ΜΕΓΙΣΤΙΚΟΣ ΤΕΛΕΣΤΗΣ

29 Ιουνίου 2015

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Σκοπός της εν λόγω εργασίας είναι να αποδείξει ότι ο μεγιστικός τελεστής Μ με τύπο

$$\mathrm{M}(f)(x) = M^{(n)}f(x) = sup_{r>0}\frac{1}{c_n r^n}\int_{|y|\leq r}|f(x-y)|dy,$$

όπου c_n είναι ο όγκος της μοναδιαίας σφαίρας στον R^n, είναι ισχυρά (p,p), δηλαδή $\mathrm{M} : \mathbb{L}^p \to \mathbb{L}^p$ φραγμένος τελεστής, για $p > 1$, καθώς επίσης ότι το φράγμα είναι ανεξάρτητο της διάστασης n για κάθε $p > 1$.

2 Μεγιστικός τελέστης στην μπάλα

Η σχέση, δηλαδή, που θα αποδείξουμε είναι η εξής:

2.1 Βασικό θεώρημα

Θεώρημα 2.1 *Έστω $1 < p \leq \infty$. Για κάθε $f \in L^p$ υπάρχει σταθερά A_p ανεξάρτητη του n, τέτοια ώστε:*

$$\| \mathrm{M}^n(f) \|_p \leq A_p \| f \|_p \tag{1}$$

Αξιοσημείωτο είναι ότι οποιοδήποτε επιχείρημα καλύψεων καταλήγει σε ασθενές (1,1) φράγμα, που εξαρτάται εκθετικά από το n, με αποτέλεσμα, ύστερα από interpolation, να καταλήγουμε στη σχέση (1) με τη σταθερά A_p να εξαρτάται εκθετικά από το n. Επομένως θα ασχοληθούμε με το αν είναι δυνατό ο τελεστής M^n να είναι ασθενώς (1,1) φραγμένος με φράγμα ανεξάρτητο της διάστασης, καθώς επίσης θα εξετάσουμε τη γενική περίπτωση που οι κλασικές μπάλες στον R^n αντικαθίστανται από τυχαία σύνολα, με συγκεκριμένες ιδιότητες, που αυξομειώνονται.

Ορισμοί Παραθέτουμε τους συμβολισμούς, που θα χρησιμοποιούμε σε όλη την εργασία:

1. Θεωρούμε B οποιοδήποτε φραγμένο, ανοιχτό, κυρτό και συμμετρικό σύνολο του R^n.

2. $B^r = \{x|r^{-1}x \in B\}, r > 0$.

3. Θεωρούμε $M = M_B$, όπου $M_B(f)(x) = sup_{r>0} \frac{1}{(m(B_r))^{-1}} \int_{B^r} |f(x-y)|dy$.

4. Η νόρμα ($|x|_B$) στον R^n που ορίζεται από το σύνολο B είναι: $|x|_B = inf\{r|r^{-1}x \in B\}$.

5. $B^r(x_0)$ είναι η γενικευμένη μπάλα κέντρου x_0 και ακτίνας r, δηλαδή $B^r(x_0) = \{x|x - x_0 \in B^r\}$.

6. Αν υποθέσουμε ότι B είναι οποιαδήποτε γενικευμένη μπάλα κέντρου x_0 και ακτίνας r, τότε με B^* συμβολίζουμε τη γενικευμένη μπάλα με το ίδιο κέντρο και ακτίνα nr. Ομοίως, με B^{**} B^{***} συμβολίζουμε τις γενικευμένες μπάλες με κέντρο x_0 και ακτίνες $(n+1)r$ και $(n+2)r$ αντιστοίχως.

Προκειμένου να αποδείξουμε τη σχέση (1), θα χρειαστούμε δύο λήμματα και κάποια βοηθητικά θεωρήματα. Τα λήμματα έχουν ως εξής:

Λήμμα 2.1 *Έστω $\{B_a\}_a$ οποιαδήποτε πεπερασμένη συλλογή από μπάλες. Μπορούμε να βρούμε ένα υποσύνολο αυτών, έστω $B_1, B_2, ..., B_{\mathrm{N}}$, με τις ακόλουθες ιδιότητες. Ορίζουμε $I_k = B_k \diagdown (B_1 \cup ... \cup B_{k-1})$ και ισχύουν:*

$$m(\cup_a B_a) \leq c_1 m(\cup_{j=1}^N B_j) \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{m(I_j)}{m(B_j^*)} \chi_{B_j^*} \leq c_2 nlogn \tag{3}$$

Απόδειξη Η μέθοδος, σύμφωνα με την οποία επιλέγουμε τις μπάλες $B_1, B_2, ..., B_{\mathrm{N}}$, είναι η εξής: ορίζουμε B_1 να είναι η μπάλα με τη μεγαλύτερη ακτίνα. Ας θεωρήσουμε ότι έχουν ήδη επιλεγεί οι μπάλες $B_1, B_2, ..., B_{k-1}$, οι οποίες, προφανώς, ορίζουν και τα αντίστοιχα $I_1, I_2, ..., I_{k-1}$. Ορίζουμε B_k να είναι η μπάλα με τη μεγαλύτερη ακτίνα ανάμεσα σ' αυτές, τα κέντρα (y_k) των οποίων ικανοποιούν τη σχέση:

$$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{m(I_j)}{m(B_j^*)} \chi_{B_j^{**}}(y_k) \leq 1$$

Για τη σχέση (2):

Ας υποθέσουμε ότι B_a είναι μια μπάλα που δεν έχει επιλεγεί.Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{m(I_j)}{m(B_j^*)} \chi_{B_j^{***}}(x) > 1, \tag{4}$$

για κάθε $x \in B_a$.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού ορίζουμε r_a και y_a την ακτίνα και το κέντρο αντίστοιχα της μπάλας B_a. Θεωρούμε όλες τις μπάλες B_j με αντίστοιχες ακτίνες r_j, τέτοιες ώστε $r_j \geq r_a$. Παρατηρούμε ότι, αν $y_a \in B_j^{**} \Leftrightarrow |y_a - y_j|_B < (n+1)r_j$ και $x \in B_a \Leftrightarrow |x - y_a|_B < r_a$, τότε, λόγω τριγωνικής ανισότητας, έχουμε: $|x - y_j|_B < (n+2)r_j$, δηλαδή $x \in B_j^{***}$. Και επειδή ισχύει ότι

$$\sum_{r_j \geq r_a} \frac{m(I_j)}{m(B_j^*)} \chi_{B_j^{**}}(y_a) > 1,$$

αφού η μπάλα B_a δεν έχει επιλεγεί, ισχύει

$$\sum_{r_j \geq r_a} \frac{m(I_j)}{m(B_j^*)} \chi_{B_j^{***}}(x) > 1$$

για κάθε $x \in B_a$ (ισχυρισμός).

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (4) ως προς την ένωση των μπαλών, που δεν έχουν επιλεγεί, καταλήγουμε στη σχέση

$$m(\cup_{\alpha\pi o\upsilon\delta\varepsilon\nu\chi o\upsilon\nu\varepsilon\pi\iota\lambda\varepsilon\gamma\varepsilon} B_a) < \sum m(I_j) \frac{m(B_j^{***})}{m(B_j^*)}$$

$$\Leftrightarrow m(\cup_{\dots} B_a) < (\sum m(I_j))(\frac{n+2}{n})^n \leq e^2 \sum m(I_j) = e^2 m(\cup B_j)$$

$$\Leftrightarrow m(\cup_a B_a) \leq (e^2 + 1) m(\cup B_j),$$

δηλαδή στη σχέση (2) έχουμε $c_1 = e^2 + 1$.

Για τη σχέση (3):

θεωρούμε $x \in R^n$, τέτοιο ώστε

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{m(I_j)}{m(B_j^*)} \chi_{B_j^*}(x) > 0.$$

Την μικρότερη ακτίνα r_j, για την οποία ισχύει $\chi_{B_j^*}(x) > 0$ (ισοδύναμα $x \in B_j^*$), την συμβολίζουμε r_k. Ύστερα από κατάλληλη μεταφορά και αυξομείωση, θεωρούμε ότι $x = 0$ και $r_k = 1$. Επομένως, για κάθε ακτίνα που έχει ενδιαφέρον, ισχύουν: $r_j \geq 1$ καθώς επίσης

$$0 \in B_k^* \Leftrightarrow |y_k|_B < n \tag{5}$$

$$y_k \in B_j^{**} \Leftrightarrow |y_k - y_j|_B < (n+1)r_j \tag{6}$$

$$0 \in B_j^* \Leftrightarrow |y_j|_B < nr_j \tag{7}$$

Αναλύουμε το άθροισμα, που μας ενδιαφέρει, σε δύο επιμέρους αθροίσματα, δηλαδή

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{m(I_j)}{m(B_j^*)} \chi_{B_j^*}(0) = I + II,$$

όπου

$$I = \sum_{r_j \geq n} \frac{m(I_j)}{m(B_j^*)} \chi_{B_j^*}(0)$$

και

$$II = \sum_{1 \leq r_j < n} \frac{m(I_j)}{m(B_j^*)} \chi_{B_j^*}(0)$$

Παρατηρούμε ότι ο j-οστός όρος στο άθροισμα I είναι μη μηδενικός μόνο αν $0 \in B_j^*$, από το οποίο συνεπάγεται, λόγω (5)-(7), ότι $y_k \in B_j^{**}$ (αφού $|y_k - y_j|_B \leq |y_k|_B + |y_j|_B < n + nr_j \leq (n+1)r_j$, επειδή $r_j \geq n$). Επίσης, επειδή η μπάλα B_k έχει επιλεγεί, ισχύει

$$\sum_{r_j > 1} \frac{m(I_j)}{m(B_j^*)} \chi_{B_j^{**}}(y_k) \leq 1,$$

επομένως έχουμε

$$I = \sum_{r_j \geq n} \frac{m(I_j)}{m(B_j^*)} \chi_{B_j^*}(0) \leq 1.$$

Το επόμενο που έχουμε να υπολογίσουμε είναι το άθροισμα

$$\sum_{a \leq r_j < b} \frac{m(I_j)}{m(B_j^*)} \chi_{B_j^*}(0),$$

όπου $1 \leq a < b$.

Στο άθροισμα παρατηρούμε ότι $m(B_j^*) \geq m(B)(na)^n$, όπου $m(B)$ είναι το μέτρο της μοναδιαίας μπάλας. Επίσης, τα σύνολα I_j είναι ξένα μεταξύ τους και καθένα από αυτά περιέχεται σε μια μπάλα ακτίνας $< b$ με κέντρο y_j, επομένως η ένωσή τους περιέχεται στη μπάλα, που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $(n+1)b$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, έχουμε:

$$\sum_{r_j \leq b} m(I_j)\chi_{B_j^*}(0) \leq m(B)((n+1)b)^n,$$

άρα ισχύει

$$\sum_{a \leq r_j < b} \frac{m(I_j)}{m(B_j^*)}\chi_{B_j^*}(0) \leq \frac{((n+1)b)^n}{(na)^n} = (1+1/n)^n(b/a)^n$$

δηλαδή

$$\sum_{a \leq r_j < b} \frac{m(I_j)}{m(B_j^*)}\chi_{B_j^*}(0) \leq e(b/a)^n. \tag{8}$$

Τέλος, γράφουμε το άθροισμα II ως:

$$II = \sum_{1 \leq r_j < n} = \sum_{l=1}^{m} II_l,$$

όπου II_l το άθροισμα πάνω από όλες τις ακτίνες r_j με $(1+1/n)^{l-1} \leq r_j < (1+1/n)^l$. Θέτοντας όπου $a = (1+1/n)^{l-1}$ και $b = (1+1/n)^l$ στη σχέση (8), έχουμε

$$II_l \leq e(1+1/n)^n \leq e^2.$$

Παρατηρώντας ότι, για κατάλληλο $c_0 > 0$, ισχύει $(1+1/n)^{c_0 nlogn} \geq n$, θεωρούμε $m = c_0 nlogn$ και έχουμε

$$II = \sum_{l=1}^{m} II_l \leq e^2 c_0 nlogn,$$

που ολοκληρώνει τη σχέση (3).

2.2 Γενική περίπτωση μπάλας

Ύστερα από τους ορισμούς και το απαραίτητο λήμμα, το πρώτο θεώρημα, που θα αποδείξουμε, αφορά τη γενική περίπτωση μπάλας, δηλαδή θεωρούμε ότι B είναι ένα ανοιχτό, φραγμένο, κυρτό και συμμετρικό σύνολο του R^n. Βάσει αυτού, ορίζονται, όπως είδαμε, το σύνολο $B^r = \{x | r^{-1}x \in B\}$ καθώς και ο τελεστής M με

$$M(f)(x) = sup_{r>0}\frac{1}{m(B^r)}\int_{B^r}|f(x-y)|dy.$$

2.2.1 Στο χώρο L^1

Θεώρημα 2.2 *Έστω $n > 1$. Υπάρχει σταθερά c ανεξάρτητη του B και του n, τέτοια ώστε, για κάθε $\lambda > 0$, να ισχύει:*

$$m\{x|M(f)(x) > \lambda\} \leq \frac{c}{\lambda} nlogn \parallel f \parallel_1 \tag{9}$$

Απόδειξη Θεωρούμε $f \geq 0$ και αντί για τον τελεστή M ορίζουμε τον $\tilde{M}$, με

$$(\tilde{M}f)(x) = sup_{x\in B^*} \frac{1}{m(B^*)} \int_{B^*} f(y)dy.$$

Προφανώς ισχύει $\tilde{M}f(x) \geq Mf(x)$ (καθώς επίσης είναι εύκολο να δείξουμε ότι $\tilde{M}f(x) \leq eMf(x)$, αφού...). Επομένως, αρκεί να δείξουμε τη σχέση (9) με τον τελεστή $\tilde{M}$ αντί του M.

Θεωρούμε το σύνολο $E_\lambda = \{x|\tilde{M}f(x) > \lambda\}$ και οποιοδήποτε συμπαγές σύνολο K, τέτοιο ώστε $K \subset E_\lambda$. Για κάθε $x \in K$ υπάρχει μια μπάλα $B(x)$, με $x \in B(x)$, τέτοια ώστε

$$\frac{1}{m(B^*(x))} \int_{B^*(x)} f(y)dy > \lambda$$

(εξ ορισμού του τελεστή $\tilde{M}$).

Λόγω συμπάγειας, μπορούμε να επιλέξουμε μια πεπερασμένη συλλογή (έστω $\{B_a\}_a$) από μπάλες $B(x)$, που να καλύπτουν το K. Λόγω του λήμματος, υπάρχουν n μπάλες από αυτές, έστω $B_1, ..., B_n$, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση:

$$m(K) \leq m(\cup_a B_a) \leq c_1 m(\cup_{j=1}^N B_j).$$

Επιπλέον, έχουμε

$$m(\cup_{j=1}^N B_j) = m(\cup_{j=1}^N I_j) = \sum_{j=1}^N m(I_j),$$

αφού τα σύνολα I_j είναι μεταξύ τους ξένα, καθώς επίσης μπορούμε να γράψουμε

$$m(I_j) = \frac{m(I_j)}{m(B_j^*)} m(B_j^*)$$

και

$$m(B_j^*) < \frac{1}{\lambda} \int_{B_j^*} f(y)dy.$$

Ύστερα από τα παραπάνω έχουμε:

$$\sum_{j=1}^N m(I_j) \leq \frac{1}{\lambda} \int \sum_{j=1}^N \frac{m(I_j)}{m(B_j^*)} \chi_{B_j^*}(y) f(y)dy$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{N} m(I_j) \leq \frac{c_2}{\lambda} nlogn \int f(y)dy,$$

από την οποία αποδεικνύεται η ανισότητα $m(K) \leq \frac{c}{\lambda} nlogn \parallel f \parallel_1$, όπου $c = c_1 c_2$. Αν πάρουμε το supremum πάνω από όλα τα συμπαγή σύνολα K, με $K \subset E_\lambda$, καταλήγουμε στη σχέση (9).

2.2.2 Στο χώρο L^p με $p > 1$

Στην επόμενη ενότητα θα δείξουμε ότι, αν $p > 1$, ο τελεστής M είναι ισχυρά (p-p), δηλαδή έχουμε $M : \mathbb{L}^p \to \mathbb{L}^p$, και θα κάνουμε μια εκτίμηση για το φράγμα του. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε τη γενική μπάλα B ως ένα σύνολο ανοιχτό, φραγμένο και ακτινικό, δηλαδή $B = \{x | x = t\theta$ με $0 \leq t < \rho(\theta),\ \theta \in S^{n-1}\}$, όπου S^{n-1} η μοναδιαία σφαίρα στον R^n και ρ μια θετική και φραγμένη συνάρτηση στον S^{n-1}. Το θεώρημα, που θα αποδείξουμε, έχει ως εξής:

Θεώρημα 2.3 *Έστω $1 < p \leq \infty$ και B όπως παραπάνω, τότε ισχύει:*

$$\parallel \mathrm{M}(f) \parallel_p \leq cn\frac{p}{p-1} \parallel f \parallel_p \tag{10}$$

όπου c ανεξάρτητο του n και του B.

Απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των "στροφών". Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, συμβολίζουμε με M^θ τη μεγιστική συνάρτηση στην κατεύθυνση θ, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$(M^\theta)(f)(x) = sup_{r>0} \left\{ \frac{\int_0^r |f(x - t\theta)| t^{n-1} dt}{\int_0^r t^{n-1} dt} \right\}.$$

Θεωρούμε $f \geq 0$ και έχουμε:

$$\int_{B^r} f(x-y)dy = \int_{S^{n-1}} \int_0^{r\rho(\theta)} f(x - t\theta) t^{n-1} dt d\theta$$

$$\Leftrightarrow \int_{B^r} f(x-y)dy \leq r^n \int_{S^{n-1}} \{M^\theta(f)(x) \int_0^{\rho(\theta)} t^{n-1} dt\} d\theta,$$

καταλήγοντας στη σχέση

$$sup_{r>0} \frac{1}{m(B^r)} \int_{B^r} f(x-y)dy \leq \frac{1}{m(B)} \int_{S^{n-1}} \{M^\theta(f)(x) \int_0^{\rho(\theta)} t^{n-1} dt\} d\theta.$$

Αν θεωρήσουμε μόνο μια διάσταση, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$sup_{T>0} \frac{\int_0^T f(x-t) t^{n-1} dt}{\int_0^T t^{n-1} dt} \leq nsup_{T>0} \frac{1}{T} \int_0^T f(x-t)dt,$$

απ' όπου, σύμφωνα με το μεγιστικό θεώρημα για τη μια διάσταση, παίρνουμε:

$$\| M^{\theta}(f) \|_p \leq cn(p/p-1) \| f \|_p \ .$$

Με τη βοήθεια της παραπάνω σχέσης, καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$$\| M_B(f) \|_p \leq cn(p/p-1) \| f \|_p \frac{1}{m(B)} \int_{S^{n-1}} \int_0^{\rho(\theta)} t^{n-1} dt d\theta$$

και επειδή γνωρίζουμε ότι $\int_{S^{n-1}} \int_0^{\rho(\theta)} t^{n-1} dt d\theta = m(B)$, η απόδειξη του θεωρήματος έχει ολοκληρωθεί.

Παρατηρώντας τη μορφή του ανωτέρω φράγματος, βλέπουμε ότι η συμπεριφορά του είναι αναμενόμενη, όταν $p \to 1$, ενώ δεν είναι η καλύτερη δυνατή, όταν $n \to \infty$.

2.3 B είναι η κανονική μπάλα στον R^N

Σ' αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε την ειδική περίπτωση, στην οποία B είναι η συνηθισμένη μοναδιαία μπάλα στον R^n, και θα δούμε πώς μπορούν να βελτιωθούν τα προηγούμενα αποτελέσματα.

2.3.1 Στο χώρο L^1

Το πρώτο θεώρημα, που αφορά την περίπτωση, στην οποία ισχύει $p = 1$, έχει ως εξής:

Θεώρημα 2.4 *Έστω $n > 1$. Υπάρχει σταθερά c ανεξάρτητη του B και του n, τέτοια ώστε, για κάθε $\lambda > 0$, να ισχύει:*

$$m\{x|M(f)(x) > \lambda\} \leq \frac{cn}{\lambda} \| f \|_1 \tag{11}$$

Απόδειξη Για την απόδειξη του θεωρήματος, θεωρούμε την semi-group της εξίσωσης θερμότητας στον R^n, που δίνεται από τη σχέση

$$T^t(f) = f * h_t,$$

όπου

$$h_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}.$$

Παρατηρούμε ότι: $\| T^t f \|_1 \leq \| f \|_1$, $\| T^t f \|_\infty \leq \| f \|_\infty$, $T^t(1) = 1$ και $T^t f \geq 0$ για $f \geq 0$. Ικανοποιούνται, δηλαδή, όλες οι υποθέσεις του μεγιστικού εργοδικού θεωρήματος, με αποτέλεσμα να παίρνουμε (για $\lambda > 0$)

$$m\{x|sup_{s>0} \frac{1}{s} \int_0^s (T^t f)(x) dt > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} \| f \|_1 \ .$$

Θεωρούμε $f \geq 0$ και θα αποδείξουμε το θεώρημα συγκρίνοντας τη συνάρτηση $Mf(x)$ με την $a_n sup_{s>0} \frac{1}{s} \int_0^s (T^t f)(x) dt$ για κατάλληλο a_n. Για να το πετύχουμε αυτό, αρκεί να βρούμε κατάλληλο s_0, τέτοιο ώστε

$$m(B)^{-1} \chi_B(x) \leq a_n \frac{1}{s_0} \int_0^{s_0} h_t(x) dt \tag{12}$$

Δεδομένης της παραπάνω σχέσης, καταλήγουμε στην ανισότητα

$$Mf(x) \leq a_n sup_{s>0} \frac{1}{s} \int_0^s (T^t f)(x) dt$$

(αφού...) Παρατηρώντας ότι οι συναρτήσεις $\chi_B(x)$ και $h_t(x)$ είναι ακτινικές και φθίνουσες, είναι προφανές ότι η σχέση (12) είναι ισοδύναμη με τη σχέση

$$m(B)^{-1} \leq a_n \frac{1}{s_0} \int_0^{s_0} h_t dt, \tag{13}$$

όπου $h_t = (4\pi t)^{-n/2} e^{-1/4t}$. Προκύπτει ότι μια ικανοποιητική επιλογή για το s_0 στη σχέση (13) είναι μια ποσότητα μεγαλύτερη από $1/2n$. Προκειμένου να απλουστεύσουμε τους υπολογισμούς, επιλέγουμε την τιμή $s_0 = 1/n$. Ισχύει:

$$\int_0^\infty h_t dt = \pi^{-n/2} \int_0^\infty (4t)^{-n/2} e^{-1/4t} dt = \frac{\pi^{-n/2}}{4} \int_0^\infty u^{n/2-2} e^{-u} du$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty h_t dt = \frac{\pi^{-n/2}}{4} \Gamma(n/2-1),$$

ενώ, για μεγάλο n, έχουμε:

$$\int_{s_0}^\infty h_t dt = \frac{\pi^{-n/2}}{4} \int_0^{\frac{1}{4s_0}} u^{n/2-2} e^{-u} du \leq e^{-n/4} (4\pi)^{-n/2} n^{n/2-1}.$$

Για την τελευταία ποσότητα, λόγω του τύπου του Stirling, ισχύει ότι $o(\pi^{-n/2}\Gamma(n/2-1))$ καθώς $n \to \infty$, επομένως έχουμε:

$$\int_0^s h_t dt \geq c\pi^{-n/2} \Gamma(n/2-1).$$

Επειδή γνωρίζουμε ότι

$$m(B)^{-1} = 1/2\pi^{-n/2} n \Gamma(n/2),$$

η σχέση (13) ισχύει για $a_n = c'n$, που ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος.

2.3.2 Στο χώρο L^p με $p > 1$

Η τελευταία ενότητα μελετάει την περίπτωση, κατά την οποία με B παριστάνεται η κανονική μοναδιαία μπάλα και ισχύει $1 < p \leq \infty$. Το θεώρημα διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 2.5 *Έστω $n > 1$ και $1 < p \leq \infty$. Υπάρχει σταθερά c ανεξάρτητη του B και του n, τέτοια ώστε:*

$$\| M(f) \|_p \leq c(p/(p-1))n^{1/2} \| f \|_p \tag{14}$$

Απόδειξη Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε ...Επειδή η εξίσωση θερμότητας $T^t(f) = f * h_t$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του ανωτέρω θεωρήματος, παίρνουμε (για $1 < p \leq \infty$):

$$\| sup_{t>0} T^t f \|_p \leq A_p \| f \|_p$$

με το φράγμα A_p ανεξάρτητο του n. Από το ίδιο μεγιστικό θεώρημα παίρνουμε ότι $A_p \leq c(p/(p-1))$. Επομένως, όπως ακριβώς συνέβη και στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, αρκεί να βρούμε κατάλληλα b_n και t_0, τέτοια ώστε

$$m(B)^{-1}\chi_B(x) \leq b_n h_{t_0}(x),$$

το οποίο, όπως προηγουμένως, είναι ισοδύναμο με το

$$m(B)^{-1} \leq b_n (4\pi t_0)^{-n/2} e^{-1/(4t_0)}, \tag{15}$$

Θεωρούμε $t_0 = 1/2n$ και η σχέση (15) γράφεται:

$$1/2\pi^{-n/2} n\Gamma(n/2) = b_n (2\pi/n)^{-n/2} e^{-n/2}$$

Επομένως, βάσει του τύπου του Stirling, η ανωτέρω σχέση ισχύει για $b_n = cn^{1/2}$ και κατάλληλα μεγάλη σταθερά c, ολοκληρώνοντας την απόδειξη του θεωρήματος.

Γενικό συμπέρασμα:

Παρατηρώντας τον τύπο $\| M(f) \|_p \leq c(p/(p-1))n^{1/2} \| f \|_p$ του τελευταίου θεωρήματος και συγκρίνοντάς τον με τον αντίστοιχο τύπο του αρχικού θεωρήματος της εργασίας, φαίνεται σαν να μην έχει καμία αξία. Παρ' ολ' αυτά ο τελευταίος τύπος έχει την κατάλληλη συμπεριφορά, όταν $p \to 1$, αλλά δε συμβαίνει το ίδιο καθώς μεγαλώνει το n. Ακόμη, όμως, και σ' αυτή την περίπτωση, ο ρυθμός αύξησης είναι μικρότερος από αυτόν στην περίπτωση της γενικής μπάλας, καθώς επίσης και από αυτόν που θα παίρναμε, αν εφαρμόζαμε το θεώρημα Marcinkiewicz στο προτελευταίο θεώρημα.

3 Παράρτημα A

3.1 Εισαγωγή

Σ' αυτή την ενότητα θα συμβολίζουμε με $d\sigma$ το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue στην επιφάνεια της σφαίρας S^{n-1}.

Ορισμός Για κάθε $f \in L^p(R^n)$, με $1 \leq p \leq \infty$ ορίζουμε τον μεγιστικό τελεστή M με τύπο

$$M(f)(x) = \sup_{t>0} \left| \int_{S^{n-1}} f(x - t\theta) d\sigma(\theta) \right|$$

τον οποίο αποκαλούμε σφαιρικό μεγιστικό τελεστή.

Σύμφωνα με τις ανισοτικές σχέσεις του Minkowski για ολοκληρώματα, η παράσταση μέσα στο supremum ορίζεται για σχεδόν κάθε $x \in R^n$.

Μια πολύ χρήσιμη παρατήρηση αφορά τον μετασχηματισμό Fourier του μέτρου $d\sigma$. Δηλαδή, ισχύει

$$\hat{d\sigma}(\xi) = \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i \xi \cdot \theta} d\theta$$

$$\hat{d\sigma}(\xi) = \frac{2\pi}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi|\xi|)$$

και επειδή γνωρίζουμε ότι, για τη συνάρτηση Bessel J_k, ισχύει

$$J_k(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos\left(r - \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(r^{-\frac{3}{2}})$$

καθώς $r \to \infty$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

$$|\hat{d\sigma}(\xi)| \leq \frac{C_n}{(1 + |\xi|)^{\frac{n-1}{2}}}$$

φράγμα που θα χρησιμοποιήσουμε στα λήμματα, που ακολουθούν.

3.2 Βασικό θεώρημα

Θεώρημα 3.1 *Έστω $n \geq 3$. Για κάθε $\frac{n}{n-1} < p \leq \infty$ υπάρχει σταθερά C_p, τέτοια ώστε:*

$$\| \mathrm{M}(f) \|_{L^p(R^n)} \leq C_p \| f \|_{L^p(R^n)} \tag{16}$$

Απόδειξη Για την απόδειξη του ανωτέρω θεωρήματος είναι αναγκαίο να μελετήσουμε τον μεγιστικό πολλαπλασιαστικό τελεστή $\sup_{t>0}|(\hat{f}(\xi)m(t\xi))^{\vee}|$, όπου $m(\xi) = \widehat{d\sigma}(\xi)$, καθώς επίσης και δύο σχετικά λήμματα.

Κατ' αρχήν αναλύουμε τη συνάρτηση $m(\xi)$ σε ακτινικές συνιστώσες ως εξής: Θεωρούμε κατάλληλη ακτινική, φθίνουσα, C^{∞} συνάρτηση φ_0 στον R^n, τέτοια ώστε $\varphi_0(\xi) = 1$ όταν $|(\xi)| \leq 1$ και $\varphi_0(\xi) = 0$ όταν $|\xi| \geq 2$.Για $j \geq 1$ θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi_j(\xi) = \varphi_0(2^{-j}\xi) - \varphi_0(2^{1-j}\xi)$ και παρατηρούμε ότι η $\varphi_j(\xi)$ είναι μη μηδενική γύρω από την περιοχή $|\xi| \approx 2^j$. Ισχύει

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j = 1$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$m = \sum_{j=0}^{\infty} m_j,$$

όπου $m_j = \varphi_j m$ για κάθε $j \geq 0$. Ισχύει, επίσης,

$$M(f) \leq \sum_{j=0}^{\infty} M_j(f),$$

όπου

$$M_j(f)(x) = \sup_{t>0}|(\hat{f}(\xi)m_j(t\xi))^{\vee}(x)|.$$

Επειδή η συνάρτηση m_0 είναι C^{∞} με συμπαγή φορέα, ισχύει ότι ο τελεστής M_0 είναι ισχυρά p-p για κάθε $1 < p \leq \infty$ (βασική άσκηση).

Ορισμός Ορίζουμε τη g-συνάρτηση τη σχετιζόμενη με την αντίστοιχη m_j ως εξής:

$$G_j(f)(x) = \left(\int_0^{\infty} |A_{j,t}(f)(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}},$$

όπου $A_{j,t}(f)(x) = (\hat{f}(\xi)m_j(t\xi))^{\vee}(x)$.

3.3 Δύο χρήσιμα λήμματα

Λήμμα 3.1 *Υπάρχει σταθερά $C = C(n) < \infty$, τέτοια ώστε για κάθε $j \geq 1$ να ισχύει*

$$\| \mathrm{M}_j(f) \|_{L^2} \leq C2^{(\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2})j} \| f \|_{L^2}, \tag{17}$$

για κάθε $f \in L^2(R^n)$

Απόδειξη Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\tilde{m}_j(\xi) = \xi \cdot \nabla m_j(\xi)$$

και βάσει αυτής τις αντίστοιχες

$$\tilde{\mathrm{A}}_{j,t}(f)(x) = (\hat{f}(\xi)\tilde{m}_j(t\xi))^{\vee}(x)$$

και

$$\tilde{G}_j(f)(x) = \left(\int_0^{\infty} |A_{j,t}(f)(x)|^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Είναι προφανές ότι για κάθε j, t και για κάθε συνάρτηση f στον χώρο Schwartz ισχύει

$$t\frac{dA_{j,t}}{dt}(f) = \tilde{\mathrm{A}}_{j,t}(f),$$

(αφού...)

Επίσης ισχύει

$$\lim_{s\to\infty} A_{j,s}(f) = \lim_{s\to\infty} \tilde{\mathrm{A}}_{j,s}(f) = 0$$

για κάθε συνάρτηση f στον χώρο Schwartz, αφού...

Λόγω των ανωτέρω, αν θεωρήσουμε συνάρτηση f στον χώρο Schwartz, έχουμε (για $t \geq 0$):

$$A_{j,t}(f)^2(x) = 2\int_t^{\infty} A_{j,s}(f)(x)s\frac{dA_{j,s}}{ds}(f)(x)\frac{ds}{s} = 2\int_t^{\infty} A_{j,s}(f)(x)\tilde{A}_{j,s}(f)(x)\frac{ds}{s}$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$|A_{j,t}(f)(x)|^2 \leq 2\int_0^{\infty} |A_{j,s}(f)(x)||\tilde{A}_{j,s}(f)(x)|\frac{ds}{s}$$

Αν, στο αριστερό μέλος της τελευταίας σχέσης, θεωρήσουμε το supremum ως προς $t > 0$ και στη συνέχεια ολοκληρώσουμε πάνω από τον R^n, έχουμε:

$$\| \mathrm{M}_j(f) \|_{L^2}^2 \leq 2 \int_{R^n} \int_0^\infty |A_{j,s}(f)(x)||\tilde{A}_{j,s}(f)(x)| \frac{ds}{s} dx$$

δηλαδή έχουμε

$$\| \mathrm{M}_j(f) \|_{L^2}^2 \leq 2 \| G_j(f) \|_{L^2} \| \tilde{G}_j(f) \|_{L^2}$$

Γνωρίζουμε ότι $\| m_j \|_{L^\infty} \leq 2^{-j\frac{n-1}{2}}$ και $\| \tilde{m}_j \|_{L^\infty} \leq 2^{j(1-\frac{n-1}{2})}$ και επειδή ο φορέας των m_j και $\tilde{m}_j$ είναι το σύνολο $2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}$, ισχύει ότι οι g-συναρτήσεις G_j και $\tilde{G}_j$ είναι L^2 φραγμένες με νόρμες το πολύ κάποιο σταθερό πολλαπλάσιο των ποσοτήτων $2^{-j\frac{n-1}{2}}$ και $2^{j(1-\frac{n-1}{2})}$ αντιστοίχως (βασική άσκηση), με εκθέτες αρνητικούς (αφού $n \geq 3$). Προκύπτει, επομένως, το επιθυμητό αποτέλεσμα

$$\| \mathrm{M}_j(f) \|_{L^2} \leq C 2^{(\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2})j} \| f \|_{L^2}$$

για κάθε f στον χώρο του Schwartz.

Λόγω της πυκνότητας του χώρου του Schwartz σε κάθε χώρο L^p, η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $f \in \cup_{1<p<\infty} L^p$.

Λήμμα 3.2 *Υπάρχει σταθερά $C = C(n) < \infty$, τέτοια ώστε για κάθε $j \geq 1$ να ισχύει*

$$\| \mathrm{M}_j(f) \|_{L^{1,\infty}} \leq C 2^j \| f \|_{L^1}, \tag{18}$$

για κάθε $f \in L^1(R^n)$

Απόδειξη Έστω $K^{(j)} = (\varphi_j)^\vee * d\sigma = \Phi_{2^{-j}} * d\sigma$, όπου Φ είναι μια συνάρτηση Schwartz. Θεωρούμε

$$(K^{(j)})_t(x) = t^{-n} K^{(j)}(\frac{x}{t})$$

και έχουμε

$$M_j(f) = \sup_{t>0} |(K^{(j)})_t * f|.$$

Η απόδειξη βασίζεται στην ανισοτική σχέση

$$M_j(f) \leq C 2^j M(f) \tag{19}$$

και στο γεγονός ότι ο μεγιστικός τελεστής M είναι ασθενώς (1,1), δηλαδή απεικονίζει τον L^1 στον $L^{1,\infty}$. Για να αποδείξουμε τη σχέση (19), αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε N > 0, υπάρχει σταθερά $C_N < \infty$, τέτοια ώστε

$$|K^{(j)}(x)| = |(\Phi_{2^{-j}} * d\sigma)(x)| \leq \frac{C_N 2^j}{(1+|x|)^N}, \tag{20}$$

αφού (από γνωστό θεώρημα) ξέρουμε ότι: αν K(x) ακτινική, φθίνουσα και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον R^n, ισχύει

$$\sup_{\varepsilon>0}(|f| * K_\varepsilon)(x) \leq \| K \|_{L^1} M(f)(x),$$

για κάθε $f \in L^1_{loc}(R^n)$.

Αφού η Φ είναι συνάρτηση του Schwartz, έχουμε:

$$|(\Phi_{2^{-j}} * d\sigma)(x)| \leq C_N \int_{S^{n-1}} \frac{2^{nj} d\sigma(y)}{(1+2^j|x-y|)^N}$$

και χωρίζουμε το ολοκλήρωμα στις εξής περιοχές:

$$S_{-1} = S^{n-1} \cap \{y \in R^n : 2^j|x-y| \leq 1\}$$

και για $r \geq 0$

$$S_r = S^{n-1} \cap \{y \in R^n : 2^r < 2^j|x-y| \leq 2^{r+1}\}$$

Με δεδομένο ότι το μέτρο του συνόλου $S^{n-1} \cap B(x,R)$, όπου $B(x,R)$ η μπάλα κέντρου x και ακτίνας R στον R^n, είναι, το πολύ, ένα πολλαπλάσιο του R^{n-1}, έχουμε:

$$\begin{aligned}
|(\Phi_{2^{-j}} * d\sigma)(x)| &\leq \sum_{r=-1}^{j} \int_{S_r} \frac{C_N 2^{nj} d\sigma(y)}{(1+2^j|x-y|)^N} + \sum_{r=j+1}^{\infty} \int_{S_r} \frac{C_N 2^{nj} d\sigma(y)}{(1+2^j|x-y|)^N} \\
&\leq C_N' 2^{nj} \left[\sum_{r=-1}^{j} \frac{d\sigma(S_r)\chi_{\mathrm{B}(0,5)}}{2^{rN}} + \sum_{r=j+1}^{\infty} \frac{d\sigma(S_r)\chi_{\mathrm{B}(0,2^{r-j+2})}}{2^{rN}} \right] \\
&\leq C_N' 2^{nj} \left[\sum_{r=-1}^{j} \frac{c_n 2^{(r-j+1)(n-1)}\chi_{\mathrm{B}(0,5)}}{2^{rN}} + \sum_{r=j+1}^{\infty} \frac{c_n 2^{(r-j+1)(n-1)}\chi_{\mathrm{B}(0,2^{r-j+2})}}{2^{rN}} \right] \\
&\leq C_{N,n} \left[2^j \chi_{\mathrm{B}(0,5)} + 2^{(n-N)j} \sum_{s=1}^{\infty} 2^{(n-1-N)s} \chi_{\mathrm{B}(0,4\cdot 2^s)} \right] \\
&\leq C_{N,n}' \left[2^j \chi_{\mathrm{B}(0,5)} + \frac{1}{(1+|x|)^{N-n+1}} \right] \\
&\leq \frac{C_{N,n}'' 2^j}{(1+|x|)^{N-n+1}}.
\end{aligned}$$

Θεωρώντας αρκετά μεγάλο Ν, επαληθεύεται η σχέση (20).

Με τη βοήθεια των δύο τελευταίων λημμάτων, καταλήγουμε στην απόδειξη της σχέσης (16) (βασικό θεώρημα) ως εξής: από interpolation ανάμεσα στις απεικονίσεις $L^2 \to L^2$ και $L^1 \to L^{1,\infty}$ καταλήγουμε στη σχέση

$$\| \mathrm{M}_j(f) \|_{L^p(R^n)} \leq C_p 2^{(\frac{n}{p}-(n-1))j} \| f \|_{L^p(R^n)}$$

για κάθε $1 < p \leq 2$.

Όταν έχουμε $p > \frac{n}{n-1}$, η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{(\frac{n}{p}-(n-1))j}$ συγκλίνει, επομένως ο τελεστής M είναι L^p φραγμένος γι' αυτούς τους χώρους. Στην περίπτωση που ισχύει $p > 2$, το φράγμα του τελεστή προκύπτει από interpolation ανάμεσα σε κάποιον L^q για $q < 2$ και την τετριμμένη απεικόνιση $L^\infty \to L^\infty$.

4 Παράρτημα Β

Εδώ θα δώσουμε μια πιο αναλυτική απόδειξη του βασικού θεωρήματος, αφού η μέχρι τώρα παρουσίαση έχει κάποιο "αδύνατο" σημείο. Αυτό εστιάζεται στην απόδειξη του θεωρήματος 2.3, όταν χρησιμοποιήσαμε το φράγμα του μεγιστικού τελεστή στη μια διάσταση. Για να ξεπεράσουμε αυτή την αδυναμία, θα παρουσιάσουμε μια απόδειξη του αρχικού μας θεωρήματος με τη βοήθεια του σφαιρικού μεγιστικού τελεστή στη γενική περίπτωση του χώρου R^n. Το αποτέλεσμα που θα προκύψει θα είναι απόρροια των πέντε προτάσεων , που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια, αφού πρώτα ορίσουμε

Ορισμός Θεωρούμε τον σφαιρικό μεγιστικό τελεστή στον R^k, που δίνεται από τον τύπο:

$$M_k(f)(x) = sup_{\rho>0} \frac{1}{\omega_{k-1}} \int_{S^{k-1}} |f(x-\rho y')| d\sigma(y'),$$

όπου $d\sigma$ είναι το μέτρο στη μοναδιαία σφαίρα S^{k-1} στον R^k και ω_{k-1} το συνολικό της μέτρο.

4.1 Πέντε χρήσιμες προτάσεις

Πρόταση 4.1 *Έστω $k \geq 3$ και $p > k/(k-1)$. Υπάρχει σταθερά $A_{k,p}$, που εξαρτάται από τα k και p, τέτοια ώστε:*

$$\| M_k(f) \|_p \leq A_{k,p} \| f \|_p$$

Απόδειξη Η απόδειξη περιλαμβάνεται στο σχετικό θεώρημα.

Ορισμός Ορίζουμε τη μεγιστική συνάρτηση στον R^k με βαρύτητα m ως εξής (για $m \geq 0$):

$$M_{k,m}(f)(x) = sup_{r>0} \frac{\int_{|y|\leq r} |f(x-y)||y|^m dy}{\int_{|y|\leq r} |y|^m dy}$$

$$= sup_{r>0} \frac{m+k}{\omega_{k-1} r^{m+k}} \int_{|y|\leq r} |f(x-y)||y|^m dy$$

Πρόταση 4.2 *Για κάθε $k \geq 1$ και $m \geq 0$ ισχύει η ανισοτική σχέση:*

$$M_{k,m}(f)(x) \leq M_k(f)(x)$$

Απόδειξη Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, έχουμε:

$$\int_{|y|\leq r} |f(x-y)||y|^m dy = \int_{S^{k-1}} \int_0^r |f(x-\rho y')|\rho^{m+k-1} d\rho d\sigma(y')$$

$$\leq M_k(f)(x)\omega_{k-1} \int_0^r \rho^{m+k-1} d\rho = M_k(f)(x)\omega_{k-1} \frac{r^{m+k}}{m+k},$$

απ' όπου προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

Πρόταση 4.3 *Έστω $k \geq 3$ και $k > p/(p-1)$. Υπάρχει σταθερά $A_{k,p}$, που εξαρτάται από τα k και p, αλλά όχι από το m, τέτοια ώστε:*

$$\| M_{k,m}(f) \|_p \leq A_{k,p} \| f \|_p$$

Απόδειξη Η απόδειξη της πρότασης αυτής προκύπτει άμεσα από τις δύο προηγούμενες προτάσεις.

Για την επόμενη πρόταση θεωρούμε τον R^n για $n \geq 3$ και τον γράφουμε στην μορφή $R^n = R^k \times R^{n-k}$. Μ' αυτό τον τρόπο, κάθε $x \in R^n$ το συμβολίζουμε ως $x = (x_1, x_2)$, με $x_1 \in R^k$ και $x_2 \in R^{n-k}$ και αντιστοίχως $y = (y_1, y_2) \in R^n$, με $y_1 \in R^k$ και $y_2 \in R^{n-k}$. Θεωρούμε τ ένα οποιοδήποτε στοιχείο της ομάδας $O(n)$, δηλαδή μια στροφή γύρω από την αρχή των αξόνων στον R^n.

Ορισμός Για κάθε τέτοιο τ ορίζουμε τον τελεστή M_k^τ ως εξής:

$$(M_k^\tau f)(x) = sup_{r>0} \frac{\int_{|y_1|\leq r} |f(x-\tau(y_1,0)||y_1|^m dy_1}{\int_{|y_1|\leq r} |y_1|^m dy_1},$$

όπου $m = n-k$.

Πρόταση 4.4 *Έστω $k \geq 3$ και $k > p/(p-1)$. Υπάρχει σταθερά $A_{k,p}$, που εξαρτάται από τα k και p, τέτοια ώστε:*

$$\| M_k^\tau(f) \|_p \leq A_{k,p} \| f \|_p$$

Απόδειξη Επειδή η νόρμα του τελεστή δεν εξαρτάται από τη στροφή, αρκεί να δείξουμε τον παραπάνω τύπο θεωρώντας τ την ταυτοτική στροφή. Όπως προείπαμε, αναλύουμε τον R^n σε $R^n = R^k \times R^{n-k}$, με $x = (x_1, x_2)$. Για κάθε σταθερό $x_2 \in R^{n-\kappa}$, εφαρμόζουμε την πρόταση 3 και, στη συνέχεια, ολοκληρώνοντας ως προς x_2 παίρνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Ορισμός Για την τελευταία πρόταση, ορίζουμε $d\tau$ το μέτρο Haar στην ομάδα $O(n)$, κανονικοποιημένο, ωστε $\tau(O(n)) = 1$, και αποδεικνύουμε το επόμενο λήμμα:

Λήμμα 4.1 *Έστω μη αρνητική, μετρήσιμη συνάρτηση f στον R^n. Ισχύει:*

$$\frac{\int_{|y|<r} f(y)dy}{\int_{|y|\leq r} dy} = \frac{\int_{O(n)} \int_{|y_1|<r} f(\tau(y_1,0))|y_1|^{n-k} dy_1 d\tau}{\int_{|y_1|<r} |y_1|^{n-k} dy_1}, \qquad (21)$$

όπου $y = (y_1, y_2) \in R^n = R^k \times R^{n-k}$ με $y_1 \in R^k$

Απόδειξη Για να αποδείξουμε τη σχέση (21) αρκεί να θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση f είναι της μορφής $f(y) = f_0(|y|)f_1(y')$, όπου $y' \in S^{n-1}$ και $y = |y|y'$, αφού οι γραμμικοί συνδυασμοί τέτοιων συναρτήσεων είναι πυκνοί.
Σ' αυτή την περίπτωση, το αριστερό μέλος της σχέσης (21) γράφεται

$$\int_0^r f_0(t)t^{n-1}dt \cdot \int f_0(y')d\sigma(y') \cdot nr^{-n} \cdot \omega_{n-1}^{-1}$$

Για το δεξί μέλος, δεδομένου ότι $y_1 = |y_1|y_1'$, όπου $y_1' \in S^{k-1}$, τότε $f(\tau(y_1,0)) = f_0(|y_1|)f_1(\tau(y_1',0))$ και το πηλίκο γράφεται

$$\int_0^r f_0(t)t^{n-1}dt \cdot \int_{O(n)} \int_{S^{k-1}} f(\tau(y_1',0))d\sigma(y_1')d\tau \cdot nr^{-n} \cdot \omega_{n-1}^{-1}$$

Επομένως, το μόνο που μένει να δείξουμε είναι

$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{S^{n-1}} f_0(y')d\sigma(y') = \frac{1}{\omega_{k-1}}\int_{O(n)}\int_{S^{k-1}} f_0(\tau(y_1',0))d\sigma(y_1')d\tau \quad (22)$$

Πράγματι, η παραπάνω σχέση είναι αληθής, αφού: το $d\sigma(y')$ είναι πολλαπλάσιο του μοναδιαίου μέτρου στο S^{n-1}, το οποίο είναι ανεξάρτητο των στροφών, και το δεξί μέλος της σχέσης (22) ομοίως αποτελεί μέτρο του S^{n-1} ανεξάρτητο των στροφών. Επιπλέον, και τα δύο μέλη είναι κανονικοποιημένα, ώστε να συμφωνούν στις σταθερές.

Άμεση συνέπεια του παραπάνω λήμματος αποτελεί η πέμπτη πρόταση, δηλαδή:

Πρόταση 4.5 *Αν f μετρήσιμη, ισχύει:*

$$sup_{r>0}\frac{1}{m(B^r)}\int_{B^r}|f(x-y)|dy \leq \int_{O(n)} M_k^\tau(f)(x)d\tau$$

Απόδειξη Βάσει του λήμματος, αν θέσουμε όπου $f(y)$ το $|f(x-y)|$, έχουμε:

$$\frac{1}{m(B^r)}\int_{B^r}|f(x-y)|dy = \frac{\int_{O(n)}\int_{|y_1|\leq r} f(x-\tau(y_1,0))|y_1|^{n-k}dy_1 d\tau}{\int_{|y_1|\leq r}|y_1|^{n-k}dy_1}$$

δηλαδή ισχύει

$$\frac{1}{m(B^r)}\int_{B^r}|f(x-y)|dy \leq \int_{O(n)} M_k^\tau(f)(x)d\tau$$

με $m = n - k$.

Με τη βοήθεια των παραπάνω προτάσεων, είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το αρχικό θεώρημα:
θεωρούμε σταθερό p με $1 < p \leq \infty$.

α' περίπτωση: Έστω $n \leq \frac{p}{p-1}$ ή $n \leq 2$.
Τότε χρησιμοποιούμε τις συνήθεις εκτιμήσεις, για να καταλήξουμε στον τύπο (1).

β' περίπτωση: Έστω $n > \frac{p}{p-1}$ και $n \geq 3$. Τότε γράφουμε τη διάσταση

n ως $n = k + m$, όπου k είναι ο μικρότερος ακέραιος, που είναι μεγαλύτερος από $\frac{p}{p-1}$ και 2. Με αυτόν τον τρόπο, η σχέση (1) προκύπτει ως πόρισμα των προτάσεων 4 και 5.

Βιβλιογραφία

E.M.Stein and J.O.Stromberg: 'Behavior of maximal functions in R^n for large n' (1983) Ark. f. Mat.21: 259-269

E.M.Stein: 'Harmonic Analysis' (Princeton 1993)

Loukas Grafakos: 'Classical and Modern Fourier Analysis' (University of Missouri 2004)