Η εικασία του Mahler και η αντίστροφη ανισότητα Santaló

Γεωργιος Τζιμπραγος

Μεταπτυχιακη Εργασια

Πανεπιστημιο Κρητης
Τμημα Μαθηματικων
Σεπτεμβριος 2001

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία κατατέθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης τον Σεπτέμβριο του 2001. Επιβλέπων ήταν ο Α. Γιαννόπουλος.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι: Α. Γιαννόπουλος, Μ. Κατσοπρινάκης και Σ. Παπαδοπούλου.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Κυρτά σώματα

Ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ λέγεται *κυρτό σώμα* αν έχει μη κενό εσωτερικό. Θα λέμε ότι το K είναι *συμμετρικό*, αν έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων 0. Ο όγκος του K συμβολίζεται με $|K|$.

1. Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση $\|\cdot\|_K := \|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ που ορίζεται από την

$$\|x\| = \min\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}$$

έχει τις εξής ιδιότητες:

(α) $\|x\| \geq 0$ με ισότητα μόνο αν $x = 0$,
(β) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$,
(γ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$,

είναι δηλαδή *νόρμα* στον $\mathbb{R}^n$. Ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με την νόρμα $\|\cdot\|_K$ θα συμβολίζεται με X_K. Αντίστροφα, αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε *η μοναδιαία του μπάλα* $K_X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$.

Από τον ορισμό της νόρμας έπεται άμεσα ότι αν K και L είναι δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε $K \subseteq L$ αν και μόνο αν $\|x\|_L \leq \|x\|_K$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Επίσης, $\|x\|_{rK} = \frac{1}{r}\|x\|_K$ γιά κάθε $r > 0$ και κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Έστω X και Y δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα όπως παραπάνω. Αν $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός (θα γράφουμε $T \in L(\mathbb{R}^n)$), ορίζουμε την νόρμα $\|T : X \to Y\|$ του T ως *τελεστή* από τον X στον Y ως εξής:

$$\|T : X \to Y\| = \max\{\|T(x)\|_Y : x \in K_X\}.$$

Ισοδύναμα, η νόρμα του T είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός ρ γιά τον οποίο

$$T(K_X) \subseteq \rho K_Y.$$

Ο $T : X \to Y$ λέγεται ισομορφισμός αν είναι αντιστρέψιμος (δηλαδή, αν $T \in GL_n$).

Η απόσταση Banach-Mazur των X και Y είναι ο αριθμός

$$d(X,Y) = \min\{\|T\| \, \|T^{-1}\| : T \in GL_n\},$$

και μετράει *πόσο καλά ισόμορφοι* είναι οι X και Y. Μια ισοδύναμη γεωμετρική ερμηνεία είναι η εξής: η $d(X,Y)$ είναι ο μικρότερος $\rho \geq 1$ για τον οποίο υπάρχει $T \in GL_n$ που ικανοποιεί την $K_Y \subseteq T(K_X) \subseteq \rho K_Y$. Εύκολα βλέπουμε ότι $d(X,Y) = d(Y,X)$ για κάθε X και Y (η d είναι συμμετρική), και $d(X,Y) = 1$ αν και μόνο αν υπάρχει $T : X \to Y$ ισομετρία.

Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{B}_n$ όλων των κλάσεων ισοδυναμίας n-διάστατων χώρων με νόρμα, όπου ο X είναι ισοδύναμος με τον X' αν και μόνο αν οι X και X' είναι ισομετρικοί. Ο $\mathcal{B}_n$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος, με μετρική την $\log d$: η τριγωνική ανισότητα είναι συνέπεια της

$$d(X,Y) \leq d(X,Z) \, d(Z,Y)$$

που επαληθεύεται εύκολα για κάθε τριάδα $X, Y, Z \in \mathcal{B}_n$.
Ο μετρικός χώρος $(\mathcal{B}_n, \log d)$ συνήθως λέγεται Banach-Mazur compactum ή Minkowski compactum. Αντί για την $\log d$, θα χρησιμοποιούμε την d σαν μια πολλαπλασιαστική απόσταση στον $\mathcal{B}_n$.

3. Υποθέτουμε ότι ο $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένος με μια Ευκλείδεια δομή $\langle \cdot, \cdot \rangle$, και συμβολίζουμε την αντίστοιχη Ευκλείδεια νόρμα με $|\cdot|$. Γράφουμε B_n για την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, και S^{n-1} για τη μοναδιαία σφαίρα. Ο όγκος της B_n θα συμβολίζεται με ω_n. Είναι $\omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2}+1)$. Πιό γενικά, αν με ℓ_p^n συμβολίσουμε τον χώρο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $p \geq 1$, όπου $\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p$, τότε η μοναδιαία μπάλα B_p^n του ℓ_p^n έχει όγκο

$$|B_p^n| = \frac{[2\Gamma(1+\frac{1}{p})]^n}{\Gamma(1+\frac{n}{p})}.$$

(για την απόδειξη, βλέπε [Pi1]). Γράφουμε σ για το μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1} που είναι αναλλοίωτο ως προς τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^n$. Η επιφάνεια της S^{n-1} είναι ίση με $n\omega_n$.

4. Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Η *ακτινική συνάρτηση* $\rho_K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$ του K ορίζεται από την

$$\rho_K(x) = \max\{\lambda > 0 : \lambda x \in K\}.$$

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $x \neq 0$

$$\rho_K(x) = \|x\|^{-1}.$$

Η *συνάρτηση στήριξης* $h_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ του K ορίζεται από την

$$h_K(x) = \max\{\langle x, y \rangle : y \in K\}.$$

Η σχέση ανάμεσα στην ακτινική συνάρτηση ρ_K και την συνάρτηση στήριξης h_K γιά δοσμένη διεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$ είναι $\rho_K(\theta) \leq h_K(\theta)$.

Το *πλάτος* ενός κυρτού σώματος K στην διεύθυνση ενός $\theta \in S^{n-1}$ ορίζεται από την

$$w_K(\theta) = h_K(\theta) + h_K(-\theta).$$

Το *μέσο πλάτος* του K είναι το

$$w(K) = \int_{S^{n-1}} w_K(\theta)\sigma(d\theta) = 2\int_{S^{n-1}} h_K(\theta)\sigma(d\theta).$$

Το *επιφανειακό μέτρο* σ_K του K ορίζεται στα Borel υποσύνολα της S^{n-1} ως εξής: αν A είναι Borel υποσύνολο της S^{n-1}, θέτουμε $\sigma_K(A)$ το $(n-1)$-διάστατο μέτρο των $x \in \mathrm{bd}(K)$ τα οποία έχουν εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο A. Εξετάζοντας πρώτα την περίπτωση που το K είναι πολύτοπο (κυρτή θήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων), εύκολα ελέγχουμε ότι

$$|K| = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h_K(x)\sigma_K(dx)$$

και

$$|P_{\theta^\perp}K| = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle x, \theta\rangle|\sigma_K(dx)$$

όπου $P_{\theta^\perp}K$ η ορθογώνια προβολή του K στον κάθετο υπόχωρο του $\theta \in S^{n-1}$.

5. Το *πολικό σώμα* K° του K είναι το

$$K^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n : |\langle x, y\rangle| \leq 1, \forall x \in K\}.$$

Οι βασικές ιδιότητες του πολικού σώματος περιγράφονται στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση. *Έστω K και L συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Ισχύουν τα εξής:*
(1) *Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, $\rho_{K^\circ}(\theta) = 1/h_K(\theta)$.*
(2) *Αν $K \subseteq L$, τότε $L^\circ \subseteq K^\circ$.*
(3) *Αν $T \in GL_n$, τότε $(TK)^\circ = (T^{-1})^*(K^\circ)$.*
(4) *$(K^\circ)^\circ = K$.*
(5) *$|TK||(TK)^\circ| = |K||K^\circ|$.* □

Η *δυϊκή νόρμα* $\|\cdot\|_*$ της $\|\cdot\|$ ορίζεται από την

$$\|y\|_* = \max\{|\langle x, y\rangle| : \|x\| \leq 1\}.$$

Από τον ορισμό είναι φανερό ότι

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|y\|_*\|x\|$$

γιά κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Αν X^* είναι ο *δυϊκός χώρος* του X, τότε η μοναδιαία μπάλα K_{X^*} του X^* είναι το πολικό σώμα της μοναδιαίας μπάλας K_X του X. Θα γράφουμε $\|\cdot\|_{K^\circ}$ ή $\|\cdot\|_*$, και $\|\cdot\|_K$ ή $\|\cdot\|$ χωρίς αυτό να δημιουργεί σύγχυση.

6. Θεωρούμε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και την οικογένεια $\mathcal{E}(K)$ όλων των *ελλειψοειδών* που περιέχονται στο K. Ένα ελλειψοειδές στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα κυρτό σώμα της μορφής

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, v_i \rangle^2}{\alpha_i^2} \leq 1 \right\},$$

όπου $\{v_i\}_{i \leq n}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, και $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί (οι διευθύνσεις και τα μήκη των ημιαξόνων του E αντίστοιχα). Εύκολα ελέγχουμε ότι $E = T(D_n)$, όπου T είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται από τις $T(v_i) = \alpha_i v_i$, $i = 1, \ldots, n$.
O F. John ([Jo], 1948) έδειξε ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές E που περιέχεται στο K και έχει τον μέγιστο δυνατό όγκο, και ότι $K \subset \sqrt{n}E$. Συνέπεια αυτού του αποτελέσματος είναι η

$$d(X, \ell_2^n) \leq \sqrt{n}$$

για κάθε $X \in \mathcal{B}_n$, που προκύπτει άμεσα από τον εγκλεισμό $E \subset K \subset \sqrt{n}E$ και τον ορισμό της απόστασης Banach-Mazur.

7. Το *άθροισμα Minkowski* των $A, B \subset \mathbb{R}^n$ είναι το $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Αν $\lambda > 0$, τότε $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$.

Για τις αποδείξεις των παραπάνω ισχυρισμών παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα βιβλία των R.J. Gardner [Gar], V.D. Milman και G. Schechtman [MS], και R. Schneider [Sch].

1.2 Η ανισότητα Brunn-Minkowski

Η ανισότητα Brunn-Minkowski συνδέει το άθροισμα Minkowski με τον όγκο στον $\mathbb{R}^n$:

Θεώρημα 1.2.1 *Έστω K και T δύο μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|K + T|^{1/n} \geq |K|^{1/n} + |T|^{1/n}. \tag{1}$$

Στην περίπτωση που τα K και T είναι κυρτά σώματα, ισότητα στην (1) μπορεί να ισχύει μόνο αν τα K και T είναι ομοιοθετικά.
Η (1) εκφράζει με μία έννοια το γεγονός ότι ο όγκος είναι *κοίλη* συνάρτηση ως προς την πρόσθεση κατά Minkowski. Για το λόγο αυτό συχνά γράφεται στην ακόλουθη μορφή: Αν K, T είναι μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0, 1)$, τότε

$$|\lambda K + (1 - \lambda)T|^{1/n} \geq \lambda |K|^{1/n} + (1 - \lambda)|T|^{1/n}. \tag{2}$$

Χρησιμοποιώντας την (2) και την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, μπορούμε ακόμα να γράψουμε:

$$|\lambda K + (1-\lambda)T| \geq |K|^{\lambda}|T|^{1-\lambda}. \tag{3}$$

Η ασθενέστερη αυτή μορφή της ανισότητας Brunn-Minkowski έχει το πλεονέκτημα ότι είναι ανεξάρτητη της διάστασης.

Υπάρχουν πολλές και ενδιαφέρουσες αποδείξεις της (1). Θα δώσουμε εδώ την απόδειξη της *συναρτησιακής μορφής* της ανισότητας, που οφείλεται στους Prékopa και Leindler (βλέπε [Pi1]):

Θεώρημα 1.2.2 *Έστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ τρεις μετρήσιμες συναρτήσεις, και $\lambda \in (0,1)$. Υποθέτουμε ότι οι f και g είναι ολοκληρώσιμες, και ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda}. \tag{4}$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}.$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε την ανισότητα με επαγωγή ως προς την διάσταση n.

(α) $n = 1$: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι f και g είναι συνεχείς και γνήσια θετικές. Η απόδειξη που θα δώσουμε βασίζεται στην ιδέα της μεταφοράς του μέτρου.

Ορίζουμε $x, y : (0,1) \to \mathbb{R}$ μέσω των

$$\int_{-\infty}^{x(t)} f = t\int f \quad , \quad \int_{-\infty}^{y(t)} g = t\int g.$$

Με βάση τις υποθέσεις μας οι x, y είναι παραγωγίσιμες, και για κάθε $t \in (0,1)$ έχουμε

$$x'(t)f(x(t)) = \int f \quad , \quad y'(t)g(y(t)) = \int g.$$

Ορίζουμε $z : (0,1) \to \mathbb{R}$ με

$$z(t) = \lambda x(t) + (1-\lambda)y(t).$$

Οι x και y είναι γνήσια αύξουσες. Έπεται ότι η z είναι κι αυτή γνήσια αύξουσα και, από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,

$$z'(t) = \lambda x'(t) + (1-\lambda)y'(t) \geq (x'(t))^{\lambda}(y'(t))^{1-\lambda}.$$

Μπορούμε λοιπόν να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα της h κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $s = z(t)$:

$$\int h \;=\; \int_0^1 h(z(t))z'(t)dt$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \int_0^1 h(\lambda x(t)+(1-\lambda)y(t))(x'(t))^{\lambda}(y'(t))^{1-\lambda}dt \\
&\geq \int_0^1 f^{\lambda}(x(t))g^{1-\lambda}(y(t))\left(\frac{\int f}{f(x(t))}\right)^{\lambda}\left(\frac{\int g}{g(y(t))}\right)^{1-\lambda}dt \\
&= \left(\int f\right)^{\lambda}\left(\int g\right)^{1-\lambda}.
\end{aligned}
$$

(β) *Επαγωγικό βήμα:* Υποθέτουμε ότι $n\geq 2$ και ότι το Θεώρημα έχει αποδειχθεί για $k\in\{1,\ldots,n-1\}$. Έστω f,g,h όπως στο Θεώρημα. Για κάθε $s\in\mathbb{R}$ ορίζουμε $h_s:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}^+$ με $h_s(w)=h(w,s)$, και με ανάλογο τρόπο ορίζουμε $f_s,g_s:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}^+$. Από την (4) έπεται ότι, αν $x,y\in\mathbb{R}^{n-1}$ και $s_0,s_1\in\mathbb{R}$ τότε

$$h_{\lambda s_1+(1-\lambda)s_0}(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq f_{s_1}(x)^{\lambda}g_{s_0}(y)^{1-\lambda},$$

και η επαγωγική υπόθεση μας δίνει

$$
\begin{aligned}
H(\lambda s_1+(1-\lambda)s_0) &:= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{\lambda s_1+(1-\lambda)s_0} \\
&\geq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{s_1}\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{s_0}\right)^{1-\lambda} =: F^{\lambda}(s_1)G^{1-\lambda}(s_0).
\end{aligned}
$$

Εφαρμόζοντας τώρα ξανά την επαγωγική υπόθεση για $n=1$ στις συναρτήσεις F,G και H, παίρνουμε

$$\int h=\int_{\mathbb{R}} H\geq\left(\int_{\mathbb{R}} F\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}} G\right)^{1-\lambda}=\left(\int f\right)^{\lambda}\left(\int g\right)^{1-\lambda}. \quad \square$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.1: Έστω K,T συμπαγή μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, και $\lambda\in(0,1)$. Ορίζουμε $f=\chi_K$, $g=\chi_T$, και $h=\chi_{\lambda K+(1-\lambda)T}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1.2.2, οπότε

$$|\lambda K+(1-\lambda)T|=\int h\geq\left(\int f\right)^{\lambda}\left(\int g\right)^{1-\lambda}=|K|^{\lambda}|T|^{1-\lambda}.$$

Αυτό αποδεικνύει την (3) για κάθε τριάδα K,T,λ. Για να πάρουμε την (1) θεωρούμε K και T όπως στο Θεώρημα 1.2.1 (με $|K|>0$, $|T|>0$), και ορίζουμε

$$K_1=|K|^{-1/n}K \quad , \quad T_1=|T|^{-1/n}T \quad , \quad \lambda=\frac{|K|^{1/n}}{|K|^{1/n}+|T|^{1/n}}.$$

Τα K_1 και T_1 έχουν όγκο 1, οπότε από την (3) παίρνουμε

$$(*) \qquad |\lambda K_1+(1-\lambda)T_1|\geq 1.$$

Όμως,

$$\lambda K_1+(1-\lambda)T_1=\frac{K+T}{|K|^{1/n}+|T|^{1/n}},$$

επομένως η $(*)$ παίρνει την μορφή

$$|K+T| \geq \left(|K|^{1/n} + |T|^{1/n}\right)^n. \quad \square$$

Θεωρούμε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, και σταθεροποιούμε μία διεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$. Ορίζουμε $f = f_{K,\theta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ως εξής:

$$f(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|.$$

Ο όγκος εδώ είναι $(n-1)$-διάστατος. Δηλαδή, $f(t)$ είναι το «εμβαδόν» της τομής του K που είναι κάθετη στο θ και σε (προσημασμένη) απόσταση t από τον $\theta^\perp$.

Θεώρημα 1.2.3 *Έστω K κυρτό σώμα, $\theta \in S^{n-1}$, και $f(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|$. Τότε, η $f^{\frac{1}{n-1}}$ είναι κοίλη στον φορέα της.*

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\theta = e_n$, οπότε ταυτίζουμε φυσιολογικά τον $\theta^\perp$ με τον $\mathbb{R}^{n-1}$. Για κάθε t ορίζουμε

$$K(t) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x,t) \in K\}.$$

Έστω $I = \{t \mid K(t) \neq \emptyset\}$. Για κάθε $t \in I$, το $K(t)$ είναι κυρτό, και αν $t,s \in I$, $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$\lambda K(t) + (1-\lambda)K(s) \subseteq K(\lambda t + (1-\lambda)s).$$

Από την ανισότητα Brunn-Minkowski στον $\mathbb{R}^{n-1}$,

$$|K(\lambda t + (1-\lambda)s)|^{\frac{1}{n-1}} \geq \lambda |K(t)|^{\frac{1}{n-1}} + (1-\lambda)|K(s)|^{\frac{1}{n-1}}.$$

Όμως $f(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)| = |K(t)|$, κι αυτό δίνει το ζητούμενο. $\square$

Παρατήρηση. Το Θεώρημα 1.2.3 προηγήθηκε της ανισότητας Brunn-Minkowski. Ο Brunn έδειξε το παραπάνω αποτέλεσμα με την μέθοδο της συμμετρικοποίησης, και ο Minkowski έδωσε μια απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.1 χρησιμοποιώντας το.

Πόρισμα 1.2.1 *Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.2.3 η f είναι λογαριθμικά κοίλη στον φορέα της.*

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, παίρνουμε

$$f(\lambda t + (1-\lambda)s) \geq f(t)^\lambda f(s)^{1-\lambda}$$

για κάθε $t,s \in I$ και $\lambda \in (0,1)$. Αυτό σημαίνει ότι η $\log f$ είναι κοίλη στο I. $\square$

Πόρισμα 1.2.2 *Αν το K είναι συμμετρικό με κέντρο το 0, τότε $\|f\|_\infty = f(0)$, δηλαδή η μέγιστη τομή του K είναι η κεντρική.*

Απόδειξη: Από την υπόθεση της συμμετρίας έπεται ότι $K(-t) = -K(t)$ για κάθε $t \in I$. Από το Πόρισμα 1.2.1 η f είναι άρτια και λογαριθμικά κοίλη στο I. Άρα, για κάθε $t \in I$,

$$f(0) = f\left(\frac{t+(-t)}{2}\right) \geq \sqrt{f(t)}\sqrt{f(-t)} = f(t). \quad \square$$

Θα χρειαστούμε άλλη μία εφαρμογή της ανισότητας Brunn-Minkowski, την ανισότητα των Rogers και Shephard: Το *σώμα διαφορών* του κυρτού σώματος K είναι το

$$K - K = \{x - y \mid x, y \in K\}.$$

Το $K - K$ είναι συμμετρικό (με κέντρο συμμετρίας το 0), και $|K - K| \geq |K|$. Οι Rogers και Shephard [RS] έδωσαν ακριβές άνω φράγμα για τον όγκο του σώματος διαφορών:

Θεώρημα 1.2.4 *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|K - K| \leq \binom{2n}{n}|K|.$$

Απόδειξη: Η ανισότητα Brunn-Minkowski μπαίνει στην απόδειξη με τη μορφή του εξής λήμματος:

Λήμμα. *Αν K και T είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, η συνάρτηση*

$$x \mapsto |K \cap (x+T)|^{1/n}$$

είναι κοίλη στον φορέα της.

[Το Λήμμα είναι άμεση συνέπεια του εγκλεισμού

$$\lambda(K \cap (x+T)) + (1-\lambda)(K \cap (y+T)) \subseteq K \cap ((\lambda x + (1-\lambda)y) + T).$$

Έπεται ότι

$$|K \cap ((\lambda x + (1-\lambda)y) + T)| \geq |\lambda(K \cap (x+T)) + (1-\lambda)(K \cap (y+T))|,$$

και από την (2) συμπεραίνουμε ότι

$$|K \cap (\lambda x + (1-\lambda)y + T)|^{1/n} \geq \lambda|K \cap (x+T)|^{1/n} + (1-\lambda)|K \cap (y+T)|^{1/n}.]$$

Ορίζουμε $f(x) = |K \cap (x+K)|^{1/n}$. Θέτοντας $T = K$ στο Λήμμα, βλέπουμε ότι η f είναι κοίλη συνάρτηση στον φορέα της, δηλαδή στο $K - K$.
Ορίζουμε μια δεύτερη συνάρτηση $g : K - K \to \mathbb{R}^+$ ως εξής: κάθε $x \in K - K$ γράφεται στην μορφή $x = r\theta$, όπου $\theta \in S^{n-1}$ και $0 \leq r \leq \rho_{K-K}(\theta)$. Τότε, θέτουμε $g(x) = f(0)(1 - r/\rho_{K-K}(\theta))$. Από τον τρόπο με τον οποίο ορίστηκε, η g είναι

γραμμική στο ευθύγραμμο τμήμα $[0, \rho_{K-K}(\theta)\theta]$, μηδενίζεται στο σύνορο του $K-K$, και $g(0) = f(0)$. Αφού η f είναι κοίλη, παίρνουμε $f \geq g$ στο $K-K$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_{K-K} |K \cap (x+K)| dx &= \int_{K-K} f^n(x) dx \geq \int_{K-K} g^n(x) dx \\
&= [f(0)]^n n\omega_n \int_{S^{n-1}} \int_0^{\rho_{K-K}(\theta)} r^{n-1}(1-r/\rho)^n dr \sigma(d\theta) \\
&= |K| n\omega_n \int_{S^{n-1}} \rho^n_{K-K}(\theta)\sigma(d\theta) \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^n dt \\
&= |K||K-K| n \frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)} = \binom{2n}{n}^{-1} |K||K-K|.
\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, το θεώρημα του Fubini μας δίνει

$$\begin{aligned}
\int_{K-K} |K \cap (x+K)| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |K \cap (x+K)| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y) \chi_{x+K}(y) dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{y-K}(x) dx \right) dy \\
&= \int_K |y-K| dy = |K|^2.
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

1.3 K-κυρτότητα

Θεωρούμε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ στον οποίο είναι ορισμένη μία ακολουθία (g_j) ανεξάρτητων τυπικών κανονικών τυχαίων μεταβλητών. Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$P(\{(g_1, \ldots, g_n) \in A\}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-|x|^2} dx_1 \ldots dx_n.$$

Το μέτρο του Gauss γ_n που έχει πυκνότητα την

$$\gamma_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-|x|^2}$$

είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς, και αυτό είναι ισοδύναμο με το εξής: αν $U = (u_{ij}) \in O(n)$ και

$$\tilde{g}_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} g_j, \qquad i = 1, \ldots, n$$

τότε

$$(1) \qquad P\big(\{(\tilde{g}_1,\dots,\tilde{g}_n)\in A\}\big) = P\big(\{(g_1,\dots,g_n)\in A\}\big)$$

για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$. Μία συνέπεια της (1) είναι ότι, αν $t_1,\dots,t_n\in\mathbb{R}$ τότε η $t_1g_1+\cdots+t_ng_n$ έχει την ίδια κατανομή με την tg_1 όπου $t=\big(\sum t_i^2\big)^{1/2}$. Επομένως, για κάθε $p>0$ έχουμε

$$\Big\|\sum_{i=1}^n t_ig_i\Big\|_p = \|g_1\|_p\Big(\sum_{i=1}^n t_i^2\Big)^{1/2}.$$

Ισοδύναμα έχουμε το εξής.

Λήμμα 1.3.1 *Για κάθε $p>0$ η απεικόνιση $J_p:\ell_2\to L_p:=L_p(\Omega,\mathcal{A},P)$ που ορίζεται από την $J_p(e_i)=g_i/\|g_1\|_p$ είναι ισομετρική εμφύτευση.* $\square$

Από το Λήμμα 1.3.1 βλέπουμε ότι η εικόνα της J_p είναι ανεξάρτητη του p. Δηλαδή, η κλειστή θήκη $G=J(\ell_2)$ της (g_n) στον $L_2(\Omega,\mathcal{A},P)$ είναι κλειστή σε όλους τους L_p και

$$\|f\|_p = \|g_1\|_p\|f\|_2$$

για κάθε $f\in G$. Γράφουμε Q_1 για την ορθογώνια προβολή $Q_1:L_2\to G$.

Μπορούμε να υλοποιήσουμε τον $(\Omega,\mathcal{A},P)$ παίρνοντας $\Omega=\mathbb{R}^{\mathbb{N}_*}$ όπου $\mathbb{N}_*$ το σύνολο των φυσικών αριθμών, $\mathcal{A}$ την Borel σ-άλγεβρα, και P το κανονικό μέτρο Gauss γ_∞. Τότε, οι συναρτήσεις $g_i:\mathbb{R}^{\mathbb{N}_*}\to\mathbb{R}$ με $x\mapsto x_i$ σχηματίζουν ακολουθία ανεξάρτητων τυπικών κανονικών τυχαίων μεταβλητών.
Θα χρειαστούμε το γεγονός ότι τα πολυώνυμα Hermite αποτελούν ορθογώνια βάση του $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}_*},\gamma_\infty)$ (για τις λεπτομέρειες παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο βιβλίο του Bogachev [Bog]). Τα πολυώνυμα Hermite (h_n) μιάς μεταβλητής ορίζονται από την σχέση

$$\exp\left(tx-\frac{t^2}{2}\right)=\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!}h_n(x),\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Ειδικότερα, $h_0(x)\equiv 1$ και $h_1(x)=x$. Η ακολουθία (h_n) σχηματίζει ορθογώνια βάση του $L_2(\mathbb{R},\gamma_1)$.
Έπεται ότι, για κάθε $m\in\mathbb{N}$ η οικογένεια των πολυωνύμων της μορφής

$$p_{a_1,\dots,a_m}(x_1,\dots,x_m):=h_{a_1}(x_1)\cdots h_{a_m}(x_m)$$

όπου $a_1,\dots,a_m\in\mathbb{N}$, σχηματίζει ορθογώνια βάση του $L_2(\mathbb{R}^m,\gamma_m)$.
Για να ορίσουμε ορθογώνια βάση του $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}_*},\gamma_\infty)$, δουλεύουμε ως εξής: Θεωρούμε το σύνολο A των τελικά μηδενικών ακολουθιών $a=(a_1,a_2,\dots)$ από στοιχεία του $\mathbb{N}$, και αν $a\in A$ θέτουμε

$$|a|=\sum_{i=1}^\infty a_i \text{ και } a!=a_1!a_2!\dots\ .$$

Με c_{00} συμβολίζουμε το σύνολο των τελικά μηδενικών ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Αν $x = (x_n)$ και $t = (t_n) \in c_{00}$, θέτουμε

$$\langle t, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n,$$

και για κάθε $a \in A$ ορίζουμε

$$t^a = t_1^{a_1} t_2^{a_2} \dots .$$

Με αυτόν τον συμβολισμό, για κάθε $a \in A$ έχουμε το πολυώνυμο Hermite

$$H_a(x) = h_{a_1}(x_1) h_{a_2}(x_2) \dots .$$

Τα πολυώνυμα Hermite H_a ορίζονται από την

$$\exp\left(\langle t, x \rangle - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} t_n^2 \right) = \sum_{a \in A} \frac{t^a}{a!} H_a(x), \quad x = (x_n),\ t = (t_n) \in c_{00},$$

και αποτελούν ορθογώνια βάση του $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}_*}, \gamma_\infty)$.

Γράφουμε H_k για την κλειστή γραμμική θήκη του $\{H_a : |a| = k\}$ στον L_2 (αυτό είναι το *χάος Wiener βαθμού k*) και θεωρούμε την ορθογώνια προβολή $Q_k : L_2 \to H_k$. Για $k = 0$ έχουμε

$$Q_0(f) = \int_\Omega f dP,$$

ενώ για $k = 1$ παίρνουμε την προβολή Q_1 πάνω στον υπόχωρο του $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}_*}, \gamma_\infty)$ που παράγει η ακολουθία $\{x_n : n \geq 1\}$.

Πρόταση 1.3.1 *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ όπως παραπάνω. Υπάρχει ακολουθία ορθογώνιων προβολών Q_k, $k \geq 0$ στον $L_2 := L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ τέτοια ώστε $I = \sum_k Q_k$, η οποία ικανοποιεί τα εξής:*

1. *Για κάθε $f \in L_2$,*

$$Q_0(f) = \int_\Omega f dP.$$

2. *Για κάθε $\varepsilon \in [-1, 1]$, ο τελεστής*

$$T(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k$$

είναι θετική συστολή στον L_2.

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}_*}, \gamma_\infty)$. Έστω $S = \mathrm{span}\{H_a : a \in A\}$ ο χώρος όλων των πολυωνύμων μεταβλητές $x_1, \dots, x_n, \dots$. Από το θεώρημα των Stone-Weierstrass, ο S είναι πυκνός στον L_p για κάθε $p > 0$.

Έστω $-1 \leq \varepsilon \leq 1$. Για κάθε $f \in S$ ορίζουμε

$$T(\varepsilon)f(x) = \int f\left(\varepsilon x + (1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} y\right) \; P(dy).$$

Είναι φανερό απο τον ορισμό ότι ο $T(\varepsilon)$ μετασχηματίζει πολυώνυμα σε πολυώνυμα και είναι γραμμικός λόγω της ολοκληρωτικής του αναπαράστασης. Ακόμη, για κάθε $1 \leq p < \infty$ έχουμε

$$\|T(\varepsilon)f\|_{L_p} \leq \left(\int\int |f\left(\varepsilon x + (1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} y\right)|^p \; dP(x)\; dP(y)\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_p}$$

διότι η τυχαία μεταβλητή $(x,y) \to \varepsilon x + (1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} y$ ορισμένη στον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_*} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}_*}$ έχει ως κατανομή το P. Έπεται ότι η $T(\varepsilon)f$ ορίζεται x-σχεδόν παντού και ότι $\|T(\varepsilon)f\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p}$. Δηλαδή, ο $T(\varepsilon)$ είναι γραμμική συστολή στον L_p για κάθε $p \geq 1$. Επιπλέον, για κάθε $f \geq 0$ ισχύει $T(\varepsilon)f \geq 0$, δηλαδή ο $T(\varepsilon)$ είναι θετικός. Μένει να δείξουμε ότι $T(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k$.
Θεωρούμε την οικογένεια των συναρτήσεων $\{\phi_t\}, t = (t_n) \in c_{00}$ που ορίζονται από την

$$\phi_t(x) = \exp\left(\langle t, x\rangle - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} t_n^2\right) = \sum_{a \in A} \frac{t^a}{a!} H_a(x), \quad x = (x_n).$$

Η $\{\phi_t\}$ παράγει πυκνό υπόχωρο του L_2 από το θεώρημα Stone-Weierstrass, συνεπώς αν δύο γραμμικοί τελεστές συμπίπτουν σε κάθε ϕ_t, τότε συμπίπτουν και στον L_2. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$T(\varepsilon)\phi_t = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k\right)\phi_t.$$

(α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_*}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
T(\varepsilon)\phi_t(x) &= \int \phi_t\left(\varepsilon x + (1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} y\right) \; P(dy) \\
&= \int \exp\left(\langle t, \varepsilon x + \sqrt{1-\varepsilon^2} y\rangle - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} t_n^2\right) P(dy) \\
&= \exp\left(\langle \varepsilon t, x\rangle - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^2 t_n^2\right) \\
&\quad \times \int \exp\left(\langle t, \sqrt{1-\varepsilon^2} y\rangle - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon^2) t_n^2\right) P(dy) \\
&= \exp\left(\langle \varepsilon t, x\rangle - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^2 t_n^2\right) \\
&= \phi_{\varepsilon t}(x),
\end{aligned}$$

άρα $T(\varepsilon)\phi_t = \phi_{\varepsilon t}$.

(β) Από την άλλη μεριά, για κάθε $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_*}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k\right)(\phi_t)(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k(\phi_t)(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k \left(\sum_{a\in A} \frac{t^a}{a!} H_a(x)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{a\in A} \varepsilon^k \frac{t^a}{a!} Q_k(H_a(x)) \\
&= \sum_{a\in A} \varepsilon^{|a|} \frac{t^a}{a!} H_a(x) = \phi_{\varepsilon t}(x),
\end{aligned}$$

δηλαδή, $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k\right)\phi_t = \phi_{\varepsilon t}$. Άρα, $T(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k$ στον L_2. □

Ορισμός. Έστω (Ω, μ) χώρος μέτρου και $T : L_2 \to L_2$ φραγμένος γραμμικός τελεστής, όπου $L_2 = L_2(\Omega, \mu)$. Έστω X χώρος Banach και $I_X : X \to X$ ο ταυτοτικός τελεστής.

Θεωρούμε τον χώρο $L_2 \otimes X$ που αποτελείται από όλα τα πεπερασμένα αθροίσματα $\sum_{i=1}^{m} f_i \otimes x_i$ (κάθε $f \otimes x : \Omega \to X$ ορίζεται από την $(f\otimes x)(\omega) = f(\omega)x$). Ορίζουμε τελεστή

$$T \otimes I_X : L_2 \otimes X \to L_2 \otimes X$$

μέσω της

$$(T\otimes I_X)\left(\sum_{i=1}^{m} f_i \otimes x_i\right) = \sum_{i=1}^{m} (Tf_i)\otimes x_i.$$

Στον $L_2 \otimes X$ θεωρούμε τη νόρμα

$$\|\Phi\|_{L_2(X)} = \left(\int_{\Omega} \|\Phi(\omega)\|_X^2 d\mu(\omega)\right)^{1/2}$$

και γράφουμε $L_2(X)$ για την πλήρωση του $L_2 \otimes X$ ως προς αυτή τη νόρμα.

Πρόταση 1.3.2 *Έστω $T : L_2(\Omega,\mu) \to L_2(\Omega,\mu)$ και X χώρος Banach όπως παραπάνω. Αν ο T είναι θετικός τελεστής ή αν ο X είναι ισόμορφος με χώρο Hilbert, τότε ο $T \otimes I_X$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή του $L_2(X)$. Αν ο T είναι θετικός, ισχύει*

$$\|T\otimes I_X\| \le \|T\|,$$

ενώ αν ο X είναι ισόμορφος με τον χώρο Hilbert H, τότε

$$\|T\otimes I_X\| \le d(X,H)\|T\|.$$

Απόδειξη: Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση που ο T είναι θετικός. Για κάθε ακολουθία (ψ_j) στον L_2 έχουμε

$$\sup_j |T(\psi_j)| \leq T(\sup_j |\psi_j|).$$

Έστω $\Phi = \sum \phi_i \otimes x_i \in L_2 \otimes X$ και έστω $\phi(\omega) = \|\Phi(\omega)\|_X$. Τότε,

$$\phi(\omega) = \sup\{|\langle x^*, \Phi(\omega)\rangle| : \|x^*\| \leq 1\},$$

άρα

$$\begin{aligned}
\|(T \otimes I_X)(\Phi)\| &= \left(\int \|\sum_i (T\phi_i)(\omega)x_i\|_X^2 d\mu(\omega)\right)^{1/2} \\
&= \left(\int \sup\left\{T\left(\sum_i \phi_i(\omega)x^*(x_i)\right) : \|x^*\| \leq 1\right\}^2 d\mu(\omega)\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int T\left(\sup\{\sum_i \phi_i(\omega)x^*(x_i) : \|x^*\| \leq 1\}\right)^2 d\mu(\omega)\right)^{1/2} \\
&= \left(\int |T\phi|^2 d\mu(\omega)\right)^{1/2} \\
&\leq \|T\| \cdot \|\phi\|_{L_2(\Omega,\mu)} = \|T\| \cdot \|\Phi\|_{L_2(X)}.
\end{aligned}$$

Άρα, ο $T \otimes I_X$ είναι φραγμένος στον $L_2(X)$ και $\|T \otimes I_X\| \leq \|T\|$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $X = H$. Έστω $\{e_j\}$ ορθοκανονική βάση του H και έστω $\Phi = \sum_i \phi_i \otimes x_i \in L_2 \otimes H$. Αν $u_j = \langle \Phi, e_j\rangle$, τότε

$$\begin{aligned}
(Tu_j)(\omega) &= T\left(\sum_i \phi_i(\omega)\langle e_j, x_i\rangle\right) \\
&= \sum_i (T\phi_i)(\omega)\langle e_j, x_i\rangle \\
&= \langle e_j, [T \otimes I_H(\Phi)](\omega)\rangle.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\left(\sum_j |(Tu_j)(\omega)|^2\right)^{1/2} = \|[(T \otimes I_X)(\Phi)](\omega)\|_H$$

και

$$\left(\sum_j |u_j(\omega)|^2\right)^{1/2} = \|\Phi(\omega)\|_H.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\|(T\otimes I_X)(\Phi)\|_{L_2(H)} &= \left(\sum_j \|Tu_j\|^2_{L_2(\Omega,\mu)}\right)^{1/2}\\ &\leq \|T\|\left(\sum_j \|u_j\|^2_{L_2(\Omega,\mu)}\right)^{1/2}\\ &= \|T\|\cdot\|\Phi\|_{L_2(H)}.\end{aligned}$$

Δηλαδή, ο $T\otimes I_H$ είναι φραγμένος στον $L_2(H)$ και $\|T\otimes I_H\|\leq\|T\|$. Αν τώρα ο X είναι ισομορφικός με τον H και $\varepsilon>0$, θεωρούμε ισομορφισμό $S:X\to H$ τέτοιον ώστε $\|S\|\cdot\|S^{-1}\|=(1+\varepsilon)d(X,H)$. Έστω $\Phi=\sum_i\phi_i\otimes x_i\in L_2\otimes X$. Αν $y_i=S(x_i)$, τότε $\Psi=\sum_i\phi_i\otimes y_i\in L_2\otimes H$. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα για την Ψ, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|(T\otimes I_X)(\Phi)\|_{L_2(X)} &\leq \|S^{-1}\|\cdot\|(T\otimes I_X)(\Psi)\|_{L_2(H)}\leq\|T\|\cdot\|S^{-1}\|\cdot\|\Psi\|_{L_2(H)}\\ &\leq \|T\|\cdot\|S^{-1}\|\cdot\|S\|\cdot\|\Phi\|_{L_2(X)}\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\|T\otimes I_X\|\leq(1+\varepsilon)d(X,H)\|T\|.$$

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, η απόδειξη είναι πλήρης. □

Ορισμός. Ένας χώρος Banach X λέγεται K-κυρτός αν ο τελεστής $Q_1\otimes I_X$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή του $L_2(X)$. Τότε, η K-σταθερά του X είναι ο αριθμός

$$K(X)=\|Q_1\otimes I_X\|_{L_2(X)\to L_2(X)}.$$

Είδαμε ότι αν ο X είναι ισόμορφος με τον χώρο Hilbert H, τότε ο X είναι K-κυρτός και $K(X)\leq d(X,H)$. Ο Pisier απέδειξε ότι ισχύει πολύ ισχυρότερη εκτίμηση.

Θεώρημα 1.3.1 *Έστω ότι ο X είναι ισόμορφος με τον χώρο Hilbert H. Τότε,*

$$K(X)\leq c\log[d(X,H)+1]$$

όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.1 θα βασιστεί στις δύο προηγούμενες προτάσεις και στο εξής λήμμα.

Λήμμα 1.3.2 *Έστω X χώρος Banach και $\{x_k:k\geq 0\}$ τελικά μηδενική ακολουθία στον X. Υποθέτουμε ότι*

$$\max_{-1\leq\varepsilon\leq 1}\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k x_k\right\|\leq 1.$$

Αν $D=\max_{k\geq 0}\|x_k\|$, τότε

$$\|x_1\|\leq c\log(D+1)$$

όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά.

Η απόδειξη του Λήμματος 1.3.2 χρησιμοποιεί μία απλή μορφή της ανισότητας του Bernstein.

Λήμμα 1.3.3 *Για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο* $Q(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$ *με μιγαδικούς συντελεστές, ισχύει*

$$\|Q'\|_\infty \leq 2n\|Q\|_\infty.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τον πυρήνα του Féjer

$$F_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \exp(ijt)$$

και θέτουμε

$$\psi_n(t) = 2n \cdot \sin(nt) F_{n-1}(t).$$

Οι βασικές ιδιότητες των F_n και ψ_n δίνονται από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

Ισχυρισμός 1. *Αν* $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, *τότε*

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2.$$

Δηλαδή, $F_n(t) \geq 0$ *για κάθε* $t \in \mathbb{R}$. *Επίσης,* $\|F_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_n(t)dt = 1$.

Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=-j}^{j} e^{ikt}.$$

Θέτουμε $z = e^{it}$, $z \neq 1$. Απλές πράξεις δείχνουν ότι

$$\begin{aligned}
(n+1)F_n(t) &= \frac{1}{1-z}\left(\frac{1-\overline{z}^{n+1}}{1-\overline{z}} - \frac{z(1-z^{n+1})}{1-z}\right) \\
&= \frac{2-\overline{z}^{n+1}-z^{n+1}}{|1-z|^2} \\
&= \left(\frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2.
\end{aligned}$$

Αφού $F_n \geq 0$, είναι φανερό ότι

$$\begin{aligned}
\|F_n\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_n(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\int_0^{2\pi} e^{ikt}dt = 1. \quad \square
\end{aligned}$$

Ισχυρισμός 2. *Αν Q είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n, τότε*

$$Q * \psi_n = -Q'.$$

Απόδειξη: Μπορούμε να γράψουμε $Q(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
(Q * \psi_n)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2n \left(\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ik(t-s)} \right) \left(\sum_{l=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|l|}{n}\right) e^{ils} \right) \sin(ns) ds \\
&= \frac{2n}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt} \sum_{l=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|l|}{n}\right) \int_0^{2\pi} e^{i(l-k)s} \sin(ns) ds.
\end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα μηδενίζεται, εκτός αν $|l-k| = n$, οπότε

$$\int_0^{2\pi} e^{ins} \sin(ns) ds = -\int_0^{2\pi} e^{-ins} \sin(ns) ds = i\pi.$$

Αφού $|k| \leq n$ και $|l| \leq n-1$, πρέπει να είναι $1 \leq k \leq n$ και $l = k-n$, ή $-n \leq k \leq -1$ και $l = k+n$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
(Q * \psi_n)(t) &= \frac{n}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k e^{ikt} (-i)\pi \left(1 - \frac{n-k}{n}\right) + \sum_{k=-n}^{-1} a_k e^{ikt} i\pi \left(1 - \frac{k+n}{n}\right) \right) \\
&= -\sum_{k \neq 0, |k| \leq n} a_k k i e^{ikt} \\
&= -Q'(t). \quad \square
\end{aligned}$$

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το Λήμμα 1.3.3. Από τον προηγούμενο ισχυρισμό, $\|Q'\|_\infty = \|Q * \psi_n\|_\infty$. Ομως,

$$|(Q * \psi_n)(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q(t-s)| \, |\psi_n(s)| ds,$$

άρα

$$\|Q * \psi_n\|_\infty \leq \frac{1}{2\pi} \|Q\|_\infty \int_0^{2\pi} |\psi_n(s)| ds.$$

Από τον ορισμό της ψ_n και από τον πρώτο ισχυρισμό,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\psi_n(s)| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2n F_{n-1}(s) ds = 2n.$$

Άρα,

$$\|Q'\|_\infty \leq 2n \|Q\|_\infty. \quad \square$$

Απόδειξη του Λήμματος 1.3.2: Έστω $P(t) = \sum_{k=0}^{n} x_k t^k$, $x_k \in \mathbb{C}$ ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές. Ορίζουμε

$$Q(s) = P\left(\frac{\sin s}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{(\sin s)^k}{2^k}.$$

Το Q είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n, και

$$Q'(0) = \frac{1}{2}P'(0).$$

Από την ανισότητα του Bernstein,

$$|Q'(0)| \leq 2n\|Q\|_\infty = 2n \max_{|s|\leq\frac{1}{2}} |P(s)|.$$

Άρα,

$$(*) \qquad |x_1| = |P'(0)| \leq 4n \max_{|s|\leq\frac{1}{2}} |P(s)|.$$

Έστω τώρα $\{x_k : k \geq 0\}$ τελικά μηδενική ακολουθία σε έναν χώρο Banach X, η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 1.3.2. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το πολυώνυμο $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} x_k t^k$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\|x_1\| = \sup\{|\zeta(x_1)| : \zeta \in X^*, \|\zeta\|_* \leq 1\},$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|x_1\| &= \sup\{|\zeta(x_1)| : \zeta \in X^*, \|\zeta\|_* \leq 1\} \\ &\leq 2n \cdot \sup\{|\zeta(P_n(\varepsilon))| : |\varepsilon| \leq \frac{1}{2}, \zeta \in X^*, \|\zeta\|_* \leq 1\} \\ &\leq 2n \cdot \sup\{\|P_n(\varepsilon)\| : |\varepsilon| \leq \frac{1}{2}\}. \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας, μέσω της τριγωνικής ανισότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} \|x_1\| &\leq 2n \cdot \sup\{\|P_n(\varepsilon)\| : |\varepsilon| \leq \frac{1}{2}\} \\ &\leq 2n \left[\sup\left\{\left\|\sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k x_k\right\| : |\varepsilon| \leq \frac{1}{2}\right\} + \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} D\right] \\ &\leq 2n\left(1 + D2^{-n}\right) \end{aligned}$$

για κάθε n. Τέλος, αν επιλέξουμε $n = [\log D] + 1$ έχουμε το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.1: Ορίζουμε τον τελεστή

$$T(\varepsilon)[f(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k[f(x)] = \int f\left(\varepsilon x + \sqrt{1-\varepsilon^2}y\right) P(dy)$$

Είδαμε προηγουμένως ότι ο $S = \text{span}\{H_a : a \in A\}$ είναι πυκνός στον L_2. Για κάθε $f \in S \otimes X$ με $\|f\|_{L_2(X)} \leq 1$ ορίζουμε:

$$(T(\varepsilon) \otimes I_X)(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (Q_k \otimes I_X)(f)$$

Από την Πρόταση 1.3.2 έχουμε τα εξής:

(1) $\| (T(\varepsilon) \otimes I_X)(f)\|_{L_2(X)} \leq 1$.

(2) $\|(Q_k \otimes I_X)(f)\|_{L_2(X)} \leq d(X, H)$.

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.3.2 για τον χώρο Banach $L_2(X)$ με $D = d(X, H)$ και $x_k = (Q_k \otimes I_X)(f)$, έχουμε

$$\|(Q_1 \otimes I_X)(f)\|_{L_2(X)} \leq c \log(1 + d(X, H)).$$

Τέλος, από την πυκνότητα του $S \otimes X$ στον $L_2(X)$ προκύπτει ότι

$$K(X) = \|Q_1 \otimes I_X\|_{L_2(X) \to L_2(X)} \leq c \log(1 + d(X, H)). \qquad \square$$

Χρησιμοποιώντας την K-κυρτότητα μπορούμε να δούμε τον δυϊσμό ανάμεσα σε σειρές $\sum g_n x_n$ στον X και σειρές $\sum g_n x_n^*$ στον X^*: Έστω $n \in \mathbb{N}$. Γράφουμε $\mathcal{A}_n$ για την σ-υποάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που παράγεται από τις $g_1, \ldots, g_n$. Συμβολίζουμε με $G_n(X)$ τον υπόχωρο του $L_2(X)$ που παράγεται από όλες τις συναρτήσεις $\omega \mapsto \sum_{i=1}^n g_i(\omega) x_i$, όπου $x_i \in X$. Επίσης, συμβολίζουμε με $N_n(X)$ τον υπόχωρο του $L_2(X)$ που αποτελείται από όλες τις $\mathcal{A}_n$-μετρήσιμες συναρτήσεις ψ για τις οποίες

$$\int g_i \psi = 0, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Τέλος, γράφουμε $G_{n*}(X)$ για τον X^n με νόρμα την

$$|||x||| = \inf \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n g_i x_i + \psi \right\|_{L_2(X)} : \psi \in N_n(X) \right\}.$$

Δηλαδή, ο $G_{n*}(X)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L_2(\Omega, \mathcal{A}_n; X)/G_n(X^*)^{\perp}$.

Πρόταση 1.3.3 *Οι χώροι $G_n(X^*)$ και $(G_{n*}(X))^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι. Άρα, για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ ισχύει*

$$|||x||| = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \langle x_i^*, x_i \rangle \ : \ \left\| \sum_{i=1}^n g_i x_i^* \right\|_{L_2(X^*)} \leq 1 \right\}.$$

Απόδειξη: Οι χώροι $G_n(X^*)$ και $(G_{n*}(X))^*$ μπορούν φυσιολογικά να ταυτιστούν με τους $(X^*)^n$ και X^n αντίστοιχα. Η σχέση δυϊσμού μεταξύ των χώρων είναι η

$$\langle \sum g_i x_i^*, x \rangle = \sum \langle x_i^*, x_i \rangle$$

όπου $x = (x_i) \in X^n$.
Έστω Φ $\mathcal{A}_n$-μετρήσιμη συνάρτηση στον $L_2(X)$. Για κάθε $i = 1, \ldots, n$ ορίζουμε

$$x_i = \mathbb{E}(g_i \Phi) = \int g_i \Phi.$$

Τότε, η συνάρτηση $\psi = \Phi - \sum_{i=1}^n g_i x_i \in N_n(X)$ διότι

$$\begin{aligned} \int g_j \psi &= \int g_j \Phi - \sum_{i=1}^n \left[\int g_i g_j \right] x_i \\ &= x_j - \sum_{i=1}^n \delta_{ij} x_i = x_j - x_j = 0, \end{aligned}$$

και απλές πράξεις δείχνουν ότι

$$\mathbb{E}\Big(\langle \sum g_i x_i^*, \Phi \rangle \Big) = \sum \langle x_i^*, x_i \rangle.$$

Δεδομένου ότι

$$\Big\| \sum_{i=1}^n g_i x_i^* \Big\|_{L_2(X^*)} = \sup \Big\{ \mathbb{E} \langle \sum_{i=1}^n g_i x_i^*, \Phi \rangle : \Phi \in L_2(\mathcal{A}_n, X), \|\Phi\|_2 \leq 1 \Big\},$$

μπορούμε να γράψουμε

$$\Big\| \sum_{i=1}^n g_i x_i^* \Big\|_{G_n(X^*)} = \sup \Big\{ \sum_{i=1}^n \langle x_i^*, x_i \rangle : |||x||| \leq 1 \Big\}$$

Τέλος, επειδή ισχύει

$$|||x||| = \sup\{ \langle \xi, x \rangle : |||\xi|||^* \leq 1 \}$$

θέτοντας όπου $\xi = \sum_{i=1}^n g_i x_i^*$ βλέπουμε ότι

$$|||x||| = \sup \Big\{ \sum_{i=1}^n \langle x_i^*, x_i \rangle \ : \ \Big\| \sum_{i=1}^n g_i x_i^* \Big\|_{L_2(X^*)} \leq 1 \Big\}. \qquad \square$$

Πρόταση 1.3.4 *Έστω X ένας K-κυρτός χώρος Banach. Αν $x_1, \ldots, x_n \in X$,*

$$\begin{aligned} K(X)^{-1} \Big\| \sum_{i=1}^n g_i x_i \Big\|_{L_2(X)} &\leq \sup \Big\{ \sum_{i=1}^n \langle x_i^*, x_i \rangle \ : \ \Big\| \sum_{i=1}^n g_i x_i^* \Big\|_{L_2(X^*)} \leq 1 \Big\} \\ &\leq \Big\| \sum_{i=1}^n g_i x_i \Big\|_{L_2(X)}. \end{aligned}$$

Απόδειξη: Αφού $(Q_1 \otimes I_X)(\psi) = 0$ για κάθε $\psi \in N_n(X)$, από τον ορισμό της $K(X)$ παίρνουμε

$$\Big\| \sum_{i=1}^n g_i x_i \Big\|_{L_2(X)} \leq K(X) \Big\| \sum_{i=1}^n g_i x_i + \psi \Big\|_{L_2(X)}$$

για κάθε $\psi \in N_n(X)$. Επομένως,

$$\Big\| \sum_{i=1}^n g_i x_i \Big\|_{L_2(X)} \leq K(X) |||x|||.$$

Από την Πρόταση 1.3.3 έπεται η αριστερή ανισότητα. Η απόδειξη της δεξιάς ανισότητας είναι άμεση. □

1.4 Η ℓ-νόρμα

Η ℓ-νόρμα ορίστηκε από τους T. Figiel και N. Tomczak-Jaegermann [FT]. Έστω X χώρος Banach και $u : \ell_2^n \to X$ γραμμικός τελεστής. Ορίζουμε

$$\ell(u) = \left(\int \|u(x)\|_X^2 d\gamma_n(x) \right)^{1/2}$$

όπου γ_n το μέτρο του Gauss στον $\mathbb{R}^n$. Με τον συμβολισμό της προηγούμενης παραγράφου έχουμε

$$\begin{aligned} \ell(u) &= \left(\int_\Omega \| \sum_{i=1}^n g_i(\omega) u(e_i) \|^2 dP \right)^{1/2} \\ &= \Big\| \sum_{i=1}^n g_i \otimes u(e_i) \Big\|_{L_2(X)}, \end{aligned}$$

όπου $\{e_i\}_{i=1}^n$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

Οι βασικές ιδιότητες της ℓ δίνονται από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.4.1 *Έστω X και Y χώροι Banach.*

1. *Η ℓ είναι νόρμα στον $L(\ell_2^n, X)$.*
2. *Για κάθε $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ ισχύει $\ell(uT) \leq \ell(u)\|T\|$.*
3. *Για κάθε $S : X \to Y$ ισχύει $\ell(Su) \leq \|S\|\ell(u)$.* □

Ορισμός. Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα και έστω α τυχούσα νόρμα στον $L(\ell_2^n, X)$. Μπορούμε πάντα να ορίσουμε μια δυική νόρμα α^* στον $L(X, \ell_2^n)$, θέτοντας

$$\alpha^*(v) = \sup\{\mathrm{tr}(vu) : \alpha(u) \leq 1\}.$$

Λέμε τότε ότι οι α και α^* είναι δυικές ως προς το ίχνος. Το Λήμμα του Lewis [Le] ισχύει για οποιαδήποτε νόρμα στον $L(\ell_2^n, X)$.

Πρόταση 1.4.2 *Για κάθε νόρμα α στον $L(\ell_2^n, X)$, υπάρχει $u \in L(\ell_2^n, \ell_2^n)$ τέτοιος ώστε $\alpha(u) = 1$ και $\alpha^*(u^{-1}) = n$.*

Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι $n \leq \alpha(v)\alpha^*(v^{-1})$ για κάθε $v \in L(\ell_2^n, X)$, αφού

$$\frac{n}{\alpha(v)} = \frac{1}{\alpha(v)}\mathrm{tr}(I_n) = \mathrm{tr}\left(v^{-1}\frac{v}{\alpha(v)}\right) \leq \alpha^*(v^{-1}).$$

Έστω $u \mapsto \det(u)$ συνάρτηση ορίζουσας (ως προς κάποια σταθερή βάση του X). Παίρνουμε $u \in L(\ell_2^n, X)$ με $\alpha(u) \leq 1$ έτσι ώστε $|\det u| = \max\{|\det v| : v \in L(\ell_2^n, X), \alpha(v) \leq 1\}$. Τέτοιος u υπάρχει, αφού η ορίζουσα είναι συνεχής συνάρτηση ως προς την φυσιολογική νόρμα, άρα και ως προς κάθε νόρμα στον $L(\ell_2^n, X)$. Είναι επίσης φανερό ότι $\alpha(u) = 1$.Έστω $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό, και $v \in L(\ell_2^n, X)$ τυχών. Τότε, ο $(u + \varepsilon v)/\alpha(u + \varepsilon v)$ έχει α-νόρμα ίση με 1. Επομένως,

$$|\det(u + \varepsilon v)| \leq (\alpha(u + \varepsilon v))^n\, |\det u|.$$

Έπεται ότι

$$|\det[u^{-1}(u + \varepsilon v)]|^{1/n} \leq \alpha(u + \varepsilon v),$$

και, αφού η α είναι νόρμα,

$$|\det(I_n + \varepsilon u^{-1}v)|^{1/n} \leq \alpha(u) + \varepsilon\alpha(v) = 1 + \varepsilon\alpha(v).$$

Δηλαδή,

$$\frac{[\det(I_n + \varepsilon u^{-1}v)]^{1/n} - 1}{\varepsilon} \leq \alpha(v),$$

και αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{tr}(u^{-1}v)}{n} \leq \alpha(v).$$

Αφού ο v ήταν τυχών, αυτό σημαίνει ότι

$$\alpha^*(u^{-1}) \leq n. \quad \square$$

Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα και έστω $v : X \to \ell_2^n$. Αν θέσουμε $x_i^* = v^*(e_i)$, τότε με τον συμβολισμό της προηγούμενης παραγράφου,

$$(*) \qquad \ell(v^*) = \sup\left\{\sum_{i=1}^n \langle x_i^*, x_i\rangle \;:\; \left\|\sum_{i=1}^n g_i x_i^*\right\|_{L_2(X^*)} \leq 1\right\}.$$

Άρα, η Πρόταση 1.3.4 μας δίνει το εξής.

Λήμμα 1.4.1 *Για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X και κάθε $v : X \to \ell_2^n$, έχουμε*

$$\ell(v^*) \leq K(X^*)\ell^*(v).$$

Απόδειξη: Από την Πρόταση 1.3.4 και την $(*)$,

$$\ell(v^*) = \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i x_i^* \right\|_{L_2(X^*)} \leq K(X^*)\ell^*(v). \quad \square$$

Χρησιμοποιώντας και την Πρόταση 1.4.2 παίρνουμε το εξής.

Θεώρημα 1.4.1 *Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Υπάρχει ισομορφισμός $u : \ell_2^n \to X$ τέτοιος ώστε*

$$\ell(u)\ell((u^{-1})^*) \leq cn \log[d(X, \ell_2^n) + 1].$$

Ισοδύναμα, υπάρχει διορθογώνιο σύστημα $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ και $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\} \subset X^*$ τέτοιο ώστε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} g_i x_i \right\|_{L_2(X)} \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i x_i^* \right\|_{L_2(X^*)} \leq cn \log[d(X, \ell_2^n) + 1].$$

Απόδειξη: Από την πρόταση 1.4.2 υπάρχει ισομορφισμός u τέτοιος ώστε $\ell(u) = \ell^*(u^{-1}) = \sqrt{n}$. Επίσης,από το Λήμμα 1.4.1 θέτοντας $v = u^{-1}$ έχουμε

$$\ell((u^{-1})^*) \leq K(X^*)\ell^*(u^{-1}).$$

Από το Θεώρημα 1.3.1 έχουμε

$$K(X^*) \leq c \log[d(X^*, \ell_2^n) + 1] = c \log[d(X, \ell_2^n) + 1],$$

άρα

$$\begin{aligned} \ell(u) \cdot \ell((u^{-1})^*) &\leq K(X^*)\ell(u) \cdot \ell^*(u^{-1}) \\ &\leq cn \log[d(X, \ell_2^n) + 1]. \end{aligned}$$

Παίρνοντας $x_i = u(e_i)$ και $x_i^* = (u^{-1})^*(e_i)$, από τον ορισμό της ℓ-νόρμας έχουμε την ισοδύναμη διατύπωση του θεωρήματος. $\square$

Κεφάλαιο 2

Η εικασία του Mahler

Στην §2.1 αποδεικνύουμε την ανισότητα του Santaló: για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,

$$P(K) := |K| \cdot |K^\circ| \leq |B_n|^2.$$

Η απόδειξη βασίζεται στην συμμετρικοποίηση κατά Steiner. Δεν είναι γνωστό για ποιά συμμετρικά κυρτά σώματα ελαχιστοποιείται το γινόμενο όγκων P. Η εικασία του Mahler είναι ότι

$$P(K) \geq 4^n/n!$$

για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή ότι το γινόμενο όγκων $P(K)$ γίνεται ελάχιστο όταν το K είναι κύβος. Στις παραγράφους §2.2 και §2.3 επαληθεύουμε την εικασία του Mahler μέσα σε δύο ειδικές κλάσεις σωμάτων: τα ζωνοειδή και τα σώματα που είναι συμμετρικά ως προς τα κύρια υπερεπίπεδα.

2.1 Η ανισότητα του Santaló

Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $\theta \in S^{n-1}$. Γράφουμε $P_{\theta^\perp}(K)$ για την ορθογώνια προβολή του K στον $\theta^\perp$ και ορίζουμε δύο συναρτήσεις $f, g : P_{\theta^\perp}(K) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \min\{t \in \mathbb{R} : x + t\theta \in K\} \quad \text{και} \quad g(x) = \max\{t \in \mathbb{R} : x + t\theta \in K\}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η f είναι κυρτή, η g είναι κοίλη και

$$K = \{x + t\theta : \ x \in P_{\theta^\perp}(K), \ f(x) \leq t \leq g(x)\}. \tag{1}$$

Ορίζουμε τώρα την Steiner συμμετρικοποίηση του K στην κατεύθυνση του θ ως εξής:

$$S_\theta(K) = \left\{ x + t\theta : x \in P_{\theta^\perp}(K) \ , \ |t| \leq \frac{g(x) - f(x)}{2} \right\}. \tag{2}$$

Δηλαδή, γιά κάθε $x \in P_{\theta^\perp}(K)$ θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στο θ με μήκος $g(x) - f(x)$ και μέσο το x, και παίρνουμε την ένωση όλων αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων.
Από τον ορισμό, το $S_\theta(K)$ είναι συμμετρικό ως προς $\theta^\perp$ (αυτή η παρατήρηση δικαιολογεί τον όρο «συμμετρικοποίηση»). Οι βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού S_θ περιγράφονται στο επόμενο λήμμα:

Λήμμα 2.1.1 *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $\theta \in S^{n-1}$. Τότε, το $S_\theta(K)$ είναι κυρτό σώμα και $|S_\theta(K)| = |K|$.* □

Έστω K, L μη κενά, συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Η *απόσταση Hausdorff* των K και L είναι ο αριθμός

$$d_H(K,L) = \min\{\lambda \geq 0 : K \subseteq L + \lambda B_n \quad \text{και} \quad L \subseteq K + \lambda B_n\}. \tag{3}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η d_H είναι μετρική. Επιπλέον, διαδοχικές Steiner συμμετρικοποιήσεις φέρνουν οποιοδήποτε κυρτό σώμα οσοδήποτε κοντά σε Ευκλείδεια μπάλα.

Θεώρημα 2.1.1 *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε την κλάση όλων των διαδοχικών Steiner συμμετρικοποιήσεων του K*

$$\mathcal{S}(K) = \{S_{\theta_m} \dots S_{\theta_1}(K) : \theta_i \in S^{n-1},\ m \in \mathbb{N}\}. \tag{4}$$

Τότε, γιά κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $C \in \mathcal{S}(K)$ τέτοιο ώστε $d_H(C, \rho B_n) < \varepsilon$, όπου $\rho = \big(|K|/|B_n|\big)^{1/n}$. □

Το Θεώρημα 2.1.1 ανάγει την απόδειξη της ανισότητας του Santaló στο εξής.

Θεώρημα 2.1.2 [MP] *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $\theta \in S^{n-1}$. Αν $K_1 = S_\theta(K)$ είναι η Steiner συμμετρικοποίηση του K στην κατεύθυνση του θ, τότε*

$$|K||K^\circ| \leq |K_1||K_1^\circ|.$$

Απόδειξη: Αφού η συμμετρικοποίηση Steiner διατηρεί τους όγκους, αρκεί να δείξουμε ότι $|K^\circ| \leq |K_1^\circ|$.
Για ευκολία υποθέτουμε ότι $\theta^\perp = \mathbb{R}^{n-1}$. Από τον ορισμό της συμμετρικοποίησης μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$S_\theta(K) = K_1 = \left\{ \left(x, \frac{t_1 - t_2}{2}\right) : x \in P_{\theta^\perp}K, (x,t_1) \in K, (x,t_2) \in K \right\}.$$

Γιά κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^n$ γράφουμε

$$A(t) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x,t) \in A\}.$$

Ισχυρισμός: Γιά κάθε $s \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\frac{K^\circ(s) + K^\circ(-s)}{2} \subseteq K_1^\circ(s).$$

Απόδειξη: Έστω $y_1 \in K^\circ(s)$ και $y_2 \in K^\circ(-s)$. Αυτό σημαίνει ότι $(y_1, s) \in K^\circ$ και $(y_2, -s) \in K^\circ$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $(y_1 + y_2)/2 \in K_1^\circ(s)$, δηλαδή ότι $\left(\frac{y_1+y_2}{2}, s\right) \in K_1^\circ$.
Έστω $(x, \frac{t_1-t_2}{2}) \in K_1$, δηλαδή $(x, t_1) \in K$ και $(x, t_2) \in K$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left\langle (x, \frac{t_1 - t_2}{2}), (\frac{y_1 + y_2}{2}, s) \right\rangle \leq 1.$$

Όμως, η ποσότητα αυτή είναι ίση με

$$\left\langle x, \frac{y_1 + y_2}{2} \right\rangle + \frac{st_1 - st_2}{2} = \frac{\langle (x, t_1), (y_1, s)\rangle + \langle (x, t_2), (y_2, -s)\rangle}{2} \leq 1. \qquad \square$$

Από την ανισότητα Brunn-Minkowski,

$$|K_1^\circ(s)| \geq |K^\circ(s)|^{1/2} |K^\circ(-s)|^{1/2}.$$

Από την συμμετρία του K° έχουμε $|K^\circ(s)| = |K^\circ(-s)|$, άρα

$$|K_1^\circ(s)| \geq |K^\circ(s)|$$

γιά κάθε $s \in \mathbb{R}$. Με ολοκλήρωση συμπεραίνουμε ότι

$$|K_1^\circ| = \int_{-\infty}^{+\infty} |K_1^\circ(s)| ds \geq \int_{-\infty}^{+\infty} |K^\circ(s)| ds = |K^\circ|. \quad \square$$

Η ανισότητα του Santaló. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|K||K^\circ| \leq |B_n|^2.$$

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{S}(K)$ η κλάση όλων των διαδοχικών Steiner συμμετρικοποιήσεων του K. Με διαδοχικές εφαρμογές του Θεωρήματος 2.1.2 βλέπουμε ότι

$$|K||K^\circ| \leq |C||C^\circ|$$

γιά κάθε $C \in \mathcal{S}(K)$. Από το Θεώρημα 2.1.1 υπάρχει ακολουθία $\{C_m\}$ στοιχείων της $\mathcal{S}(K)$ με $d_H(C_m, \rho B_n) \to 0$, όπου $\rho = \left(|K|/|B_n|\right)^{1/n}$. Τότε, $d_H(C_m^\circ, (\rho B_n)^\circ) \to 0$ και από την συνέχεια του όγκου ως προς την Hausdorff μετρική παίρνουμε

$$|K||K^\circ| \leq \lim_m |C_m||(C_m)^\circ| = |\rho B_n||(\rho B_n)^\circ| = |B_n|^2. \qquad \square$$

Το πρόβλημα του ελαχίστου παραμένει ανοιχτό. Σύμφωνα με την *εικασία του Mahler*, γιά κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$|K||K^\circ| \geq \frac{4^n}{n!}. \tag{5}$$

Αν το ελάχιστο είναι όντως αυτό, τότε έχουμε ισότητα στην (5) αν το K είναι κύβος (και σε μερικές ακόμα περιπτώσεις). Όπως θα δούμε στις επόμενες δύο παραγράφους, η εικασία του Mahler ισχύει αν περιοριστούμε σε δύο ειδικές κλάσεις σωμάτων: στα ζωνοειδή και στα σώματα που είναι συμμετρικά ως προς τα κύρια υπερεπίπεδα.

2.2 Η εικασία του Mahler για ζωνοειδή

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ γράφουμε $[-x, x]$ για το ευθύγραμμο τμήμα $\{tx : -1 \leq t \leq 1\}$. Τα συμμετρικά κυρτά σώματα της μορφής

$$A = \sum_{j=1}^{m} [-x_j, x_j]$$

λέγονται *ζωνότοπα*. Δηλαδή, ζωνότοπο είναι ένα άθροισμα Minkowski ευθυγράμμων τμημάτων με μέσο το 0. Αν $m = n$ και τα x_j είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε το A λέγεται n-κύβος (παραλληλεπίπεδο).
Τα όρια ακολουθιών από ζωνότοπα ως προς την Hausdorff μετρική λέγονται *ζωνοειδή*. Η κλάση των ζωνοειδών χαρακτηρίζεται από την εξής πρόταση.

Πρόταση 2.2.1 *Ένα συμμετρικό κυρτό σώμα A στον $\mathbb{R}^n$ είναι ζωνοειδές αν και μόνο αν υπάρχει θετικό, άρτιο μέτρο Borel μ στην S^{n-1} με την ιδιότητα*

$$\|y\|_{A^\circ} = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} |\langle x, y \rangle| \, d\mu(x)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. □

Το μέτρο μ της Πρότασης 2.2.1 ορίζεται μονοσήμαντα και λέγεται *μέτρο στήριξης* του A. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$|P_{x^\perp} A| = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} |\langle x, \theta \rangle| d\sigma_A(\theta)$$

όπου σ_A το επιφανειακό μέτρο του A, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} |P_{x^\perp} A| d\mu(x) &= \frac{1}{2n} \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |\langle x, \theta \rangle| d\sigma_A(\theta) d\mu(x) \\
&= \frac{1}{2n} \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |\langle x, \theta \rangle| d\mu(x) d\sigma_A(\theta) \\
&= \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_{A^\circ} d\sigma_A(\theta) \\
&= |A|,
\end{aligned}$$

αφού η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα. Έχουμε λοιπόν τον εξής «τύπο» για τον όγκο ζωνοειδών.

Πρόταση 2.2.2 *Έστω A ζωνοειδές με μέτρο στήριξης το μ. Τότε,*

$$|A| = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} |P_{x^\perp}A| d\mu(x). \qquad \square$$

Το βασικό θεώρημα που θα αποδείξουμε σε αυτήν την παράγραφο είναι το εξής (βλέπε [GMR], αρχικά αποδείχθηκε αλλιώς από τον Reisner [R]:

Θεώρημα 2.2.1 *Έστω A ζωνοειδές στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$P(A) = |A| \cdot |A^\circ| \geq \frac{4^n}{n!}$$

με ισότητα αν και μόνο αν το A είναι n-κύβος.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.1 θα χρειαστούμε τρία λήμματα.

Λήμμα 2.2.1 *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ζωνοειδές και μ το μέτρο στήριξης του A. Τότε,*

$$(n+1)|A| \int_{S^{n-1}} \int_{A^\circ} |\langle x, y\rangle| dy d\mu(x) = 2|A^\circ| \int_{S^{n-1}} |P_{x^\perp}A| d\mu(x). \tag{1}$$

Ειδικότερα, υπάρχει $x_0 \in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε

$$(n+1)|A| \int_{A^\circ} |\langle x_0, y\rangle| dy \geq 2|A^\circ| \cdot |P_{x_0^\perp}A|. \tag{2}$$

Απόδειξη: Από το θεώρημα του Fubini έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} \int_{A^\circ} |\langle x, y\rangle| dy \; d\mu(x) &= \int_{A^\circ} \left[\int_{S^{n-1}} |\langle x, y\rangle| d\mu(x)\right] dy \\
&= 2\int_{A^\circ} \|y\|_{A^\circ} dy \\
&= 2\int_{A^\circ} \left[\int_0^{\|y\|_{A^\circ}} dt\right] dy \\
&= 2\int_0^1 |\{y \in \mathbb{R}^n : t \leq \|y\|_{A^\circ} \leq 1\}| dt \\
&= 2\int_0^1 |A^\circ \backslash tA^\circ| dt \\
&= 2\int_0^1 (|A^\circ| - |tA^\circ|) dt.
\end{aligned}$$

διότι $tA^\circ \subseteq A^\circ$ για κάθε $t \in [0,1]$. Η τελευταία ποσότητα ισούται με

$$2\int_0^1 |A^\circ|(1-t^n)dt = 2|A^\circ|\int_0^1 (1-t^n)dt = \frac{2n}{n+1}|A^\circ|.$$

Μια πρώτη ισότητα λοιπόν είναι η εξής:

$$\int_{S^{n-1}}\int_{A^\circ} |\langle x,y\rangle| dy d\mu(x) = \frac{2n}{n+1}|A^\circ|. \tag{3}$$

Από την άλλη μεριά, επειδή το A είναι ζωνοειδές, από την Πρόταση 2.2.2 ισχύει ότι

$$|A| = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} |P_{x^\perp}A| d\mu(x). \tag{4}$$

Από τις (3) και (4) προκύπτει η (1).
Η ύπαρξη ενός $x_0 \in S^{n-1}$ που να ικανοποιεί την (2) έπεται από το γεγονός ότι το μ είναι θετικό μέτρο. Πράγματι από την (1) αν τα μεταφέρουμε όλα στο αριστερό μέλος έχουμε

$$\int_{S^{n-1}} \left[(n+1)|A|\int_{A^\circ} |\langle x,y\rangle| dy - 2|A^\circ|\cdot|P_{x^\perp}A|\right] d\mu(x) = 0$$

άρα υπάρχει $x_0 \in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε

$$(n+1)|A|\int_{A^\circ} |\langle x_0,y\rangle| dy - 2|A^\circ|\cdot|P_{x_0^\perp}| \geq 0.$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Λήμμα 2.2.2 *Έστω $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ με $f(0)=1$ και*

$$\int_0^\infty f(x)dx > 0.$$

Υποθέτουμε ακόμα ότι για κάποιο $p>0$ η $f^{1/p}$ είναι κοίλη στο $\{x : f(x)\neq 0\}$. Τότε,

$$\int_0^\infty t\ f(t)\ dt \leq \frac{p+1}{p+2}\left[\int_0^\infty f(t)\ dt\right]^2$$

με ισότητα αν και μόνο αν υπάρχει $\alpha>0$ τέτοιος ώστε $f(t)=(1-\alpha t)_+^p$.

Απόδειξη: Επειδή $\int_0^\infty f(x)\ dx > 0$, υπάρχει $\alpha>0$ τέτοιος ώστε

$$\int_0^\infty f(t)\ dt = \int_0^\infty (1-\alpha t)_+^p dt = \frac{1}{\alpha(p+1)}. \tag{5}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - (1-\alpha t)_+^p$. Τότε,

$$g(0) = f(0) - 1 = 0$$

και

$$\int_0^\infty g(x)\ dx = \int_0^\infty f(x)\ dx - \int_0^\infty (1-\alpha x)_+^p dx = 0. \tag{6}$$

Αφού η $f^{1/p}$ είναι κοίλη στο $\{x : f(x) \neq 0\}$ και η $(1-\alpha x)_+$ γραμμική, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x_0 \geq 0$ με την ιδιότητα $g(x) \geq 0$ αν $x \in [0, x_0]$ και $g(x) \leq 0$ αν $x \geq x_0$. Έπεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$

$$\int_x^\infty g(t)\ dt \leq 0. \tag{7}$$

Πραγματικά, για κάθε $x \geq x_0$ ισχύει $g(x) \leq 0$ άρα $\int_x^\infty g(t)\ dt \leq 0$. Αν πάλι υπήρχε κάποιο $x_1 \in [0, x_0]$ τέτοιο ώστε $\int_{x_1}^\infty g(t)\ dt > 0$, από την (6) θα παίρναμε $\int_0^{x_1} g(t)\ dt < 0$ το οποίο είναι άτοπο.
Τώρα,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_x^\infty f(t)\ dt\ dx &= \int_0^\infty \int_0^\infty \chi_{\{t \geq x\}}(t)\ f(t)\ dt\ dx \\
&= \int_0^\infty f(t) \int_0^\infty \chi_{\{t \geq x\}}(t)\ dx\ dt \\
&= \int_0^\infty f(t) \int_0^t dx\ dt \\
&= \int_0^\infty t\ f(t)\ dt,
\end{aligned}$$

οπότε, χρησιμοποιώντας την (7) γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t\ f(t)\ dt &= \int_0^\infty \left[\int_x^\infty f(t)\ dt\right] dx \\
&\leq \int_0^\infty \left[\int_x^\infty (1-\alpha t)_+^p\ dt\right] dx.
\end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left[\int_x^\infty (1-\alpha t)_+^p\ dt\right] dx &= \frac{1}{(p+1)(p+2)\alpha^2} = \frac{p+1}{p+2} \cdot \frac{1}{[(p+1)\alpha]^2} \\
&= \frac{p+1}{p+2} \left[\int_0^\infty\ f(t)\ dt\right]^2
\end{aligned}$$

από την επιλογή του α. Άρα,

$$\int_0^\infty t\ f(t)\ dt \leq \frac{p+1}{p+2} \left[\int_0^\infty\ f(t)\ dt\right]^2.$$

Από την απόδειξη γίνεται φανερό ότι ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$$\int_x^\infty f(t)\ dt = \int_x^\infty (1-\alpha t)_+^p\ dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$, δηλαδή αν $f(t) = (1-\alpha t)_+^p$ για κάθε $t \geq 0$. $\square$

Λήμμα 2.2.3 *Έστω B συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $x \in S^{n-1}$ ορίζουμε $B(x) = \{y \in B : \langle x, y\rangle = 0\}$. Τότε,*

$$\int_B |\langle x, y\rangle| dy \leq \frac{n}{2(n+1)} \cdot \frac{|B|^2}{|B(x)|}.$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $B = \mathrm{conv}(y, -y, B(x))$.

Απόδειξη: Ορίζουμε $g(t) = |\{y \in B : \langle x, y\rangle = t\}|$, $t \in \mathbb{R}$. Για την συνάρτηση g ισχύουν τα εξής:

(α) $g(0) = |B(x)|$ από τον ορισμό του $B(x)$.

(β) Η g είναι άρτια, διότι $\{y \in B : \langle x, y\rangle = -t\} = -\{y \in B : \langle x, y\rangle = t\}$.

(γ) $g(t) = 0$ αν $|t| > \|x\|_{B^\circ}$.

(δ) Η $g^{1/(n-1)}$ είναι κοίλη στο φορέα της $(-\|x\|_{B^\circ}, \|x\|_{B^\circ})$: αυτό προκύπτει από την ανισότητα Brunn-Minkowski.

(ε) Από το θεώρημα του Fubini (μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x = e_n$),

$$\begin{aligned} |B| &= 2\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_B(z,t)\,dz\,dt \\ &= 2\int_0^\infty |\{y \in B : \langle x, y\rangle = t\}|_{n-1}\,dt \\ &= 2\int_0^\infty g(t)\;dt. \end{aligned}$$

(ζ) Εντελώς όμοια,

$$\begin{aligned} \int_B |\langle x, y\rangle| dy &= 2\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \langle (z,t), e_n\rangle \chi_B(z,t)\,dz\,dt \\ &= 2\int_0^\infty t|\{y \in B : \langle x, y\rangle = t\}|_{n-1}\,dt \\ &= 2\int_0^\infty t g(t)\,dt. \end{aligned}$$

Για την συνάρτηση $f(t) = g(t)/g(0)$ έχουμε ότι: η $f^{1/(n-1)}$ είναι κοίλη στο $\{x : f(x) \neq 0\}$ με $f(0) = 1$ και

$$\int_0^\infty f(t)dt = \int_0^\infty \frac{g(t)}{g(0)}dt = \frac{1}{|B(x)|}\int_0^\infty g(t)\;dt = \frac{|B|}{2|B(x)|} > 0.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.2.2 με $p = n-1$ παίρνουμε

$$\int_0^\infty t f(t)dt \leq \frac{n}{n+1}\left[\int_0^\infty f(t)\;dt\right]^2 \tag{8}$$

με ισότητα αν και μόνο αν υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε $f(t) = (1-\alpha t)_+^{n-1}$ για κάθε $t \geq 0$.
Στην περίπτωσή μας, η (8) παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{2|B(x)|}\int_B |\langle x,y\rangle| dy \leq \frac{n}{4(n+1)}\frac{|B|^2}{|B(x)|^2}$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι

$$\int_B |\langle x,y\rangle| dy \leq \frac{n}{2(n+1)}\cdot\frac{|B|^2}{|B(x)|},$$

δηλαδή το ζητούμενο.
Τώρα, αν f και p είναι τα παραπάνω, από το Λήμμα 2.2.2 έχουμε ισότητα αν και μόνο αν $f(t) = (1-\alpha t)_+^p$ για κάθε $t \geq 0$, δηλαδή αν

$$\frac{g(t)}{g(0)} = \left(1 - \frac{t}{\|x\|_{B^\circ}}\right)_+^{n-1}$$

για κάθε $t \geq 0$ (παρατηρήστε ότι $1/\alpha = \|x\|_{B^\circ}$ διότι οι $f(t)$ και $(1-\alpha t)_+^{n-1}$ συμπίπτουν και έχουν φορείς τα $[0, \|x\|_{B^\circ}]$ και $[0, 1/\alpha]$ αντίστοιχα).
Από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $y \in B$ τέτοιο ώστε $|\langle x,y\rangle| = \|x\|_{B^\circ}$. Λόγω κυρτότητας και συμμετρίας του B έχουμε $B \supseteq B_1 = \mathrm{conv}(y, -y, B(x))$. Αν λοιπόν ισχύει

$$\int_B |\langle x,y\rangle| dy = \frac{n}{2(n+1)}\frac{|B|^2}{|B(x)|},$$

τότε

$$|B| \geq |B_1| = \frac{2|B(x)|\cdot\|x\|_{B^\circ}}{n} = 2\int_0^\infty g(t)\, dt = |B|$$

οπότε $B = B_1$.
Ο αντίστροφος ισχυρισμός προκύπτει με απευθείας υπολογισμό. Αν $B = B_1$ και h το πλάτος του B στην διεύθυνση του x, τότε

$$\begin{aligned}
\int_B |\langle x,y\rangle| dy &= 2\int_0^h t g(t) dt \\
&= 2g(0)\int_0^h t\left(1-\frac{t}{h}\right)^{n-1} dt \\
&= \frac{2g(0)h^2}{n(n+1)} \\
&= \frac{n}{2(n+1)}\cdot\frac{|B|^2}{|B(x)|}
\end{aligned}$$

διότι $2g(0)h = n|B|$. □

Τώρα πιά είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το θεώρημα.

Απόδειξη του θεωρήματος: Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς n. Για $n=1$ έχουμε $A=[-c,c]$ και $A^\circ=[-c^{-1},c^{-1}]$, άρα $P(A)=4$.
Έστω ότι η ανισότητα του Θεωρήματος ισχύει για $n-1$. Τότε από τα Λήμματα 2.2.1 και 2.2.3 έχουμε ότι: υπάρχει $x_0\in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} 2|A^\circ|\cdot|P_{x_0^\perp}A| &\leq (n+1)|A|\int_{A^\circ}|\langle x_0,y\rangle|dy \\ &\leq (n+1)|A|\frac{n}{2(n+1)}\frac{|A^\circ|^2}{|A^\circ(x_0)|} \end{aligned}$$

άρα

$$|P_{x_0^\perp}A|\cdot|A^\circ(x_0)|\leq\frac{n}{4}|A|\cdot|A^\circ|. \tag{9}$$

Επειδή όμως $(A^\circ(x_0))^\circ=P_{x_0^\perp}(A)$, η (9) παίρνει τη μορφή

$$P(A)\geq\frac{4}{n}P\left(P_{x_0^\perp}A\right). \tag{10}$$

Τώρα επειδή το A είναι ζωνοειδές, η προβολή του $P_{x_0^\perp}A$ είναι επίσης ζωνοειδές διάστασης $n-1$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$P(A)\geq\frac{4}{n}P\left(P_{x_0^\perp}A\right)\geq\frac{4}{n}\cdot\frac{4^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{4^n}{n!}.$$

Άρα το Θεώρημα ισχύει για κάθε $n\in\mathbb{N}$.
Αν $P(A)=4^n/n!$, τότε για το συγκεκριμένο $x_0\in S^{n-1}$ της παραπάνω απόδειξης ισχύει $P\left(P_{x_0^\perp}A\right)=4^{n-1}/(n-1)!$ άρα από την επαγωγική υπόθεση το $P_{x_0^\perp}(A)$ είναι $(n-1)$-κύβος. Αυτό σημαίνει ότι $A^\circ(x_0)=\text{conv}\{\pm y_1,\pm y_2,\dots,\pm y_{n-1}\}$ για κάποια $y_1,\dots,y_{n-1}\in\mathbb{R}^n$. Επιπλέον έχουμε ισότητα στην

$$\int_{A^\circ}|\langle x_0,y\rangle|dy\leq\frac{n}{2(n+1)}\cdot\frac{|A^\circ|^2}{|A^\circ(x_0)|},$$

άρα υπάρχει $y_0\in\mathbb{R}^n$ για το οποίο

$$A^\circ=\text{conv}(y_0,-y_0,A^\circ(x_0)\})=\text{conv}\{\pm y_0,\dots,\pm y_{n-1}\}.$$

Δηλαδή το A είναι n-κύβος. □

2.3 Η εικασία του Mahler για σώματα συμμετρικά ως προς τα κύρια υπερεπίπεδα

Το βασικό θεώρημα που θα αποδείξουμε οφείλεται στον Saint-Raymond [SR] και απαντά θετικά στην εικασία του Mahler για μια άλλη ειδική κλάση σωμάτων, αυτών που είναι συμμετρικά ως προς τα κύρια υπερεπίπεδα.

Θεώρημα 2.3.1 *Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο είναι συμμετρικό ως προς κάθε κύριο υπερεπίπεδο ισχύει ότι*

$$P(K) := |K| \cdot |K^\circ| \geq \frac{4^n}{n!}.$$

Απόδειξη: Λέγοντας ότι το K είναι συμμετρικό ως πρός κάθε κύριο υπερεπίπεδο, εννοούμε ότι υπάρχει βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα

$$\|\varepsilon_1\xi_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_n\xi_n e_n\|_K = \phi(|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|) \tag{1}$$

για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών ξ_i και προσήμων ε_i. Επειδή το γινόμενο όγκων είναι αναλλοίωτο ως προς αντιστρέψιμους γραμμικούς μετασχηματισμούς, για την απόδειξη του Θεωρήματος μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε, το σώμα K είναι συμμετρικό ως πρός κάθε κύριο υπερεπίπεδο. Δηλαδή,

$$T(K) = K \tag{2}$$

για κάθε διαγώνιο πίνακα T με συντεταγμένες ± 1 στη διαγώνιο. Από την $[T(K)]^\circ = (T^{-1})^*(K^\circ)$ και την (2) έπεται ότι το πολικό K° του K είναι επίσης συμμετρικό ως πρός κάθε κύριο υπερεπίπεδο. Δηλαδή,

$$\|\varepsilon_1\xi_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_n\xi_n e_n\|_{K^\circ} = \phi^*(|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|) \tag{3}$$

για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών ξ_i και προσήμων ε_i.
Αν λοιπόν θέσουμε $K_+ = K \cap \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_+)$ και $K^\circ_+ = K^\circ \cap \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_+)$ έχουμε ότι

$$|K| = 2^n |K_+|$$

και

$$|K^\circ| = 2^n |K^\circ_+|.$$

Το ίδιο ακριβώς ισχύει για τον μοναδιαίο κύβο

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n : \max\{|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots, |\xi_n|\} \leq 1\}$$

και για το πολικό του

$$W^\circ = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |\xi_i| \leq 1\right\}.$$

Τα W και W° είναι συμμετρικά ως προς τα κύρια υπερεπίπεδα, οπότε αν ορίσουμε $W_+ = W \cap \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_+)$ και $W^\circ_+ = W^\circ \cap \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_+)$, έχουμε

$$|W| = 2^n |W_+| = 2^n$$

και

$$|W^\circ| = 2^n |W^\circ_+| = \frac{2^n}{n!}.$$

Αυτό σημαίνει ότι για να αποδείξουμε την ζητούμενη ανισότητα αρκεί να δείξουμε ότι
$$|K_+| \cdot |K_+^\circ| \geq |W_+| \cdot |W_+^\circ|.$$
Κάνουμε την αλλαγή συντεταγμένων $x = (\xi_i) \mapsto y = (\eta_i)$ όπου $\xi_i = e^{-\eta_i}$ και γράφουμε $C_1, C_2, \mathbb{R}_+^n, T$ για τις εικόνες των $K_+, K_+^\circ, W_+, W_+^\circ$ αντίστοιχα.
Επειδή τα K, K°, W, W° είναι κυρτά και συμμετρικά ως προς τα κύρια υπερεπίπεδα, εύκολα ελέγχουμε ότι για το $C = K_+, K_+^\circ, W_+, W_+^\circ$ ικανοποιείται η εξής:

> **Ιδιότητα (U):** Αν $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ είναι ένα σημείο του συνόλου C, τότε το $\alpha x = (\alpha_1\xi_1, \alpha_2\xi_2, \ldots, \alpha_n\xi_n)$ ανήκει στο C για κάθε $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in W_+$.

Αυτή η ιδιότητα μας βοηθάει επιπλέον να δείξουμε το εξής.

Λήμμα 2.3.1 *Ισχύουν οι ισότητες*
(α) $C_1 + \mathbb{R}_+^n = C_1$.
(β) $C_2 + \mathbb{R}_+^n = C_2$.
(γ) $T + \mathbb{R}_+^n = T$.

Απόδειξη: Για παράδειγμα θα δείξουμε το (α). Έστω $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in C_1$ και $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Τότε, έχουμε
$$\eta + \alpha = (\log(1/\xi_1) + \alpha_1, \ldots, \log(1/\xi_n) + \alpha_n)$$
όπου $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in K_+$, άρα $\xi_i > 0$. Ακόμη μπορούμε να γράψουμε $\alpha_i = \log\beta_i$ και $\beta_i > 1$ αφού $\alpha_i > 0$. Άρα,
$$\begin{aligned}\eta + \alpha &= (\log(1/\xi_1) + \log\beta_1, \ldots, \log(1/\xi_n) + log\beta_n) \\ &= \left(\log\frac{\beta_1}{\xi_1}, \ldots, \log\frac{\beta_n}{\xi_n}\right) \\ &= \left(-\log\frac{\xi_1}{\beta_1}, \ldots, -\log\frac{\xi_n}{\beta_n}\right).\end{aligned}$$
Τώρα, αφού $1/\beta_i < 1$ και $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in K_+$, έπεται ότι $(\xi_1/\beta_1, \ldots, \xi_n/\beta_n) \in K_+$ συνεπώς $\eta + \alpha \in C_1$. Αυτό αποδεικνύει την $C_1 + \mathbb{R}_+^n \subseteq C_1$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, παρατηρούμε ότι κάθε $\eta = (\log(1/\xi_1), \ldots, \log(1/\xi_n))$ γράφεται στη μορφή
$$\eta = (\log(1/r\xi_1) + \log r, \ldots, \log(1/r\xi_n) + \log r) \in C_1 + \mathbb{R}_+^n$$
αν επιλέξουμε το $r > 1$ αλλά πολύ κοντά στο 1 (τότε $\log r > 0$ και $(r\xi_1, \ldots, r\xi_n) \in K_+$ γιατί το $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ είναι εσωτερικό σημείο του K_+). $\square$

Λήμμα 2.3.2 *Τα σύνολα C_1, C_2, T είναι κυρτά. Επιπλέον, υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα*
$$C_1, C_2, T \subseteq \alpha + \mathbb{R}_+^n.$$

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι $\eta^1, \eta^2 \in C_1$ και $0 < t < 1$. Υπάρχουν $\xi^1, \xi^2 \in K_+$ τέτοια ώστε $\eta_i^j = -\log \xi_i^j$, $j = 1, 2$. Τότε,

$$t\eta_i^1 + (1-t)\eta_i^2 = -\log[(\xi_i^1)^t(\xi_i^2)^{1-t}]$$

και $([(\xi_i^1)^t(\xi_i^2)^{1-t}])_{i\leq n} \in K_+$ λόγω της συμμετρίας του K ως προς τα κύρια υπερεπίπεδα και της $(\xi_i^1)^t(\xi_i^2)^{1-t} \leq t\xi_i^1 + (1-t)\xi_1^2$. Άρα $t\eta^1 + (1-t)\eta^2 \in C_1$, και αυτό δείχνει ότι το C_1 είναι κυρτό.
Ακόμη, επειδή τα σώματα K, W είναι συμπαγή -άρα φραγμένα- μπορούμε να βρούμε ένα $b \in \mathbb{R}_+^n$ έτσι ώστε τα $K_+, K_+^\circ, W_+^\circ$ να περιέχονται στο $\{x : 0 < x_i < b_i\}$. Επομένως, οι εικόνες τους μέσω του μετασχηματισμού $\xi_i = e^{-\eta_i}$ περιέχονται στο $\alpha + \mathbb{R}_+^n$, όπου α η αντίστοιχη εικόνα του b. □

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} |K_+| &= \int_{K_+} dx = \int_{C_1} e^{-\langle y,\bar{e}\rangle} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle y,\bar{e}\rangle}\chi_{C_1}(y)dy \\ &= L(\chi_{C_1})(\bar{e}) \end{aligned}$$

όπου $\bar{e} = (1, \ldots, 1)$ και $L(f)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της f. Το παραπάνω ολοκλήρωμα ορίζεται καλά λόγω του Λήμματος 2.3.2.
Με όμοιο τρόπο βλέπουμε ότι

$$|K_+^\circ| = L(\chi_{C_2})(\bar{e})$$
$$|W_+| = L(\chi_{\mathbb{R}_+^n})(\bar{e})$$
$$|W_+^\circ| = L(\chi_T)(\bar{e})$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε την

$$L(\chi_{C_1})(\bar{e}) \cdot L(\chi_{C_2})(\bar{e}) \geq L(\chi_{\mathbb{R}_+^n})(\bar{e}) \cdot L(\chi_T)(\bar{e}). \tag{4}$$

Θα χρειαστούμε κάποιες απλές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace τις οποίες παραθέτουμε χωρίς απόδειξη:

Λήμμα 2.3.3 *Ο L είναι θετικός γραμμικός τελεστής: αν $f \leq g$, τότε για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$*

$$L(f)(y) \leq L(g)(y).$$

Επίσης, αν $f * g$ είναι η συνέλιξη των f και g τότε

$$L(f * g)(y) = L(f)(y) \cdot L(g)(y)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. □

Σύμφωνα με το Λήμμα 2.3.3, ζητάμε να δείξουμε ότι

$$(\chi_{C_1} * \chi_{C_2})(y) \geq (\chi_{\mathbb{R}^n_+} * \chi_T)(y) \tag{5}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Ερευνώντας κάθε μέλος της ανισότητας παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}(\chi_{C_1} * \chi_{C_2})(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{C_1}(y-z)\chi_{C_2}(z)dz \\ &= \int_{C_2} \chi_{C_1}(y-z)dz \\ &= |(y-C_1)\cap C_2|\end{aligned}$$

και με ακριβώς τον ίδιο τρόπο επαληθεύουμε ότι

$$(\chi_{\mathbb{R}^n_+} * \chi_T)(y) = |(y-\mathbb{R}^n_+)\cap T|.$$

Λήμμα 2.3.4 $T = C_1 + C_2$.

Απόδειξη: Έστω $y_1 \in C_1$ και $y_2 \in C_2$. Επειδή $C_1 = \mathrm{Im}(K_+)$ και $C_2 = \mathrm{Im}(K_+^\circ)$ μέσω του μετασχηματισμού $\xi_i = e^{-\eta_i}$, υπάρχουν $x_1 \in K_+$ και $x_2 \in K_+^\circ$ τέτοια ώστε $x_1 = e^{-y_1}$ και $x_2 = e^{-y_2}$.
Από τον ορισμό του πολικού σώματος έχουμε

$$\begin{aligned}1 &\geq \langle x_1, x_2\rangle = \sum_{i=1}^n e^{-(\eta_i^{(1)}+\eta_i^{(2)})} \\ &= \|e^{-(y_1+y_2)}\|_{W^\circ}\end{aligned}$$

όπου $e^{-y} = (e^{-\eta_1}, \ldots, e^{-\eta_n})$ και $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Αυτό σημαίνει ότι $e^{-(y_1+y_2)} \in W_+^\circ$ και από το γεγονός ότι $T = \mathrm{Im}(W_+^\circ)$ γίνεται φανερό ότι $y_1 + y_2 \in T$. Άρα, $C_1 + C_2 \subseteq T$.

Αντίστροφα, έστω $t = (t_1, \ldots, t_n) \in T$. Υπάρχει $s = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in W_+^\circ$ τέτοιο ώστε $s = e^{-t}$, και από τον ορισμό του W_+° έχουμε

$$0 < \|s\|_{W^\circ} = \sum_{i=1}^n \sigma_i \leq 1. \tag{6}$$

Η συνάρτηση

$$\psi(x) = \phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i \log\ \xi_i}{\sum_{j=1}^n \sigma_j}$$

είναι αυστηρά κοίλη στο K_+, άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 = (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}) = e^{-y_1} \in K_+$ (δηλαδή $y_1 \in C_1$) με

$$\phi(x_1) = \max\{\phi(x) : x \in K_+\} =: \mu.$$

Γεωμετρικά, από την οικογένεια των υπερεπιφανειών $\phi(x) = \alpha$ που φράσσουν τα κυρτά χωρία $\phi(x) \geq \alpha$ του $\mathrm{int}(\mathbb{R}^n_+)$, η $\phi(x) = \mu$ (δηλαδή αυτή που ορίζεται για $\alpha = \mu$) εφάπτεται στο K_+ σε ένα σημείο x_1 με την ιδιότητα $\phi(x_1) = \max\{\phi(x) : x \in K_+\} = \mu$.
Το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο της υπερεπιφάνειας $\{\phi(x) = \mu\}$ στο x_1 έχει εξίσωση

$$\sum_{i=1}^{n} \overbrace{\left[\frac{\sigma_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j\right) \xi_i^{(1)}}\right]}^{A_i} \xi_i = 1. \tag{7}$$

Επειδή το σημείο μεγίστου x_1 ανήκει στο σύνορο του K_+, το υπερεπίπεδο αυτό είναι και υπερεπίπεδο στήριξης του K_+, και ακόμη περισσότερο του K διότι οι συντελεστές A_i είναι θετικοί και το K είναι συμμετρικό ως προς κάθε υπερεπίπεδο συντεταγμένων. Από την (7) βλέπουμε ότι το σημείο $\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j}\left(\frac{\sigma_1}{\xi_1^{(1)}}, \ldots, \frac{\sigma_n}{\xi_n^{(1)}}\right)$ ανήκει στο K_+°, και από την (6) έπεται ότι το σημείο $x_2 = \left(\frac{\sigma_1}{\xi_1^{(1)}}, \ldots, \frac{\sigma_n}{\xi_n^{(1)}}\right) = e^{-y_2}$ ανήκει κι αυτό στο K_+°. Τότε όμως ισχύουν τα εξής:

$$x_1 = e^{-y_1} \in K_+ \text{ και } x_2 = e^{-y_2} \in K_+^\circ$$

και

$$y_2 = t - y_1, \quad y_1 \in C_1,\ y_2 \in C_2,$$

άρα

$$t = y_1 + y_2 \in C_1 + C_2.$$

Δηλαδή, $T \subseteq C_1 + C_2$. Αυτό αποδεικνύει την ισότητα $T = C_1 + C_2$. $\square$

Σύμφωνα με το Λήμμα 2.3.4, για την απόδειξη της (5) (και του Θεωρήματος) αρκεί να δείξουμε την εξής Πρόταση.

Πρόταση 2.3.1 *Αν C_1, C_2 όπως παραπάνω, για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$(\chi_{C_1} * \chi_{C_2})(y) \geq (\chi_{\mathbb{R}^n_+} * \chi_{C_1+C_2})(y).$$

Η απόδειξη της Πρότασης θα γίνει με επαγωγή ως προς τη διάσταση n.

Βήμα 1: Υποθέτουμε ότι $n = 1$. Από την $C_i + \mathbb{R}_+ = C_i$, υπάρχουν $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $C_1 = [\gamma_1, +\infty), C_2 = [\gamma_2, +\infty)$ και $C_1 + C_2 = [\gamma_1 + \gamma_2, +\infty)$. Τότε,

$$\begin{aligned}(\chi_{C_1} * \chi_{C_2})(y) &= |(y - C_1) \cap C_2| \\ &= |(-\infty, y - \gamma_1] \cap [\gamma_2, +\infty)| \\ &= (y - (\gamma_1 + \gamma_2))_+,\end{aligned}$$

όπου $\xi_+ = \max\{\xi, 0\}$ το θετικό μέρος του πραγματικού αριθμού $\xi \in \mathbb{R}$.

Εντελώς όμοια, για το $C_1 + C_2 = [\gamma_1 + \gamma_2, +\infty)$ έχουμε

$$\begin{aligned}(\chi_{\mathbb{R}_+} * \chi_{C_1+C_2})(y) &= |(y - \mathbb{R}_+) \cap (C_1 + C_2)| \\ &= |(-\infty, y] \cap [\gamma_1 + \gamma_2, +\infty)| \\ &= (y - (\gamma_1 + \gamma_2))_+ \,.\end{aligned}$$

Δηλαδή, για $n = 1$ η ανισότητα ισχύει πιο ισχυρά σαν ισότητα. □

Βήμα 2: Υποθέτουμε ότι η Πρόταση ισχύει για $n = k$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$. Για κάθε κυρτό σώμα L στον $\mathbb{R}^{k+1} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$, ορίζουμε

$$L(t) = \{y' \in \mathbb{R}^k : (y', t) \in L\}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}(\chi_{C_1} * \chi_{C_2})(y', \eta_{k+1}) &= \int_{\mathbb{R}} |[(y', \eta_{k+1}) - C_1](t) \cap C_2(t)| \; dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} |[y' - C_1(\eta_{k+1} - t)] \cap C_2(t)| \; dt,\end{aligned}$$

διότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

$$[(y', \eta_{k+1}) - C_1](t) = [y' - C_1(\eta_{k+1} - t)].$$

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, γράφουμε

$$\begin{aligned}(\chi_{C_1} * \chi_{C_2})(y', \eta_{k+1}) &= \int_{\mathbb{R}} |[y' - C_1(\eta_{k+1} - t)] \cap C_2(t)| \; dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\chi_{C_1(\eta_{k+1}-t)} * \chi_{C_2(t)}\right)(y') \; dt \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} \left(\chi_{\mathbb{R}^k_+} * \chi_{C_1(\eta_{k+1}-t)+C_2(t)}\right)(y') \; dt \\ &= \int_R \left[\int_{\mathbb{R}^k} \chi_{\mathbb{R}^k_+}(y' - z) \cdot \chi_{C_1(\eta_{k+1}-t)+C_2(t)}(z) \; dz\right] \; dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \left[\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{R}^k_+}(y' - z) \cdot \chi_{C_1(\eta_{k+1}-t)+C_2(t)}(z) \; dt\right] \; dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \chi_{\mathbb{R}^k_+}(y' - z) \left[\overbrace{\int_{\mathbb{R}} \chi_{C_1(\eta_{k+1}-t)+C_2(t)}(z) \; dt}^{H(z)}\right] \; dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \chi_{\mathbb{R}^k_+}(z) \cdot H(y' - z) \; dV_n(z) \\ &= \left(\chi_{\mathbb{R}^k_+} * \int_{\mathbb{R}} \chi_{C_1(\eta_{k+1}-t)+C_2(t)} \; dt\right)(y').\end{aligned}$$

Δηλαδή δείξαμε ότι

$$(8) \qquad (\chi_{C_1} * \chi_{C_2})(y', \eta_{k+1}) \geq \left(\chi_{\mathbb{R}^k_+} * \int_{\mathbb{R}} \chi_{C_1(\eta_{k+1}-t)+C_2(t)} \, dt\right)(y').$$

Όμοια μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$\begin{aligned}(\chi_{\mathbb{R}^{k+1}_+} * \chi_{C_1+C_2})(y', \eta_{k+1}) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\chi_{\mathbb{R}^{k+1}_+(\eta_{k+1}-t)} * X_{(C_1+C_2)(t)}\right)(y') \, dt \\ &= \left(\chi_{\mathbb{R}^k_+} * \int_{-\infty}^{\eta_{k+1}} X_{(C_1+C_2)(t)} \, dt\right)(y').\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$(9) \qquad (\chi_{\mathbb{R}^{k+1}_+} * \chi_{C_1+C_2})(y', \eta_{k+1}) = \left(\chi_{\mathbb{R}^k_+} * \int_{-\infty}^{\eta_{k+1}} X_{(C_1+C_2)(t)} \, dt\right)(y').$$

Από τις (8) και (9) φαίνεται ότι το επαγωγικό βήμα θα ολοκληρωθεί αν δείξουμε ότι

$$\left(\chi_{\mathbb{R}^k_+} * \int_{\mathbb{R}} \chi_{C_1(\eta_{k+1}-t)+C_2(t)} \, dt\right)(y') \geq \left(\chi_{\mathbb{R}^k_+} * \int_{-\infty}^{\eta_{k+1}} X_{(C_1+C_2)(t)} \, dt\right)(y')$$

για κάθε $y' \in \mathbb{R}^k$ και κάθε $\eta_{k+1} \in \mathbb{R}$. Τώρα από τον ορισμό της συνέλιξης δύο συναρτήσεων, αρκεί να δείξουμε:

$$(10) \qquad \int_{\mathbb{R}} \chi_{C_1(\eta_{k+1}-t)+C_2(t)}(y') \, dt \geq \int_{-\infty}^{\eta_{k+1}} X_{(C_1+C_2)(t)}(y') \, dt$$

για κάθε $y' \in \mathbb{R}^k$ και κάθε $\eta_{k+1} \in \mathbb{R}$. Αναλύοντας κάθε ολοκλήρωμα ξεχωριστά παρατηρούμε ότι:

(α) Για το αριστερό ολοκλήρωμα, παρατηρούμε ότι $y' \in C_1(\eta_{k+1} - t) + C_2(t)$ αν και μόνο αν $(z_2, t) \in [(y', \eta_{k+1}) - C_1] \cap C_2$, δηλαδή αν το $t \in \mathbb{R}$ είναι στοιχείο της προβολής $[\alpha_{k+1}, b_{k+1}]$ του συνόλου $[(y', \eta_{k+1}) - C_1] \cap C_2$ στην ευθεία που είναι κάθετη στα $e_1, \ldots, e_k$. Δηλαδή,

$$(11) \qquad \int_{\mathbb{R}} \chi_{C_1(\eta_{k+1}-t)+C_2(t)}(y') \, dt = b_{k+1} - \alpha_{k+1}.$$

(β) Για το δεξιό ολοκλήρωμα, παρατηρούμε ότι αν $y' \in (C_1 + C_2)(t)$ και $t \leq \eta_{k+1}$, τότε υπάρχει $(z_2, s) \in C_2$ τέτοιο ώστε $(y' - z_2, t - s) \in C_1$. Από τις $C_i + \mathbb{R}^k_+ = C_i$ και $t \leq \eta_{k+1}$ έπεται ότι $(y' - z_2, \eta_{k+1} - s) \in C_1$ και $(z_2, \eta_{k+1} - t + s) \in C_2$, άρα $(z_2, s) \in ((y', \eta_{k+1}) - C_1) \cap C_2$ και $(z_2, \eta_{k+1} - t + s) \in ((y', \eta_{k+1}) - C_1) \cap C_2$. Επομένως $\alpha_{k+1} \leq s \leq (\eta_{k+1} - t) + s \leq b_{k+1}$, δηλαδή

$$\eta_{k+1} - (b_{k+1} - \alpha_{k+1}) \leq t \leq \eta_{k+1}.$$

Τότε όμως το δεξιό ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int_{-\infty}^{\eta_{k+1}} X_{(C_1+C_2)(t)}(y') \, dt \leq \int_{\eta_{k+1}-(b_{k+1}-\alpha_{k+1})}^{\eta_{k+1}} dt = b_{k+1} - \alpha_{k+1}.$$

Δηλαδή αποδείξαμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\eta_{k+1}} X_{(C_1+C_2)(t)}(y')\ dt \leq b_{k+1} - \alpha_{k+1} \tag{12}$$

Από τις (11) και (12) προκύπτει η σχέση (10) που ήταν το τελικό μας ζητούμενο. Εδώ λοιπόν τελειώνει η απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1. □

Κεφάλαιο 3

Η αντίστροφη ανισότητα Santaló

Ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι αν η εικασία του Mahler είναι σωστή, τότε γιά κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\frac{c_1}{n} \leq \frac{4}{(n!)^{1/n}} \leq s(K) := (|K||K^\circ|)^{\frac{1}{n}} \leq |B_n|^{2/n} \leq \frac{c_2}{n}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Στην §3.2 θα δούμε ότι η ασθενέστερη αυτή μορφή της εικασίας είναι σωστή: η ποσότητα $s(K)$ είναι της τάξης του $1/n$ για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα (Bourgain-Milman, [BM]) *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\frac{c_1}{n} \leq (|K||K^\circ|)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{c_2}{n},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι δύο απόλυτες σταθερές.

Η απόδειξη του Θεωρήματος βασίζεται στην «ισομορφική συμμετρικοποίηση» και χρησιμοποιεί διάφορα εργαλεία της ασυμπτωτικής θεωρίας χώρων πεπερασμένης διάστασης (εντροπία, εκτιμήσεις όγκων, ανισότητα του Pisier) τα οποία παρουσιάζονται στην §3.1. Οι ίδιες ιδέες οδηγούν στην αντίστροφη ανισότητα Brunn-Minkowski, την οποία αποδεικνύουμε στην §3.3:

Θεώρημα (Milman, [Mi1]) *Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει $U_K \in SL_n$ τέτοιος ώστε: αν K_1, K_2 είναι συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ και $t > 0$, τότε*

$$|U_{K_1}(K_1) + tU_{K_2}(K_2)|^{1/n} \leq C\left(|K_1|^{1/n} + t|K_2|^{1/n}\right),$$

όπου $C > 0$ είναι μια αριθμητική σταθερά ανεξάρτητη της διάστασης του χώρου και των σωμάτων $K_i, i = 1, 2$.

3.1 Αριθμοί κάλυψης

Ορισμός Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα και έστω K η μοναδιαία του μπάλα. Θεωρούμε την ποσότητα

$$M_X = M_K = \int_{S^{n-1}} \|x\|_K \; d\sigma(x)$$

όπου σ το αναλλοίωτο ως προς τις στροφές μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1}. Επίσης ορίζουμε $M^*(X) = M_{X^*} = M_{K^\circ}$. Παρατηρήστε ότι

$$M^*(X) = \int_{S^{n-1}} \|x\|_{K^\circ} d\sigma(x) = \int_{S^{n-1}} \max_{y\in K} |\langle x, y\rangle| d\sigma(x) = w(K)/2.$$

Λήμμα 3.1.1 *Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,*

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K d\gamma_n(x) \simeq \sqrt{n} M_K. \tag{1}$$

Ισοδύναμα, $\ell(I : \ell_2^n \to X) \simeq \sqrt{n} M_K$.

Απόδειξη: Γράφουμε

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K d\gamma_n(x)) \\
&= \frac{n\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{S^{n-1}} \int_0^{+\infty} \|r\theta\|_K \; r^{n-1} \exp\left(-r^2/2\right) dr d\sigma(\theta) \\
&= \left[\frac{n\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^{+\infty} r^n \exp\left(-r^2/2\right) dr\right] \left[\int_{S^{n-1}} \|\theta\|_K \; d\sigma(\theta)\right] \\
&\simeq \sqrt{n} M_K.
\end{aligned}$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι

$$\ell(I : \ell_2^n \to X) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^2 d\gamma_n(x)\right)^{1/2} \simeq \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K d\gamma_n(x). \qquad \square$$

Από το Λήμμα 3.1.1 και το Θεώρημα 1.4.1 προκύπτει το εξής βασικό αποτέλεσμα (ανισότητα του Pisier [Pi2]).

Θεώρημα 3.1.1 *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ του K τέτοια ώστε*

$$M_{\tilde{K}} \cdot M_{\tilde{K}^\circ} \leq c \log[d(X_K, \ell_2^n) + 1]. \tag{2}$$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 1.4.1 υπάρχει $u:\ell_2^n\to X_K$ με την ιδιότητα

$$\ell(u)\ell((u^{-1})^*)\leq cn\log[d(X_K,\ell_2^n)+1].$$

Θέτουμε $\tilde{K}=u^{-1}(K)$. Τότε,

$$\begin{aligned} nM_{\tilde{K}}\cdot M_{\tilde{K}^\circ} &\simeq \ell(I:\ell_2^n\to X_{\tilde{K}})\cdot\ell(I:\ell_2^n\to X_{\tilde{K}^\circ})\\ &= \ell(u)\ell((u^{-1})^*)\\ &\leq cn\log[d(X_K,\ell_2^n)+1], \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται η (2). □

Λήμμα 3.1.2 *Αν a,b είναι οι μικρότεροι θετικοί αριθμοί για τους οποίους*

$$\frac{1}{b(K)}\|x\|_K\leq|x|\leq a\|x\|_K$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$, τότε $M_K\leq b(K)\leq c\sqrt{n}M_K$. Ειδικότερα, αν $M_K=1$ έχουμε $1\leq b(K)\leq c\sqrt{n}$.

Απόδειξη: Για την αριστερή ανισότητα παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{b(K)}\int_{S^{n-1}}\|x\|_Kd\sigma(x)\leq\int_{S^{n-1}}|x|d\sigma(x)=1,$$

δηλαδή $M_K\leq b(K)$.
Για τη δεξιά ανισότητα θα χρησιμοποιήσουμε τα εξής.
Ισχυρισμός 1. *Αν $x_1,\dots,x_n\in X$ και $k\leq n$, τότε*

$$\int_\Omega\|\sum_{i=1}^k g_i(\omega)x_i\|d\omega\leq\int_\Omega\|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)x_i\|d\omega.$$

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε την ανισότητα στην περίπτωση $n=k+1$. Γράφουμε

$$2\sum_{i=1}^k g_i(\omega)x_i=\left(\sum_{i=1}^k g_i(\omega)x_i+g_{k+1}(\omega)x_{k+1}\right)+\left(\sum_{i=1}^k g_i(\omega)x_i-g_{k+1}(\omega)x_{k+1}\right)$$

και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα,

$$\begin{aligned} 2\int_\Omega\left\|\sum_{i=1}^k g_i(\omega)x_i\right\|d\omega &\leq \int_\Omega\left\|\sum_{i=1}^{k+1} g_i(\omega)x_i\right\|d\omega\\ &\quad+\int_\Omega\left\|\left(\sum_{i=1}^k g_i(\omega)x_i-g_{k+1}(\omega)x_{k+1}\right)\right\|d\omega\\ &= 2\int_\Omega\left\|\sum_{i=1}^{k+1} g_i(\omega)x_i\right\|d\omega \end{aligned}$$

διότι από την συμμετρία της g_{k+1} οι τυχαίες μεταβλητές

$$\sum_{i=1}^{k} g_i(\omega)x_i + g_{k+1}(\omega)x_{k+1}$$

και

$$\sum_{i=1}^{k} g_i(\omega)x_i - g_{k+1}(\omega)x_{k+1}$$

έχουν την ίδια κατανομή. □

Ισχυρισμός 2. *Αν $k \leq n$ και τα $x_1, \dots, x_k$ είναι ορθοκανονικά, τότε*

$$\int_\Omega \| \sum_{i=1}^{k} g_i(\omega)x_i \| d\omega \simeq \sqrt{k}\ M\left(K \cap \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_k\}\right).$$

Απόδειξη: Άμεση από το Λήμμα 3.1.1. □

Από τους δύο ισχυρισμούς έπεται ότι για κάθε k-διάστατο υπόχωρο F του $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\sqrt{k}\ M(K \cap F) \leq c\sqrt{n}\ M_K.$$

Ειδικότερα για $k = 1$ βλέπουμε ότι για κάθε $x \in S^{n-1}$ ισχύει $\|x\| \leq c\sqrt{n}M_K$, δηλαδή

$$b(K) = \max\{\|x\| : x \in S^{n-1}\} \leq c\sqrt{n}M_K. \quad \square$$

Ορισμός Έστω K_1, K_2 κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Ο αριθμός κάλυψης του K_1 από το K_2 είναι ο

$$N(K_1, K_2) = \min\left\{N \in \mathbb{N} : \exists x_1 \dots x_N \in K_1 \text{ τ.ω } K_1 \subset \bigcup_{i=1}^{N}(x_i + K_2)\right\}.$$

Ορίζουμε επίσης

$$\tilde{N}(K_1, K_2) = \min\left\{N \in \mathbb{N} : \exists x_1 \dots x_N \in \mathbb{R}^n \text{ τ.ω } K_1 \subset \bigcup_{i=1}^{N}(x_i + K_2)\right\}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\tilde{N}(K_1, K_2) \leq N(K_1, K_2).$$

Θεώρημα 3.1.2 *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $t > 0$ ισχύουν οι ανισότητες*

$$N(B_n, tK) \leq exp\left(cn(\frac{M_K}{t})^2\right) \tag{3}$$

και

$$N(K, tB_n) \leq exp\left(cn(\frac{M_{K^\circ}}{t})^2\right). \tag{4}$$

Η δεύτερη ανισότητα είναι γνωστή ως ανισότητα του Sudakov και η πρώτη είναι η δυϊκή της. Η ποσότητα c είναι μια θετική απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη της (3): [LT] Θεωρούμε μία μεγιστική επιλογή σημείων $x_1, \dots, x_N \in B_n$ τ.ω $\|x_i - x_j\|_K \geq t$ για κάθε $i, j = 1, \dots, N$ με $i \neq j$. Τότε τα σύνολα $x_i + \frac{t}{2}K$ έχουν ξένα εσωτερικά. Έπεται ότι για κάθε $b > 0$ τα $\left\{bx_i + \frac{bt}{2}K\right\}_{i=1}^N$ έχουν επίσης ξένα εσωτερικά. Για το μέτρο του Gauss γ_n παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
N \cdot \min\left\{\gamma_n\left(bx_i + \frac{bt}{2}K\right) : 1 \leq i \leq N\right\} &\leq \sum_{i=1}^N \gamma_n\left(bx_i + \frac{bt}{2}K\right) \\
&= \gamma_n\left(\bigcup_{i=1}^N (bx_i + \frac{bt}{2}K)\right) \\
&\leq 1.
\end{aligned}
$$

Σκοπός μας είναι να συγκρίνουμε το $\gamma_n\left(bx_i + \frac{bt}{2}K\right)$ με το $\gamma_n\left(\frac{bt}{2}K\right)$ ώστε η παραπάνω ανισότητα να αποδευσμευτεί από τα x_i. Για το λόγο αυτό θα αποδείξουμε την εξής ιδιότητα του γ_n.

Λήμμα 3.1.3 *Αν A είναι συμμετρικό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $y \in \mathbb{R}^n$, τότε*

$$\gamma_n(y + A) \geq \exp(-|y|^2/2)\ \gamma_n(A).$$

Απόδειξη: Γράφουμε

$$
\begin{aligned}
\gamma_n(y + A) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{y+A} \exp(-|x|^2/2)\ dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_A \exp(-|y + z|^2/2)\ dz \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_A \exp(-|y - z|^2/2)\ dz \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_A \frac{\exp(-|y + z|^2/2) + \exp(-|y - z|^2/2)}{2}\ dz,
\end{aligned}
$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η συμμετρία του A. Η $x \mapsto \exp(-x)$ είναι κυρτή, άρα

$$
\begin{aligned}
\gamma_n(y + A) &\geq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_A \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{|y + z|^2}{2} + \frac{|y - z|^2}{2}\right)\right]\ dz \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_A \exp(-|y|^2/2) \cdot \exp(-|z|^2/2)\ dz \\
&= \exp(-|y|^2/2)\ \gamma_n(A). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Αφού όλα τα x_i ανήκουν στην B_n έχουμε $|x_i| \leq 1$, άρα για κάθε $i = 1, \dots, N$

$$
\begin{aligned}
\gamma_n\left(bx_i + \frac{bt}{2}K\right) &\geq \exp\left(-\frac{|bx_i|^2}{2}\right)\gamma_n\left(\frac{bt}{2}K\right) \\
&\geq \exp\left(-\frac{b^2}{2}\right)\gamma_n\left(\frac{bt}{2}K\right).
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$N \exp\left(-\frac{b^2}{2}\right) \gamma_n \left(\frac{bt}{2}K\right) \leq 1 \tag{5}$$

για κάθε $b > 0$.
Επόμενος σκοπός μας είναι να επιλέξουμε το μικρότερο δυνατό $b > 0$ έτσι ώστε $\gamma_n\left(\frac{bt}{2}K\right) \geq \frac{1}{2}$. Από την ανισότητα του Markov και τον ορισμό του I προκύπτει ότι

$$\gamma_n\left(\{x : \|x\|_K > \frac{bt}{2}\}\right) \leq \frac{2I}{bt}.$$

Εμείς θέλουμε το μικρότερο $b > 0$ για το οποίο

$$\gamma_n\left(\{x : \|x\|_K > \frac{bt}{2}\}\right) < \frac{1}{2}$$

διότι τότε

$$\gamma_n\left(\frac{bt}{2}K\right) = \gamma_n\left(\{x : \|x\|_K \leq \frac{bt}{2}\}\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Αρκεί λοιπόν να επιλέξουμε $b = \frac{4I}{t}$, και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.1.1 έχουμε

$$b := \frac{4I}{t} \simeq \frac{\sqrt{n}M_K}{t}.$$

Τέλος, από την (5) βλέπουμε ότι

$$N \leq 2\exp\left(\frac{b^2}{2}\right) \leq 2\exp\left(cn(\frac{M_K}{t})^2\right).$$

Από την (μεγιστική ως προς την $\|x_i - x_j\|_K \geq t$) επιλογή των x_i έχουμε

$$B_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} (x_i + tK),$$

δηλαδή αποδείξαμε ότι

$$N(B_n, tK) \leq \exp\left(cn(\frac{M_K}{t})^2\right). \qquad \square$$

Παρατήρηση. Η (3) είναι ισοδύναμη με την

$$A_K = \sup\{t\sqrt{\log N(B_n, tK)} : t > 0\} \leq c\sqrt{n}M_K.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} N(B_n, tK) \leq exp\left(cn(\frac{M_K}{t})^2\right) \quad &\Rightarrow \quad t^2 \log N(B_n, tK) \leq cn(\frac{M_K}{t})^2 \\ &\Rightarrow \quad t\sqrt{\log N(B_n, tK)} \leq c\sqrt{n}M_K \end{aligned}$$

για κάθε $t > 0$, άρα $A_K \leq c\sqrt{n}M_K$. Ο αντίστροφος ισχυρισμός αποδεικνύεται ανάλογα. Αν λοιπόν ορίσουμε

$$B_K = \sup\{t\sqrt{\log N(K, tB_n)} : t > 0\}$$

τότε, λόγω δυϊσμού, για την απόδειξη της (4) αρκεί να αποδείξουμε την εξής Πρόταση.

Πρόταση 3.1.1 [T] *Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,*

$$B_{K^\circ} \leq c_1 A_K$$

όπου c_1 απόλυτη θετική σταθερά.

Απόδειξη της Πρότασης 3.1.1: Παρατηρούμε πρώτα ότι για κάθε $t > 0$

$$2K \cap \left(\frac{t^2}{2}K^\circ\right) \subseteq tB_n.$$

Πράγματι, αν $x \in 2K \cap \left(\frac{t^2}{2}K^\circ\right)$, τότε $\|x\|_K \leq 2$ και $\|x\|_{K^\circ} \leq \frac{t^2}{2}$. Άρα,

$$|x|^2 = \langle x, x\rangle \leq \|x\|_K\|x\|_{K^\circ} \leq 2\frac{t^2}{2} = t^2,$$

δηλαδή $x \in tB_n$.
Από τον ορισμό των αριθμών κάλυψης, αν $P \subseteq L$ τότε $N(K, L) \leq N(K, P)$. Επομένως,

$$N(K, tB_n) \leq N\left(K, 2K \cap (t^2/2)K^\circ\right).$$

Ισχυρισμός *Για κάθε $t > 0$,*

$$N\left(K, 2K \cap (t^2/2)K^\circ\right) \leq N(K, \frac{t^2}{2}K^\circ).$$

Απόδειξη: Έστω $x_1, \ldots, x_N \in K$ τ.ω $K \subseteq \bigcup_{i=1}^N \left(x_i + \frac{t^2}{2}K^\circ\right)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $K \subseteq \bigcup_{i=1}^N \left(x_i + \frac{t^2}{2}K^\circ \cap 2K\right)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} y \in K \quad &\Rightarrow \quad y \in \bigcup_{i=1}^N \left(x_i + \frac{t^2}{2}K^\circ\right) \\ &\Rightarrow \quad \exists i \in \{1, \ldots, N\} : y - x_i \in \frac{t^2}{2}K^\circ \end{aligned}$$

Επιπλέον έχουμε $y \in K$ και $x_i \in K \Rightarrow -x_i \in K$ λόγω συμμετρίας του K, οπότε $y - x_i \in 2K$ για κάποιο $i \in \{1, \ldots, N\}$. Όμως τότε $y \in x_i + \frac{t^2}{2}K^\circ \cap 2K$ για κάποιο $i \in \{1, \ldots, N\}$, δηλαδή το ζητούμενο. □

Αν K, V, W συμμετρικά κυρτά σώματα, τότε για κάθε $r, s > 0$ ισχύει:

$$N(K, rsW) \leq N(K, rV) \cdot N(V, sW).$$

Σε συνδυασμό με τον ισχυρισμό προκύπτει ότι αν εισάγουμε μία βοηθητική μεταβλητή s τότε

$$\begin{aligned} N(K, tB_n) &\leq N\left(K, 2K \cap (t^2/2)K^\circ\right) \\ &\leq N(K, \frac{t^2}{2}K^\circ) \\ &\leq N(K, sB_n) \cdot N(B_n, \frac{t^2}{2s}K^\circ) \end{aligned}$$

Επιλέγοντας $s = 2t$ παίρνουμε

$$N(K, tB_n) \leq N(K, 2tB_n) \cdot N(B_n, \frac{t}{4}K^\circ),$$

άρα

$$t^2 \log N(K, tB_n) \leq \frac{(2t)^2}{4} \log N(K, 2tB_n) + 16\left(\frac{t}{4}\right)^2 \log N(B_n, \frac{t}{4}K^\circ).$$

Τώρα αν πάρουμε supremum ως προς $t > 0$ έχουμε

$$B_K^2 \leq \frac{B_K^2}{4} + 16A_{K^\circ}^2 \Rightarrow B_K \leq \sqrt{64/3}A_{K^\circ}.$$

Όμως $A_K \leq c\sqrt{n}M_K$ οπότε βάζοντας όπου K το K° έχουμε

$$B_K \leq cA_{K^\circ} \leq c\sqrt{n}M_{K^\circ}$$

δηλαδή,

$$N(K, tB_n) \leq \exp\left(cn(\frac{M_{K^\circ}}{t})^2\right)$$

από τον ορισμό του B_K. □

Λήμμα 3.1.4 *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $s > 0$*

$$|K| \leq N(K, sB_n) \cdot |K \cap sB_n|. \tag{6}$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό του αριθμού κάλυψης $N = N(K, sB_n)$ υπάρχουν $x_1 \dots x_N \in K$ τέτοια ώστε $K \subset \cup_{i=1}^N (x_i + sB_n)$, δηλαδή

$$K = \bigcup_{i=1}^N [(x_i + sB_n) \cap K].$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = |(x+sB_n)\cap K|^{1/n}$. Η f είναι άρτια και κοίλη στον φορέα της (δηλαδή στο $K-K$), άρα $\|f\|_\infty = f(0)$. Έπεται ότι

$$|(x_i+sB_n)\cap K| \le |sB_n\cap K|, \quad i=1,\dots,N.$$

Αθροίζοντας ως προς $i=1,\dots,N$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} |K| &= \left|[\bigcup_{i=1}^{N}(x_i+sB_n)\cap K]\right| \\ &\le \sum_{i=1}^{N}|(x_i+sB_n)\cap K| \\ &\le N(K,sB_n)\cdot|K\cap sB_n|. \quad \square \end{aligned}$$

Λήμμα 3.1.5 *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $B_n\subseteq bK$ για κάποιο $b\ge 1$. Τότε, για κάθε $s\ge 1$*

$$\left|\mathrm{conv}\left(K\cup\frac{1}{s}B_n\right)\right| \le 2enb\,\tilde{N}(B_n,sK)|K|.$$

Απόδειξη: Είναι φανερό ότι $N=\tilde{N}(B_n,sK)=\tilde{N}((1/s)B_n,K)$. Επιπλέον, από τον ορισμό του N υπάρχουν $x_1,\dots,x_N\in\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{s}B_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{N}(x_i+K). \tag{7}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(x_i+K)\cap\frac{1}{s}B_n\neq\emptyset$, οπότε $x_i\in\frac{1}{s}B_n+K$ και από την $B_n\subseteq bK$ έπεται ότι $x_i\in\left(1+\frac{b}{s}\right)K$ για κάθε $i=1,\dots,N$.
Αν $0\le\alpha\le 1$ και $\alpha+\beta=1$, τότε

$$\begin{aligned} \alpha\left(\frac{1}{s}B_n\right)+\beta K &\subseteq \bigcup_{i=1}^{N}(\alpha x_i+\alpha K)+\beta K \subseteq \\ &= \bigcup_{i=1}^{N}(\alpha x_i+(\alpha+\beta)K) \\ &= \bigcup_{i=1}^{N}(\alpha x_i+K). \end{aligned}$$

Από τον ορισμό της κυρτής θήκης έχουμε ότι:

$$\mathrm{conv}\left(\frac{1}{s}B_n\cup K\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N}\bigcup_{0\le\alpha\le 1}(\alpha x_i+K). \tag{8}$$

Θεωρούμε $[bT]$ στο πλήθος αριθμούς α_j, οι οποίοι είναι ισοκατανεμημένοι στο διάστημα $[0,1]$ με $T=2n$ και $j=1,\dots,[bT]$. Από την σχέση (8) προκύπτει ότι: για κάθε $z \in \operatorname{conv}\left(\frac{1}{s}B_n \cup K\right)$ υπάρχει α_j τ.ω $|\alpha - \alpha_j| \leq \frac{1}{bT}$ (όπου $\frac{1}{bT}$ είναι το πλάτος της διαμέρισης) και επιπλέον

$$\begin{aligned} z \in \alpha x_i + K &= (\alpha - \alpha_j)x_i + \alpha_j x_i + K \\ &\Rightarrow z \in \alpha_j x_i + \left(\frac{1+\frac{b}{s}}{bT} + 1\right) K. \end{aligned}$$

Όμως

$$\frac{1+\frac{b}{s}}{bT} = \frac{s+b}{sbT} = \frac{s+b}{2nsb} < \frac{1}{n}$$

διότι $b \geq 1$ και $\frac{s+b}{2} < sb$, άρα

$$z \in \alpha_j x_i + \left(1 + \frac{1}{n}\right) K.$$

Επιστρέφοντας στην (8) βλέπουμε ότι

$$\operatorname{conv}\left(\frac{1}{s}B_n \cup K\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{j=1}^{[bT]} \left\{\alpha_j x_i + \left(1 + \frac{1}{n}\right) K\right\}.$$

Επειδή ο όγκος παραμένει αναλλοίωτος από τις μεταφορές και είναι υποπροσθετικός έχουμε:

$$\begin{aligned} \left|\operatorname{conv}\left(\frac{1}{s}B_n \cup K\right)\right| &\leq NbT\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n |K| \\ &\leq NbTe|K| \\ &= 2nbe\tilde{N}(B_n, sK)|K|, \end{aligned}$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Στο επόμενο λήμμα παραθέτουμε χωρίς απόδειξη επιπλέον απλές ιδιότητες του πολικού ενός συμμετρικού,κυρτού σώματος.

Λήμμα 3.1.6 *Έστω A και B συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*
(α) $[\operatorname{conv}(A \cup B)]^\circ = A^\circ \cap B^\circ$
(β) $(A \cap B)^\circ = \operatorname{conv}(A^\circ \cup B^\circ)$. □

Λήμμα 3.1.7 *Έστω D, K, P συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} |\{(x + D) \cap K\} + P| = |(D \cap K) + P|.$$

Δηλαδή το maximum πιάνεται για $x = 0$.

Απόδειξη: Θέτουμε $T_x = \{(x+D)\cap K\} + P$. Από την συμμετρία των D, K, P έπεται ότι $T_{-x} = T_x$ άρα $|T_{-x}| = |T_x|$. Ακόμη, λόγω κυρτότητας έχουμε:

$$\frac{T_{-x}+T_x}{2} = \frac{(x+D)\cap K + (-x+D)\cap K}{2} + P \subseteq (K\cap D) + P = T_0.$$

Από την ανισότητα Brunn-Minkowski προκύπτει ότι

$$|T_x| \le \left|\frac{T_x + T_{-x}}{2}\right| \le |T_0|$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. □

Λήμμα 3.1.8 *Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα P στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$|K+P| \le N(K, sB_n)\cdot |(sB_n\cap K) + P|.$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό του $N = N(K, sB_n)$ έχουμε: για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα $P \subseteq \mathbb{R}^n$, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_N \in K$ τ.ω $K \subseteq \cup_{i=1}^N[(x_i + sB_n)\cap P]$. Άρα,

$$K + P \subseteq \cup_{i=1}^N[\{(x_i + sB_n)\cap K\} + P].$$

Από το Λήμμα 3.1.7 έπεται ότι

$$\begin{aligned} |K+P| &\le N(K, sB_n)\ |\{(x_i + sB_n)\cap K\} + P| \\ &\le N(K, sB_n)\ |(sB_n\cap K) + P|. \quad \square \end{aligned}$$

Λήμμα 3.1.9 *Έστω K, L συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ και $L \subseteq bK$ για κάποιο $b \ge 1$. Τότε,*

$$\tilde{N}\left(\mathrm{conv}(K\cup L), (1+1/n)K\right) \le 2bn\tilde{N}(L, K).$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό του $N = \tilde{N}(L, K)$, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $L \subseteq \bigcup_{i=1}^N (x_i + K)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $L\cap(x_i + K) \neq \emptyset$, άρα $x_i \in L + K \subseteq (b+1)K$.
Αν $0 \le \alpha \le 1$ και $\alpha + \beta = 1$, τότε

$$\begin{aligned} \alpha L + \beta K &\subseteq \bigcup_{i=1}^N (\alpha x_i + \alpha K) + \beta K \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^N \left(\alpha x_i + (\alpha+\beta)K\right) \\ &= \bigcup_{i=1}^N (\alpha x_i + K), \end{aligned}$$

άρα

$$\mathrm{conv}\,(L\cup K) \subseteq \bigcup_{i=1}^N \bigcup_{0\le\alpha\le 1} (\alpha x_i + K).$$

Θεωρούμε τους αριθμούς $\alpha_j = \frac{j}{2bn}, j = 1, \ldots, [2bn]$ ισοκατανεμημένους στο $[0,1]$. Για κάθε $z \in \mathrm{conv}\,(L \cup K)$ υπάρχει α_j τ.ω. $|\alpha - \alpha_j| \leq \frac{1}{2nb}$ (όπου $\frac{1}{2nb}$ είναι το πλάτος της διαμέρισης). Εύκολα ελέγχουμε ότι $z \in \alpha_j x_i + \left(\frac{b+1}{2bn} + 1\right) K$, συνεπώς

$$\begin{aligned} \mathrm{conv}\,(L \cup K) &\subseteq \bigcup_{j=1}^{[2bn]} \bigcup_{i=1}^{N} \left(\alpha_j x_i + \left(\frac{b+1}{2bn} + 1 \right) K \right) \\ &\subseteq \bigcup_{j=1}^{[2bn]} \bigcup_{i=1}^{N} \left(\alpha_j x_i + \left(\frac{1}{n} + 1 \right) K \right), \end{aligned}$$

διότι $\frac{b+1}{2b} \leq 1$.Τελος, από τον ορισμό του αριθμού κάλυψης έχουμε:

$$\tilde{N}\left(\mathrm{conv}(K \cup L), (1 + 1/n)K\right) \leq 2bn\tilde{N}(L, K). \quad \square$$

Λήμμα 3.1.10 *Έστω ότι $B_n \subseteq sbK$ για κάποιους $s, b \geq 1$. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα P στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι*

$$\left|\mathrm{conv}\left(K \cup \frac{1}{s} B_n\right) + P\right| \leq 2ebn\tilde{N}(B_n, sK) \cdot |K + P|.$$

Απόδειξη: Από το Λήμμα 3.1.9 με $L = \frac{1}{s} B_n$ έχουμε

$$\mathrm{conv}\left(K \cup \frac{1}{s} B_n\right) + P \subseteq \bigcup_{j=1}^{[2bn]} \bigcup_{i=1}^{N} (\alpha_j x_i + (1 + 1/n)K) + P$$

άρα

$$\begin{aligned} \left|\mathrm{conv}\left(K \cup \frac{1}{s} B_n\right) + P\right| &\leq 2bnN \cdot |(1 + 1/n)(K + P)| \\ &= 2bn\tilde{N}(B_n, sK) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n |K + P| \\ &\leq 2bne\tilde{N}(B_n, sK) \cdot |K + P|. \quad \square \end{aligned}$$

3.2 Ισομορφική συμμετρικοποίηση και η αντίστροφη ανισότητα Santaló

Στην παράγραφο αυτή αποδεικνύουμε την αντίστροφη ανισότητα Santaló.

Θεώρημα 3.2.1 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τ.ω για κάθε $n \in N$ και για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ να ισχύει:*

$$s(K) \geq cs(B_n).$$

Απόδειξη: [Mi2] Αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα, ορίζουμε $d_X := d(X, \ell_2^n)$. Ξεκινάμε με ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Από το Θεώρημα 3.1.1 γνωρίζουμε ότι υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $T \in SL_n$ τέτοιος ώστε το κυρτό σώμα $\tilde{K} = T(K)$ που θα προκύψει να έχει τις επιπλέον ιδιότητες $M_{\tilde{K}} = 1$ και $M_{\tilde{K}^\circ} \leq c\log(d_{X_K}+1)$. Αφού $s(K) = s(\tilde{K})$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K ικανοποιεί τις δύο αυτές ανισότητες. Από το Λήμμα 3.1.2 και το γεγονός ότι $M_K = 1$ προκύπτει ότι
$$1 \leq b(K) \leq c\sqrt{n}.$$
Αυτό που θα κάνουμε είναι να αντικαταστήσουμε το K με ένα καινούργιο σώμα K_1 που θα έχει τον ίδιο περίπου όγκο με το K και η απόσταση Banach-Mazur $d_{X_{K_1}}$ θα είναι «πολύ μικρότερη» από την d_{X_K}. Επίσης, θα έχουμε εξίσου καλό έλεγχο για τον όγκο του K_1°, άρα οι ποσότητες $s(K_1)$ και $s(K)$ θα είναι συγκρίσιμες. Η διαδικασία αυτή λέγεται «ισομορφική συμμετρικοποίηση».
Για δοθέν $\alpha > 1$ (το οποίο θα επιλέξουμε αργότερα) θεωρούμε τους αριθμούς
$$\lambda^{up} = M_{K^\circ}\alpha \text{ και } \lambda^{down} = M_K\alpha = \alpha$$
και ορίζουμε
$$K_1 = \text{conv}\left[(K \cap \lambda^{up}B_n) \cup \frac{1}{\lambda^{down}}B_n\right].$$

Ισχυρισμός 1 Ισχύει η ανισότητα
$$|K_1| \geq |K| \exp\left(-\frac{cn}{\alpha^2}\right).$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό του K_1 και το Λήμμα 3.1.4,
$$|K_1| \geq |K \cap \lambda^{up}B_n| \geq \frac{|K|}{N(K, \lambda^{up}B_n)}.$$
Χρησιμοποιώντας και την ανισότητα του Sudakov, παίρνουμε
$$|K_1| \geq |K| \cdot exp\left(-cn\left(\frac{M_{K^\circ}}{\lambda^{up}}\right)^2\right) = |K| \cdot \exp\left(-\frac{cn}{\alpha^2}\right). \quad \square$$

Ισχυρισμός 2 Ισχύει η ανισότητα
$$|K_1| \leq |K| \exp\left(\frac{cn}{\alpha^2}\right).$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό του K_1, το Λήμμα 3.1.5 (παρατηρήστε ότι $\lambda^{down} = \alpha > 1$) και την δυϊκή ανισότητα του Sudakov,
$$|K_1| \quad \leq \quad \left|\left[\text{conv}\left(K \cup \frac{1}{\lambda^{down}}B_n\right)\right]\right.$$

$$\begin{aligned} &= \left| \left[conv \left(K \cup \frac{1}{\alpha} B_n \right) \right] \right| \\ &\leq 2enb(K) N(B_n, \alpha K) \cdot |K| \\ &\leq 2enb(K)|K| \cdot \exp\left(cn \left(\frac{M_K}{\alpha} \right)^2 \right) \\ &= 2enb(K)|K| \cdot \exp\left(\frac{cn}{\alpha^2} \right). \end{aligned}$$

Ουσιαστικά μπορούμε να ενσωματώσουμε τον όρο $2enb(K)$ στην σταθερά c του εκθετικού όρου, διότι στην αναδρομική κατασκευή που θα ακολουθήσουμε θα επιλέγουμε κάθε φορά το α με τέτοιο τρόπο ώστε

$$\alpha \leq c \log n,$$

οπότε

$$2enb(K) < \exp\left(\frac{c' n}{\alpha^2} \right)$$

αφού για το $b(K)$ ισχύει $1 \leq b(K) \leq c\sqrt{n}$. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε:

$$|K_1| \leq |K| \cdot \exp\left(\frac{cn}{\alpha^2} \right). \quad \square$$

Συνδυάζοντας τους δύο ισχυρισμούς παίρνουμε

$$\exp\left(-\frac{cn}{\alpha^2} \right) \leq \frac{|K|}{|K_1|} \leq exp\left(\frac{cn}{\alpha^2} \right) \tag{1}$$

Από το Λήμμα 3.1.6, το πολικό K_1° του K_1 είναι το σύνολο

$$K_1^\circ = \text{conv}\left(K^\circ \cup \left(\frac{1}{\lambda^{up}} B_n \right) \right) \cap \lambda^{down} B_n.$$

Ισχυρισμός 3 Ισχύουν οι ανισότητες

$$\exp\left(-\frac{cn}{\alpha^2} \right) \leq \frac{|K^\circ|}{|K_1^\circ|} \leq \exp\left(\frac{cn}{\alpha^2} \right). \tag{2}$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό του K_1° και το Λήμμα 3.1.4,

$$|K_1^\circ| \geq |K^\circ \cap \lambda^{down} B_n| \geq \frac{|K^\circ|}{N(K^\circ, \lambda^{down} B_n)}.$$

Χρησιμοποιώντας και την ανισότητα του Sudakov, παίρνουμε

$$|K_1^\circ| \geq |K^\circ| \cdot exp\left(-cn \left(\frac{M_K}{\lambda^{down}} \right)^2 \right) = |K^\circ| \cdot \exp\left(-\frac{cn}{\alpha^2} \right).$$

Πάλι από τον ορισμό του K_1°, το Λήμμα 3.1.5 (παρατηρήστε ότι $\lambda^{up} = M_K M_{K^\circ} \alpha > 1$) και την δυϊκή ανισότητα του Sudakov,

$$\begin{aligned}
|K_1^\circ| &\leq \left| \left[\mathrm{conv} \left(K^\circ \cup \frac{1}{\lambda^{up}} B_n \right) \right] \right| \\
&\leq 2enb(K^\circ) N(B_n, \lambda^{up} K^\circ) \cdot |K^\circ| \\
&\leq 2enb(K^\circ) |K^\circ| \cdot \exp \left(cn \left(\frac{M_{K^\circ}}{\lambda^{up}} \right)^2 \right) \\
&= 2enb(K^\circ) |K^\circ| \cdot \exp \left(\frac{cn}{\alpha^2} \right).
\end{aligned}$$

Όπως πριν, μπορούμε να ενσωματώσουμε τον όρο $2enb(K^\circ)$ στην σταθερά c του εκθετικού όρου, δηλαδή

$$|K_1^\circ| \leq |K^\circ| \cdot \exp \left(\frac{cn}{\alpha^2} \right). \quad \square$$

Με την αντικατάσταση του K από το K_1 αυτό που καταφέρνουμε είναι να βελτιώσουμε την απόσταση $d_{X_{K_1}}$: Επειδή $\alpha > 1$, έπεται ότι

$$1 \leq M_K M_{K^\circ} \alpha^2 = \lambda^{up} \lambda^{down} \Rightarrow \frac{1}{\lambda^{down}} \leq \lambda^{up},$$

οπότε από τον ορισμό του K_1 προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{\lambda^{down}} B_n \subseteq K_1 \subseteq \lambda^{up} B_n.$$

Άρα,

$$d_{X_{K_1}} \leq \lambda^{up} \lambda^{down} = M_K M_{K^\circ} \alpha^2 \preceq \alpha^2 \log(d_{X_K} + 1).$$

Σύμφωνα όμως με το θεώρημα του John, για κάθε n-διάστατο χώρο X έχουμε

$$d_X \leq \sqrt{n} \Rightarrow \log d_X \leq c \log n.$$

Αν λοιπόν επιλέξουμε $\alpha \simeq \log n$, τότε

$$d_{X_{K_1}} \leq c (\log n)^3 \tag{3}$$

ενώ παράλληλα,

$$\exp \left(-\frac{c}{\alpha^2} \right) \leq \frac{s(K)}{s(K_1)} \leq \exp \left(\frac{c}{\alpha^2} \right). \tag{4}$$

Είμαστε πλέον έτοιμοι να περιγράψουμε την αναδρομική διαδικασία.

Αναδρομική διαδικασία.

Θεωρούμε την ακολουθία α_j με $\alpha_1 = \log n, \alpha_2 = \log(\log n) = \log^{(2)} n, \dots, \alpha_t = \log^{(t)} n$ όπου t είναι ο μικρότερος φυσικός με την ιδιότητα:

$$\alpha_t = \log^{(t)} n < 2.$$

1ο Βήμα: Ξεκινώ με τυχόν συμμετρικό κυρτό σώμα $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Όπως εξηγήσαμε, μέσω κατάλληλου γραμμικού μετασχηματισμού μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M_K = 1$ και $M_{K^\circ} \preceq \log(d_{X_K}+1)$ (σε όλη την διαδικασία, $\preceq$ σημαίνει $\leq c\cdots$ όπου c απόλυτη σταθερά που μπορεί να επιλεγεί τελικά).
Για το $\alpha_1 = \log n$ παίρνουμε

$$\lambda_1^{up} = M_{K^\circ}\alpha_1 \text{ και } \lambda_1^{down} = M_K\alpha_1$$

και αντικαθιστούμε το σώμα K με το

$$K_1 = \mathrm{conv}\left[(K \cap \lambda_1^{up}B_n) \cup \frac{1}{\lambda_1^{down}}B_n\right].$$

Όπως είδαμε,

$$d_{X_{K_1}} \leq M_K M_{K^\circ}\alpha_1^2 \preceq (\log n)^2(\log n) = (\log n)^3.$$

Επιπλέον,

$$\exp\left(-\frac{c}{(\log n)^2}\right) \leq \frac{s(K)}{s(K_1)} \leq \exp\left(\frac{c}{(\log n)^2}\right).$$

2ο Βήμα: Τώρα, το σώμα με το οποίο ξεκινάμε είναι το K_1, για το οποίο μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι $M_{K_1} = 1$ και $M_{K_1^\circ} \preceq \log(d_{X_{K_1}}+1)$. Για το $\alpha_2 = \log^{(2)} n$ παίρνουμε

$$\lambda_2^{up} = M_{K_1^\circ}\alpha_2 \text{ και } \lambda_2^{down} = M_{K_1}\alpha_2$$

και αντικαθιστούμε το σώμα K_1 με το

$$K_2 = \mathrm{conv}\left[(K_1 \cap \lambda_2^{up}B_n) \cup \frac{1}{\lambda_2^{down}}B_n\right].$$

Όπως πριν,

$$\begin{aligned} d_{X_{K_2}} &\leq M_{K_1}M_{K_1^\circ}\alpha_2^2 \preceq (\log^{(2)} n)^2 \log d_{X_1'} \\ &\preceq (\log^{(2)} n)^2 \log[(\log n)^3] \\ &\preceq (\log^{(2)} n)^2(\log^{(2)} n) = (\log^{(2)} n)^3. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\exp\left(-\frac{c}{(\log^{(2)} n)^2}\right) \leq \frac{s(K_1)}{s(K_2)} \leq \exp\left(\frac{c}{(\log^{(2)} n)^2}\right)$$

άρα
$$\exp\left(-c\sum_{j=1}^{2}\alpha_j^{-2}\right)\leq \frac{s(K)}{s(K_2)}\leq exp\left(c\sum_{j=1}^{2}\alpha_j^{-2}\right).$$
Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, μετά από t διαδοχικά βήματα καταλήγουμε σε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K_t για το οποίο ισχύει:
$$d_{X_{K_t}}\preceq (\log^{(t)} n)^3\leq c_1.$$
Ακόμα ισχυρότερα, η κατασκευή δείχνει ότι υπάρχει $r>0$ τέτοιος ώστε
$$rB_n\subseteq K_t\subseteq c_1 rB_n.$$
Από τις ιδιότητες του πολικού σώματος έχουμε ότι:
$$\frac{1}{c_1 r}B_n\subseteq K_t^\circ\subseteq \frac{1}{r}B_n$$
και από τον ορισμό του $s(K_t)$ βλέπουμε ότι
$$\frac{1}{c_1}\cdot s(B_n)\leq s(K_t)\leq c_1\cdot s(B_n).$$
Από όλη τη διαδικασία έχουμε έλεγχο για τους όγκους:
$$\exp\left(-c\sum_{j=1}^{t}\alpha_j^{-2}\right)\leq \frac{s(K)}{s(K_t)}\leq \exp\left(c\sum_{j=1}^{t}\alpha_j^{-2}\right).$$
Από τις δυο αυτές ανισότητες προκύπτει ότι
$$C^{-1}\exp\left(-c\sum_{j=1}^{t}\alpha_j^{-2}\right)\cdot s(B_n)\leq s(K)\leq C\exp\left(c\sum_{j=1}^{t}\alpha_j^{-2}\right)\cdot s(B_n).$$
Για το άθροισμα $\sum_{j=1}^t \alpha_j^{-2}=\frac{1}{(\log n)^2}+\frac{1}{(\log(\log n))^2}+\ldots+\frac{1}{(\log^{(t)} n)^2}$ παρατηρούμε ότι για κάθε $j<t$,
$$\begin{aligned}\alpha_{j+1}=\log\alpha_j &\Rightarrow \alpha_j=\exp(\alpha_{j+1})\\ &\Rightarrow \alpha_1=\exp(\alpha_2)=\cdots=\exp(\ldots\exp(\alpha_t)\ldots)\end{aligned}$$
το οποίο σημαίνει ότι
$$\sum_{j=1}^{t}\alpha_j^{-2}=\frac{1}{\alpha_t^2}+\frac{1}{\exp(\alpha_t^2)}+\ldots+\frac{1}{\exp(\ldots\exp(\alpha_t^2)\ldots)}<C_1.$$
Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι:

Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C_2 > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in N$ και για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ να ισχύει:

$$\frac{1}{C_2} \cdot s(B_n) \leq s(K) \leq C_2 \cdot s(B_n). \qquad \square$$

Μια τελευταία παρατήρηση είναι ότι μαζί με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1 προέκυψε και ένα άνω φράγμα. Η ανισότητα αυτή είναι ασθενέστερη από την ανισότητα Santaló που αποδείξαμε στην §2.1.

3.3 Η αντίστροφη ανισότητα Brunn-Minkowski

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε την αντίστροφη ανισότητας Brunn-Minkowski. Βασικός μας σκοπός είναι να δείξουμε το εξής.

Θεώρημα 3.3.1 *Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει ελλειψοειδές E_K με όγκο*

$$|E_K| = |K|,$$

το οποίο ικανοποιεί το εξής: για κάθε κυρτό σώμα P στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει:

$$|K + P| \leq C^n |E_K + P|$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Παρατήρηση. Αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση όπου τα σώματα K, P είναι συμμετρικά ως προς το 0.
Πράγματι, για κάθε κυρτό σώμα μπορούμε να ορίσουμε το $\hat{K} = \frac{1}{2}(K - K)$, όπου $K - K$ είναι το σώμα διαφορών του K. Από την ανισότητα των Rogers-Shephard προκύπτει ότι:

$$|K| \leq |\hat{K}| \leq 2^n |K|.$$

Αν δεχτούμε το θεώρημα για συμμετρικά κυρτά σώματα, υπάρχει ελλειψοειδές $E_{\hat{K}}$ τέτοιο ώστε $|E_{\hat{K}}| = |\hat{K}|$ και

$$|\hat{K} + P| \leq C^n |E_{\hat{K}} + P|$$

για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα P.
Επίσης υπάρχει $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ τέτοιο ώστε $|\alpha E_{\hat{K}}| = |K|$. Αν ορίσουμε

$$E_K = \alpha E_{\hat{K}},$$

τότε $|E_K| = |K|$. Για κάθε κυρτό σώμα P,

$$\begin{aligned}
|K+P| &\leq |\hat{K}+\hat{P}| \leq C^n Vol(E_{\hat{K}}+\hat{P}) \\
&= C^n|\frac{1}{\alpha}E_K+\hat{P}| \leq \left(\frac{C}{\alpha}\right)^n |E_{\hat{K}}+\alpha\hat{P}| \\
&\leq \left(\frac{C}{\alpha}\right)^n |E_{\hat{K}}+\hat{P}| \\
&= \left(\frac{C}{\alpha}\right)^n \left|\left[\frac{1}{2}(E_{\hat{K}}-E_{\hat{K}})+\frac{1}{2}(P-P)\right]\right| \\
&= \left(\frac{C}{\alpha}\right)^n \left|\frac{1}{2}(E_{\hat{K}}+P)-\frac{1}{2}(E_{\hat{K}}+P)\right| \\
&\leq \left(\frac{C}{\alpha}\right)^n 2^n|\frac{1}{2}(E_{\hat{K}}+P)| \\
&= \frac{C^n}{\alpha^n}|E_{\hat{K}}+P| \\
&\leq (2C)^n|E_{\hat{K}}+P|.
\end{aligned}$$

Από εδώ και πέρα λοιπόν θα θεωρούμε ότι τα K, P ότι είναι συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1: [Mi2] Η κατασκευή του ελλειψοειδούς E_K γίνεται με τη μέθοδο της ισομορφικής συμμετρικοποίησης που είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1, με κάποιες όμως βασικές τροποποιήσεις.
Κάθε σώμα W που θα ορίζουμε θα έχει όγκο περίπου ίσο με $|B_n|$. Το πρώτο πράγμα που χρειαζόμαστε είναι έλεγχος για τον παράγοντα $b(W)$ που εμφανίζεται στο λήμμα 3.1.10 (είναι μια ποσότητα που θέλουμε να είναι καλά φραγμένη). Από το λήμμα 3.1.2 γνωρίζουμε ότι $M_W \leq b(W) \leq c\sqrt{n}M_W$ όπου $b(W)$ ο μικρότερος αριθμός για τον οποίο $B_n \subseteq b(W)K$. Άρα για να έχουμε φράγμα για το $b(W)$ χρειαζόμαστε φράγμα για το M_W. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Pisier θα θεωρούμε το W να ικανοποιεί τις $|W| = |B_n|$ και

$$M_W M_{W^\circ} \preceq \log n.$$

Από την ανισότητα του Urysohn,

$$M_{W^\circ} \geq \left(\frac{|K|}{|B_n|}\right)^{\frac{1}{n}} \simeq 1,$$

άρα

$$M_W \leq M_W M_{W^\circ} \preceq \log n.$$

Έπεται ότι

$$b(W) \leq c\sqrt{n}M_W \preceq \sqrt{n}\log n.$$

Περιγραφή του 1ου βήματος: Έστω $K = K_0$ συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $|K_0| = |B_n|$. Θεωρούμε γραμμικό μετασχηματισμό $T_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $|\det T_0| = 1$, τέτοιον ώστε για το K_0' να ισχύουν τα εξής:

(a) $1 \le b \le c\sqrt{n} \cdot \log n$.

(b) $1 \le M_{K_0'} \le c \cdot \log n$.

(c) $M_{K_\circ'} \cdot M_{(K_0')^\circ} \preceq \log d_{X_{K_0}} \preceq \log n$.

Για $\alpha_1 = \log n$ θέτουμε

$$\lambda_1^{up} = M_{(K_0')^\circ}\alpha_1 \text{ και } \lambda_1^{down} = M_{K_0'}\alpha_1$$

και θεωρούμε το σώμα

$$K_1 = \mathrm{conv}\left[(K_0' \cap \lambda_1^{up} B_n) \cup \frac{1}{\lambda_1^{down}} B_n\right].$$

Τότε,

$$d_{X_{K_1}} \le \lambda_1^{up}\lambda_1^{down} = M_{K_\circ'} \cdot M_{(K_\circ')^\circ}\alpha_1^2 \preceq \log n(\log n)^2 = (\log n)^3.$$

Επίσης, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα P χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.1.10 και την δυϊκή ανισότητα του Sudakov έχουμε:

$$\begin{aligned}
|K_1 + P| &\le \left| \left[\mathrm{conv}\left(K_0' \cup \frac{1}{\lambda_1^{down}} B_n\right) + P\right] \right| \\
&\le 2ebnN(B_n, \lambda_1^{down} K_0') \cdot |K_0' + P| \\
&\le 2ebn \cdot \exp\left[cn\left(\frac{M_{K_0'}}{\lambda_1^{up}}\right)^2\right] \cdot |K_0' + P| \\
&= 2ebn \cdot \exp\left(\frac{cn}{\alpha_1^2}\right) \cdot |K_0' + P| \\
&\le \exp\left(\frac{cn}{\alpha_1^2}\right) \cdot |K_0' + P|.
\end{aligned}$$

Μπορούμε να απαλείψουμε τον όρο $2ebn$ αλλάζοντας την σταθερά c στον εκθετικό παράγοντα διότι $b \le c\sqrt{n}\log n$ και όλα τα α_i στην κατασκευή που θα κάνουμε θα είναι το πολύ της τάξης του $\log n$.

Αντίστροφα, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.1.8 και την ανισότητα του Sudakov, βλέπουμε ότι για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα P στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει και το εξής:

$$\begin{aligned}
|K_1 + P| &= \left|\mathrm{conv}\left[(K_0' \cap \lambda_1^{up} B_n) \cup \frac{1}{\lambda_1^{down}} B_n\right] + P\right| \\
&\ge |(K_0' \cap \lambda_1^{up} B_n) + P| \\
&\ge \frac{|K_0' + P|}{N(K_0', \lambda_1^{up} B_n)} \\
&\ge |K_0' + P| \cdot \exp\left[-cn\left(\frac{M_{(K_0')^\circ}}{\lambda_1^{up}}\right)^2\right] \\
&= |K_0' + P| \cdot \exp\left(-\frac{cn}{\alpha_1^2}\right).
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δυο ανισότητες, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα P έχουμε

$$\exp\left(-\frac{cn}{\alpha_1^2}\right)|K_0'+P| \leq |K_1+P| \leq \exp\left(\frac{cn}{\alpha_1^2}\right)|K_0'+P|.$$

Άρα σε κάθε βήμα μπορούμε να ελέγχουμε την μεταβολή των όγκων.

Ειδικότερα, για $P=\{0\}$ έχουμε ότι:

$$\exp\left(-\frac{cn}{\alpha_1^2}\right)|K_0'| \leq |K_1| \leq \exp\left(\frac{cn}{\alpha_1^2}\right)|K_0'|,$$

δηλαδή

$$|K_0|^{1/n} = |K_0'|^{1/n} \simeq |K_1|^{1/n}.$$

Οι παραπάνω ανισότητες μας επιτρέπουν μια αναδρομική διαδικασία πανομοιότυπη με αυτήν του Θεωρήματος 3.2.1 και μάλιστα με επιλογή των α_i ακριβώς την ίδια. Με όμοιο τρόπο λοιπόν, για κάθε j φτάνουμε σε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K_j τέτοιο ώστε: για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα P στον $\mathbb{R}^n$,

$$(*) \qquad \exp(-cn\alpha_j^{-2})|K_{j-1}'+P| \leq |K_j+P| \leq \exp(cn\alpha_j^{-2})|K_{j-1}'+P|.$$

Το $K_j' = T_j(K_j)$ ορίζεται στο τέλος κάθε βήματος έτσι ώστε $|K_j'| = |K_j|$ και $M_{K_j'}M_{(K_j')^\circ} \preceq \log d_{X_{K_j}}$.

Η διαδικασία σταματάει όταν $d_{X_{K_t}} \leq 8$. Επειδή το άθροισμα $\sum_{j=1}^t \alpha_j^{-2}$ είναι (ανεξάρτητα από το t) φραγμένο από μία σταθερά c_1, παίρνοντας $P=\{0\}$ και πολλαπλασιάζοντας τις $(*)$ κατά μέλη, βλέπουμε ότι:

$$|K_t|^{1/n} \simeq |K_0|^{1/n}.$$

(το ίδιο ισχύει για κάθε K_j). Αφού $d_{X_{K_t}} \leq 8$, έχουμε ότι:

$$\alpha B_n \subseteq K_t \subseteq bB_n \text{ με } \frac{b}{\alpha} \leq 8.$$

Θεωρούμε $r>0$ τέτοιο ώστε

$$|rB_n| = |K_t|.$$

Από την αρχική υπόθεση ότι $|K_0| = |B_n|$ και από τον έλεγχο που έχουμε για τους όγκους, έπεται ότι $\alpha, r, b \simeq 1$.

Τώρα, από τη σχέση $K_t \subseteq bD$, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα $P \subseteq \mathbb{R}^n$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} |K_t+P|^{1/n} &\leq |bB_n+P|^{1/n} \\ &\leq \left(\frac{b}{r}\right)|rB_n+P|^{1/n} \\ &\leq 8|rB_n+P|^{1/n} \end{aligned}$$

διότι εύκολα ελέγχουμε ότι $b/r \le 8$. Θέτοντας $E_t = rB_n$ έχουμε βρεί ελλειψοειδές με $|E_t| = |K_t|$ τέτοιο ώστε για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα $P \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$|K_t + P| \le 8^n |E_t + P|.$$

Τώρα, για κάθε P από την ανισότητα για την μεταβολή του όγκου κατά το $(t-1)$-οστό βήμα έχουμε:

$$\begin{aligned} |K'_{t-1} + P|^{1/n} &\le \exp\left(\frac{c}{\alpha_t^2}\right) |K_t + P|^{1/n} \\ &\le 8 \cdot \exp\left(\frac{c}{\alpha_t^2}\right) |E_t + P|^{1/n} \end{aligned}$$

όπου $K'_{t-1} = T_{t-1}(K_{t-1})$. Αν θεωρήσουμε το ελλειψοειδές $E_{t-1} = T_{t-1}^{-1}(E_t)$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $|\det T_{t-1}| = 1$ γράφουμε

$$\begin{aligned} & |T_{t-1}(K_{t-1}) + T_{t-1}(P)|^{1/n} \le 8 \cdot \exp\left(\frac{c}{\alpha_t^2}\right) |T_{t-1}(E_{t-1}) + T_{t-1}(P)|^{1/n} \\ \Rightarrow \quad & |T_{t-1}(K_{t-1} + P)|^{1/n} \le 8 \cdot \exp\left(\frac{c}{\alpha_t^2}\right) |T_{t-1}(E_{t-1} + P)|^{1/n} \\ \Rightarrow \quad & |K_{t-1} + P|^{1/n} \preceq \exp\left(\frac{c}{\alpha_t^2}\right) |E_{t-1} + P|^{1/n}. \end{aligned}$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$|E_{t-1}| = |T_{t-1}^{-1}(E_t)| = |E_t|$$

δηλαδή ο όγκος του ελλειψοειδούς παρέμεινε αμετάβλητος. Άρα για το K_{t-1} έχουμε βρεί ελλειψοειδές E_{t-1} με τις ζητούμενες ιδιότητες.
Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία με βήματα προς τα πίσω και αφού οι όγκοι των ελλειψοειδών που προκύπτουν είναι ίσοι μεταξύ τους, φτάνουμε τελικά στο 1ο βήμα και σε μια ανισότητα της μορφής

$$|K_0 + P|^{1/n} \preceq \exp\left(c \sum_{j=1}^{t} \alpha_j^{-2}\right) |E_0 + P|^{1/n},$$

και επειδή το παραπάνω άθροισμα είναι ομοιόμορφα φραγμένο έχουμε ότι:

$$|K_0 + P|^{1/n} \le C |E_0 + P|^{1/n}$$

για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα P στον $\mathbb{R}^n$, όπου E_0 ελλειψοειδές με

$$|E_0| \simeq |K_0|.$$

Με μια απλή (ομοιοθετική) τροποποίηση του E_0 και αντίστοιχη τροποποίηση της απόλυτης σταθεράς C, βλέπουμε ότι στο $K = K_0$ αντιστοιχεί ελλειψοειδές E_K με $|K| = |E_K|$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος. □

Είμαστε πλέον έτοιμοι να αποδείξουμε την αντίστροφη ανισότητα Brunn-Minkowski:

Θεώρημα 3.3.2 *Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει $U_K \in SL_n$ τέτοιος ώστε: αν K_1, K_2 είναι συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ και $t > 0$, τότε*

$$|U_{K_1}(K_1) + tU_{K_2}(K_2)|^{1/n} \leq C\left(|K_1|^{1/n} + t|K_2|^{1/n}\right),$$

όπου $C > 0$ είναι μια αριθμητική σταθερά ανεξάρτητη της διάστασης του χώρου και των σωμάτων $K_i, i = 1, 2$.

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 3.3.1, στο σώμα K_i, $i = 1, 2$ αντιστοιχεί ελλειψοειδές E_{K_i} τέτοιο ώστε

$$|E_{K_i}| = |K_i|$$

και για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα P στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$|K_i + P|^{1/n} \leq C|E_{K_i} + P|^{1/n}.$$

Θεωρούμε γραμμικούς μετασχηματισμούς $U_{K_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $|\det U_{K_i}| = 1$ τ.ω

$$U_{K_i}(E_{K_i}) = r_i B_n.$$

Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα P έχουμε

$$\begin{aligned} & |K_i + P|^{1/n} \leq C|E_{K_i} + P|^{1/n} \\ \Rightarrow \quad & |U_{K_i}(K_i) + U_{K_i}(P)|^{1/n} \leq C|U_{K_i}(E_{K_i}) + U_{K_i}(P)|^{1/n} \\ \Rightarrow \quad & |U_{K_i}(K_1) + P_*|^{1/n} \leq C|r_i B_n + P_*|^{1/n} \end{aligned}$$

για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα P_* στον $\mathbb{R}^n$. Παίρνοντας $i = 1$ και $P_* = tU_{K_2}(K_2)$ και κατόπιν $i = 2$ και $P_* = r_1 B_n$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} |U_{K_1}(K_1) + tU_{K_2}(K_2)|^{1/n} &\leq C|r_1 B_n + tU_{K_2}(K_2)|^{1/n} \\ &\leq C^2|r_1 B_n + tr_2 B_n|^{1/n} \\ &= C^2\left[|r_1 B_n|^{1/n} + t|r_2 B_n|^{1/n}\right] \\ &= C^2\left[|U_{K_1}(E_{K_1})|^{1/n} + t|U_{K_2}(E_{K_2})|^{1/n}\right] \\ &= C^2\left[|E_{K_1}|^{1/n} + t|E_{K_2}|^{1/n}\right] \\ &= C_1\left[|K_1|^{1/n} + t|K_2|^{1/n}\right], \end{aligned}$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Κεφάλαιο 4

Η μέθοδος της μιγαδικής παρεμβολής

4.1 Αριθμοί προσέγγισης

Έστω X, Y χώροι Banach και $u : X \to Y$ συμπαγής γραμμικός τελεστής. Οι *αριθμοί προσέγγισης* του u ορίζονται για κάθε $k \geq 1$ από την

$$a_k(u) = \inf\{\|u - v\| : \ v : X \to Y, \ \mathrm{rank}(v) < k\},$$

και μετρούν πόσο καλά προσεγγίζεται ο u από τελεστές δοσμένης πεπερασμένης τάξης. Οι *αριθμοί Gelfand* του u ορίζονται για κάθε $k \geq 1$ από την

$$c_k(u) = \inf\{\|u|_S\| \ : \ S \leq X \ , \ \mathrm{codim}(S) < k\}.$$

Για κάθε κλειστό υπόχωρο S του Y θεωρούμε την απεικόνιση πηλίκο $Q_S : Y \to Y/S$. Οι *αριθμοί Kolmogorov* του u ορίζονται για κάθε $k \geq 1$ από την

$$d_k(u) = \inf\{\|Q_S u\| : \ S \text{ υπόχωρος του } Y, \ \dim(S) < k\}.$$

Με s_k συμβολίζουμε οποιονδήποτε από τους a_k, c_k και d_k. Η ακολουθία $\{s_k(u)\}$ είναι φθίνουσα και $s_k(u) \to 0$ όταν $k \to \infty$. Επίσης, $s_1(u) = \|u\|$.
Οι σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς περιγράφονται στο επόμενο λήμμα.

Λήμμα 4.1.1 *Έστω X, Y χώροι Banach και $u : X \to Y$ συμπαγής γραμμικός τελεστής. Για κάθε $k \geq 1$ ισχύουν τα εξής:*

(α) $\max\{c_k(u), d_k(u)\} \leq a_k(u)$.

(β) $c_k(u) = d_k(u^*)$.

(γ) $d_k(u) = c_k(u^*)$.

(δ) $a_k(u) = a_k(u^*)$.

Λήμμα 4.1.2 *Έστω X, Y και Z χώροι Banach. Για κάθε $k, n \geq 1$ και κάθε ζευγάρι συμπαγών τελεστών $u : X \to Y$, $v : Y \to Z$,*

$$s_{k+n-1}(vu) \leq s_k(v)s_n(u).$$

Επίσης, αν $u_1, u_2 : X \to Y$ συμπαγείς τελεστές, έχουμε

$$s_{k+n-1}(u_1 + u_2) \leq s_k(u_1) + s_n(u_2)$$

για κάθε $k, n \geq 1$.

Οι *αριθμοί εντροπίας* του u ορίζονται για κάθε $k \geq 1$ από την

$$e_k(u) = \inf\{t > 0 : \ N(u(B_X), tB_Y) \leq 2^{k-1}\}.$$

Από τις στοιχειώδεις ιδιότητες

$$N(K_1, K_3) \leq N(K_1, K_2)N(K_2, K_3)$$

και

$$N(K_1 + K_2, K_3 + K_4) \leq N(K_1, K_3)N(K_2, K_4)$$

των αριθμών κάλυψης, συμπεραίνουμε ότι: αν $k, n \geq 1$ και $u : X \to Y$, $v : Y \to Z$, τότε

$$e_{k+n-1}(vu) \leq e_k(v)e_n(u).$$

Επίσης, αν $u_1, u_2 : X \to Y$, έχουμε

$$e_{k+n-1}(u_1 + u_2) \leq e_k(u_1) + e_n(u_2).$$

Προφανώς η $\{e_k(u)\}$ είναι φθίνουσα και $e_k(u) \to 0$ αν και μόνο αν ο u είναι συμπαγής.

Λήμμα 4.1.3 *Έστω $\|\cdot\|$ νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Γράφουμε B και S για την μοναδιαία μπάλα και τη μοναδιαία σφαίρα του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ αντίστοιχα. Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει δ-δίκτυο A της S ως προς την $\|\cdot\|$, με πληθάριθμο $\mathrm{card}(A) \leq (1 + 2/\delta)^n$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε μεγιστικό υποσύνολο $A = (y_i)_{i \leq m}$ της S ως προς την

$$i \neq j \implies \|y_i - y_j\| \geq \delta.$$

Το A είναι πεπερασμένο λόγω της συμπάγειας της S. Επίσης,

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (y_i + \delta B),$$

δηλαδή το A είναι δ-δίκτυο. Παρατηρούμε ότι τα $B_i = y_i + (\delta/2)B$ έχουν ξένα εσωτερικά και ότι

$$B_i = y_i + \frac{\delta}{2}B \subseteq B + \frac{\delta}{2}B = (1 + \delta/2)B$$

για κάθε $i \le m$, αφού $y_i \in S \subseteq B$. Άρα,

$$\sum_{i=1}^{m} |B_i| = \left|\cup_{i=1}^{m} B_i\right| \le \left|(1+\delta/2)B\right| = (1+\delta/2)^n |B|.$$

Επίσης,

$$|B_i| = \left|y_i + (\delta/2)B\right| = |(\delta/2)B| = \left(\frac{\delta}{2}\right)^n |B|,$$

άρα

$$m\left(\frac{\delta}{2}\right)^n |B| = \sum_{i=1}^{m} |B_i| \le (1+\delta/2)^n |B|.$$

Από την τελευταία ανισότητα βλέπουμε ότι

$$m \le \left(\frac{1+(\delta/2)}{\delta/2}\right)^n = \left(1+\frac{2}{\delta}\right)^n.$$

Αφού το A είναι δ-δίκτυο για την S, η απόδειξη είναι πλήρης. □

Λήμμα 4.1.4 *Έστω X, X_1, Y, Y_1 χώροι Banach. Υποθέτουμε ότι ο X είναι ισομετρικός με έναν χώρο πηλίκο του X_1 και ο Y είναι ισομετρικός με έναν υπόχωρο του Y_1. Έστω $q : X_1 \to X$ η απεικόνιση πηλίκο και $j : Y \to Y_1$ η ισομετρική εμφύτευση. Τότε, για κάθε τελεστή $u : X \to Y$ έχουμε*

$$e_k(u) = e_k(uq)$$

και

$$e_k(u)/2 \le e_k(ju) \le e_k(u)$$

για κάθε $k \ge 1$. Επιπλέον, αν $X_1 = \ell_1(I)$ τότε $d_k(u) = a_k(uq)$ ενώ αν $Y_1 = \ell_\infty(I)$ τότε $a_k(ju) = c_k(u)$.

Απόδειξη: Η πρώτη ισότητα προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι $q(B_{X_1}) = B_X$. Επίσης, για κάθε $k \ge 1$ ισχύει ότι:

$$e_k(ju) \le \|j\| e_k(u) = e_k(u).$$

Τώρα, αν το σύνολο $ju(B_X)$ καλυφθεί με 2^{k-1} το πλήθος μπάλες ακτίνας ε στον Y_1, τότε το σύνολο $u(B_X)$ είναι η ένωση 2^{k-1} το πλήθος υποσυνόλων διαμέτρου 2ε διότι η j είναι ισομετρία, οπότε από τον ορισμό του αριθμού εντροπίας έχουμε

$$e_k(u) \le 2e_k(ju).$$

Για τον τελευταίο ισχυρισμό χρησιμοποιούμε την «ιδιότητα lifting» του $\ell_1(I)$ και την «ιδιότητα επέκτασης» του $\ell_\infty(I)$. □

Λήμμα 4.1.5 *Με s_k συμβολίζουμε οποιονδήποτε από τους a_k, c_k και d_k. Για κάθε $\alpha > 0$ υπάρχει σταθερά ρ_α τέτοια ώστε: για κάθε $u : X \to Y$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{k\leq n} k^\alpha e_k(u) \leq \rho_\alpha \sup_{k\leq n} k^\alpha s_k(u).$$

Απόδειξη: Κάθε χώρος Banach X είναι ισομετρικός με ένα πηλίκο του $\ell_1(I)$ και κάθε χώρος Banach Y εμφυτεύεται ισομετρικά στον $\ell_\infty(I)$ για κάποιο σύνολο I. Από το προηγούμενο λήμμα, αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα στην περίπτωση $s_k = a_k$.
Έστω $u : X \to Y$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n = 2^N$ για κάποιο $N \geq 0$ και $\sup_{k\leq n} k^\alpha a_k(u) \leq 1$. Τότε, για κάθε $m \leq N$ υπάρχει τελεστής $v_m : X \to Y$ με $\mathrm{rank}(v_m) < 2^m$ και

$$\|u - v_m\| < 2^{-m\alpha}.$$

Θέτουμε $T_0 = v_0, T_1 = v_1 - v_0, \dots, T_N = v_N - v_{N-1}$. Τότε,

$$u = \sum_{m\leq N} T_m + (u - v_N),$$

και έχουμε

$$\|T_m\| \leq 2^{\alpha+1}2^{-m\alpha} \text{ και } \mathrm{rank}(T_m) < 2^{m+1}.$$

Θέτουμε $K = u(B_X)$, $K_m = T_m(B_X)$ και θεωρούμε $t_m > 0$ τα οποία θα προσδιοριστούν στη συνέχεια. Από το Λήμμα 4.1.3 και την $K_m \subseteq \|T_m\| B_Y$ συμπεραίνουμε ότι

$$N(K_m, t\|T_m\|B_Y) \leq \left(1 + \frac{2}{t}\right)^{\mathrm{rank}(T_m)} \leq \left(1 + \frac{2}{t}\right)^{2^{m+1}}$$

για κάθε $t > 0$.
Έστω $r \in (0, 1)$. Χρησιμοποιώντας την $(1 + y)^d \leq (1 + y^r)^{d/r}$ γράφουμε

$$\left(1 + \frac{2}{t}\right)^{2^{m+1}} < \exp\left(\left(\frac{2}{t}\right)^r \frac{2^{m+1}}{r}\right).$$

Γράφουμε $N(t) := N(K, tB_Y)$. Έχουμε

$$K \subseteq \sum_{m=0}^{N} K_m \cup (u - v_N)(B_X)$$

οπότε, παίρνοντας υπ' όψη και την $\|u - v_N\| < 2^{-N\alpha}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} N\left(\sum_{m=0}^{N} t_m\|T_m\| + 2^{-N\alpha}\right) &\leq \prod_{m=0}^{N} N(K_m, t_m\|T_m\|B_Y) \\ &\leq \exp\left(\sum_{m=0}^{N}\left(\frac{2}{t_m}\right)^r \frac{2^{m+1}}{r}\right). \end{aligned}$$

Επιλέγουμε $\beta > \alpha$ και $r \in (0,1)$ έτσι ώστε $r < 1/\beta$. Για κάθε $s > 0$ ορίζουμε $t_m = s2^{m\beta}2^{-N\beta}$. Με αυτήν την επιλογή,

$$\sum_{m=0}^{N} t_m \|T_m\| + 2^{-N\alpha} \leq 2^{-N\alpha}(c_1 s + 1)$$

και

$$\sum_{m=0}^{N} \left(\frac{2}{t_m}\right)^r \frac{2^{m+1}}{r} \leq c_2 s^{-r} 2^N,$$

όπου c_1, c_2 είναι σταθερές που εξαρτώνται μόνο από τα α, β και r. Τέλος, διαλέγουμε s αρκετά μεγάλο (το οποίο όμως εξαρτάται μόνο από τα α, β και r), έτσι ώστε

$$2\exp(c_2 s^{-r} 2^N) \leq 2^{2^N} = 2^n.$$

Τότε,

$$N(2^{-N\alpha}(c_1 s + 1)) \leq 2^{n-1},$$

δηλαδή,

$$e_n(u) \leq 2^{-N\alpha}(c_1 s + 1) = n^{-\alpha}(c_1 s + 1).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι, για $n = 2^N$,

$$n^\alpha e_n(u) \leq (c_1 s + 1) \sup_{k \leq n} k^\alpha a_k(u),$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο στην περίπτωση $n = 2^N$. Η επέκταση για τυχόν n είναι απλή. $\square$

4.2 Ένα θεώρημα των Pajor και Tomczak

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το εξής.

Θεώρημα 4.2.1 [PT] *Υπάρχει σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα. Για κάθε χώρο Banach X, για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε τελεστή $u : \ell_2^n \to X$,*

$$\sup_{k \geq 1} \left(\sqrt{k} c_k(u^*)\right) \leq C\ell(u).$$

Η απόδειξη χρησιμοποιεί τυχαίους πίνακες και θα βασιστεί σε μία σειρά από Λήμματα.

Λήμμα 4.2.1 *Έστω $(g_k)_{k \leq m}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυπικών κανονικών τυχαίων μεταβλητών σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Έστω X χώρος Banach και έστω $z_1, \ldots, z_m \in X$. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή*

$$Z = \sum_{k=1}^{m} g_k z_k$$

και ορίζουμε

$$\sigma(Z) = \sup\left\{ \left(\sum_{k=1}^{m} |z^*(z_k)|^2 \right)^{1/2} : z^* \in X^*, \|z^*\| \leq 1 \right\}.$$

Τότε, για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$P(\big| \|Z\| - \mathbb{E}\|Z\| \big| > t) \leq 2\exp(-ct^2/\sigma^2(Z)),$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Ορίζουμε $u : \ell_2^m \to X$ με $u(x) = \sum_{k=1}^m x_k z_k$, όπου $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Παρατηρούμε ότι $\sigma(Z) = \|u^*\| = \|u\|$, επομένως η ζητούμενη ανισότητα γράφεται στη μορφή

$$\gamma_m \left(x \in \mathbb{R}^m : \Big| \|u(x)\| - \int \|u(z)\| d\gamma_m(z) \Big| > t \right) \leq 2\exp(-ct^2/\|u\|^2),$$

όπου γ_m το τυπικό μέτρο Gauss στον $\mathbb{R}^m$.

Θεωρούμε τον χώρο πιθανότητας $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \gamma_m \times \gamma_m)$ και γράφουμε (x, y) για το τυχόν σημείο του $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$ ορίζουμε

$$x(\theta) = x \sin\theta + y \cos\theta$$

Η παράγωγος της $x(\theta)$ ως προς θ είναι ίση με

$$x'(\theta) = x \cos\theta - y \sin\theta.$$

Γράφουμε $F(x) = \|u(x)\|$. Η F είναι συνάρτηση Lipschitz, άρα σχεδόν παντού παραγωγίσιμη στον $\mathbb{R}^m$. Έστω $x, y \in \mathbb{R}^m$. Υποθέτουμε ότι η F είναι διαφορίσιμη στο $x(\theta)$ θ-σχεδόν παντού. Τότε,

$$\begin{aligned} F(x) - F(y) &= F(x(\pi/2)) - F(x(0)) = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{d}{d\theta} F(x(\theta)) \right] d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \langle F'(x(\theta)), x'(\theta) \rangle d\theta. \end{aligned}$$

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\phi_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $\phi_\lambda(t) = \exp(\lambda t)$. Από την κυρτότητα της ϕ_λ και από την ανισότητα Jensen έχουμε

$$\begin{aligned} \phi_\lambda(F(x) - F(y)) &= \phi_\lambda \left(\int_0^{\pi/2} \langle F'(x(\theta)), x'(\theta) \rangle d\theta \right) \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \phi_\lambda \left(\frac{\pi}{2} \langle F'(x(\theta)), x'(\theta) \rangle \right) d\theta. \end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε την $\phi_\lambda(F(x)-F(y))$ ως προς το $\gamma_m \times \gamma_m$. Η F είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη, άρα για σχεδόν όλα τα (x,y) η $F'(x(\theta))$ υπάρχει θ-σχεδόν παντού: έχουμε

$$\begin{aligned} &\int\int \phi_\lambda(F(x)-F(y))d\gamma_m(x)d\gamma_m(y) \\ &\leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\int\int \phi_\lambda\left(\frac{\pi}{2}\langle F'(x(\theta)), x'(\theta)\rangle\right) d\theta d\gamma_m(x)d\gamma_m(y). \end{aligned}$$

Από την κυρτότητα της ϕ_λ παίρνουμε

$$\int \phi_\lambda\left(F(x)-\int F(y)d\gamma_m(y)\right)d\gamma_m(x) \leq \int\int \phi_\lambda(F(x)-F(y))d\gamma_m(x)d\gamma_m(y).$$

Από την άλλη μεριά, για κάθε θ η απεικόνιση $(x,y)\mapsto (x(\theta),x'(\theta))$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^{2m}$. Αφού το $\gamma_m\times\gamma_m$ είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς, έχουμε

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\int\int \phi_\lambda\left(\frac{\pi}{2}\langle F'(x(\theta)), x'(\theta)\rangle\right) d\theta d\gamma_m(x)d\gamma_m(y) \\ &= \int\int \phi_\lambda\left(\frac{\pi}{2}\langle F'(x), y\rangle\right) d\theta d\gamma_m(x)d\gamma_m(y). \end{aligned}$$

Για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^m$ έχουμε $|F(x)-F(y)|\leq \|u\|\cdot|x-y|$, όπου $|\cdot|$ η Ευκλείδεια νόρμα, άρα $|F'|\leq\|u\|$ σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^m$. Ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$\int \exp(\langle v,y\rangle)d\gamma_m(y) = \exp(|v|^2/2).$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \int \exp\left(\frac{\pi}{2}\lambda\langle F'(x), y\rangle\right)d\gamma_m(y) &= \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2|F'(x)|^2\lambda^2\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\|u\|^2\lambda^2\right). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\int \phi_\lambda\left(F(x)-\int F(y)d\gamma_m(y)\right)d\gamma_m(x) \leq \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\|u\|^2\lambda^2\right).$$

Από την ανισότητα του Markov, για κάθε $\lambda>0$ έχουμε

$$\gamma_m\left(x: F(x)-\int F d\gamma_m > t\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\|u\|^2\lambda^2-\lambda t\right).$$

και επιλέγοντας $\lambda=(\pi\|u\|/2)^{-2}t$ βρίσκουμε

$$\gamma_m\left(x: F(x)-\int F d\gamma_m > t\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\|u\|\right)^{-2}t^2\right).$$

Εφαρμόζοντας την ίδια ανισότητα για την $-F$ έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Λήμμα 4.2.2 *Έστω g_{ij}, $i \leq n$, $j \leq k$ διπλή ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυπικών κανονικών τυχαίων μεταβλητών σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Θεωρούμε τον τυχαίο τελεστή $G = (g_{ij}) : \ell_2^k \to \ell_2^n$. Έστω X χώρος Banach και $u : \ell_2^n \to X$. Με πιθανότητα μεγαλύτερη από 2/3 ισχύει*

$$\|uG : \ell_2^k \to X\| \leq C(\ell(u) + \sqrt{k}\|u\|),$$

όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Θεωρούμε ένα 1/2-δίκτυο A της $S_{\ell_2^k}$. Από το Λήμμα 4.1.3, $\mathrm{card}(A) \leq 5^k$.

Ισχυρισμός: Για κάθε $v : \ell_2^k \to X$ ισχύει

$$\|v : \ell_2^k \to X\| \leq 2 \max_{x \in A} \|v(x)\|.$$

Πράγματι, για κάθε $x \in S_{\ell_2^k}$ υπάρχει $y \in A$ με $|x - y| \leq 1/2$, άρα

$$\begin{aligned} \|v(x)\| &= \|v(x-y) + v(y)\| \leq \|v(x-y)\| + \|v(y)\| \\ &\leq \|v\| \cdot |x - y| + \|v(y)\| \\ &\leq \frac{\|v\|}{2} + \max_{y \in A} \|v(y)\|. \end{aligned}$$

Παίρνοντας supremum ως προς x συμπεραίνουμε ότι

$$\|v\| \leq \frac{\|v\|}{2} + \max_{y \in A} \|v(y)\|,$$

απ' όπου έπεται ο ισχυρισμός. □

Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές

$$Z_j = \sum_{i=1}^n g_{ij} u(e_i), \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Οι $Z_1, \ldots, Z_k$ είναι ανεξάρτητες κανονικές και καθεμία έχει την ίδια κατανομή με την $Z = \sum_{i=1}^n g_i u(e_i)$.

Έστω $x = (x_1, \ldots, x_k) \in A$. Τότε,

$$\begin{aligned} uG(x) &= u\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k g_{ij} x_j\right) e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k g_{ij} x_j\right) u(e_i) \\ &= \sum_{j=1}^k x_j \left(\sum_{i=1}^n g_{ij} u(e_i)\right) \\ &= \sum_{j=1}^k x_j Z_j. \end{aligned}$$

Αφού $|x| = 1$, η $uG(x)$ έχει την ίδια κατανομή με την Z. Άρα,

$$\mathbb{E}\|uG(x)\| = \mathbb{E}\|Z\|.$$

Επομένως, για κάθε $t > 0$

$$P(\|uG(x)\| > \mathbb{E}\|uG(x)\| + t) = P(\|Z\| > \mathbb{E}\|Z\| + t).$$

Από το Λήμμα 4.2.1 και την παρατήρηση ότι $\sigma(Z) = \|u\|$ έχουμε

$$P(\|Z\| - \mathbb{E}\|Z\| > t) \leq 2\exp(-ct^2/\|u\|^2),$$

οπότε

$$\begin{aligned} P\left(\max_{x\in A}\|uG(x)\| > \mathbb{E}\|Z\| + t\right) &= P\left(\bigcup_{x\in A}\{\|uG(x)\| > \mathbb{E}\|Z\| + t\}\right) \\ &\leq \sum_{x\in A} P(\{\|uG(x)\| > \mathbb{E}\|Z\| + t\}) \\ &\leq 5^k P(\{\|uG(x)\| > \mathbb{E}\|Z\| + t\}) \\ &\leq 2\cdot 5^k \exp(-Ct^2/\|u\|^2). \end{aligned}$$

Υπάρχει $c_1 > 0$ τέτοια ώστε θέτοντας $t = c_1\sqrt{k}\|u\|$ να εξασφαλίζουμε την

$$2\cdot 5^k \exp(-Ct^2/\|u\|^2) < 1/3.$$

Άρα, με πιθανότητα μεγαλύτερη από 2/3 έχουμε

$$\begin{aligned} \|uG : \ell_2^k \to X\| &\leq \max_{y\in A}\|v(y)\| \\ &\leq 2\mathbb{E}\|Z\| + 2c_1\sqrt{k}\|u\|. \end{aligned}$$

Παίρνοντας υπόψιν και την

$$\mathbb{E}\|Z\| = \mathbb{E}\|\sum_{i=1}^n g_i u(e_i)\| \leq \ell(u),$$

βλέπουμε ότι με πιθανότητα μεγαλύτερη από 2/3 ισχύει

$$\|uG : \ell_2^k \to X\| \leq C(\ell(u) + \sqrt{k}\|u\|). \qquad \square$$

Λήμμα 4.2.3 *Έστω X, G και u όπως στο προηγούμενο λήμμα. Για κάθε $\varepsilon > 0$ θεωρούμε τον χώρο X_ε που έχει μοναδιαία μπάλα το $B_\varepsilon = B_X + \frac{1}{\varepsilon}u(B_{\ell_2^n})$. Τότε, με πιθανότητα μεγαλύτερη από 2/3 ισχύει*

$$\|uG : \ell_2^k \to X_\varepsilon\| \leq C(\ell(u) + \sqrt{k}\varepsilon).$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$B_\varepsilon = B_X + \frac{1}{\varepsilon}u(B_{\ell_2^n}) \supseteq \frac{1}{\varepsilon}u(B_{\ell_2^n}),$$

άρα $\|u : \ell_2^n \to X_\varepsilon\| \leq \varepsilon$.
Επίσης, από την $B_\varepsilon \supseteq B_X$ έχουμε $\|u(x)\|_{X_\varepsilon} \leq \|u(x)\|_X$ για κάθε $x \in \ell_2^n$, άρα

$$\ell(u : \ell_2^n \to X_\varepsilon) \leq \ell(u : \ell_2^n \to X).$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.2.2 για τον $u : \ell_2^n \to X_\varepsilon$ και χρησιμοποιώντας τις δύο ανισότητες, παίρνουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 4.2.1 *Έστω $G : \ell_2^k \to \ell_2^n$ όπως στο Λήμμα 4.2.2. Για κάθε $k, m, n \in \mathbb{N}$ και κάθε $T \subset \ell_2^n$ με $\mathrm{card}(T) \leq 2^m$ υπάρχει $\Omega_1 \subseteq \Omega$ με $P(\Omega_1) > 3/4$ τέτοιο ώστε: για κάθε $\omega \in \Omega_1$ και κάθε $y \in T$*

$$a2^{-m/k}\|y\|_{\ell_2^n} \leq k^{-1/2}\|(G^*\omega)(y)\|_{\ell_2^k} \leq \left(2 + b\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}\right)\|y\|_{\ell_2^n}.$$

Απόδειξη: Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\|y\|_{\ell_2^n} = 1$ για κάθε $y \in T$. Αν $y = (y_1, \ldots, y_n)$, τότε

$$G^*(y) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k} g_{ij}e_j\right).$$

Άρα, η τυχαία μεταβλητή $G^*(y)$ έχει την ίδια κατανομή με την $\sum_{j=1}^{k} g_j e_j$. Γράφουμε

$$Z^y = k^{-1/2}\|G^*y\|_{\ell_2^k}.$$

Από την προηγούμενη παρατήρηση, η Z^y έχει την ίδια κατανομή με την

$$Z_k = k^{-1/2}\left(\sum_{j=1}^{k} g_j^2\right)^{1/2}.$$

Θα χρειαστούμε ένα τεχνικό λήμμα.

Λήμμα 4.2.4 *Υπάρχουν $a_1, b_1 > 0$ τέτοιοι ώστε, για κάθε $s > 0$,*

$$P(Z_k < s) \leq (a_1 s)^k$$

και για κάθε $t > 2$

$$P(Z_k > t) \leq \exp(-b_1 k t^2).$$

Με δεδομένο το Λήμμα 4.2.4 μπορούμε να πούμε ότι για κάθε $y \in S^{n-1}$ και για κάθε $0 < s < t$ με $t > 2$

$$\begin{aligned} P(Z^y \notin [s,t]) &= P(Z_k \notin [s,t]) \\ &= P(\{Z_k < s\} \cup \{Z_k > t\}) \\ &\leq P(Z_k < s) + P(Z_k > t) \\ &\leq (a_1 s)^k + \exp(-b_1 k t^2). \end{aligned}$$

Άρα,

$$P(\exists y \in T : Z^y \notin [s,t]) \leq \mathrm{card}(T) P(Z^y \notin [s,t]) \leq 2^m [(a_1 s)^k + \exp(-b_1 k t^2)].$$

Αν λοιπόν επιλέξουμε $s = 1/8a_1 2^{m/k}$ και

$$t = 2 + \left(\frac{(m+4)\log 2}{b_1 k}\right)^{1/2} \leq 2 + b\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2},$$

έχουμε

$$P(\exists y \in T : Z^y \notin [s,t]) < 1/4,$$

δηλαδή με πιθανότητα μεγαλύτερη από 3/4 έχουμε: για κάθε $y \in T$,

$$a 2^{-m/k} \leq k^{-1/2} \|(G^* \omega)(y)\|_{\ell_2^k} \leq \left(2 + b\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}\right).$$

Αυτό αποδεικνύει την Πρόταση με την υπόθεση ότι $\|y\|_{\ell_2^n} = 1$ για κάθε $y \in T$. □

Απόδειξη του Λήμματος 4.2.4: Για τον πρώτο ισχυρισμό γράφουμε

$$\begin{aligned} P(Z_k < s) &= (2\pi)^{-k/2} \int_{|x|^2 < s^2 k} \exp(-|x|^2) dx \dots dx_k \\ &= (2\pi)^{-k/2} k \omega_k \int_0^{s\sqrt{k}} \rho^{k-1} e^{-\rho^2/2} d\rho \\ &\leq (2\pi)^{-k/2} k \omega_k \int_0^{s\sqrt{k}} \rho^{k-1} d\rho \\ &= \frac{s^k k^{k/2}}{2^{k/2} \Gamma(k/2+1)} \\ &\leq (a_1 s)^{k/2} \end{aligned}$$

όπου $a_1 > 0$ απόλυτη σταθερά. Για τον δεύτερο, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} P(Z_k > t) &= (2\pi)^{-k/2} \int_{|x|^2 > t^2 k} \exp(-|x|^2) dx_1 \dots dx_k \\ &\leq (2\pi)^{-k/2} \exp(-t^2 k/4) \int_{\mathbb{R}^k} \exp(-|x| t) dx_1 \dots dx_k. \end{aligned}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = \sqrt{2}y$ και υπολογίζοντας το τελευταίο ολοκλήρωμα παίρνουμε

$$\begin{aligned} P(Z_k > t) &\leq 2^{k/2}\exp(-t^2k/4) = \exp\left(\frac{k}{4}(2\log 2 - t^2)\right) \\ &\leq \exp(-b_1kt^2) \end{aligned}$$

όπου $b_1 > 0$ απόλυτη σταθερά, κάνοντας την επιπλέον υπόθεση ότι $t > 2$. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.1: Έστω $u : \ell_2^n \to X$. Θέτουμε $K = u^*(B_{X^*})$. Από την ανισότητα του Sudakov,

$$\begin{aligned} N(K, \varepsilon_k B_{\ell_2^n}) &\leq \exp(cnM^*(K)^2/\varepsilon_k^2) \\ &= \exp(cnM(u^{-1}(B_X))^2/\varepsilon_k^2) \\ &\leq \exp(c_1\ell(u)^2/\varepsilon_k^2) \leq 2^k \end{aligned}$$

αρκεί να επιλέξουμε $\varepsilon_k \simeq \ell(u)/\sqrt{k}$. Δηλαδή, υπάρχει $c_2 > 0$ τέτοια ώστε

$$N(u^*(B_{X^*}), (\ell(u)/c_2\sqrt{k})B_{\ell_2^n}) \leq 2^k$$

για κάθε $k \geq 1$. Ισοδύναμα, υπάρχει $T \subseteq \ell_2^n$ με $\mathrm{card}(T) \leq 2^k$ τέτοιο ώστε: για κάθε $x \in K$ υπάρχει $y \in T$ με

$$|y - x| \leq \varepsilon_k \frac{\ell(u)}{c_2\sqrt{k}}.$$

Αντικαθιστώντας το ε_k με $2\varepsilon_k$ μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι $T \subseteq K$: για κάθε $y \in T$ με $(y + \varepsilon_k B_{\ell_2^n}) \cap K \neq \emptyset$, επιλέγουμε $x(y) \in K$ με $|y - x(y)| \leq \varepsilon_k$. Τότε,

$$K \subseteq \bigcup_{y \in T}(y + \varepsilon_k B_{\ell_2^n}) \subseteq \bigcup_{y\in T}(x(y) + 2\varepsilon_k B_{\ell_2^n}).$$

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $T \subseteq K$, $\mathrm{card}(T) \leq 2^k$ και

$$K \subseteq \bigcup_{y\in T}(y + 2\varepsilon_k B_{\ell_2^n}).$$

Τότε, για κάθε $x \in K$ υπάρχει $y \in T$ τέτοιο ώστε

$$y - x \in 2K \cap (2\varepsilon_k B_{\ell_2^n}).$$

Από το Λήμμα 4.2.3 και την Πρόταση 4.2.1 (με $m = k$) υπάρχει $n \times k$ πίνακας G που ικανοποιεί την

$$\|uG : \ell_2^k \to X_{\varepsilon_k}\| \leq C(\ell(u) + \sqrt{k}\varepsilon_k) \tag{1}$$

και, για κάθε $y \in T$, την

$$a\|y\|_{\ell_2^n} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}\|G^*(y)\|_{\ell_2^n}. \tag{2}$$

Θέτουμε $F = \mathrm{Ker}(G^*u^*)$. Τότε, ο F είναι υπόχωρος του X^* και $\mathrm{codim}(F) \leq \dim(\ell_2^k) = k$.
Έστω $z \in B_F$. Τότε $u^*(z) \in K$, άρα υπάρχει $y \in T$ τέτοιο ώστε

$$u^*(z) - y \in 2(K \cap \varepsilon_k B_{\ell_2^n}).$$

Ειδικότερα,

$$\|u^*(z) - y\|_{\ell_2^k} \leq 2\varepsilon_k.$$

Από την άλλη μεριά, $(G^*u^*)(z) = 0$ άρα

$$\begin{aligned} G^*y \in 2G^*(K \cap \varepsilon_k B_{\ell_2^n}) &= G^*u^*(B_{X^*} \cap \varepsilon_k (u^*)^{-1}(B_{\ell_2^n})) \\ &= (G^*u^*)(\tilde{B}), \end{aligned}$$

όπου, από τις ιδιότητες του πολικού σώματος,

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \left(\mathrm{co}(B_X \cup \frac{1}{\varepsilon_k} u(B_{\ell_2^n})\right)^\circ \\ &\subseteq \left(\frac{1}{2}B_X + \frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon_k} u(B_{\ell_2^n})\right)^\circ \\ &= 2(B_X + \frac{1}{\varepsilon_k} u(B_{\ell_2^n}))^\circ \\ &= 2(B_{X_{\varepsilon_k}})^\circ. \end{aligned}$$

Επομένως, $G^*y \in 4(G^*u^*)(B^\circ_{X_{\varepsilon_k}})$ και αφού $\|G^*u^*\| = \|uG\|$, από την (1) παίρνουμε

$$\|G^*y\|_{\ell_2^k} \leq 4C(\ell(u) + \sqrt{k}\varepsilon_k).$$

Τώρα από την (2) και από την επιλογή του ε_k έπεται ότι

$$\|y\|_{\ell_2^n} \leq \frac{4C}{a}(\ell(u)/\sqrt{k} + \varepsilon_k) \leq C_1 \ell(u)/\sqrt{k}.$$

Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $u^*(z) - y \in 2\varepsilon_k B_{\ell_2^n}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \|u^*(z)\|_{\ell_2^n} &\leq \|u^*(z) - y\|_{\ell_2^n} + \|y\|_{\ell_2^n} \\ &\leq 2\varepsilon_k + C_1\ell(u)/\sqrt{k} \\ &\leq C_2\ell(u)/\sqrt{k}. \end{aligned}$$

Αφού $\mathrm{codim}(F) < k$, έχουμε $c_k(u^*) \leq C_2\ell(u)/\sqrt{k}$, δηλαδή

$$\sup_{k\geq 1} \left(\sqrt{k} c_k(u^*)\right) \leq C_2 \ell(u). \quad \square$$

4.3 Μιγαδική Παρεμβολή

Έστω X_0 και X_1 δύο χώροι Banach πάνω από το $\mathbb{C}$. Λέμε ότι οι X_0 και X_1 είναι «συμβιβαστοί» αν εμβαπτίζονται συνεχώς σε έναν μεγαλύτερο χώρο Banach, οπότε μπορούμε να μιλάμε για τους χώρους X_0+X_1 και $X_0\cap X_1$. Στην περίπτωση που μάς ενδιαφέρει, θα έχουμε $X_i=(\mathbb{C}^n,\|\cdot\|_i)$, $i=1,2$ οπότε η υπόθεση αυτή ικανοποιείται κατά τετριμμένο τρόπο.
Ορίζουμε

$$\begin{aligned} S &= \{z\in\mathbb{C}:\ 0<\mathrm{Re}z<1\}\\ \overline{S} &= \{z\in\mathbb{C}:\ 0\leq\mathrm{Re}z\leq 1\}\\ S_0 &= \{z\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Re}z=0\}\\ S_1 &= \{z\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Re}z=1\}.\end{aligned}$$

Θεωρούμε τον χώρο $\mathcal{F}(X_0,X_1)$ όλων των συναρτήσεων f με τιμές στον X_0+X_1 οι οποίες είναι φραγμένες και συνεχείς στη λωρίδα $\overline{S}$, αναλυτικές στην ανοιχτή λωρίδα S και, επιπλέον, οι συναρτήσεις $f|_{S_0}$ και $f|_{S_1}$ που ορίζονται από την $t\mapsto f(j+it)$ $(j=0,1)$ είναι συνεχείς από το $\mathbb{R}$ στον X_j και τείνουν στο 0 καθώς $|t|\to\infty$. Ο $\mathcal{F}(X_0,X_1)$ είναι προφανώς γραμμικός χώρος.
Στον $\mathcal{F}(X_0,X_1)$ ορίζουμε τη νόρμα

$$\|f\|_{\mathcal{F}}=\max\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(it)\|_{X_0},\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(1+it)\|_{X_1}\right).$$

Λήμμα 4.3.1 *Ο χώρος $\mathcal{F}(X_0,X_1)$ είναι χώρος Banach.* □

Για κάθε $\theta\in(0,1)$ ορίζουμε τώρα τον χώρο παρεμβολής $X_\theta:=(X_0,X_1)_\theta$ σαν το σύνολο όλων των $x\in X_0+X_1=\mathbb{C}^n$ για τα οποία υπάρχει $f\in\mathcal{F}(X_0,X_1)$ τέτοια ώστε $x=f(\theta)$. Στον χώρο X_θ ορίζουμε τη νόρμα

$$\|x\|_\theta=\inf\{\|f\|_{\mathcal{F}}:\ f\in\mathcal{F}(X_0,X_1),\ f(\theta)=x\}.$$

Λήμμα 4.3.2 *Για κάθε $x\in X_\theta$,*

$$\|x\|_{X_\theta}\leq\|x\|_{X_0}^{1-\theta}\|x\|_{X_1}^{\theta}.$$

Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού είναι απλή. Αν $M_0=\|x\|_{X_0}$, $M_1=\|x\|_{X_1}$ και αν

$$f(z)=M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}(M_0^{1-z}M_1^{z})^{-1}x,$$

τότε $f\in\mathcal{F}(X_0,X_1)$, $\|f\|_{\mathcal{F}}=M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$ και $f(\theta)=x$. Από τον ορισμό της $\|\cdot\|_\theta$ έπεται το ζητούμενο. □

Θα χρειαστούμε επίσης την δυϊκή ανισότητα. Για κάθε $\theta\in(0,1)$ και κάθε γραμμικό συναρτησοειδές $u\in(X_0\cap X_1)^*$ ορίζουμε

$$\|u\|_\theta^*=\sup\{|u(x)|:\ x\in\mathbb{C}^n,\ \|x\|_{X_\theta}\leq 1\}.$$

Τότε, ισχύει το εξής.

Λήμμα 4.3.3 *Για κάθε* $u \in (X_0 \cap X_1)^*$,

$$\|u\|_\theta^* \le \left(\|u\|_0^*\right)^{1-\theta} \left(\|u\|_1^*\right)^\theta .$$

Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού είναι απλή συνέπεια του «λήμματος των τριών ευθειών»:

Λήμμα 4.3.4 *Έστω* $g : \overline{S} \to \mathbb{C}$ *συνάρτηση φραγμένη, συνεχής και αναλυτική στο* S. *Τότε, για κάθε* $\theta \in (0,1)$ *και κάθε* $t \in \mathbb{R}$

$$|g(\theta)| \le \left(\sup_{S_0} |g|\right)^{1-\theta} \left(\sup_{S_1} |g|\right)^\theta .$$

Απόδειξη: Θέτουμε $M_0 = \sup_{S_0} |g|$ και $M_0 = \sup_{S_0} |g|$. Έστω $r > 0$ και $s \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$F_r(z) = \exp(rz^2 + sz)F(z).$$

Τότε,

$$F_r(z) \to 0 \text{ καθώς } \mathrm{Im} z \to \pm\infty$$

και

$$|F_r(it)| \le M_0, \quad |F_r(1+it)| \le M_1 e^{r+s}.$$

Από την αρχή Phragmén-Lindelöf έπεται ότι

$$|F_r(z)| \le \max\{M_0, M_1 e^{r+s}\},$$

δηλαδή

$$|F(\theta + it)| \le \exp(-r(\theta^2 - t^2)) \max\{M_0 e^{-\theta r}, M_1 e^{(1-\theta)s + r}\}.$$

Η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε σταθερό θ και t. Αφήνοντας το $r \to 0$ βλέπουμε ότι

$$|F(\theta + it)| \le \max\{M_0 \rho^{-\theta}, M_1 \rho^{1-\theta}\}$$

όπου $\rho = e^s$. Το δεξιό μέλος ελαχιστοποιείται όταν $M_0 \rho^{-\theta} = M_1 \rho^{1-\theta}$, δηλαδή όταν $\rho = M_0 / M_1$. Γι' αυτήν την τιμή του ρ παίρνουμε

$$|F(\theta + it)| \le M_0^{1-\theta} M_1^\theta. \quad \square$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα των τριών ευθειών για την

$$g(z) = \langle u, f(z) \rangle$$

παίρνουμε

$$|\langle u, x \rangle| = |g(\theta)| \le \left(\|u\|_0^*\right)^{1-\theta} \left(\|u\|_1^*\right)^\theta ,$$

το οποίο αποδεικνύει το Λήμμα 4.3.3. $\square$

Έστω τώρα Y ένας άλλος μιγαδικός χώρος Banach και έστω $T : X_0 + X_1 \to Y$ και $R : Y \to X_0 \cap X_1$ φραγμένοι $\mathbb{C}$-γραμμικοί τελεστές. Τότε, ο $T : X_\theta \to Y$ και ο $R : Y \to X_\theta$ είναι φραγμένοι τελεστές. Συμβολίζουμε αυτούς τους τελεστές με T_θ και R_θ.

Λήμμα 4.3.5 *Ισχύουν οι ανισότητες*

$$c_k(R_\theta) \leq \|R_0\|^{1-\theta}(c_k(R_1))^\theta$$

και

$$d_k(T_\theta) \leq \|T_0\|^{1-\theta}(d_k(T_1))^\theta.$$

Απόδειξη: Η πρώτη ανισότητα είναι άμεση συνέπεια του λήμματος 4.3.2. Για τη δεύτερη ανισότητα μπορούμε για απλότητα να υποθέσουμε ότι οι τελεστές T_θ, T_1 είναι συμπαγείς και ότι ο $X_0 \cap X_1$ είναι πυκνός τόσο στον X_0 όσο και στον X_1 (στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει, τα παραπάνω ικανοποιούνται κατά τετριμμένο τρόπο). Τώρα, από τις ισότητες $d_k(T_\theta) = c_k(T_\theta^*)$ και $d_k(T_1) = c_k(T_1^*)$ η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από το Λήμμα 4.3.3. □

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το επόμενο θεώρημα. Θα αντικαταστήσει την ανισότητα του Pisier η οποία έπαιξε βασικό ρόλο στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 4.3.1 *Έστω (X_0, X_1) ζεύγος συμβιβαστών μιγαδικών χώρων Banach. Αν ο X_1 είναι χώρος Hilbert, τότε για κάθε $\theta \in (0,1)$ ισχύει*

$$K(X_\theta) \leq \phi(\theta)$$

όπου $\phi(\theta)$ σταθερά που εξαρτάται μόνο από το θ. Επιπλέον, $\phi(\theta) = O(1/\theta)$ καθώς $\theta \to 0$.

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε ένα λήμμα.

Λήμμα 4.3.6 *Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ συμβολίζουμε με $\mathrm{Arg}(z)$ το όρισμα του z που ικανοποιεί την $-\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$. Έστω $D_0 = [-1,1]$, $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ και*

$$D_\theta = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ \left| \mathrm{Arg}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \right| = \frac{\theta\pi}{2} \right\}, \quad \theta \in (0,1).$$

Τότε, για κάθε $u \in D_\theta$ υπάρχει $G : \overline{S} \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο S, τέτοια ώστε $G(S_0) \subseteq D_0$, $G(S_1) \subseteq D_1$ και $G(\theta) = u$.

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι το D_θ είναι το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου τα οποία σχηματίζουν με το ευθύγραμμο τμήμα $[-1,1]$ γωνία ακριβώς ίση με $\pi - \pi\theta/2$.

Έστω $u \in D_\theta$. Αν $\mathrm{Im}u > 0$, υπάρχει πραγματικός αριθμός t τέτοιος ώστε $u = i\tan(\frac{\pi\theta}{4} + it)$. Ορίζουμε

$$G(z) = i\tan\left(\frac{\pi}{4}z + it\right)$$

και ελέγχουμε ότι ικανοποιείται το ζητούμενο. Αν $\mathrm{Im}u < 0$, υπάρχει πραγματικός αριθμός t τέτοιος ώστε $u = -i\tan(\frac{\pi\theta}{4} + it)$. Τότε, ορίζουμε

$$G(z) = -i\tan\left(\frac{\pi}{4}z + it\right). \quad \square$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1: [Pi3] Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό της §1.3. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| \leq 1$ ορίζουμε

$$T(z) = \sum_{k \geq 0} z^k Q_k.$$

Ο $T(z)$ είναι τελεστής νόρμας 1 στον $L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Έστω $0 < \theta < 1$. Θα βρούμε $\delta = \delta(\theta) > 0$ τέτοιο ώστε: για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| \leq \delta$

$$\|T(z) \otimes I_{X_\theta}\|_{L^2(X_\theta) \to L^2(X_\theta)} \leq 1.$$

Θέτουμε $T_\theta(z) = T(z) \otimes I_{X_\theta}$ και $Q_{1,\theta} = Q_1 \otimes I_{X_\theta}$. Από τον τύπο του Cauchy βλέπουμε ότι

$$Q_1 = \frac{1}{\delta} \int_0^{2\pi} e^{-is} T(\delta e^{is}) \frac{ds}{2\pi},$$

και όμοια

$$Q_{1,\theta} = \frac{1}{\delta} \int_0^{2\pi} e^{-is} T_\theta(\delta e^{is}) \frac{ds}{2\pi}.$$

Από την ανισότητα του Jensen,

$$K(X_\theta) = \|Q_{1,\theta}\|_{L^2(X_\theta) \to L^2(X_\theta)} \leq \frac{1}{\delta} \sup_{|z|=\delta} \|T_\theta(z)\|_{L^2(X_\theta) \to L^2(X_\theta)}.$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι υπάρχει τέτοιο δ.
Από την Πρόταση 1.3.2, για κάθε χώρο Banach και κάθε $z \in D_0$ έχουμε

$$\|T(z) \otimes I_{X_0}\|_{L^2(X_0) \to L^2(X_0)} \leq 1. \tag{1}$$

Επίσης, αφού ο X_1 είναι χώρος Hilbert, για κάθε $z \in D_1$ έχουμε

$$\|T(z) \otimes I_{X_1}\|_{L^2(X_1) \to L^2(X_1)} \leq 1. \tag{2}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.3.6 θα αποδείξουμε ότι για κάθε $z \in D_\theta$ ισχύει

$$\|T(z) \otimes I_{X_\theta}\|_{L^2(X_\theta) \to L^2(X_\theta)} \leq 1.$$

Λήμμα 4.3.7 *Οι χώροι $(L^2(X_0), L^2(X_1))_\theta$ και $L^2(X_\theta)$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι.*

Από το λήμμα, για κάθε $\phi \in L^2(X_\theta)$ με $\|\phi\| < 1$, υπάρχει $f \in \mathcal{F}(L^2(X_0), L^2(X_1))$ τέτοια ώστε $\|f\|_{\mathcal{F}} < 1$ και $f(\theta) = \phi$. Σταθεροποιούμε $z \in D_\theta$ και θεωρούμε την συνάρτηση G του Λήμματος 4.3.6. Ειδικότερα, $G(\theta) = z$.
Θεωρούμε την $W : \overline{S} \to L^2(X_0) + L^2(X_1)$ με

$$W(u) = T(G(u)) f(u).$$

Η W είναι αναλυτική στο S και $W(\theta) = T(z)\phi$.

Αν $Y_0 = L^2(X_0)$ και $Y_1 = L^2(X_1)$, τότε

$$\|T(z)\phi\|_{(Y_0,Y_1)_\theta} \leq \max\{\|W\|_{L_\infty(S_0,Y_0)}, \|W\|_{L_\infty(S_1,Y_1)}\}.$$

Από τις (1), (2) και από το Λήμμα 4.3.6,

$$\|T(z)\phi\|_{(Y_0,Y_1)_\theta} \leq 1.$$

Από το Λήμμα 4.3.7 έπεται ότι: για κάθε $z \in D_\theta$,

$$\|T(z)\|_{L_2(X_\theta)\to L_2(X_\theta)} \leq 1. \tag{3}$$

Παρατηρούμε ότι $T(z_1 z_2) = T(z_1)T(z_2)$. Αυτή η παρατήρηση μαζί με τις (1) και (3) δείχνει ότι η (3) ισχύει για κάθε z στο χωρίο που περικλείει το D_θ. Ειδικότερα, η (3) ισχύει για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| \leq \tan(\pi\theta/4)$. Επομένως,

$$K(X_\theta) \leq (\tan(\pi\theta/4))^{-1}.$$

Αυτό αποδεικνύει το Θεώρημα. □

Παρατήρηση. Η ανισότητα του Pisier (πιό συγκεκριμμένα, το Θεώρημα 1.3.1) είναι συνέπεια του Θεωρήματος 4.3.1. Ας υποθέσουμε ότι $X = \mathbb{C}^n$ (η πραγματική περίπτωση έπεται). Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι ο ταυτοτικός τελεστής $I : \ell_2^n \to X$ ικανοποιεί τις $\|I\| = d(X, \ell_2^n)$ και $\|I^{-1}\| = 1$. Θεωρούμε τον χώρο παρεμβολής $X_\theta = (X, \ell_2^n)_\theta$. Από το Λήμμα 4.3.5 με $k = 1$, έχουμε

$$d(X, X_{\theta)} \leq [d(X, \ell_2^n)]^\theta.$$

Από το Θεώρημα 4.3.1 έχουμε $K(X_\theta) \leq \phi(\theta)$. Άρα,

$$K(X) \leq d(X, X_\theta)K(X_\theta) \leq \phi(\theta)[d(X, \ell_2^n)]^\theta \leq \frac{c}{\theta}[d(X, \ell_2^n)]^\theta.$$

Επιλέγοντας το βέλτιστο $\theta (\simeq 1/\log[d(X, \ell_2^n) + 1])$, παίρνουμε

$$K(X) \leq c_1 \log[d(X, \ell_2^n) + 1].$$

4.4 Το βασικό θεώρημα

Θεώρημα 4.4.1 *Για κάθε $\alpha > 1/2$ υπάρχει μία σταθερά $C = C(\alpha) > 0$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε n-διάστατο (πραγματικό ή μιγαδικό) χώρο με νόρμα X, υπάρχει ισομορφισμός $u : \ell_2^n \to X$ τέτοιος ώστε*

$$d_k(u) \leq C(n/k)^\alpha \text{ και } c_k(u^{-1}) \leq C(n/k)^\alpha$$

για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Επιπλέον, η σταθερά $C(\alpha)$ είναι $O((\alpha - 1/2)^{-1/2})$ καθώς $\alpha \to 1/2$.

Παρατήρηση. Αν υποθέσουμε ότι η K-σταθερά του X είναι φραγμένη, το ζητούμενο προκύπτει άμεσα. Γιατί, υπάρχει ισομορφισμός $u : \ell_2^n \to X$ τέτοιος ώστε

$$\ell(u) \leq \sqrt{n} \text{ και } \ell((u^{-1})^*) \leq K(X)\sqrt{n}$$

οπότε το Θεώρημα 4.2.1 μας δίνει

$$d_k(u) = c_k(u^*) \leq C_1(n/k)^{1/2} \text{ και } c_k(u^{-1}) \leq C_1 K(X)(n/k)^{1/2}.$$

Απόδειξη του θεωρήματος 4.3.1: [Pi4] Θεωρούμε πρώτα την μιγαδική περίπτωση και γράφουμε ℓ_2^n για τον μιγαδικό n-διάστατο Ευκλείδειο χώρο. Σταθεροποιούμε $\alpha > 1/2$ και συμβολίζουμε με C την μικρότερη θετική σταθερά για την οποία ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος.
Από τον ορισμό της C, για κάθε n-διάστατο μιγαδικό χώρο με νόρμα X υπάρχει $\mathbb{C}$-γραμμικός ισομορφισμός $u : \ell_2^n \to X$ τέτοιος ώστε

$$d_k(u) \leq C(n/k)^\alpha \text{ και } c_k(u^{-1}) \leq C(n/k)^\alpha$$

για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $X = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ και u είναι ο ταυτοτικός τελεστής.
Ορίζουμε $\theta = (\alpha - 1/2)/\alpha \in (0,1)$ και θεωρούμε τον χώρο παρεμβολής $X_\theta = (X, \ell_2^n)_\theta$ που αντιστοιχεί στο ζευγάρι (X, ℓ_2^n). Γράφουμε $u_\theta : X_\theta \to X$ για τον ταυτοτικό τελεστή, ο οποίος τώρα πηγαίνει από τον X_θ στον X. Από την παρατήρηση και από το Θεώρημα 4.2.1, υπάρχει ισομορφισμός $v : \ell_2^n \to X_\theta$ τέτοιος ώστε

$$d_k(v) = c_k(u^*) \leq C_1(n/k)^{1/2} \text{ και } c_k(v^{-1}) \leq C_1\phi(\theta)(n/k)^{1/2}$$

για κάθε $k = 1, \ldots, n$.
Παίρνοντας $\theta = 0, 1$, έχουμε $u_0 = I : X \to X$ και $u_1 = u : \ell_2^n \to X$. Από το Λήμμα 4.3.5,

$$d_k(u_\theta) \leq \|u_0\|^{1-\theta} d_k(u_1)^\theta = d_k(u)^\theta$$

και

$$c_k(u_\theta^{-1}) \leq \|u_0^{-1}\|^{1-\theta} c_k(u_1^{-1})^\theta = c_k(u^{-1})^\theta.$$

Από τον ορισμό της C έπεται ότι

$$d_k(u_\theta) \leq (C(n/k)^\alpha)^\theta \text{ και } c_k(u_\theta^{-1}) \leq (C(n/k)^\alpha)^\theta$$

για κάθε $k = 1, \ldots, n$.
Θεωρούμε τον τελεστή $w = u_\theta v : \ell_2^n \to X$. Από τις ιδιότητες των αριθμών προσέγγισης έχουμε

$$\begin{aligned} d_{2k-1}(w) &\leq d_k(u_\theta) d_k(v) \\ &\leq C_1 C^\theta (n/k)^{\alpha\theta + 1/2} \\ &= C_1 C^\theta (n/k)^\alpha \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} c_{2k-1}(w^{-1}) &\leq c_k(u_\theta^{-1})c_k(v^{-1}) \\ &\leq C_1\phi(\theta)C^\theta(n/k)^\alpha. \end{aligned}$$

Αν ορίσουμε $r = 2^\alpha C_1 C^\theta$, οι ανισότητες αυτές μας δίνουν

$$d_k(w) \leq r(n/k)^\alpha \text{ και } c_k(w^{-1}) \leq r\phi(\theta)(n/k)^\alpha$$

για κάθε $k = 1,\ldots,n$. Αν θέσουμε $w_1 = \phi(\theta)^{1/2}w$, παίρνουμε

$$d_k(w_1) \leq r\phi(\theta)^{1/2}(n/k)^\alpha \text{ και } c_k(w_1^{-1}) \leq r\phi(\theta)^{1/2}(n/k)^\alpha$$

για κάθε $k = 1,\ldots,n$. Από τον ορισμό της C,

$$C \leq r\phi(\theta)^{1/2} = C_1C^\theta 2^\alpha\phi(\theta)^{1/2},$$

άρα

$$C \leq C(\alpha) = \left(C_1 2^\alpha\phi(\theta)^{1/2}\right)^{\frac{1}{1-\theta}},$$

όπου $\theta = (\alpha - 1/2)/\alpha$. Παρατηρήστε ότι από την εκτίμηση που έχουμε για την $\phi(\theta)$ καθώς $\theta \to 0$ έπεται ότι $C(\alpha) = O((\alpha - 1/2)^{-1})$ καθώς $\alpha \to 1/2$.

Περνάμε τώρα στην πραγματική περίπτωση. Έστω X ένας n-διάστατος πραγματικός χώρος με νόρμα. Υπάρχει μιγαδικός n-διάστατος χώρος $\tilde{X}$ τέτοιος ώστε ο X να εμφυτεύεται ισομετρικά σε έναν πραγματικό n-διάστατο υπόχωρο του $\tilde{X}$ (αν τον δούμε σαν $2n$-διάστατο πραγματικό χώρο) και να υπάρχει $\mathbb{R}$-γραμμική προβολή $P : \tilde{X} \to X$ νόρμας 1. Για παράδειγμα, μπορούμε να πάρουμε $\tilde{X} = \mathbb{C}\otimes X$, τον χώρο όλων των $\mathbb{R}$-γραμμικών τελεστών από το $\mathbb{C}$ στον X. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $X \subseteq \tilde{X}$ αν ταυτίσουμε τον X με την εικόνα του μέσω της παραπάνω εμφύτευσης. Από την μιγαδική μορφή του θεωρήματος, υπάρχει ισομορφισμός $u_1 : \ell_2^n(\mathbb{C}) \to \tilde{X}$ τέτοιος ώστε

$$d_k(u_1) \leq C(n/k)^\alpha \text{ και } c_k(u_1^{-1}) \leq C(n/k)^\alpha$$

για κάθε $k = 1,\ldots,n$. Θέτουμε $H = u_1^{-1}(X)$. Τότε, μπορούμε να ταυτίσουμε τον H με τον $\ell_2^n(\mathbb{R})$. Αν ορίσουμε $u = Pu_1|_H : H \to X$, ο u είναι $\mathbb{R}$-γραμμικός ισομορφισμός και

$$d_{2k-1}(u) \leq d_k(u_1) \text{ και } c_{2k-1}(u^{-1}) \leq c_k(u_1^{-1})$$

όπου οι αριθμοί προσέγγισης θεωρούνται με την πραγματική έννοια για τους u, u^{-1} και με την μιγαδική έννοια για τους u_1, u_1^{-1}. Έπεται ότι ο u ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος με σταθερά την $C' = 2^\alpha C$. Η σταθερά 2^α προστίθεται για να περάσουμε από τους d_{2k-1}, c_{2k-1} στους d_k, c_k. $\square$

4.5 Εφαρμογές

Έστω K και T συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε την ποσότητα

$$M(K,T) = \left(\frac{|K+T|}{|K\cap T|} \cdot \frac{|K^\circ + T^\circ|}{|K^\circ \cap T^\circ|} \right)^{1/n}.$$

Θεώρημα 4.5.1 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C>0$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει ελλειψοειδές E στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε*

$$M(K,E)\leq C.$$

Απόδειξη: Έστω X ο n-διάστατος χώρος με νόρμα που ορίζεται από το K και u ο ισομορφισμός του Θεωρήματος 4.4.1. Από το Λήμμα 4.1.5 έχουμε

$$\max\{e_n(u), e_n(u^{-1}), e_n(u^*), e_n((u^{-1})^*)\} \leq t = \rho_\alpha C(\alpha).$$

Θέτουμε $E = u(B_{\ell_2^n})$. Τότε,

$$\max\{N(K,tE), N(E,tK), N(K^\circ, tE^\circ), N(E^\circ, tK^\circ)\} \leq 2^{n-1}.$$

Λήμμα 4.5.1 *Αν A, B και C είναι συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$|A+C| \leq N(A,B)|B+C|$$

και

$$N(A, 2(A\cap B)) \leq N(A,B). \qquad \square$$

Από το Λήμμα 4.5.1 με $A=K$, $B=tE$,

$$|K+E|^{1/n} \leq 2(t+1)|E|^{1/n}$$

και όμοια

$$|K^\circ + E^\circ|^{1/n} \leq 2(t+1)|E^\circ|^{1/n}.$$

Από το ίδιο Λήμμα,

$$N(E, 2(tK\cap E)) \leq 2^{n-1}$$

άρα

$$|E|^{1/n} \leq 4(t+1)|K\cap E|^{1/n}$$

και όμοια,

$$|E^\circ|^{1/n} \leq 4(t+1)|K^\circ \cap E^\circ|^{1/n}.$$

Έπεται ότι

$$M(K,E) \leq 64(t+1)^4.$$

Επιλέγοντας, για παράδειγμα, $\alpha=1$ και θεωρώντας τον αντίστοιχο $u=u_\alpha$ έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Πρώτη συνέπεια του Θεωρήματος 4.5.1 είναι η ανισότητα Santaló και η αντίστροφή της.

Θεώρημα 4.5.2 *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, ισχύει*

$$\frac{1}{C} \leq \left(\frac{|K| \cdot |K^\circ|}{|B_n|^2} \right)^{1/n} \leq C,$$

όπου C η σταθερά του Θεωρήματος 4.5.1.

Απόδειξη: Το γινόμενο όγκων $|K| \cdot |K^\circ|$ είναι αναλλοίωτο ως προς αντιστρέψιμους γραμμικούς μετασχηματισμούς, επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι $E = B_n$ στο προηγούμενο θεώρημα.
Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} |B_n|^2 &\leq |K + B_n| \cdot |K^\circ + B_n| \times \frac{|K|}{|K \cap B_n|} \cdot \frac{|K^\circ|}{|K^\circ \cap B_n|} \\ &= M(K, B_n)^n |K| \cdot |K^\circ| \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} |K| \cdot |K^\circ| &\leq \frac{|B_n|}{|K \cap B_n|} \cdot \frac{|B_n|}{|K^\circ \cap B_n|} \times |K + B_n| \cdot |K^\circ + B_n| \\ &= M(K, B_n)^n |B_n|^2, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο. □

Εφαρμόζοντας πιό προσεκτικά το Θεώρημα 4.4.1 σε συνδυασμό με το Λήμμα 4.1.5, παίρνουμε το εξής.

Λήμμα 4.5.2 *Για κάθε $\alpha > 1/2$ υπάρχει μία σταθερά $C_1 = C_1(\alpha) > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X υπάρχει ισομορφισμός $u : \ell_2^n \to X$ τέτοιος ώστε*

$$\max\{e_k(u), e_k(u^*), e_k(u^{-1}), e_k((u^{-1})^*)\} \leq C_1(n/k)^\alpha$$

για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Επιπλέον, $C_1(\alpha) = O((\alpha - 1/2)^{-1})$ καθώς το $\alpha \to 1/2$. □

Η γεωμετρική διατύπωση του λήμματος είναι η εξής.

Λήμμα 4.5.3 *Για κάθε $p < 2$ υπάρχει σταθερά A_p τέτοια ώστε για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ να μπορούμε να βρούμε ελλειψοειδές E στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί την*

$$\max\{N(K, tE), N(E, tK), N(K^\circ, tE^\circ), N(E^\circ, tK^\circ)\} \leq \exp(A_p n / t^p)$$

για κάθε $t \geq 1$. □

Ορισμός. Έστω $\alpha > 1/2$. Λέμε ότι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K είναι *α-κανονικό* αν ο χώρος X_K ικανοποιεί το Λήμμα 4.5.1 με u την ταυτοτική απεικόνιση. Τότε, υπάρχει $r > 0$ τέτοιος ώστε

$$\max\{N(K, tB_n), N(B_n, tK), N(K^\circ, tB_n), N(B_n, tK^\circ)\} \leq \exp(A_p n/t^p)$$

για κάθε $t \geq 1$, όπου $p = 1/\alpha$. Το Θεώρημα 4.4.1 δείχνει ότι κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα έχει γραμμική εικόνα που είναι α-κανονική.

Για τα α-κανονικά σώματα έχουμε μία ισχυρή μορφή της αντίστροφης ανισότητας Brunn-Minkowski.

Θεώρημα 4.5.3 *Έστω $\alpha > 1/2$ και $K_1, \ldots, K_m$ α-κανονικά συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|K_1 + \cdots + K_m|^{1/n} \leq b(\alpha) m^\alpha \sum_{j=1}^{m} |K_j|^{1/n}$$

όπου $b(\alpha)$ σταθερά που εξαρτάται μόνο από το α.

Απόδειξη: Από τον ορισμό του α-κανονικού σώματος, για κάθε $t \geq 1$ ισχύει

$$\max\{N(K_j, tr_j B_n), N(r_j B_n, tK_j)\} \leq \exp(A_p n/t^p)$$

όπου $p = 1/\alpha$. Επομένως,

$$N(K_1 + \cdots + K_m, t(r_1 B_n + \cdots + r_m B_n)) \leq \prod_{j=1}^{m} N(K_j, tr_j B_n) \leq \exp(A_p nm/t^p).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} |K_1 + \cdots + K_m|^{1/n} &\leq t \exp(A_p m/t^p) |r_1 B_n + \cdots + r_m B_n|^{1/n} \\ &= t \exp(A_p m/t^p) \left(|r_1 B_n|^{1/n} + \cdots + |r_m B_n|^{1/n} \right). \end{aligned}$$

Από την $N(r_j B_n, K_j) \leq \exp(A_p n)$ βλέπουμε ότι

$$|r_j B_n|^{1/n} \leq \exp(A_p) |K_j|^{1/n}$$

άρα

$$|K_1 + \cdots + K_m|^{1/n} \leq t \exp(A_p + A_p m/t^p) \left(|K_1|^{1/n} + \cdots + |K_m|^{1/n} \right).$$

Αν επιλέξουμε $t = m^\alpha = m^{1/p}$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται το εξής δυϊκό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.5.4 *Έστω $\alpha > 1/2$ και $K_1, \ldots, K_m$ α-κανονικά συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|K_1 \cap \cdots \cap K_m|^{1/n} \geq \delta(\alpha) m^{-1-\alpha} \inf \left\{ |K_1|^{1/n}, \ldots, |K_m|^{1/n} \right\}$$

όπου $\delta(\alpha)$ σταθερά που εξαρτάται μόνο από το α. □

Βιβλιογραφία

[Bog] V.I.Bogachev, *Gaussian measures*, Mathematical Surveys and Monographs,Vol.62,AMS (1998).

[FT] T. Figiel and N. Tomczak-Jaegermann, *Projections onto Hilbertian subspaces of Banach spaces*, Israel J. Math. **33** (1979), 155-171.

[Gar] R.J. Gardner, *Geometric Tomography*, Cambridge University Press, New York, 1995.

[GMR] Y. Gordon, M. Meyer and S. Reisner, *Zonoids with minimal volume product - a new proof*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), 273-276.

[Jo] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Courant Anniversary Volume, Interscience, New York (1948), 187-204.

[Le] D.R. Lewis, *Ellipsoids defined by Banach ideal norms*, Mathematika **26** (1979), 18-29.

[LT] M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability in Banach spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge, Vol. 23 Springer, Berlin (1991).

[Mi1] V.D. Milman, *Inegalité de Brunn-Minkowski inverse et applications à la théorie locale des espaces normés*, C.R. Acad. Sci. Paris **302** (1986), 25-28.

[Mi2] V.D. Milman, *Isomorphic symmetrization and geometric inequalities*, Lecture Notes in Mathematics **1317** (1988), 107-131.

[MP] M. Meyer and A. Pajor, *On Santaló's inequality*, Lecture Notes in Mathematics **1376**, Springer, Berlin (1989), 261-263.

[MS] V.D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Mathematics **1200** (1986), Springer, Berlin.

[Pi1] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).

[Pi2] G. Pisier, *Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces*, Annals of Math. **115** (1982), 375-392.

[Pi3] G. Pisier, *Sur les espaces de Banach K-convexes*, Séminaire d' Analyse Fonctionelle 79-80, Ecole Polytechnique, Palaiseau, Exp. no 11.

[Pi4] G. Pisier, *A new approach to several results of V. Milman*, J. reine angew. Math. **393** (1989), 115-131.

[PT] A. Pajor and N. Tomczak-Jaegermann, *Subspaces of small codimension of finite dimensional Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 637-642.

[R] S. Reisner, *Zonoids with minimal volume product*, Math. Z. **192** (1986), 339-346.

[RS] C.A. Rogers and G. Shephard, *The difference body of a convex body*, Arch. Math. **8** (1957), 220-233.

[Sch] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **44**, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[Su] V.N. Sudakov, *Gaussian random processes and measures of solid angles in Hilbert spaces*, Soviet Math. Dokl. **12** (1971), 412-415.

[SR] J. Saint-Raymond, *Sur le volume des corps convexes symétriques*, Sem. d'Initiation à l'Analyse, 1980-81, no. 11.

[T] N. Tomczak-Jaegermann, *Dualité des nombres d'entropie pour des opérateurs à valeurs dans un espace de Hilbert*, C.R. Acad. Sci. Paris **305** (1987), 299-301.