια βρίσκουμε έναν απλό τύπο που μας υπολογίζει τη δύναμη $\mathcal{F}$. Έχουμε:

Λήμμα 4.2. *Αν η $u \in H(\mathbb{R}^n_+, S)$ ικανοποιεί την εξίσωση Stokes* (3.3) *με συνοριακές συνθήκες* (4.1) *τότε η δύναμη $\mathcal{F}$ θα δίνεται από τον τύπο:*

$$\boxed{\int_{\partial S} (2D(u)n - pn)\, d\sigma \cdot e_z = \int_F |\nabla u|^2.} \tag{4.4}$$

Απόδειξη:

Το πρόβλημα (3.1) είναι ισοδύναμο με το $\operatorname{div} \mathbb{T} = 0$. Συνεπώς αν πολλαπλασίασουμε την εξίσωση αυτή με u και ολοκληρώσουμε τότε:

$$\begin{aligned}0 &= \int_F \operatorname{div} \mathbb{T} \cdot u = -\int_F \nabla u : \mathbb{T} + \int_{\partial F} \mathbb{T} n \cdot u \\ &= -\int_F \nabla u : (\nabla u + (\nabla u)^T - pI) + \int_{\partial S \cup P} \mathbb{T} n \cdot u \\ &= -\int_F [|\nabla u|^2 + \nabla u : (\nabla u)^T - \nabla u : pI] + \int_{\partial S \cup P} (2D(u) - pI) n \cdot u.\end{aligned}$$

Από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε αποδείξει ότι $\int_F \nabla u : (\nabla u)^T = 0$ και επίσης, $\int_F \nabla u : pI = \int_F p \operatorname{div} u = 0$.

Άρα :

$$0 = -\int_F |\nabla u|^2 + \int_{\partial S \cup P} (2D(u) - pI) n \cdot u.$$

Συνεπώς προκύπτει άμεσα η (4.4).

□

Εφόσον έχουμε βρει μια σχέση για τον υπολογισμό της δύναμης, τότε μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση η οποία να ελαχιστοποεί την ενέργεια. Επομένως:

Λήμμα 4.3. *Η $u \in H(\mathbb{R}^n_+, S)$ είναι η λύση της εξίσωσης* (3.1) *με συνοριακές συνθήκες* (4.1) *αν και μόνο αν η u είναι ο ελαχιστοποιητής του προβλήματος:*

$$\boxed{\mathcal{F} := inf\{u \in \mathcal{A}, E(u)\}},$$

Όπου

$$E := \int_F |\nabla u_h|^2 = min\{\int_F |\nabla u|^2, \quad u \in H(\mathbb{R}^n_+, S), \quad u|_P = 0, \quad u|_S = e_z\}$$

και

$$\mathcal{A} := \{u \in H(\mathbb{R}^n_+, S), \quad u|_P = 0, \quad u|_{\partial S} = e_z\}.$$

Απόδειξη:

Έστω $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n_+, S)$ τυχαία διανυσματική συνάρτηση ελέγχου και έστω ότι η u_h ελαχιστοποιεί το πρόβλημα (3.1). Συνεπώς ισχύει ότι $E[u_h + \epsilon\phi] \geq E[u_h]$. Θεωρώ $f(\epsilon) = E[u_h + \epsilon\phi]$. Η f έχει ελάχιστο στο ε=0. Άρα $f'(\epsilon)|_{\epsilon=0} = 0$

$$\begin{aligned} f(\epsilon) = &\quad \int_F |\nabla(u_h + \epsilon\phi)|^2 = \int_F |\nabla u|^2 + 2\epsilon\nabla u_h \nabla\phi + |\epsilon\phi|^2 = \int_F |\nabla u_h|^2 + 2\epsilon\nabla u_h\nabla\phi + \epsilon^2|\nabla\phi|^2, \\ f'(\epsilon) = &\quad \int_F 2\nabla u_h\nabla\phi + 2\epsilon|\nabla\phi|^2, \\ f'(\epsilon) = &\quad 0 \Longleftrightarrow \int_F 2\nabla u_h \nabla\phi = 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Συνεπως $\forall\phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n_+, S)$ έχουμε ότι:

$$\int_F \nabla u_h \nabla\phi = 0.$$

Άρα η u_h είναι ασθενής λύση του προβλήματος.
Τώρα για το αντίστροφο έχουμε ότι:
αν $u_h \in H(\mathbb{R}^n_+, S)$ είναι λύση της εξίσωσης $Stokes$ (3.3) και u τυχαία συνάρτηση στον $H(\mathbb{R}^n_+, S)$. Τότε στην περίπτωση αυτή $u - u_h$ θα είναι 0 στο $\partial S \cup P$. Συνεπώς αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (3.3) με $u - u_h$ και ολοκληρώσω τότε:

$$\int_F |\nabla u_h|^2 = \int_F \nabla u_h : \nabla u.$$

Έτσι από $Cauchy - Schwartz$ προκυπτει ότι:

$$\int_F |\nabla u_h|^2 = \int_F \nabla u_h : \nabla u \leq \left(\int_F |\nabla u_h|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_F |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Επομένως προκύπτει ότι:

$$\int_F |\nabla u_h|^2 \leq \int_F |\nabla u|^2, \tag{4.6}$$

και αφού u μια τυχαία συνάρτηση τότε η συνάρτηση u_h ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές $E(u)$.

□

Από τα προηγούμενα αποτελέσματα προκύπτει ότι:

Θεώρημα 4.4. *Αν u η λύση της εξίσωσης Stokes:*

$$\Delta u + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad x \in F.$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} u|_{\partial S} &= e_z, \\ u|_P &= 0, \end{aligned}$$

τότε η δύναμη $\mathcal{F}$ που ασκεί το ρευστό στο στερεό σώμα S δίδεται από:

$$\mathcal{F} = \int_F |\nabla u|^2 = inf \int_F |\nabla w|^2, \;\; w \in \mathcal{A}.$$

όπου $\mathcal{A} := \{w \in H(\mathbb{R}^n_+, S), \quad w|_P = 0, \quad w|_{\partial S} = e_z\}$.

4.1 Τρισδιάστατη περίπτωση

Εδώ θα υπολογίσουμε τη δύναμη στις τρεις διαστάσεις. Θα εκμεταλλευτούμε, λοιπόν, την αξονική συμμετρία του στερεού S έτσι ώστε να απλοποιήσουμε το πρόβλημα και να προβούμε στην επίλυσή του. Για το λόγο αυτό θα κάνουμε χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων. Το σύνορο του κάτω μέρους του στερεού σώματος περιγράφεται από την καμπύλη:

$$\gamma_s(r) = 1 - \sqrt{1 - r^2} + \epsilon r^{1+\alpha}, \quad \alpha \in [0, 1], \quad r \leq r_0.$$

Λόγω της υπόθεσης συμμετρίας που έχουμε κάνει για το στερεό σώμα, το πεδίο ταχυτήτων του ρευστού σε κυλινδρικές συντεταγμενες αναμένουμε να είναι στη μορφή:

$$u = u_r e_r + u_z e_z, \tag{4.7}$$

με την συνιστώστα u_θ να είναι μηδέν, όπου (r, θ, z) οι κυλινδρικές συντεταγμένες και (e_r, e_θ, e_z) τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα. Στόχος μας τώρα είναι να προσδιορίσουμε την ταχύτητα u. Ξέρουμε ότι έχουμε ασυμπίεστη ροή, δηλαδή $\nabla \cdot u = 0$. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες γράφεται:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{4.8}$$

Προκειμένου να βρούμε τη u εισάγουμε κατάλληλη βαθμωτή συνάρτηση ροής $\phi(r, z)$, ώστε να απλοποιήσουμε το πρόβλημα, ψάχνοντας αντί για διανυσματική μια βαθμωτή συνάρτηση. Πιο συγκεκριμένα:

$$\phi(r, z) := -\int_0^z u_r(r, z')dz'. \tag{4.9}$$

Λήμμα 4.5. *Έστω φ η συνάρτηση ροής που ορίζεται από τη* (4.9).
(α) Τότε η φ ικανοποιεί:

$$\partial_z \phi|_{\partial S} = 0, \quad \partial_z \phi|_P = 0, \quad \partial_r (r\phi)|_{\partial S} = r, \quad \phi|_P = 0. \tag{4.10}$$

(β) Αν θεωρήσω γνωστή τη φ τότε η u δίδεται από τη σχέση:

$$\boxed{u = -\frac{\partial \phi}{\partial z} e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\phi)}{\partial r} e_z}. \tag{4.11}$$

Απόδειξη:

(α) Οι συνοριακές συνθήκες προκύπτουν άμεσα λόγω των συνοριακών συνθηκών της u καί΄του ορισμού της συναρτήσεως ϕ
(β) Από (4.8) έχουμε ότι:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Ολοκληρώνοντας από μηδέν έως z και κάνοντας χρήση της (4.9)

$$u_z = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\phi)}{\partial r}.$$

Άρα προκύπτει ότι $u_z = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\phi)}{\partial r}$.
Παραγωγίζοντας τώρα την (4.9) ως προς z έχω ότι:

$$u_r = -\frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Συνεπώς $u = -\frac{\partial \phi}{\partial z} e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\phi)}{\partial r} e_z$.

□

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε κοντά στο σώμα και στη περιοχή $F^0 := \{r \le r_0,\ 0 \le z \le h + \gamma_s(r)\}$

$$\mathcal{A} = \{u \in H^1_{loc}, \quad u = \partial_z \phi e_r + \frac{1}{r}\partial_r (r\phi) e_z,\ \phi \quad \text{ικανοποεί τις συνθήκες(4.10)}\}$$

Λήμμα 4.6. *Η συνάρτηση ϕ που ικανοποεί τις συνθήκες στο ∂S είναι: $\partial_z \phi(r, h + \gamma_s(r)) = 0, \quad \partial_r (r\phi)(r, h + \gamma_s(r)) = r, r \le r_0$, όπως ορίστηκε στην* (4.9) *ικανοποιεί:*
Οι συνθήκες στο στερεό σύνορο $\partial S \cap F^0$ είναι:

$$\begin{aligned} \partial_z \phi(r, h + \gamma_s(r)) = 0, \quad \phi(r, h + \gamma_s(r)) = \frac{r}{2}, \quad r \le r_0, \\ \partial_z \phi(r, 0) = 0, \quad \phi(r, 0) = 0, \quad r \le r_0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Απόδειξη:

Από τις συνοριακες συνθήκες έχουμε ότι:

$$\frac{\partial (r\phi)}{\partial r} = r,$$

και επομένως:

$$\phi(r, h+\gamma_s(r)) = \frac{r}{2} + \frac{h(z)}{r}.$$

Επίσης $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$. Άρα προκύπτει ότι

$$\frac{h'(z)}{r} = 0 \Longrightarrow h(z) = c.$$

Συνεπώς $\phi(r, h+\gamma_s(r)) = \frac{r}{2} + \frac{c}{r}$.
Επιπλέον, η $\phi(r,z) := -\int_0^z u_r(r,z')dz'$ είναι ομαλή κοντά στο $r=0$ και θεωρούμε $c=0$.Επομένως προκύπτει το ζητούμενο.

□

Προκειμένου να γράψουμε την ενέργεια ως συνάρτηση της ϕ εύκολα υπολογίζουμε ότι:

$$|\nabla u|^2 = \left|\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z}\right|^2 + \left|\frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial(r\phi)}{\partial r}\frac{1}{r}\right)\right|^2 + \left|\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r\partial z}\right|^2.$$

Αναμένουμε ότι καθώς $h \longrightarrow 0$, ο σημαντικότερος όρος θα προέρχεται από τη μεταβολή της ϕ στην κατεύθυνση του z. Συνεπώς, ο κυρίαρχος όρος θα είναι ο $\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right|^2$.
Επομένως εισάγουμε ένα νέο πρόβλημα ελαχιστοποίησης, που πιστεύουμε ότι κρατάει τα ουσιαστικά χαρακτηριστικά του προηγούμενου αλλά είναι πιο απλό. Ένα κάτω φράγμα της αρχική ενέργειας θα δοθεί από το καινούριο απλουστευμένο πρόβλημα :

$$inf\tilde{E}(\phi), \ \phi \in \tilde{\mathcal{A}},$$

όπου

$$\begin{aligned}
&\tilde{E}(\phi) := \int_{F^0}\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right|^2, \\
&F^0 = \{r \leq r_0, \quad 0 \leq z \leq h+\gamma_s(r)\}, \\
&\tilde{\mathcal{A}} := \{\phi \in H^2(F^0), \phi \quad \text{ικανοποεί τις} \quad (4.12)\}.
\end{aligned}$$

Στόχος μας τώρα είναι να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησοειδές $\tilde{E}$. Εχουμε:

Λήμμα 4.7. *Η συνάρτηση που ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές* $\tilde{E}$ *είναι:*

$$\boxed{\tilde{\phi}(r,z) = \frac{r}{2}\Phi(t), \quad \text{όπου} \quad \Phi(t) = t^2(3-2t) \quad \text{και} \quad t = \frac{z}{h+\gamma_s(r)}, \quad t \in [0,1]}.$$

Απόδειξη:
Από την εξίσωση $Euler - Lagrange$ έχουμε $\frac{\partial^4\tilde{\phi}}{\partial z^4} = 0$. Συνεπώς ,

$$\tilde{\phi}(r,z) = Az^3 + Bz^2 + Cz + D, \quad \text{όπου } A, B, C, D \text{ συναρτήσεις του } r.$$

Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες (4.12) του κάτω συνόρου προκύπτει ότι όταν $z = h+\gamma_s(r)$ τότε:

$$C = D = 0.$$

Ενώ χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες (4.12) προκύπτουν οι σχέσεις:

$$3Az^2 + 2Bz = 0,$$
$$Az^3 + Bz^2 = \frac{r}{2}.$$

Άρα λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι:

$$B = \frac{3r}{2(h+\gamma_s(r))^2}, \;\; A = -\frac{r}{(h+\gamma_s(r))^3}.$$

Συνεπώς,

$$\tilde{\phi}(r, h+\gamma_s(r)) = -\frac{r}{(h+\gamma_s(r))^3}z^3 + \frac{3r}{2(h+\gamma_s(r))^2}z^2 = \frac{r}{2}\left(\frac{z}{h+\gamma_s(r)}\right)^2\left(3 - \frac{2z}{h+\gamma_s(r)}\right),$$

που είναι και το ζητούμενο .

□

Όπως έχουμε πει παραπάνω η ενέργεια $\tilde{E}(\tilde{\phi})$ αναμένουμε ότι θα είναι ένα κάτω φράγμα για τη δύναμη που ασκεί το ρευστό στο στερεό. Με δεδομένο ότι έχουμε βρει τη $\tilde{\phi}$, έχουμε την παρακάτω εκτίμηση:

Λήμμα 4.8. *Ένα κάτω φράγμα για τη δύναμη που ασκείται στο στερεό σώμα δίνεται από τη σχέση:*

$$\boxed{\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{E}(\tilde{\phi}) = 6\pi\int_0^{r_0}\frac{r^3 dr}{(h+\gamma_s(r))^3}}. \tag{4.13}$$

Απόδειξη:

Έχουμε ότι $\tilde{F} = \tilde{E}(\tilde{\phi}) = \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{(h+\gamma_s(r))} J\left|\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial z^2}\right|^2 dz d\theta dr = 2\pi\int_0^{r_0}\int_0^{(h+\gamma_s(r))} J\left|\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial z^2}\right|^2 dz dr$, όπου $J = r$ η Ιακωβιανή.
Αρχικά υπολογίζουμε

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial z} = \frac{r}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{3r(t-t^2)}{h+\gamma_s(r)} = -\frac{3r}{(h+\gamma_s(r))^3}z^2 + \frac{3r}{(h+\gamma_s(r))^2}z,$$

και στη συνέχεια υπολογίζουμε:

$$\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial z^2} = \frac{r}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{3r}{h+\gamma_s(r)}(1 - 2t\frac{\partial t}{\partial z}) = -\frac{6r}{(h+\gamma_s(r))^3}z + \frac{3r}{(h+\gamma_s(r))^2}.$$

Άρα,

$$\left(\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial z^2}\right)^2 = \frac{36r^2z^2}{(h+\gamma_s(r))^6} - \frac{36r^2z}{(h+\gamma_s(r))^5} + \frac{9r^2}{(h+\gamma_s(r))^4}.$$

Έπειτα υπολογίζουμε το εσωτερικό ολοκλήρωμα,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{h+\gamma_s(r)}\left(\frac{36r^2z^2}{(h+\gamma_s(r))^6} - \frac{36r^2z}{(h+\gamma_s(r))^5} + \frac{9r^2}{(h+\gamma_s(r))^4}\right)dz \\
&= \left[\frac{36r^2z^3}{3(h+\gamma_s(r))^6} - \frac{36r^2z^2}{2(h+\gamma_s(r))^5} + \frac{9r^2z}{(h+\gamma_s(r))^4}\right]_0^{h+\gamma_s(r)} \\
&= \frac{3r^2}{(h+\gamma_s(r))^3},
\end{aligned}$$

και άρα τελικά προκύπτει το ζητούμενο.

□

Στο προηγούμενο Λήμμα βρήκαμε το γενικό τύπο της δύναμης. Αν χρησιμοποιήσουμε τώρα συγκεκριμένη γεωμετρία, δηλαδή ότι το κάτω μέρος του στερεού δίδεται από την καμπύλη $\gamma_s(r) = 1 - \sqrt{1-r^2} + \epsilon r^{1+a}, r \le r_0$ τότε:

Λήμμα 4.9. *Η δύναμη δίδεται από:*

$$\boxed{\tilde{\mathcal{F}} = 6\pi \int_0^{r_0} \frac{r^3 dr}{(h + \frac{r^2}{2} + \epsilon r^{1+a} + O(r^4))^3} = \frac{6\pi}{h} I\left(\epsilon h^{\frac{a-1}{2}}\right) + O\left(J\left(\epsilon h^{\frac{a-1}{2}}, h\right)\right) + O(1)}. \tag{4.14}$$

όπου

$$I(\beta) := \int_0^\infty \frac{s^3 ds}{(1 + \frac{s^2}{2} + \beta s^{1+a})^3} \quad \textit{και} \quad J(\beta, h) := \int_0^{\frac{r_0}{\sqrt{h}}} \frac{s^7 ds}{(1 + \frac{s^2}{2} + \beta s^{1+a})^4}.$$

Απόδειξη:

Παίρνω την (4.14) και αντικαθιστώ την καμπύλη $\gamma_s(r) = 1 - \sqrt{1-r^2} + \epsilon r^{1+a}$,

$$6\pi \int_0^{r_0} \frac{r^3 dr}{(h + \gamma_s(r))^3} = 6\pi \int_0^{r_0} \frac{r^3\, dr}{(h + 1 - \sqrt{1-r^2} + \epsilon r^{1+a})^3}.$$

Κάνοντας ανάπτυγμα *Taylor* γύρω από το 0 έχουμε ότι $\sqrt{1-r^2} = 1 - \frac{r^2}{2} + O(r^4)$
Συνεπώς, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\tilde{\mathcal{F}} = 6\pi \int_0^{r_0} \frac{r^3 dr}{(h + \frac{r^2}{2} + \epsilon r^{1+a} + O(r^4))^3} = \frac{6\pi}{h^3} \int_0^{r_0} \frac{r^3\, dr}{(1 + \frac{r^2}{2h} + \epsilon h^{-1} r^{1+a} + h^{-1} O(r^4))^3},$$

Θέτω $s = \frac{r}{\sqrt{h}}$. Άρα προκύπτει ότι:

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{6\pi}{h} \int_0^{\frac{r_0}{\sqrt{h}}} \frac{s^3 ds}{(1 + \frac{s^2}{2} + \beta s^{1+a} + h^{-1} O(s^4 h^2))^3} \quad \text{,όπου β=}\ \epsilon h^{\frac{a-1}{2}}.$$

Επομένως τελικά προκύπτει ότι:

$$\tilde{\mathcal{F}} := 6\pi \int_0^{r_0} \frac{r^3 dr}{(h + \frac{r^2}{2} + \epsilon r^{1+a} + O(r^4))^3} = \frac{6\pi}{h} I\left(\epsilon h^{\frac{a-1}{2}}\right) + O(J\left(\epsilon h^{\frac{a-1}{2}}, h\right)) + O(1).$$

□

Παρατηρήσεις:

1. Αν ε=0, δηλαδή αν δεν υπάρχει καμία παραμόρφωση στο κάτω μέρος της μπάλας τότε και οι δύο όροι I, J είναι δύο σταθερές. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι $I(0) = 1$ και $J(0,h) = O(|lnh|)$. Όμως ο πιο σημαντικός όρος είναι ο $\frac{6\pi}{h}$I(0) διότι ο J απειρίζεται λογαριθμικά και έτσι η δύναμη είναι $\frac{1}{h}$ συν κάτι μικρό.

2. Όταν β ≪ 1 τότε η ασυμπτωτική συμπεριφορά των ολοκληρωμάτων I, J είναι:

$$I(\beta) = \frac{1}{1 + \lambda_\alpha \beta} + O\left(\beta^2\right), \; J(\beta, h) = O\left(|ln(h)|\right),$$

Έτσι, η δύναμη δίδεται από τον τύπο:

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{6\pi}{h + \lambda_\alpha \epsilon h^{\frac{\alpha+1}{2}}}(1 + O(\beta)) + O(|ln\beta|)$$

όπου $\lambda_\alpha := \int_0^\infty \frac{3s^{\alpha+4}ds}{(1+\frac{s^2}{2})^4} = \frac{2^{\frac{\alpha+1}{2}}\pi(3+\alpha)(1-\alpha^2)}{8cos(\frac{\pi\alpha}{2})}$.

3. Όταν β ≫ 1 τότε η ασυμπτωτική συμπεριφορά των I, J είναι:

$$I(\beta) = \begin{cases} \mu_\alpha \beta^{-\frac{4}{1+\alpha}} + O\left(\frac{1}{\beta^3}\right), & \alpha > \frac{1}{3} \\ \frac{9}{4}\frac{ln\beta}{\beta^3} + O\left(\frac{1}{\beta^3}\right), & \alpha = \frac{1}{3} \\ \mu_\alpha \beta^{-\frac{2}{1-\alpha}} + O\left(\frac{1}{\beta^3}\right), & \alpha < \frac{1}{3} \end{cases}$$

όπου $\mu_\alpha := \int_0^\infty \frac{s^3 ds}{(s^2+s^{1+\alpha})^3}$

$$J(\beta, h) = O\left(\left|ln\beta + \frac{1-\alpha}{2}ln\beta\right|\right).$$

και η δύναμη δίδεται από τον τύπο:

$$\tilde{\mathcal{F}} = \begin{cases} \frac{6\pi\mu_\alpha}{\epsilon^{\frac{4}{1+\alpha}}}\left(1 + \beta^{\frac{1-3\alpha}{1+\alpha}}\right) + O(|ln(h)|), & \alpha > \frac{1}{3} \\ \frac{9\pi|ln(h)|}{2\epsilon^3} + O\left(\frac{|ln(\epsilon)|}{\epsilon^3}\right), & \alpha = \frac{1}{3} \\ \frac{6\pi\mu_\alpha}{\epsilon^{\frac{2}{1-\alpha}}}\left(1 + \beta^{\frac{3\alpha-1}{1+\alpha}}\right) + O(|ln(\epsilon)|), & a < \frac{1}{3} \end{cases}$$

Έτσι, στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται η μελέτη μας για την εύρεση ενός κάτω φράγματος και μάλιστα αποδεικνύεται ότι η προσέγγιση μας είναι ακριβής. Στη πραγματικότητα για μικρά h μπορούμε να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση $\hat{\phi}$ στο χώρο F, η οποία είναι ισοδύναμη με την συνάρτηση ελέγχου $\tilde{\phi}$ σε μια κοντινή γειτονιά του F^0 έτσι ώστε $u_h = \nabla \times (\hat{\phi} e_\theta) \in \mathcal{A}$. Μπορούμε εύκολα να αντιληφθούμε ότι αφού η $\mathcal{F}$ αποτελεί κάτω φράγμα για την ενέργεια τότε για οποιαδήποτε ομαλή συνάρτηση θα υπάρχει ένα άνω φράγμα. Μια καλή επιλογή για τη $\hat{\phi}$ είναι:

$$\hat{\phi}(r, z) = 1, \quad \text{στο} \quad S$$

και

$$\hat{\phi}(r, z) = (1 - \chi(r, z))\psi(r, z - h) + \chi(r, z)\phi(\tilde{r}, z), \quad \text{στο} \quad F.$$

όπου:

$$\psi = \begin{cases} \frac{r}{2}, & \text{σε μια κοντινή γειτονιά του} \quad S \\ 0, & \text{σε μια κοντινή γειτονιά του} \quad P \cap \left\{r \geq \frac{r_0}{2}\right\}. \end{cases}$$

4.2 Δισδιάστατη περίπτωση

Μελετάμε το πρόβλημα στις δύο διαστάσεις, έχοντας ως γεωμετρία του κάτω μέρους του στερεού την καμπύλη

$$\gamma_s(x) := 1 - \sqrt{1 - x^2} + \epsilon |x|^{1+\alpha}, \ \alpha \in [0, 1), \ |x| \le x_0.$$

Το πεδίο ταχυτήτων του ρευστού είναι στη μορφή:

$$u = u_x e_i + u_y e_j. \tag{4.15}$$

Στόχος μας τώρα είναι να προσδιορίσουμε την ταχύτητα u. Ξέρουμε ότι έχουμε ασυμπίεστη ροή, δηλαδή $\nabla \cdot u = 0$. Άρα:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \tag{4.16}$$

Προκειμένου να βρούμε τη u εισάγουμε κατάλληλη συνάρτηση ροής $\phi(x, y)$. Πιο συγκεκριμένα:

$$\phi(x, y) := -\int_0^y u_x(x, y')dy'. \tag{4.17}$$

Λήμμα 4.10. *Έστω φ η συνάρτηση ροής που ορίζεται από τη* (4.17).

(α) Τότε η φ ικανοποιεί:

$$\partial_y \phi|_{\partial S} = 0, \quad \partial_y \phi|_P = 0, \quad \partial_x \phi|_{\partial S} = 1, \quad \phi|_P = 0. \tag{4.18}$$

(β) Αν θεωρήσω γνωστή τη φ τότε η u δίδεται από τη σχέση:

$$\boxed{u = -\frac{\partial \phi}{\partial y} e_i + \frac{\partial \phi}{\partial x} e_j}. \tag{4.19}$$

Απόδειξη:

(α) Οι συνοριακές συνθήκες προκύπτουν άμεσα λόγω των συνοριακών συνθηκών της u και΄του ορισμού της συναρτήσεως ϕ

(β) Από (4.16) έχουμε ότι:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0.$$

Ολοκληρώνοντας από μηδέν έως y και κάνοντας χρήση της (4.17)

$$u_y = \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Παραγωγίζοντας τώρα την (4.17) ως προς y έχω ότι:

$$u_x = -\frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Συνεπώς $u = -\frac{\partial \phi}{\partial y} e_i + \frac{\partial (\phi)}{\partial x} e_j$.

□

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε κοντά στο σώμα και στη περιοχή
$\breve{F}^0 := \{x \le x_0, \ 0 \le y \le h + \gamma_s(x)\}$.

Λήμμα 4.11. *Η συνάρτηση ϕ όπως ορίστηκε στην (4.17) ικανοποιεί τις συνθήκες γύρω από το ∂S είναι $\partial_y \phi(x, h+\gamma_s(x)) = 0, \quad \partial_x \phi(x, h+\gamma_s(x)) = 1$. Συνεπώς, οι συνθήκες γύρω από το $\partial S \cap \breve{F}^0$ είναι:*

$$\begin{aligned} \partial_y \phi(x, h+\gamma_s(x)) = 0, \quad \phi(x, h+\gamma_s(x)) = x, \quad |x| \le x_0, \\ \partial_y \phi(x, 0) = 0, \quad \phi(x, 0) = 0, \quad |x| \le x_0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Απόδειξη:

Από τις συνοριακες συνθήκες έχουμε ότι:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 1,$$

και επομένως:

$$\phi(x, h+\gamma_s(x)) = x + h(y).$$

Επίσης $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$. Άρα προκύπτει ότι

$$h'(y) = 0 \Longrightarrow h(y) = c.$$

Συνεπώς $\;\phi(x, h+\gamma_s(x)) = x + c\;$.
Επιπλέον, η $\phi(x, y) := -\int_0^y u_x(x, y')dy'$ είναι ομαλή κοντά στο $x = 0$ και θεωρούμε $c = 0$.Επομένως προκύπτει το ζητούμενο.

□

Προκειμένου να γράψουμε την ενέργεια ως συνάρτηση της ϕ εύκολα υπολογίζουμε ότι:

$$|\nabla u|^2 = 2\left|\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right|^2.$$

Αναμένουμε ότι καθώς $h \longrightarrow 0$, ο σημαντικότερος όρος θα προέρχεται από τη μεταβολή της ϕ στην κατεύθυνση του y. Συνεπώς, ο κυρίαρχος όρος θα είναι ο $\left|\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right|^2$.
Επομένως εισάγουμε ένα νέο πρόβλημα ελαχιστοποίησης, που πιστεύουμε ότι κρατάει τα ουσιαστικά χαρακτηριστικά του προηγούμενου αλλά είναι πιο απλό. Ένα κάτω φράγμα της αρχική ενέργειας θα δοθεί από το καινούριο απλουστευμένο πρόβλημα :

$$inf \breve{E}(\phi), \;\; \phi \in \breve{\mathcal{A}},$$

όπου

$$\begin{aligned} &\breve{E}(\phi) := \int_{\breve{F}^0} \left|\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right|^2, \\ &\breve{F}^0 = \{\, |x| \le x_0, \quad 0 \le y \le h + \gamma_s(x)\}. \\ &\breve{\mathcal{A}} := \{\phi \in H^2(\breve{F}^0), \phi \quad \text{ικανοποιεί τις} \quad (4.20)\}. \end{aligned}$$

Στόχος μας τώρα είναι να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησοειδές $\;\breve{E}$. Εχουμε:

Λήμμα 4.12. *Η συνάρτηση που ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές $\breve{E}$ είναι:*

$$\boxed{\breve{\phi}(x,y) = x\breve{\Phi}(t), \quad \text{όπου} \quad \breve{\Phi}(t) = t^2(3-2t) \quad \text{και} \quad t = \frac{y}{h+\gamma_s(x)}, \quad t \in [0,1]\ |x| \le x_0}.$$

Απόδειξη:

Η εξίσωση *Euler – Lagrange* είναι $\frac{\partial^4\breve{\phi}}{\partial y^4} = 0$. Συνεπώς ,

$$\breve{\phi}(x,y) = Ay^3 + By^2 + Cy + D, \quad \text{όπου } A, B, C, D \text{ συναρτήσεις του } x.$$

Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες (4.20) στο κάτω σύνορο (όταν $y = 0$) τότε:

$$C = D = 0.$$

Ενώ χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες (4.20) στο ∂S (όπου $y = h + \gamma_s(x)$) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 3Ay^2 + 2By &= 0, \\ Ay^3 + By^2 &= x. \end{aligned}$$

Άρα λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι:

$$B = \frac{3x}{(h+\gamma_s(x))^2}, \ \ A = -\frac{2x}{(h+\gamma_s(x))^3}.$$

Συνεπώς,

$$\breve{\phi}(x, h+\gamma_s(x)) = -\frac{2x}{(h+\gamma_s(x))^3}y^3 + \frac{3x}{(h+\gamma_s(x))^2}y^2 = x\left(\frac{y}{h+\gamma_s(x)}\right)^2\left(3 - \frac{2y}{h+\gamma_s(x)}\right),$$

που είναι και το ζητούμενο .

□

Όπως έχουμε πει και στη τρισδιάστατη περίπτωση, αναμένουμε ότι μια παρόμοια εκτίμηση μας δίνει και πάνω φραγμα της ενέργειας $\breve{E}(\breve{\phi})$. Συνεπώς, έχουμε την παρακάτω εκτίμηση για τη δύναμη:

Λήμμα 4.13. *Μια εκτίμηση για τη δύναμη που ασκείται στο στερεό σώμα δίνεται από τη σχέση:*

$$\boxed{\breve{\mathcal{F}} = \breve{E}(\breve{\phi}) = \int_{-x_0}^{x_0} \frac{12x^2 dx}{(h+\gamma_s(x))^3}}. \tag{4.21}$$

Απόδειξη:

Έχουμε ότι $\breve{\mathcal{F}} = \breve{E}(\breve{\phi}) = \int_0^{x_0}\int_0^{(h+\gamma_s(x))} \left|\frac{\partial^2\breve{\phi}}{\partial y^2}\right|^2 dydx$.
Αρχικά υπολογίζουμε

$$\frac{\partial\breve{\phi}}{\partial y} = x\frac{\partial\breve{\Phi}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{x(6t-6t^2)}{h+\gamma_s(x)} = \frac{6x}{(h+\gamma_s(x))^2}y - \frac{6x}{(h+\gamma_s(x))^3}y^2,$$

και στη συνέχεια υπολογίζουμε:

$$\frac{\partial^2 \breve{\phi}}{\partial y^2} = x\frac{\partial^2 \breve{\Phi}}{\partial t^2}\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{x}{h+\gamma_s(x)}(6-12t\frac{\partial t}{\partial y}) = \frac{6x}{(h+\gamma_s(x))^2} - \frac{12x}{(h+\gamma_s(r))^3}y.$$

Άρα,

$$\left(\frac{\partial^2 \breve{\phi}}{\partial y^2}\right)^2 = \frac{36x^2}{(h+\gamma_s(x))^4} - \frac{144x^2 y}{(h+\gamma_s(x))^5} + \frac{144x^2y^2}{(h+\gamma_s(x))^6}.$$

Έπειτα υπολογίζουμε το εσωτερικό ολοκλήρωμα,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{h+\gamma_s(x)} \left(\frac{36x^2}{(h+\gamma_s(x))^4} - \frac{144x^2 y}{(h+\gamma_s(x))^5} + \frac{144x^2y^2}{(h+\gamma_s(x))^6}\right) dy \\
&= \left[\frac{36x^2 y}{(h+\gamma_s(x))^4} - \frac{144x^2 y^2}{2(h+\gamma_s(x))^5} + \frac{144x^2y^3}{3(h+\gamma_s(x))^6}\right]_0^{h+\gamma_s(x)} \\
&= \frac{12x^2}{(h+\gamma_s(x))^3}.
\end{aligned}$$

και άρα τελικά προκύπτει το ζητούμενο.

□

Στο προηγούμενο Λήμμα βρήκαμε το γενικό τύπο της δύναμης. Αν χρησιμοποιήσουμε τώρα συγκεκριμένη γεωμετρία, δηλαδή ότι το κάτω μέρος του στερεού δίδεται από την καμπύλη $\gamma_s(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} + \epsilon|x|^{1+a}$ τότε έχουμε:

Λήμμα 4.14. *Όταν* $\gamma_s(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} + \epsilon|x|^{1+a}$ *τότε:*

$$\boxed{\breve{\mathcal{F}} = \int_{-x_0}^{x_0} \frac{12x^2 dx}{(h+\frac{x^2}{2}+\epsilon|x|^{1+a}+O(x^4))^3} = \frac{12}{h^{\frac{3}{2}}} I\left(\epsilon h^{\frac{a-1}{2}}\right) + O\left(J\left(\epsilon h^{\frac{a-1}{2}}, h\right)\right) + O(1)}. \tag{4.22}$$

όπου

$$I(\beta) := \int_0^\infty \frac{s^2 ds}{(1+\frac{s^2}{2}+\beta s^{1+a})^3} \quad \text{και} \quad J(\beta,h) := \int_0^{\frac{x_0}{\sqrt{h}}} \frac{s^6 ds}{(1+\frac{s^2}{2}+\beta s^{1+a})^4}.$$

Απόδειξη:

Παίρνω την (4.22) και αντικαθιστώ την καμπύλη $\gamma_s(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} + \epsilon x^{1+a}$,

$$\int_{-x_0}^{x_0} \frac{12x^2 dx}{(h+\gamma_s(x))^3} = \int_{-x_0}^{x_0} \frac{12x^2 dx}{(h+1-\sqrt{1-x^2}+\epsilon|x|^{1+a})^3}.$$

Κάνοντας ανάπτυγμα *Taylor* γύρω από το 0 έχουμε ότι $\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ Συνεπώς, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\breve{\mathcal{F}} = \int_0^{x_0} \frac{12x^2 dx}{\left(h+\frac{x^2}{2}+\epsilon|x|^{1+a}+O(x^4)\right)^3} = \frac{1}{h^3}\int_0^{x_0} \frac{12x^2 dx}{\left(1+\frac{x^2}{2h}+\epsilon h^{-1}|x|^{1+a}+h^{-1}O(x^4)\right)^3},$$

Θέτω $s = \frac{x}{\sqrt{h}}$. Άρα προκύπτει ότι:

$$\breve{\mathcal{F}} = \frac{1}{h^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\frac{x_0}{\sqrt{h}}} \frac{12s^2 ds}{\left(1 + \frac{s^2}{2} + \beta s^{1+a} + h^{-1} O(s^4 h^2)\right)^3} \quad \text{,όπου β=} \ \epsilon h^{\frac{a-1}{2}}.$$

Κάνοντας ανάπτυγμα $Taylor$ γύρω από το 0 έχουμε ότι:

$$\frac{s^2}{\left(1 + \frac{s^2}{2} + \beta s^{1+\alpha}\right)^3} = \frac{s^2}{\left(1 + \frac{s^2}{2}\right)^3} - \frac{3\beta s^{3+\alpha}}{\left(1 + \frac{s^2}{2}\right)^4} + O\left(\beta^2 \frac{s^{4+\alpha}}{\left(1 + \frac{s^2}{2}\right)}\right).$$

Άρα εμφανίζονται οι όροι $I(\beta)$ και $J(\beta, h)$

Επομένως τελικά προκύπτει ότι:

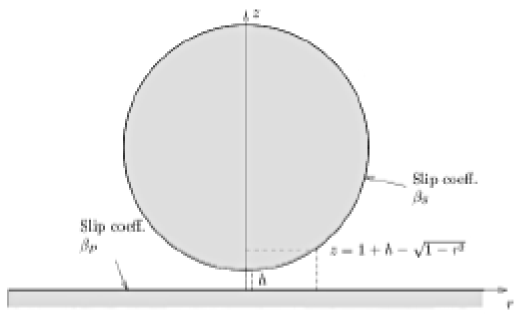
$$\tilde{\mathcal{F}} = \int_{-x_0}^{x_0} \frac{12x^2 dx}{\left(h + \frac{x^2}{2} + \epsilon x^{1+a} + O(x^4)\right)^3} = \frac{12}{h^{\frac{3}{2}}} I\left(\epsilon h^{\frac{a-1}{2}}\right) + O\left(J\left(\epsilon h^{\frac{a-1}{2}}, h\right)\right) + O(1).$$

$\square$

Παρατήρηση:

Αν ε=0, δηλαδή αν δεν υπάρχει καμία παραμόρφωση στο κάτω μέρος της μπάλας τότε και οι δύο όροι I, J είναι δύο σταθερές. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι $I(0) = 1$ και $J(0, h) = O(|lnh|)$. Όμως ο πιο σημαντικός όρος είναι ο $\frac{6\pi}{h^{\frac{3}{2}}}$I(0) δίοτι ο J απειρίζεται λογαριθμικά και έτσι η δύναμη είναι $\frac{1}{h^{\frac{3}{2}}}$ συν κάτι μικρό.

5 Συνοριακές συνθήκες Navier ($Slip$)



Σχήμα 8: Περίπτωση ολίσθησης-Συνθήκες *Navier*

Στην ενότητα αυτη υποθέτουμε ότι είμαστε στον $\mathbb{R}^n$ με $n = 2$ ή $n = 3$ και μας ενδιαφέρει να επιλύσουμε την εξίσωση (3.1), παίρνοτας την περίπτωση ολίσθησης, όπου β_P, $\beta_S \geq 0$, οι συνοριακές συνθήκες δίνονται από :

$$(u - e_z) \cdot n|_{\partial S} = 0,\ (u - e_z) \times n|_{\partial S} = -2\beta_S [D(u)n] \times n|_{\partial S}, \tag{5.1}$$

πάνω στο στερεό σώμα και

$$u \cdot n|_P = 0,\ u \times n|_P = -2\beta_P [D(u)n] \times n|_P \tag{5.2}$$

στο κάτω στερεό σύνορο.

Λήμμα 5.1. *Αν η $u \in H(\mathbb{R}^n_+, S)$ ικανοποιεί την εξίσωση $Stokes$ (3.1) με συνοριακές συνθήκες (5.17) και $w \in H^1(F)$ τέτοιο ώστε $\operatorname{div} w = 0$ και $w \cdot n = 0$ στο $\partial S \cup P$ τότε έχουμε ότι:*

$$\boxed{2\int_F D(u) : D(w) + \frac{1}{\beta_S}\int_{\partial S} ((u - e_z) \times n) \cdot (w \times n)\, d\sigma + \frac{1}{\beta_P}\int_P (u \times n) \cdot (w \times n)\, d\sigma = 0} \tag{5.3}$$

Απόδειξη:

Αν πολλαπλασίασουμε την εξίσωση $\operatorname{div} \mathbb{T} = 0$ με w και ολοκληρώσουμε τότε:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_F w \cdot \operatorname{div} \mathbb{T} = -\int_F \nabla w : \mathbb{T} + \int_{\partial F} w \cdot \mathbb{T}n \\ &= -2\int_F \nabla w : (D(u) - pI) + \int_{\partial S \cup P} w \cdot \mathbb{T}n \\ &= -2\int_F [\nabla w : D(u) - \nabla w : pI] + \int_{\partial S \cup P} w \cdot \mathbb{T}n. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Αφού $D(u) : \nabla w = D(u) : (\nabla w)^T$ τότε:

$$\nabla w : D(u) = D(w) : D(u). \tag{5.5}$$

Επίσης ,$\int_F \nabla w : pI = \int_F p \operatorname{div} w = 0$. Συνεπώς έχουμε ότι:

$$-2\int_F D(w) : D(u) + \int_{\partial S \cup P} w \cdot \mathbb{T}n = 0 \tag{5.6}$$

Τώρα θα υπολογίσουμε το $\int_{\partial S\cup P} w\cdot\mathbb{T}n$. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\int_{\partial S\cup P} w\cdot\mathbb{T}n &= \int_{\partial S\cup P}(2D(u)n-pn)\cdot w\\ &= 2\int_{\partial S\cup P} D(u)n\cdot w-\int_{\partial S\cup P} w\cdot pn\\ &= 2\int_{\partial S\cup P} D(u)n\cdot w\\ &= 2\int_{\partial S\cup P}(D(u)n\times n)\cdot(w\times n).\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από την παρακάτω ιδιότητα του εξωτερικού γινομένου:

$$(x\times y)\cdot(z\times w)=(x\cdot z)(y\cdot w)-(y\cdot z)(x\cdot w),\ \ \forall x,y,z,w\in\mathbb{R}^3. \tag{5.7}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα, τις συνοριακές συνθήκες (5.17) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}\int_{\partial S\cup P} w\cdot\mathbb{T}n &= 2\int_{\partial S\cup P}(D(u)n\times n)\cdot(w\times n)\\ &= -\frac{1}{\beta_S}\int_{\partial S}((u-e_z)\times n)\cdot(w\times n)\,d\sigma-\frac{1}{\beta_P}\int_P(u\times n)\cdot(w\times n)\,d\sigma.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Συνεπώς αντικαθιστώντας στην (5.6) προκύπτει το ζητούμενο.

□

Λήμμα 5.2. *: Αν $v\in H^1(F)$ με $\operatorname{div}v=0$ και συνοριακές συνθήκες $v\cdot n|_P=0$ και $(v-e_z)\cdot n|_S=0$ και $w\in H^1(F)$ τότε:*

$$\boxed{2\int_F D(v):D(w)=\int_F\nabla v:\nabla w+\int_{\partial S}((v-e_z)\times n)\cdot(w\times n)}. \tag{5.9}$$

Απόδειξη:

Για τις ανάγκες της απόδειξης θα κάνουμε χρήση των εξής δύο ταυτοτήτων Διαφορικής Γεωμετρίας (βλέπε [2], Λήμμα 1, σελίδα 233):
Αν $\tilde{w}$ μια ομαλή συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $\tilde{w}\cdot n=0$ στο ∂S τότε:

$$\boxed{2D(\tilde{w})n\times n=\partial_n\tilde{w}\times n+\tilde{w}\times n,}$$

αφού στη μοναδιαία μπάλα η καμπυλότητα είναι 1. Επίσης αν $\tilde{w}\cdot n=0$ στο P τότε:

$$\boxed{2D(\tilde{w})n\times n=\partial_n\tilde{w}\times n}, \tag{5.10}$$

Έχω ότι:

$$\int_F\Delta v\cdot w=\int_F(\operatorname{div}(\nabla v))\cdot w=-\int_F\nabla v:\nabla w+\int_{\partial F} w\cdot\nabla v\,n=-\int_F\nabla v:\nabla w+\int_{\partial S\cup P} w\cdot\partial_n v.$$

Από την ταυτότητα του εξωτερικού γινομένου (5.7) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\int_F \Delta v \cdot w &= -\int_F \nabla v : \nabla w + \int_{\partial S} (\partial_n v \times n) \cdot (w \times n) + \int_P (\partial_n v \times n) \cdot (w \times n) \\ &= -\int_F \nabla v : \nabla w + \int_{\partial S} (\partial_n (v - e_z) \times n) \cdot (w \times n) + \int_P (\partial_n v \times n) \cdot (w \times n). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Επίσης, θυμόμαστε ότι $\Delta v = \mathrm{div}\,(\nabla v) = 2\mathrm{div}\,(D(v))$ αφού $\mathrm{div}\,(\nabla v)^T = 0$. Συνεπώς:

$$\int_F \Delta v \cdot w = \int_F (\mathrm{div}\,(\nabla v)) \cdot w = \int_F (2\mathrm{div}\,(D(v)) \cdot w = -2\int_F D(v) : \nabla w + 2\int_{\partial F} w \cdot D(v)n.$$

Εφαρμόζοντας την (5.7) έχω ότι:

$$\begin{aligned}\int \Delta u \cdot w &= -2\int_F D(v) : D(w) + \int_{\partial S} (2D(v)n \times n) \cdot (w \times n) + \int_P (2D(v)n \times n) \cdot (w \times n) \\ &= -2\int_F D(v) : D(w) + \int_{\partial S} (2D(v - e_z)n \times n) \cdot (w \times n) + \int_P (2D(v)n \times n) \cdot (w \times n).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώ τώρα, την ταυτότητα (5.10) με $\tilde{w} = v - e_z$ στο ∂S και την ταυτότητα (5.10) με $\tilde{w} = v$ στο P έχω:

$$\begin{aligned}\int \Delta u \cdot w = -2\int_F D(v) : D(w) &+ \int_{\partial S} \left[(\partial_n (v - e_z) \times n) + ((v - e_z) \times n)\right] \cdot (w \times n) \\ &+ \int_P (\partial_n v \times n) \cdot (w \times n).\end{aligned} \tag{5.12}$$

Εξισώνοντας, λοιπόν, τις σχέσεις (5.11) και (5.12) έχω ότι:

$$2\int_F D(v) : D(w) = \int_F \nabla v : \nabla w + \int_{\partial S} ((v - e_z) \times n) \cdot (w \times n).$$

□

Λήμμα 5.3. *Αν η $u \in H(\mathbb{R}^n_+, S)$ ικανοποιεί την εξίσωση Stokes* (3.3) *με συνοριακές συνθήκες* (5.17) *τότε η δύναμη $\mathcal{F}$ θα δίνεται από τον τύπο:*

$$\boxed{\mathcal{F} = \int_F |\nabla u|^2 + \left(\frac{1}{\beta_S} + 1\right)\int_{\partial S} |(u - e_z) \times n|^2\, d\sigma + \frac{1}{\beta_P}\int_P |u \times n|^2}. \tag{5.13}$$

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \int_{\partial S} (2D(u)n - pn)\, d\sigma \cdot e_z = \int_{\partial S} (2D(u)n - pn) \cdot (e_z - u + u)\, d\sigma \\ &= \int_{\partial S} (2D(u)n - pn) \cdot (e_z - u) + \int_{\partial S} (2D(u)n - pn) \cdot u\ .\end{aligned} \tag{5.14}$$

Θα ασχοληθούμε αρχικά με το $\int_{\partial S}(2D(u)n - pn) \cdot u$. Αν πολλαπλασίασουμε την εξίσωση $\operatorname{div} \mathbb{T} = 0$ με w και ολοκληρώσουμε τότε:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_F u \cdot \operatorname{div} \mathbb{T}(u) = -\int_F \nabla u : \mathbb{T}(u) + \int_{\partial F} u \cdot \mathbb{T}(u)n \\
&= -2\int_F \nabla u : (D(u) - pI) + \int_{\partial S \cup P} u \cdot \mathbb{T}(u)n \\
&= -2\int_F [\nabla u : D(u) - \nabla u : pI] + \int_{\partial S \cup P} u \cdot \mathbb{T}(u)n.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς ,χρησιμοιοιώντας την (5.5) έχουμε ότι:

$$
-2\int_F D(u) : D(u) + \int_{\partial S \cup P} u \cdot \mathbb{T}(u)n = 0.
$$

Άρα:

$$
2\int_F |D(u)|^2 - \int_P u \cdot \mathbb{T}(u)n = \int_{\partial S} u \cdot \mathbb{T}(u)n.
$$

Υπολογίζω το ολοκλήρωμα $\int_P u \cdot \mathbb{T}(u)n$. Έχω ότι:

$$
\int_P u \cdot \mathbb{T}(u)n = \int_P u \cdot (2D(u)n - pn) = \int_P u \cdot 2D(u)n - \int_P u \cdot pn.
$$

Λόγω των συνοριακών συνθηκών (5.17) το $\int_P u \cdot pn = 0$. Συνεπώς, αν χρησιμοποιήσω και την ταυτότητα (5.7) προκύπτει ότι:

$$
\int_P u \cdot \mathbb{T}(u)n = \int_P u \cdot 2D(u)n = \int_P (2D(u)n \times n) \cdot (u \times n).
$$

Εφαρμόζω τώρα τη συνοριακή συνθήκη για το κάτω στερεό σύνορο και έχω ότι:

$$
\int_P u \cdot \mathbb{T}(u)n = \int_P (2D(u)n \times n) \cdot (u \times n) = \frac{1}{\beta_P}\int_P |u \times n|^2.
$$

Επομένως κάνονοντας χρήση και της σχέσης (5.9), η (5.14) γίνεται:

$$
\int_{\partial S} u \cdot \mathbb{T}(u)n = \int_F |\nabla u|^2 + \int_{\partial S} |(u - e_z) \times n|^2 + \frac{1}{\beta_P}\int_P |u \times n|^2.
$$

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{\partial S}(e_z - u) \cdot \mathbb{T}(u)n$. Έχω ότι:

$$
\int_{\partial S}(e_z - u) \cdot \mathbb{T}(u)n = \int_{\partial S}(e_z - u) \cdot (2D(u)n - pn) = \int_{\partial S}(e_z - u) \cdot 2D(u)n - \int_{\partial S}(e_z - u) \cdot pn.
$$

Ισχύει ότι $\int_{\partial S}(e_z - u) \cdot pn = 0$, εξαιτίας των συνοριακών συνθηκών, Έτσι χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (5.7) έχουμε ότι:

$$
\int_{\partial S}(e_z - u) \cdot \mathbb{T}(u)n = \int_{\partial S}(e_z - u) \cdot 2D(u)n = \int_{\partial S}(2D(u - e_z)n \times n) \cdot ((e_z - u) \times n).
$$

Εφαρμόζοντας τώρα τις συνοριακές συνθήκες (5.17) καταλήγουμε στη σχέση:

$$
\int_{\partial S}(e_z - u) \cdot \mathbb{T}(u)n = \frac{1}{\beta_S}\int_{\partial S} |(u - e_z) \times n|^2.
$$

Επομένως, αν αντικαταστήσω στην (5.14) προκύπτει το ζητούμενο.

$\square$

Λήμμα 5.4. *Η $u_h \in H(\mathbb{R}^n_+, S)$ είναι η λύση της εξίσωσης* (3.1) *με συνοριακές συνθήκες* (5.17) *τότε η u_h ελαχιστοποιεί την ενέργεια $E(u_h)$:*

$$\boxed{E(u_h) = inf\{E(u), u \in \mathcal{A}\}},$$

Όπου

$$E(u) := \int_F |\nabla u|^2 + \left(\frac{1}{\beta_S} + 1\right) \int_{\partial S} |(u - e_z) \times n|^2 \, d\sigma + \frac{1}{\beta_P} \int_P |u \times n|^2, \tag{5.15}$$

και

$$\mathcal{A} := \{u \in H(\mathbb{R}^n_+, S), \quad u \cdot n|_P = 0, \quad (u - e_z) \cdot n|_S = 0\}.$$

Απόδειξη:

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.3) και (5.9) προκύπτει ότι:

$$\int_F \nabla u_h : \nabla w + \left(\frac{1}{\beta_S} + 1\right) \int_{\partial S} ((u_h - e_z) \times n) \cdot (w \times n) + \frac{1}{\beta_P} \int_P (u_h \times n) \cdot (w \times n) = 0,$$

όπου $w \in H^1(F)$ τέτοιο ώστε $\operatorname{div} w = 0$ και $w \cdot n = 0$ στο $\partial S \cup P$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω ισότητα $w = u_h - u$, $u \in \mathcal{A}$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
&\int_F |\nabla u_h|^2 + \left(\frac{1}{\beta_S} + 1\right) \int_{\partial S} |(u_h - e_z) \times n|^2 \, d\sigma + \frac{1}{\beta_P} \int_P |u_h \times n|^2 \, d\sigma \\
= &\int_F \nabla u_h : \nabla u + \left(\frac{1}{\beta_S} + 1\right) \int_{\partial S} ((u_h - e_z) \times n) \cdot ((u - e_z) \times n) \, d\sigma + \frac{1}{\beta_P} \int_P (u_h \times n) \cdot (u \times n) \, d\sigma.
\end{aligned}$$

Τέλος, εφαρμόζοντας τις ανισοτητες $Cauchy - Schwartz$ και $Young$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
&\int_F \nabla u_h : \nabla u + \left(\frac{1}{\beta_S} + 1\right) \int_{\partial S} ((u_h - e_z) \times n) \cdot ((u - e_z) \times n) \, d\sigma + \frac{1}{\beta_P} \int_P (u_h \times n) \cdot (u \times n) \, d\sigma \\
&\leq \left(\int_F |\nabla u_h|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_F |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{\beta_S} + 1\right) \int_{\partial S} |(u_h - e_z) \times n|^2 + \frac{1}{\beta_P} \int_P |u_h \times n|^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\int_F |\nabla u_h|^2 + \int_F |\nabla u|^2\right) + \left(\frac{1}{\beta_S} + 1\right) \int_{\partial S} |(u_h - e_z) \times n|^2 + \frac{1}{\beta_P} \int_P |u_h \times n|^2.
\end{aligned}$$

Θα χρησιμοποιήσω τη σχέση (4.6). Έχω:

$$\begin{aligned}
&\int_F |\nabla u_h|^2 + \left(\frac{1}{\beta_S} + 1\right) \int_{\partial S} |(u_h - e_z) \times n|^2 \, d\sigma + \frac{1}{\beta_P} \int_P |u_h \times n|^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\int_F |\nabla u_h|^2 + \int_F |\nabla u|^2\right) + \left(\frac{1}{\beta_S} + 1\right) \int_{\partial S} |(u_h - e_z) \times n|^2 + \frac{1}{\beta_P} \int_P |u_h \times n|^2 \\
&\leq \int_F |\nabla u|^2 + \left(\frac{1}{\beta_S} + 1\right) \int_{\partial S} |(u - e_z) \times n|^2 + \frac{1}{\beta_P} \int_P |u \times n|^2.
\end{aligned}$$

Επομένως, φτάσαμε στο ζητούμενο.

□

Από τα προηγούμενα αποτελέσματα προκύπτει ότι:

Θεώρημα 5.5. *Αν u η λύση της εξίσωσης Stokes:*

$$\Delta u + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad x \in F.$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$(u - e_z) \cdot n|_{\partial S} = 0, \ (u - e_z) \times n|_{\partial S} = -2\beta_S [D(u)n] \times n|_{\partial S}, \tag{5.16}$$

πάνω στο στερεό σώμα και

$$u \cdot n|_P = 0, \ u \times n|_P = -2\beta_P [D(u)n] \times n|_P \tag{5.17}$$

τότε η δύναμη $\mathcal{F}$ που ασκεί το ρευστό στο στερεό σώμα S δίδεται από:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \int_F |\nabla u|^2 + \left(\frac{1}{\beta_S} + 1\right) \int_{\partial S} |(u - e_z) \times n|^2 \, d\sigma + \frac{1}{\beta_P} \int_P |u \times n|^2 \\ &= inf \left(\int_F |\nabla w|^2 + \left(\frac{1}{\beta_S} + 1\right) \int_{\partial S} |(w - e_z) \times n|^2 \, d\sigma + \frac{1}{\beta_P} \int_P |w \times n|^2 \right).\end{aligned}$$

όπου $\mathcal{A} := \{w \in H(\mathbb{R}^n_+, S), \quad w|_P = 0, \quad w|_{\partial S} = e_z\}$.

5.1 Τρισδιάστατη Περίπτωση

Στην υποενότητα αυτή θα μελετήσουμε το πρόβλημα έχοντας ως σώμα S τη μπάλα ακτίνας $r = 1$. Συνεπώς η καμπύλη για το σώμα αυτό περιγράφεται από:

$$\gamma_S(r) = 1 - \sqrt{1 - r^2}.$$

Θα ασχοληθούμε,αρχικά, με τις τρεις διαστάσεις και θα χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες. Σε αντίθεση με το προηγούμενο κεφάλαιο τώρα έχουμε λάβει υποψιν μας τους συντελεστές β_P κσι β_S. Σκοπός μας είναι να προσεγγίσουμε την δύναμη $\mathcal{F}$, έχοντας τώρα τα $\mathcal{A}, E$ όπως είναι ορισμένα στο Λήμμα (3.4). Επίσης, όπως και στη προηγούμενη περίπτωση έτσι και τώρα θα περιοριστούμε στο χώρο

$$F^0 = \{r \leq r_0, \quad 0 \leq z \leq h + \gamma_s(r)\},$$

Έτσι η ταχύτητα θα δίδεται από τον τύπο:

$$u = -\partial_z \phi e_r + \frac{1}{r} \partial_r (r\phi) e_z$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned}&\phi(r, h + \gamma_S(r)) = \frac{r}{2}, \ \forall r \in (0, r_0) \quad \text{στο } \partial S, \\ &\phi(r, 0) = 0 \text{ στο } P.\end{aligned} \tag{5.18}$$

οι οποίες παραμένουν ίδιες αφού δεν έχουμε αλλάξει χώρο. Επίσης, παρατηρούμε ότι $\forall r \in (0, r_0)$ στο ∂S έχουμε :

$$\bullet\ e_z \cdot n = \frac{1}{\sqrt{1+|\gamma_S'(r)|^2}},$$

$$\begin{aligned}\bullet\ u \cdot n &= \frac{1}{\sqrt{1+|\gamma_S'(r)|^2}}\left(\gamma_S'(r)\partial_z\phi(r, h+\gamma_S(r)) + \frac{1}{r}\partial_r(r\phi)(r, h+\gamma_S(r)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+|\gamma_S'(r)|^2}}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}[r\phi(r, h+\gamma_S(r)],\end{aligned} \tag{5.19}$$

όπου n το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια που δίδεται από:

$$n = \frac{1}{\sqrt{1+|\gamma_S'(r)|^2}}[-\gamma_S'(r)e_r + e_z].$$

Στόχος μας είναι να γράψουμε την ενέργεια $\tilde{E}$, (5.15), ως συνάρτηση της ϕ. Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο έχουμε ότι:

$$|\nabla u|^2 = \left|\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z}\right|^2 + \left|\frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial(r\phi)}{\partial r}\frac{1}{r}\right)\right|^2 + \left|\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r\partial z}\right|^2.$$

και αναμένουμε ότι ο σημαντικότερος όρος θα προέρχεται από τη μεταβολή της ϕ στην κατεύθυνση του z. Συνεπώς, ο κυρίαρχος όρος θα είναι ο $\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right|^2$. Επίσης,χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.18) και (5.19) εύκολα υπολογίζουμε ότι:

- $u \times n = \partial_z\phi\ e_\theta,$ στο P
- $(u - e_z) \times n = \sqrt{1+|\gamma_S'(r)|^2}\partial_z\phi\ e_\theta,$ στο ∂S.

Επομένως, θα εισάγουμε ξανά ένα νέο πρόβλημα ελαχιστοποίησης, που πιστεύουμε ότι κρατάει τα ουσιαστικά χαρακτηριστικά του προηγούμενου αλλά είναι πιο απλό. Αν αντικαταστήσουμε λοιπόν, στην (5.15) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\tilde{E}(\phi) := &\int_{F^0\cap\{r<r_0\}}\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right|^2 r\,drdzd\theta \\ &+\left(1+\frac{1}{\beta_S}\right)\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}(1+|\gamma_S'(r)|^2)|\partial_z\phi(r, h+\gamma_S(r))|^2\left(\sqrt{1+\left|\frac{\partial(h+\gamma_S(r))}{\partial\theta}\right|^2+\left|\frac{\partial(h+\gamma_S(r))}{\partial r}\right|^2}\right)d\theta dr \\ &+\frac{1}{\beta_P}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}|\partial_z\phi(r,0)|^2 r\,d\theta dr,\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε ότι $\frac{\partial(h+\gamma_S(r))}{\partial\theta} = 0$ και $\frac{\partial(h+\gamma_S(r))}{\partial r} = \gamma_S'(r)$. Επίσης θεωρούμε $\frac{1}{\bar{\beta}_S} = 1 + \frac{1}{\beta_S}$ Επομένως ένα κάτω φράγμα της αρχικής ενέργειας θα δοθεί από το καινούριο απλουστευμένο πρόβλημα :

$$inf\tilde{E}(\phi),\ \phi \in \tilde{\mathcal{A}},$$

όπου

$$\tilde{E}(\phi) := \int_{F^0} \left|\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right|^2 r\,drdzd\theta + 2\pi \int_0^{r_0} \frac{(1+\gamma_S'(r))^{\frac{3}{2}}}{\overline{\beta}_S} + \frac{1}{\beta_P}|\partial_z\phi(r,0)|^2 r\,dr$$
$$= 2\pi \int_0^{r_0} \left(\int_0^{h+\gamma_S(r)} \left|\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right|^2 dz + \frac{(1+|\gamma_S'(r)|^2)^{\frac{3}{2}}}{\overline{\beta}_S} |\partial_z\phi(r,h+\gamma_S(r))|^2 + \frac{1}{\beta_P}|\partial_z\phi(r,0)|^2 \right) r\,dr$$
$$= 2\pi \int_0^{r_0} \breve{E}(\phi_r) r\,dr.$$

όπου $\phi_r = \phi_r(z)$ μια συνάρτηση μιας μεταβλητης που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες *Dirichlet* :

$$\begin{aligned} \phi_r(h+\gamma_s(r)) &= \frac{r}{2}, \ \forall r \in (0, r_0), \\ \phi_r(0) &= 0. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Σε αντίθεση με το προηγούμενο κεφάλαιο, τώρα μπορούμε να απλοποιήσουμε περισσότερο το πρόβλημα μας ανάγοντας το σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιας μεταβλητής. Αρκεί, λοιπόν να ελαχιστοποιήσουμε το $\breve{E}$. Συνεπώς, το πρόβλημα ελαχιστοποιήσης είναι:

$$\boxed{\breve{E} = \int_0^{h+\gamma_S(r)} |\phi_r''(z)|\,dz + \left[\frac{(1+|\gamma_S'(r)|^2)^{\frac{3}{2}}}{\overline{\beta}_S} |\phi_r'(h+\gamma_S(r))|^2 + \frac{1}{\beta_P}|\phi_r'(0)|^2 \right]}. \tag{5.21}$$

όπου $\phi_r \in \mathcal{A}$, όπου $\mathcal{A} = \{\phi \in H^2(F^0),\ \phi$ ικανοποιεί τις (5.20)$\}$.
Στόχος μας τώρα είναι να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησοειδές $\breve{E}$. Έτσι έχουμε:

Λήμμα 5.6. *Η συνάρτηση που ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές $\breve{E}$ είναι:*

$$\boxed{\tilde{\phi}(r,z) = \frac{r}{2}\Phi\left(r, \frac{z}{h+\gamma_S(r)}\right)},$$

όπου το Φ δίδεται από:

$$\Phi(r,t) := -\frac{2(a_S + a_s a_P + a_p)}{12 + 4(a_S + a_P) + a_P a_S} t^3 + \frac{3(2+a_S)a_P}{12+4(a_S+a_P)+a_P a_S} t^2 + \frac{6(2+a_s)}{12+4(a_S+a_P)+a_P a_S} t, \tag{5.22}$$

και

$$\begin{aligned} a_S(r) &:= \frac{(1+|\gamma_S'(r)|^2)^{\frac{3}{2}}(h+\gamma_S(r))}{\overline{\beta}_S}, \\ a_P(r) &:= \frac{(h+\gamma_S(r))}{\beta_P}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Απόδειξη:

Βήμα 1: Η ϕ_r που ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές πρέπει να ικανοποιεί: $\phi_r^{(4)} = 0$ και τις συνθήκες *Robin*:

$$\begin{aligned} &\phi_r''(h + \gamma_S(r)) + \frac{(1 + |\gamma_S'(r)|^2)^{\frac{3}{2}}}{\bar{\beta}_S} = 0, \\ &\phi_r''(0) - \frac{1}{\beta_P}\phi_r'(0) = 0. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Απόδειξη του ισχυρισμού:
Παίρνω το συναρτησοειδές όπως έχει οριστεί στην (5.21) και θεωρώ μια συνάρτηση ελέγχου $y \in C^\infty(F^0)$, με $y(0) = y(h + \gamma_s(r)) = 0$ και έχω:

$$\begin{aligned} \breve{E}(\phi_r + \epsilon y) = &\int_0^{h+\gamma_S(r)} |\phi_r''(z) + \epsilon y''(z)|^2 \, dz \\ &+ \left[\frac{(1 + |\gamma_S'(r)|^2)^{\frac{3}{2}}}{\bar{\beta}_S} |\phi_r'(h + \gamma_S(r)) + \epsilon y'(h + \gamma_S(r))|^2 + \frac{1}{\beta_P}|\phi_r'(0) + \epsilon y'(0)|^2 \right]. \end{aligned}$$

Ισχύει ότι $\frac{d\breve{E}}{d\epsilon} = 0$ για ε=0. Συνεπώς:

$$\left.\frac{d\breve{E}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_0^{h+\gamma_S(r)} \phi_r''(z) y''(z) \; dz + \frac{(1 + |\gamma_S'(r)|^2)^{\frac{3}{2}}}{\bar{\beta}_S} \phi_r'(h + \gamma_S(r)) y'(h + \gamma_S(r)) + \frac{1}{\beta_P}\phi_r'(0) y'(0).$$

Εφαρμόζοντας κατα παράγοντες ολοκλήρωση και λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι $y(0) = y(h + \gamma_s(r)) = 0$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} &\left[\phi_r''(h + \gamma_S(r)) + \frac{(1 + |\gamma_S'(r)|^2)^{\frac{3}{2}}}{\bar{\beta}_S} \phi_r'(h + \gamma_S(r)) \right] y'(h + \gamma_S(r)) \\ &-[\phi_r''(0) - \frac{1}{\beta_P}\phi_r'(0)] y'(0) + \int_0^{h+\gamma_s(r)} \phi^{(4)}(r) y'(z) \, dz = 0. \end{aligned}$$

Αφού αυτό ισχύει για τις συναρτήσεις y με τις παραπάνω ιδιότητες τότε ισχύει και για $y \in C_0^\infty(F^0)$. Αυτό σημαίνει ότι·

$$\int_0^{h+\gamma_s(r)} \phi^{(4)}(r) y(z) \, dz = 0, \; \forall y \in C_0^\infty(F^0)$$

και επομένως:

$$\phi_r^{(4)}(z) = 0.$$

Συνεπώς προκύπτει ότι:

$$\left[\phi_r''(h + \gamma_S(r)) + \frac{(1 + |\gamma_S'(r)|^2)^{\frac{3}{2}}}{\bar{\beta}_S} \phi_r'(h + \gamma_S(r)) \right] y'(h + \gamma_S(r)) - [\phi_r''(0) - \frac{1}{\beta_P}\phi_r'(0)] y'(0) = 0.$$

Αρχικά επιλέγω $y'(0) = 0$ και $y'(h + \gamma_S(r)) \neq 0$, άρα:

$$\phi_r''(h+\gamma_S(r)) + \frac{(1+|\gamma_S'(r)|^2)^{\frac{3}{2}}}{\bar{\beta}_S} = 0.$$

Στη συνέχεια επιλέγω $y'(h+\gamma_S(r)) = 0$ και $y'(0) \neq 0$ άρα:

$$\phi_r''(0) - \frac{1}{\beta_P}\phi_r'(0) = 0.$$

Επομένως προκύπτουν οι συνθήκες *Robin*.
Βήμα 2: Επίλυση των εξισώσεων.
Αφού ικανοποιείται η εξίσωση $Euler - Lagrange$ τότε $\phi_r^{(4)} = 0$ και άρα η ϕ_r είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Συνεπώς,

$$\tilde{\phi}(r,z) = Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0, \text{ όπου } A, B, C, D \text{ συναρτήσεις του } r.$$

Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες (5.20) προκύπτει ότι όταν $z = h + \gamma_S(r)$ τότε:

$$\begin{aligned} &D = 0, \\ &Az^3 + Bz^2 + Cz = \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Ενώ χρησιμοποιώντας τις συνθήκες (5.24) προκύπτει ότι όταν $z = h + \gamma_S(r)$ τότε:

$$\begin{aligned} &2B - \frac{1}{\beta_P}C = 0, \\ &6Az + 2B + \frac{(1+|\gamma_S'(r)|^2)^{\frac{3}{2}}}{\bar{\beta}_S}[3Az^2 + 2Bz + C] = 0. \end{aligned}$$

Λύνοντας λοιπόν το σύστημα καταλήγουμε ότι:

$$A = -\frac{r}{2(h+\gamma_S(r))^3}\left[\frac{2(h+\gamma_S(r)) + \frac{(1+|\gamma_S'(r)|^2)^{\frac{3}{2}}}{\bar{\beta}_S}(2(h+\gamma_S(r)))^2 + 2\beta_P(h+\gamma_S(r)))}{4(h+\gamma_S(r)) + 12\beta_P + \frac{(1+|\gamma_S'(r)|^2)^{\frac{3}{2}}}{\bar{\beta}_S}((h+\gamma_S(r))^2 + 4\beta_P(h+\gamma_S(r)))}\right],$$

$$B = \frac{r}{2(h+\gamma_S(r))^2}\left[\frac{6(h+\gamma_S(r)) + \frac{(1+|\gamma_S'(r)|^2)^{\frac{3}{2}}}{\bar{\beta}_S}(3(h+\gamma_S(r)))^2)}{4(h+\gamma_S(r)) + 12\beta_P + \frac{(1+|\gamma_S'(r)|^2)^{\frac{3}{2}}}{\bar{\beta}_S}((h+\gamma_S(r))^2 + 4\beta_P(h+\gamma_S(r)))}\right],$$

$$C = \frac{r}{2(h+\gamma_S(r))^3}\left[\frac{12\beta_P + \frac{(1+|\gamma_S'(r)|^2)^{\frac{3}{2}}}{\bar{\beta}_S}(6\beta_P(h+\gamma_S(r)))}{4(h+\gamma_S(r)) + 12\beta_P + \frac{(1+|\gamma_S'(r)|^2)^{\frac{3}{2}}}{\bar{\beta}_S}((h+\gamma_S(r))^2 + 4\beta_P(h+\gamma_S(r)))}\right]$$

Διαιρώντας τώρα αριθμητή και παρονομαστη με β_P προκύπτει ότι:

$$A = -\frac{r}{2(h+\gamma_S(r))^3}\left[\frac{2(a_s + a_s a_P + a_P)}{12 + a_S a_P + 4(a_S + a_P)}\right],$$

$$B = \frac{r}{2(h+\gamma_S(r))^2}\left[\frac{3(2+a_S)a_P}{12 + a_S a_P + 4(a_S + a_P)}\right],$$

$$C = \frac{r}{2(h+\gamma_S(r))}\left[\frac{6+3a_S}{12 + a_S a_P + 4(a_S + a_P)}\right].$$

Συνεπώς αν αντικαταστήσω στη $\tilde{\phi}$ προκύπτει το ζητούμενο.

□

Λήμμα 5.7. *Αντικαθιστώντας την $\tilde{\phi}$ στην $\tilde{E}(\tilde{\phi})$ η δύναμη που ασκείται στο στερεό σώμα δίδεται από τον τύπο:*

$$\boxed{\mathcal{F} = \tilde{E}(\phi) = 2\pi\int_0^{r_0}\left[\int_0^1 |\partial_{tt}\Phi(r,s)|^2\,ds + a_s|\partial_t\Phi(r,1)|^2 + a_P|\partial_t\Phi(r,0)|^2\right]\frac{r^3dr}{(h+\gamma_S(r))^3}} \quad (5.25)$$

Απόδειξη:

Έχουμε ότι:

$$\mathcal{F} = \tilde{E}(\tilde{\phi}) := \int_{F^0}\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right|^2 r\,drdzd\theta + 2\pi\int_0^{r_0}\left[\frac{(1+|\gamma_S'(r)|^2)^{\frac{3}{2}}}{\bar{\beta}_S}|\partial_z\phi(r,h+\gamma_S(r))|^2 + \frac{1}{\beta_P}|\partial_z\phi(r,0)|^2\right] r\,dr,$$

Αρχικά θα υπολογίσουμε:

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial z} = \frac{r}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{r}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{1}{h+\gamma_S(r)}.$$

Άρα έχουμε ότι:

$$\left|\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial z}\right|^2 = \frac{r^2}{4}\left|\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|^2\left|\frac{\partial t}{\partial z}\right|^2 = \frac{r^2}{4}\left|\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|^2\frac{1}{(h+\gamma_S(r))^2}.$$

Αν αντικαταστήσω λοιπόν στον παραπάνω τύπο για τη δύναμη προκύπτει ότι:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}\left[\frac{(1+|\gamma_S'(x)|^2)^{\frac{3}{2}}}{\bar{\beta}_S}|\partial_t\tilde{\Phi}(r,1)|^2 + \frac{1}{\beta_P}|\partial_t\tilde{\Phi}(r,0)|^2\right]\frac{r^3}{4(h+\gamma_S(x))^2}\,drd\theta.$$

Αν τώρα πολλαπλασιάσω και διαιρέσω με $h+\gamma_S(r)$ έχω ότι:

$$2\pi\int_0^{r_0}\left[a_S|\partial_t\Phi(r,1)|^2 + a_P|\partial_t\Phi(r,0)|^2\right]\frac{r^3}{4(h+\gamma_S(r))^3}\,dr \quad (5.26)$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial z^2} = \frac{r}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{r}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\frac{1}{(h+\gamma_S(r))^2}.$$

Άρα έχουμε ότι:

$$\left|\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial z^2}\right|^2 = \frac{r^2}{4}\left|\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right|^2\left|\frac{\partial t^2}{\partial z^2}\right|^2 = \frac{r^2}{4}\left|\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right|^2\frac{1}{(h+\gamma_S(r))^4}.$$

Αντικαθιστώντας στον τύπο της δύναμης προκύπτει:

$$\int_0^{r_0}\int_0^{h+\gamma_S(r)}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial z^2}\right|^2 r\,d\theta dz dr = \int_0^{r_0}\int_0^{1}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial^2 \Phi(r,s)}{\partial t^2}\right|^2\frac{r^3}{(h+\gamma_S(r))^4}\,d\theta ds dr.$$

Άρα:

$$\int_0^{r_0}\int_0^{h+\gamma_S(r)}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial z^2}\right|^2 r\,d\theta dz dr = 2\pi\int_0^{r_0}\int_0^{1}\left|\frac{\partial^2 \Phi(r,s)}{\partial t^2}\right|^2\frac{r^3}{(h+\gamma_S(r))^3}\,dr \tag{5.27}$$

Επομένως αν προσθέσω τις σχέσεις (5.26) και (5.27) προκύπτει το ζητούμενο.

□

Στο προηγούμενο Λήμμα βρήκαμε τον τύπο της δύναμης στη γενική περίπτωση όπου η καμπύλη του σώματος δίνεται από τη $\gamma(r)$. Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε τη συγκεκριμένη γεωμετρία, δηλαδή ότι το κάτω μέρος του στερεού δίδεται από την καμπύλη $\gamma_s(r) = 1 - \sqrt{1-r^2}$ που θα μας επιτρέψει να κάνουμε πιο ακριβείς εκτιμήσεις. Έτσι έχουμε:

Λήμμα 5.8. *Η δύναμη δίδεται από τον τύπο:*

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{F} &= \tfrac{\pi}{2}\int_0^{r_0}(I_1(r)+I_2(r))\frac{r^3dr}{(h+\frac{r^2}{2})^3} + O(J(0,h))\\ &= \tfrac{\pi}{2}\int_0^{r_0}(I_1(r)+I_2(r))\frac{r^3dr}{(h+\frac{r^2}{2})^3} + O(|ln(h)|)\end{aligned}}$$

όπου:

$$I_1 := \frac{12(a_S^2a_P^2 + 5(a_S^2a_P + a_P^2a_S) + 4(a_S^2 + a_P^2) + 20a_Sa_P)}{(12+4(a_S+a_P)+a_Sa_P)^2},$$

$$I_2 := \frac{144(a_S+a_P)}{(12+4(a_S+a_P)+a_Sa_P)^2},$$

$$J(\beta,h) := \int_0^{\frac{r_0}{\sqrt{h}}}\frac{s^7ds}{(1+\frac{s^2}{2}+\beta s^{1+a})^4}\ .$$

Απόδειξη:

Αρχικά θα υπολογίσω τη πρώτη και τη δευτερη παράγωγο του Φ. Έχω ότι:

$$\partial_t\Phi\left(-3t^2\frac{2(a_S+a_Sa_P+a_P)}{12+4(a_S+a_P)+a_Sa_P}+2t\frac{3(2+a_S)a_P}{12+4(a_S+a_P)+a_Sa_P}+\frac{6(2+a_S)}{12+4(a_S+a_P)+a_Sa_P}\right),$$
$$\partial_{tt}\Phi\left(-6t\frac{2(a_S+a_Sa_P+a_P)}{12+4(a_S+a_P)+a_Sa_P}+2\frac{3(2+a_S)a_P}{12+4(a_S+a_P)+a_Sa_P}\right)$$

Συνεπώς:

$$|\partial_t\Phi(r,1)|^2=\frac{36a_P^2+144a_P+144}{(12+4(a_S+a_P)+a_Sa_P)^2},$$

$$|\partial_t\Phi(r,0)|^2=\frac{36a_S^2+144a_S+144}{(12+4(a_S+a_P)+a_Sa_P)^2},$$

$$\int_0^1|\partial_{tt}\Phi(r,s)|^2\,ds=\frac{48(a_S^2+a_P^2)+120a_S^2a_P^2+24(a_S^2a_P+a_P^2a_S-48a_Sa_P)}{(12+4(a_S+a_P)+a_Sa_P)^2}.$$

Αν αντικαταστήσω στην (5.34) προκύπτει ότι:

$$\mathcal{F}=\frac{\pi}{2}\int_0^{r_0}(I_1(r)+I_2(r))\frac{r^3dr}{(h+\gamma_S(r))^3}.$$

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\gamma_s(r)=1-\sqrt{1-r^2}$. Άρα έχουμε ότι:

$$\mathcal{F}=\frac{\pi}{2}\int_0^{r_0}(I_1(r)+I_2(r))\frac{r^3dr}{(h+1-\sqrt{1-r^2})^3}.$$

Κάνοντας ανάπτυγμα *Taylor* γύρω από το 0 έχουμε ότι $\sqrt{1-r^2}=1-\frac{r^2}{2}+O(r^4)$
Συνεπώς, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\mathcal{F}=\frac{\pi}{2}\int_0^{r_0}(I_1(r)+I_2(r))\frac{r^3dr}{(h+\frac{r^2}{2})^3}+O(J(0,h))$$

Όμως αφου β<<1 τότε $O(J(0,h))=O(|ln(h)|)$ και άρα προκύπτει το ζητούμενο.

□

Λήμμα 5.9. *Αν είτε το $\frac{h}{\beta_S}$ ή το $\frac{h}{\beta_P}$ είναι O(1) ή μεγαλυτερο τότε:*

$$\frac{c}{h}\leq\mathcal{F}\leq\frac{C}{h},$$

ενώ αν τα $\frac{h}{\beta_S}$ και $\frac{h}{\beta_P}$ είναι o(1) τότε:

$$\mathcal{F}=\pi\left(\frac{1}{\overline{\beta}_S}+\frac{1}{\beta_P}\right)|ln(h)|+O\left(\frac{1}{\overline{\beta}_S}+\frac{1}{\beta_P}\right)+O(|ln(h)|).$$

Απόδειξη:

Παραλείπουμε την απόδειξη της πρωτης περίπτωσης. Παρατηρούμε ότι πλησιάζει την $non - slip$ περίπτωση .
Θα αποδείξουμε λοιπόν, τη δεύτερη περίπτωση όπου $\frac{h}{\beta_S}$, $\frac{h}{\beta_P}$ αρκετά μικρά. Έχουμε ότι:

$$\tilde{\mathcal{F}} = \int_0^{r_0} I_1(r) \frac{r^3 dr}{(h+\gamma_S(r))^3} + \int_0^{r_0} I_2(r)) \frac{r^3 dr}{(h+\gamma_S(r))^3}..$$

Θα προσεγγίσουμε, αρχικά το πρώτο ολοκλήρωμα $\int_0^{r_0} I_1(r) \frac{r^3 dx}{(h+\gamma_S(r))^3}$.

$$a_s = \frac{1}{\bar{\beta}_S}\left(h + \frac{r^3}{2} + O(r^2(h+r^2))\right), \quad a_P = \frac{1}{\beta_P}\left(h + \frac{r^2}{2} + O(r^4)\right)$$

Συνεπώς, για r_0, h αρκετά μικρά εύκολα παίρνουμε ότι:

$$cJ_1(r) \leq I_1(r) \leq CJ_1(r), \quad J_1(r) := \left(\frac{a_P}{1+a_P} + \frac{a_S}{1+a_S}\right)^2$$

Αρκεί λοιπόν, να υπολογίσουμε το $\int_0^{r_0} J_1(r) \frac{r^3\,dr}{(h+\frac{r^2}{2})^3}$. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\int_0^{r_0} J_1(r) \frac{r^3\,dr}{(h+\frac{r^2}{2})^3} &= \int_0^{r_0} \left(\frac{a_P}{1+a_P} + \frac{a_S}{1+a_S}\right)^2 \frac{r^3\,dr}{(h+\frac{r^2}{2})^3} \\ &= \frac{1}{h^3}\int_0^{r_0} \left(\frac{\frac{h}{\beta_P}\left(1+\frac{r^2}{2h}\right)}{1+\frac{h}{\beta_P}\left(1+\frac{r^2}{2h}\right)} + \frac{\frac{h}{\bar{\beta}_S}\left(1+\frac{r^2}{2h}\right)}{1+\frac{h}{\bar{\beta}_S}\left(1+\frac{r^2}{2h}\right)}\right)^2 \frac{r^3\,dr}{(1+\frac{r^2}{2h})^3}\end{aligned}$$

Θέτω $u = \frac{r}{\sqrt{h}}$ και θεωρώ $r_0 = 1$. Έχω ότι:

$$\begin{aligned}\int_0^{r_0} J_1(r) \frac{r^3\,dr}{(h+\frac{r^2}{2})^3} &= \frac{1}{h}\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{h}}} \left(\frac{\frac{h}{\beta_P}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}{1+\frac{h}{\beta_P}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)} + \frac{\frac{h}{\bar{\beta}_S}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}{1+\frac{h}{\bar{\beta}_S}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}\right)^2 \frac{u^3\,du}{(1+\frac{u^2}{2})^3} \\ &\leq \frac{1}{h}\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{h}}} \left(\frac{\frac{h}{\beta_P}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}{1+\frac{h}{\beta_P}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}\right)^2 + \left(\frac{\frac{h}{\bar{\beta}_S}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}{1+\frac{h}{\bar{\beta}_S}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}\right)^2 \frac{u^3\,du}{(1+\frac{u^2}{2})^3}\end{aligned}$$

Παίρνω το $\frac{1}{h}\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{h}}} \left(\frac{\frac{h}{\beta_P}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}{1+\frac{h}{\beta_P}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}\right)^2$ και έχω ότι:

$$\frac{1}{h}\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{h}}} \left(\frac{\frac{h}{\beta_P}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}{1+\frac{h}{\beta_P}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}\right)^2 \leq \frac{\sqrt{h}}{\beta_P^2}\int_0^{\frac{1}{2h}} \frac{u^3}{1+\frac{u^2}{2}}\,du = O\left(\frac{1}{\beta_P^2}\right).$$

Ομοίως προκύπτει ότι:

$$\left(\frac{\frac{h}{\beta_S}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}{1+\frac{h}{\beta_S}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}\right)^2 \frac{u^3\,du}{(1+\frac{u^2}{2})^3} \leq O\left(\frac{1}{\beta_S^2}\right).$$

Άρα δεδομένου ότι $\frac{h}{\beta_P}, \frac{h}{\beta_S}$ είναι αρκετά μικρά τοτε το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι τάξης $\mathrm{O}\left(\frac{1}{\beta_P^2}+\frac{1}{\beta_S^2}\right) = o\left(\frac{1}{\beta_P}+\frac{1}{\beta_S}\right)$. Συνεπώς, προκύπτει ότι:

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{r_0} I_1(r)\frac{r^3\,dr}{(h+\frac{r^2}{2})^3} = o\left(\frac{1}{\beta_P}+\frac{1}{\beta_S}\right).$$

Τώρα, θα προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^{r_0} I_2(r)\frac{r^3\,dr}{(h+\frac{r^2}{2})^3}$. Για το I_2 έχουμε ότι:

$$\left(\frac{a_P}{(1+k_1a_P)^2}+\frac{a_S}{(1+k_1a_S)^2}\right)+O(J_1(r)) \leq I_2(r) \leq \left(\frac{a_P}{(1+k_2a_P)^2}+\frac{a_S}{(1+k_2a_S)^2}\right)+O(J_1(r))$$

όπου $k_1, k_2 > 0$ σταθερές. Αρκεί λοιπόν, να υπολογίσουμε το $\int_0^{r_0}\left(\frac{a_P}{(1+k_1a_P)^2}+\frac{a_S}{(1+k_1a_S)^2}\right)\frac{r^3\,dr}{(h+\frac{r^2}{2})^3}$. Από τον προηγούμενο υπολογισμό έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{2}\int_0^{r_0}\left(\frac{a_P}{(1+k_1a_P)^2}+\frac{a_S}{(1+k_1a_S)^2}\right)\frac{r^3\,dr}{(h+\frac{r^2}{2})^3}\\
=&\frac{\pi}{2h}\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{h}}}\left(\frac{\frac{h}{\beta_P}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}{1+\frac{h}{\beta_P}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}+\frac{\frac{h}{\beta_S}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}{1+\frac{h}{\beta_S}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}\right)^2\frac{u^3\,du}{(1+\frac{u^2}{2})^3}\\
=&\pi\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{h}}}\left(\frac{1}{\beta_P}+\frac{1}{\beta_S}\right)\left(\frac{\frac{1}{\beta_P}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}{1+\frac{h}{\beta_P}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}+\frac{\frac{1}{\beta_S}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}{1+\frac{h}{\beta_S}\left(1+\frac{u^2}{2}\right)}\right)^2\frac{u^3\,du}{(1+\frac{u^2}{2})^3}
\end{aligned}$$

Θέτω τώρα $x = 1+\frac{u^2}{2}$ και άρα προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{2}\int_0^{r_0}\left(\frac{a_P}{(1+k_1a_P)^2}+\frac{a_S}{(1+k_1a_S)^2}\right)\frac{r^3\,dr}{(h+\frac{x^2}{2})^3}\\
=&\pi\int_1^{1+\frac{1}{4h}}\left(\frac{1}{\beta_P}+\frac{1}{\beta_S}\right)\left(\frac{x-1}{(1+k\frac{h}{\beta_S}x)^2x^2}+\frac{x-1}{(1+k\frac{h}{\beta_P}x)^2x^2}\right)\,dx\\
=&\pi\left(\int_1^{1+\frac{1}{4h}}\frac{1}{\beta_S}\frac{dx}{(1+k\frac{h}{\beta_S}x)^2x}+\frac{1}{\beta_P}\int_1^{1+\frac{1}{4h}}\frac{dx}{(1+k\frac{h}{\beta_P}x)^2x}\right)+O\left(\frac{1}{\beta_P}+\frac{1}{\beta_S}\right)\\
=&\pi\left(\frac{1}{\beta_P}+\frac{1}{\beta_S}\right)|ln(h)|+O\left(\frac{1}{\beta_P}+\frac{1}{\beta_S}\right).
\end{aligned}$$

Συνεπώς έχω ότι:

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{r_0} I_2(r)\frac{r^3\,dr}{(h+\frac{r^2}{2})^3} = \pi\left(\frac{1}{\beta_P}+\frac{1}{\overline{\beta}_S}\right)|ln(h)| + O\left(\frac{1}{\beta_P}+\frac{1}{\overline{\beta}_S}\right).$$

Προσθέτοντας τα δυο ολοκληρώματα που υπολογίσαμε προκύπτει το ζητούμενο.

□

Με όλα τα παραπάνω,λοιπόν, ολοκλήρώσαμε τη μελέτη μας για την εύρεση ενός κάτω φράγματος της ενέργειας και μάλιστα μπορούμε να αποδείξουμε όμοια με το προηγούμενο κεφάλαιο ότι η προσέγγιση μας είναι ακριβής.

5.2 Δισδιάστατη Περίπτωση

Στην υποενότητα αυτή μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε το πρόβλημα στο επίπεδο xy, όπου τώρα S είναι ο μοναδιαίος δίσκος . Συνεπώς η καμπύλη για το σώμα αυτό περιγράφεται από:

$$\gamma_S(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}\,,\ |x| \le x_0 \text{ και } 0 < y < h + \gamma_S(x).$$

Άρα το κομμάτι του ρευστού που είναι δίπλα από το στερεό σώμα δίδεται από :

$$F^0 = \{|x| \le x_0, \quad 0 \le y \le h + \gamma_s(x)\}. \tag{5.28}$$

και η ταχύτητα θα δίδεται από τον τύπο:

$$u = -\partial_y\phi\,\hat{e}_x + \partial_x\phi\,\hat{e}_y.$$

Ακόμα από τις συνθήκες μη διαπερατότητας έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} &\phi(x, h+\gamma_S(x)) = x,\ \forall |x| < x_0 \quad \text{στο } \partial S, \\ &\phi(x,0) = 0 \text{ στο } P. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι $\forall x, |x| < x_0$ στο ∂S έχουμε :

$$\begin{aligned} \bullet\ \hat{e}_y \cdot n &= \frac{1}{\sqrt{1+|\gamma_S'(x)|^2}}, \\ \bullet\ u \cdot n &= \frac{1}{\sqrt{1+|\gamma_S'(x)|^2}}\Big(\gamma_S'(x)\partial_y\phi(x,h+\gamma_S(x)) + \partial_x\phi(x,h+\gamma_S(x)\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+|\gamma_S'(x)|^2}}\frac{d}{dx}[\phi(x,h+\gamma_S(x)], \end{aligned} \tag{5.30}$$

όπου n το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια $y = \gamma_S(x)$ που δίδεται από:

$$n = \frac{1}{\sqrt{1+|\gamma_S'(x)|^2}}[-\gamma_S'(x)\,\hat{e}_x + \hat{e}_y].$$

Υπενθυμίζουμε ότι:

$$E(u) := \int_F^0 |\nabla u|^2 + \left(\frac{1}{\beta_S}+1\right)\int_{\partial S} |(u-\hat{e}_y)\times n|^2\, d\sigma + \frac{1}{\beta_P}\int_P |u\times n|^2,$$

και έχουμε ότι:

$$|\nabla u|^2 = 2\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right|^2.$$

και αναμένουμε ότι ο σημαντικότερος όρος θα προέρχεται από τη μεταβολή της ϕ στην κατεύθυνση του y. Συνεπώς, ο κυρίαρχος όρος του $|\nabla u|^2$ θα είναι ο $\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right|^2$. Επίσης, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.29) και (5.30) εύκολα υπολογίζουμε ότι:

- $u\times n = \partial_y\phi\ \hat{e}_z$, στο P,
- $(u-\hat{e}_y)\times n = \sqrt{1+|\gamma_S'(x)|^2}\partial_y\phi\ \hat{e}_z$, στο ∂S.

Επομένως, θα εισάγουμε ξανά ένα νέο πρόβλημα ελαχιστοποίησης, που είναι πιο απλό. Επίσης στη συνέχεια θέτουμε :

$$\frac{1}{\bar{\beta}_S} = 1 + \frac{1}{\beta_S}$$

Ένα κάτω φράγμα της ενέργειας θα δοθεί από το καινούριο απλουστευμένο πρόβλημα :

$$infE(\phi),\ \phi\in\breve{\mathcal{A}},$$

όπου:

$$\begin{aligned} E(\phi) :&= \int_{F^0}\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right|^2 dxdy + \int_0^{x_0}\left[\frac{(1+|\gamma_S'(x)|^2)}{\bar{\beta}_S}|\partial_y\phi(x,h+\gamma_S(x))|^2 + \frac{1}{\beta_P}|\partial_y\phi(x,0)|^2\right]dx \\ &= \int_0^{x_0}\left(\int_0^{h+\gamma_S(x)}\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right|^2 dy + \frac{(1+|\gamma_S'(x)|^2)}{\bar{\beta}_S}|\partial_y\phi(x,h+\gamma_S(x))|^2 + \frac{1}{\beta_P}|\partial_y\phi(x,0)|^2\right)dx \end{aligned}$$

$$\hat{\mathcal{A}} := \{\phi\in H^2(F^0),\ \phi \quad \text{ικανοποεί τις, (5.29)}\}.$$

και F^0 όπως ορίζεται στην (5.28).

Μπορούμε να απλοποιήσουμε ακόμα περισσότερο το πρόβλημα ανάγοντας το σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιας μεταβλητής. Παρατηρούμε ότι $E(\phi) = \int_0^{x_0}\breve{E}(\phi_x)$. Στόχος μας λοιπόν, είναι να ελαχιστοποιήσουμε το $\breve{E}$:

$$\breve{E} = \int_0^{h+\gamma_S(x)} |\phi_x''(y)|\,dy + \left[\frac{(1+|\gamma_S'(x)|^2)}{\bar{\beta}_S}|\phi_x'(h+\gamma_S(x))|^2 + \frac{1}{\beta_P}|\phi_x'(0)|^2\right].$$

οπου $\phi_x = \phi_x(y)$ μια συνάρτηση που ικανοποεί τις συνθήκες *Dirichlet* :

$$\begin{aligned} &\phi_x(y) = x,\ \forall|x|<x_0 \quad \text{στο } \partial S, \\ &\phi_x(0) = 0 \text{ στο } P. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Στόχος μας τώρα είναι να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησοειδές $\breve{E}$. Έτσι έχουμε:

Λήμμα 5.10. *Η συνάρτηση που ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές $\breve{E}$ είναι:*

$$\boxed{\breve{\phi}(x,y) = x\tilde{\Phi}\left(x, \frac{y}{h+\gamma_S(x)}\right)},$$

όπου το Φ δίδεται από:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(x,t) := &-\frac{2(c_S + c_s c_P + c_p)}{12 + 4(c_S + c_P) + c_P c_S}t^3 + \frac{3(2 + c_S)c_P}{12 + 4(c_S + c_P) + c_P c_S}t^2 \\ &+ \frac{6(2 + c_s)}{12 + 4(c_S + c_P) + c_P c_S}t, \ \ \mu\varepsilon \ \ t = \frac{y}{h+\gamma_S(x)}\end{aligned} \tag{5.32}$$

και

Απόδειξη:
Η εξίσωση *Euler – Lagrange* είναι $\phi_x^{(4)} = 0$. Άρα η ϕ_x είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Συνεπώς,

$$\phi(x,y) = Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0, \text{ όπου } A, B, C, D \text{ συναρτήσεις του } r.$$

Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες (5.31) προκύπτει ότι όταν $y = h + \gamma_S(x)$ τότε:

$$\begin{aligned}&D = 0,\\ &Ay^3 + By^2 + Cy = x.\end{aligned}$$

Επίσης, όπως αποδείχθηκε στη τρισδιάστατη περίπτωση από *Euler – Langrange* προκυπτουν και οι συνθήκες *Robin* για το ϕ_x έτσι ώστε :

$$\begin{aligned}&\phi_x''(h+\gamma_S(x)) + \frac{(1+|\gamma_S'(x)|^2)}{\bar{\beta}_S}\phi_x'(h+\gamma_S(x)) = 0,\\ &\phi_x''(0) - \frac{1}{\beta_P}\phi_x'(0) = 0.\end{aligned} \tag{5.33}$$

από τις οποίες προκύπτει ότι όταν $y = h + \gamma_S(x)$ τότε:

$$\begin{aligned}&2B - \frac{1}{\beta_P}C = 0,\\ &6Ay + 2B + \frac{(1+|\gamma_S'(x)|^2)}{\bar{\beta}_S}[3Ay^2 + 2By + C] = 0.\end{aligned}$$

Λύνοντας λοιπόν το σύστημα καταλήγουμε ότι:

$$A = -\frac{x}{(h+\gamma_S(x))^3}\left[\frac{2(h+\gamma_S(x)) + \frac{(1+|\gamma_S'(x)|^2)}{\bar{\beta}_S}(2(h+\gamma_S(x)))^2 + 2\beta_P(h+\gamma_S(x)))}{4(h+\gamma_S(x)) + 12\beta_P + \frac{(1+|\gamma_S'(x)|^2)}{\bar{\beta}_S}((h+\gamma_S(x))^2 + 4\beta_P(h+\gamma_S(x)))}\right],$$

$$B = \frac{x}{(h+\gamma_S(x))^2}\left[\frac{6(h+\gamma_S(x)) + \frac{(1+|\gamma_S'(x)|^2)}{\bar{\beta}_S}(3(h+\gamma_S(x)))^2)}{4(h+\gamma_S(x)) + 12\beta_P + \frac{(1+|\gamma_S'(x)|^2)}{\bar{\beta}_S}((h+\gamma_S(x))^2 + 4\beta_P(h+\gamma_S(x)))}\right],$$

$$C = \frac{x}{(h+\gamma_S(x))}\left[\frac{12\beta_P + \frac{(1+|\gamma_S'(x)|^2)}{\bar{\beta}_S}(6\beta_P(h+\gamma_S(x)))}{4(h+\gamma_S(x)) + 12\beta_P + \frac{(1+|\gamma_S'(x)|^2)}{\bar{\beta}_S}((h+\gamma_S(x))^2 + 4\beta_P(h+\gamma_S(x)))}\right]$$

Διαιρώντας τώρα αριθμητή και παρονομαστη με β_P προκύπτει ότι:

$$A = -\frac{x}{(h+\gamma_S(x))^3}\left[\frac{2(c_s + c_s c_P + c_P)}{12 + c_S c_P + 4(c_S + c_P)}\right],$$

$$B = \frac{x}{(h+\gamma_S(x))^2}\left[\frac{3(2+c_S)c_P}{12 + c_S c_P + 4(c_S + c_P)}\right],$$

$$C = \frac{x}{2(h+\gamma_S(x))}\left[\frac{6+3c_S}{12 + c_S c_P + 4(c_S + c_P)}\right].$$

Συνεπώς αν αντικαταστήσω στη $\breve{\phi}$ προκύπτει το ζητούμενο.

□

Λήμμα 5.11. *Αντικαθιστώντας την $\breve{\phi}$ στην $\breve{E}(\breve{\phi})$ η δύναμη που ασκείται στο στερεό σώμα δίδεται από τον τύπο:*

$$\boxed{\tilde{\mathcal{F}} = E(\phi) = \int_0^{x_0}\left[\int_0^1 |\partial_{tt}\Phi(x,s)|^2\, ds + c_s|\partial_t\Phi(x,1)|^2 + c_P|\partial_t\Phi(x,0)|^2\right]\frac{x^2 dx}{(h+\gamma_S(x))^3}} \quad (5.34)$$

Απόδειξη:

Έχουμε ότι:

$$\tilde{\mathcal{F}} = E(\phi) := \int_{F^0}\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right|^2 dxdy + \int_0^{x_0}\left[\frac{(1+|\gamma_S'(x)|^2)}{\bar{\beta}_S}|\partial_y\phi(x,h+\gamma_S(x))|^2 + \frac{1}{\beta_P}|\partial_y\phi(x,0)|^2\right]dx, \quad (5.35)$$

Αρχικά θα υπολογίσουμε:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x\frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = x\frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{1}{h+\gamma_S(x)}.$$

Άρα έχουμε ότι:

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|^2 = y^2\left|\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|^2\left|\frac{\partial t}{\partial y}\right|^2 = x^2\left|\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|^2\frac{1}{(h+\gamma_S(x))^2}.$$

Αν αντικαταστήσω λοιπόν στον παραπάνω τύπο για τη δύναμη προκύπτει ότι:

$$\int_0^{x_0} \left[\frac{(1+|\gamma_S'(x)|^2)}{\overline{\beta}_S} |\partial_t \Phi(x,1)|^2 + \frac{1}{\beta_P} |\partial_t \Phi(x,0)|^2 \right] \frac{x^2}{(h+\gamma_S(x))^2}\, dx.$$

Αν τώρα πολλαπλασιάσω και διαιρέσω με $h + \gamma_S(x)$ έχω ότι:

$$\int_0^{x_0} \left[c_S |\partial_t \Phi(x,1)|^2 + c_P |\partial_t \Phi(x,0)|^2 \right] \frac{x^2}{(h+\gamma_S(x))^3}\, dx \tag{5.36}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \frac{1}{(h+\gamma_S(x))^2}.$$

Άρα έχουμε ότι:

$$\left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right|^2 = x^2 \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right|^2 \left| \frac{\partial t^2}{\partial y^2} \right|^2 = x^2 \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right|^2 \frac{1}{(h+\gamma_S(x))^4}.$$

Αντικαθιστώντας στον τύπο της δύναμης προκύπτει:

$$\int_0^{x_0} \int_0^{h+\gamma_S(x)} \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right|^2 x\, dy dx = \int_0^{x_0} \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}(x,s)}{\partial t^2} \right|^2 \frac{x^2}{(h+\gamma_S(r))^4}\, ds dx.$$

Άρα:

$$\int_0^{x_0} \int_0^{h+\gamma_S(x)} \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right|^2 x\, dy dx = \int_0^{x_0} \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \Phi(x,s)}{\partial t^2} \right|^2 \frac{x^2}{(h+\gamma_S(x))^3}\, dx. \tag{5.37}$$

Επομένως αν προσθέσω τις σχέσεις (5.36) και (5.37) προκύπτει το ζητούμενο.

□

Στο προηγούμενο Λήμμα βρήκαμε το γενικό τύπο της δύναμης. Αν χρησιμοποιήσουμε τώρα συγκεκριμένη γεωμετρία, δηλαδή ότι το κάτω μέρος του στερεού δίδεται από την καμπύλη $\gamma_s(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ τότε έχουμε:

Λήμμα 5.12. *Η δύναμη δίδεται από τον τύπο:*

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}} &= \int_{-x_0}^{x_0} (I_1(x) + I_2(x)) \frac{x^2 dx}{(h+\frac{x^2}{2})^3} + O(J(0,h)) \\ &= \int_{-x_0}^{x_0} (I_1(x) + I_2(x)) \frac{x^2 dx}{(h+\frac{x^2}{2})^3} + O(|ln(h)|). \end{aligned}}$$

όπου:

$$I_1 := \frac{12(c_S^2 c_P^2 + 5(c_S^2 c_P + c_P^2 c_S) + 4(c_S^2 + c_P^2) + 20 c_S c_P)}{(12 + 4(c_S + c_P) + c_S c_P)^2},$$

$$I_2 := \frac{144(c_S + c_P)}{(12 + 4(c_S + c_P) + c_S c_P)^2},$$

$$J(\beta, h) := \int_0^{\frac{c_0}{\sqrt{h}}} \frac{s^6 ds}{(1 + \frac{s^2}{2} + \beta s^{1+a})^4}\ .$$

Απόδειξη:

Αρχικά θα υπολογίσω τη πρώτη και τη δευτερη παράγωγο του . Έχω ότι:

$$\partial_t\tilde{\Phi}\left(-3t^2\frac{2(c_S+c_Sc_P+c_P)}{12+4(c_S+c_P)+c_Sc_P}+2t\frac{3(2+c_S)a_P}{12+4(c_S+c_P)+c_Sc_P}+\frac{6(2+c_S)}{12+4(c_S+c_P)+c_Sc_P}\right),$$

$$\partial_{tt}\tilde{\Phi}\left(-6t\frac{2(c_S+c_Sc_P+c_P)}{12+4(c_S+c_P)+c_Sc_P}+2\frac{3(2+c_S)a_P}{12+4(c_S+c_P)+c_Sc_P}\right)$$

Συνεπώς:

$$|\partial_t\Phi(x,1)|^2=\frac{36c_P^2+144c_P+144}{(12+4(c_S+c_P)+c_Sc_P)^2},$$

$$|\partial_t\Phi(x,0)|^2=\frac{36c_S^2+144c_S+144}{(12+4(c_S+c_P)+c_Sc_P)^2},$$

$$\int_0^1|\partial_{tt}\Phi(x,s)|^2\,ds=\frac{48(c_S^2+c_P^2)+120c_S^2c_P^2+24(c_S^2c_P+c_P^2c_S-48c_Sc_P)}{(12+4(c_S+c_P)+c_Sc_P)^2}.$$

Αν αντικαταστήσω στην (5.35) προκύπτει ότι:

$$\tilde{\mathcal{F}}=\int_0^{x_0}(I_1(x)+I_2(x))\frac{x^2dx}{(h+\gamma_S(x))^3}.$$

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\gamma_s(x)=1-\sqrt{1-x^2}$. Άρα έχουμε ότι:

$$\tilde{\mathcal{F}}=\int_0^{x_0}(I_1(x)+I_2(x))\frac{x^2dx}{(h+1-\sqrt{1-x^2})^3}.$$

Κάνοντας ανάπτυγμα *Taylor* γύρω από το 0 έχουμε ότι $\sqrt{1-x^2}=1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)$
Συνεπώς, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\tilde{\mathcal{F}}=\int_0^{z_0}(I_1(x)+I_2(x))\frac{x^2dx}{(h+\frac{x^2}{2})^3}+O(J(0,h))$$

Όμως αφου β<<1 τότε $O(J(0,h))=O(|ln(h)|)$ και άρα προκύπτει το ζητούμενο.

□

Λήμμα 5.13. *Αν είτε το $\frac{h}{\beta_S}$ ή το $\frac{h}{\beta_P}$ είναι τάξης 1 ή μεγαλυτερο τότε:*

$$\frac{c}{h^{\frac{3}{2}}}\le\breve{\mathcal{F}}\le\frac{C}{h^{\frac{3}{2}}},$$

ενώ αν τα $\frac{h}{\beta_S}$ και $\frac{h}{\beta_P}$ είναι αρκετά μικρά τότε:

$$c\left(\frac{1}{\beta_S}+\frac{1}{\beta_P}\right)\le\mathcal{F}\le C\left(\frac{1}{\beta_S}+\frac{1}{\beta_P}\right).$$

Απόδειξη:
Η απόδειξη είναι όμοια με τις τρεις διαστασεις.

□

Αναφορές

[1] $D.Bresch, B.Desjardins, D.Gérard - Varet$, On compressible Navier-Stokes equations with density dependent viscosities in bounded domains. J. Math. Pures Appl. 87 (2007) 227-235

[2] $D.Gerard - Varet, M.Hillairet$, Computation of the drag force on a sphere close to a wall-The roughness issue, ESAIM: M2AN 46 (March 15,2012) 1201–1224

[3] $M.Hillairet$, Lack of Collision between solid bodies in a 2D incompressible viscous fluid, CPDEs Book(134-1371) 5 September 2007

[4] $M.Hillairet$, Do Navier-Stokes Equations Enable to Predict Contact Between Immersed Solid Particles?, Analysis and Stimulation of Fluid Dynamics Advances in Mathematical Fluid Mechanics,109-127, 2006 Birkhauser Basel/Switzerland

[5] $L.M.K.Sabbagh$, Study of rigid solids movement in a viscous fluid, Université Montpellier, PhD 2018.

[6] $M.D.A.Cooley, M.E.O'Neill$, On the slow motion generated in a viscous fluid by the approach of a sphere to a plane wall on stationary sphere, Proc. Camb. Phil. Soc. (1969), Central Electricity Generating Board, Computing Division, London, S.E.I. Department of Mathematics, University College, London, W.C.I.

[7] $L. Gary Leal$, Advanced Transport Phenomena, Fluid Mechanics and Convective Transport Processes, Cambridge Series by Engineering, 2007

[8] Σιούτης Σταύρος, Πολάτογλου Χαρίτων Ιστορικα Πειράματα Στα Ρευστά, Ελληνικο Ανοικτό Πανεπιστήμιο Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών, Σεπτέμβριος 2020

[9] $Morton E. Gurtin$, An Introduction to Continuum Mechanics, Mathematics in Science and Engineering, Volume 158, (1981)

[10] $H.Brenner and R.G. Cox$, The resistance to a particle of arbitrary shape in translational motion at small Reynolds numbers. J. Fluid Mech. 17 (1963) 561–595

[11] $D.Gerard - Varet$, The Navier wall law at a boundary with random roughness. Commun. Math. Phys. 286 (2009) 81–110.

[12] $L.Hocking$, The effect of slip on the motion of a sphere close to a wall and of two adjacent sheres. J. Eng. Mech.7 (1973) 207–221.

[13] $M. OÆNeill$, A slow motion of viscous liquid caused by a slowly moving solid sphere. Mathematika 11 (1964) 67–74.

[14] $M. O'Neill and K. Stewartson$, On the slow motion of a sphere parallel to a nearby plane wall. J. Fluid Mech. 27 (1967) 705–724.

[15] $Charles\ L.\ Fefferman$, Existence and smoothness of the Navier-Stokes equations,

[16] $Peter\ Constantin$, Some open problems and research directions in the mathematical study of fluid dynamics, Department of Mathematics The University of Chicago

[17] *John G. Heywood*, Epochs of regularity for weak solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded domains,Ḋepartment of Mathematics,U̇niversity of British Columbia, December 8, 1986